МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Линейная алгебра с элементами геометрии

Оглавление

Глава 1. Матрицы **6**
1. Матрицы 6
2. Сложение матриц и умножение матриц на числа 12
3. Умножение матриц 16
4. Свойства произведения матриц 23
5. Обратная матрица 25
6. Транспонированная матрица 27

Глава 2. Определители **30**
1. Определитель второго порядка 30
2. Определитель третьего порядка 38
3. Свойства определителей третьего и n–го порядков 50
4. Алгебраические дополнения и дополнительные миноры 52
5. Важные теоремы об определителях третьего порядка 62
6. Обратная матрица 67
7. Необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов 69

Глава 3. Линейные пространства **73**
1. Аксиомы линейного пространства 73
2. Линейная комбинация. Линейная зависимость 76
3. Теорема о базисном миноре 78
4. Линейные оболочки и подпространства линейного пространства 82
5. Теорема о двух системах векторов одного линейного пространства 83
6. Размерность и базис линейного пространства 85
7. Ранг системы векторов 88
8. Ранг матрицы 89
9. Геометрия подпространств. Прямая сумма подпространств 90
10. Изоморфизм линейных пространств 94
11. Примеры решения задач 97

Глава 4. Взаимный базис векторов и его применения **109**
1. Определение взаимного базиса 109

2. Применения взаимного базиса 113

Глава 5. Системы линейных уравнений 119

1. Основные теоремы 119
2. Фундаментальное Семейство Решений 125
3. Примеры решения задач 133

Глава 6. Приложения теоремы Кронекера–Капелли 141

1. Теорема Кронекера–Капелли 141
2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости 141
3. Взаимное расположение трех прямых на плоскости 142
4. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве 147
5. Взаимное расположение тр¨ех плоскостей в пространстве 149
6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве 158

Глава 7. Линейные формы 162

1. Линейные формы и линейные функционалы 162
2. Сопряженное линейное пространство 166
3. Дважды сопряженное пространство* 170
4. Линейные формы над P^n 173

Глава 8. Линейные операторы 176

1. Преобразование базисов и координат 176
2. Линейные операторы 182
3. Матрица линейного оператора 186
4. Линейное пространство линейных операторов 189
5. Алгебры операторов и матриц 195
6. Транспонированный оператор 198
7. Дважды транспонированный оператор* 199
8. Теорема об обратном операторе 200
9. Инвариантные подпространства линейного оператора 203
10. Собственные векторы 206
11. Комплексификация* 211
12. Собственные векторы. Продолжение 214
13. Примеры решения задач 223

Глава 9. Билинейные и квадратичные формы 236

1. Матрица билинейной формы 236
2. Линейное пространство билинейных форм 239
3. Квадратичные формы 244
4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа 246
5. Закон инерции квадратичных форм 250
6. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра 252
7. Примеры решения задач 257

Глава 10. Евклидовы и унитарные пространства 261
1. Евклидово пространство 261
2. Длины и углы в евклидовом пространстве 265
3. Унитарные пространства 266
4. Ортогональность 269
5. Метод ортогонализации Грама–Шмидта 273
6. Ортогональные проекторы 277
7. Матрица перехода между ортонормированными базисами 279
8. Примеры решений задач 280

Глава 11. Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах 291
1. Сопряженный оператор 291
2. Примеры сопряженных операторов 295
3. Матрица сопряженного оператора 296
4. Самосопряженный оператор 299
5. Теоремы Фредгольма в абстрактной форме 304
6. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора 307
7. Спектральное разложение самосопряженного оператора 311
8. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием 313
9. О паре квадратичных форм 314
10. Примеры решения задач 316

Глава 12. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду 333
1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости 333
2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах 338
3. Уравнения кривой второго порядка на плоскости 340
4. Ортогональные преобразования уравнения кривой второго порядка 341
5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α 343
6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$ 345
7. Уравнения эллиптического типа 346
8. Уравнения гиперболического типа 347
9. Уравнения параболического типа 347

Глава 13. Поверхности второго порядка и их классификация 352
1. Преобразование координат в пространстве 352

2. Различные формы записи уравнения поверхности второго порядка 354
3. Ортогональные инварианты 356
4. Первая группа: центральные поверхности 359
5. Вторая группа: параболоиды 368
6. Третья группа: эллиптические и гиперболические цилиндры 371
7. Четвертая группа: параболический цилиндр 376
8. Пятая группа: вырожденные параболические цилиндры 377
9. Линейчатые поверхности 379
10. Примеры решения задач 382

Глава 14. Тензоры **384**
1. Правило умножения «строчка на столбец» 384
2. Первое определение тензора: «мистическое» 391
3. Второе определение тензора: полилинейная форма 397
4. Метрический тензор 404
5. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с нижними индексами 411
6. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с верхними и нижними индексами 421
7. Формула для векторного произведения векторов 423
8. Пример ортогонального тензора — тензор инерции 427
9. Примеры решения задач 429

Глава 15. Жорданова форма матрицы линейного оператора **432**
1. Корневые векторы 432
2. Нильпотентные операторы 441
3. Жорданова форма 449
4. Жорданова лестница 452
5. Примеры решения задач 453

ГЛАВА 1

Матрицы

1. Матрицы

На этой лекции мы введём основное для всего расширенного курса линейной алгебры понятие матрицы. Необходимость введения понятия матрицы обусловлена, например, компактностью записи линейных уравнений. Так система трех уравнений относительно трех неизвестных

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1.1}$$

может быть записана в следующей матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Для того чтобы найти решение системы уравнений (1.1) нужно рассмотреть так называемую расширенную матрицу системы (1.1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right). \tag{1.3}$$

Дадим определение матрицы размера $m \times n$.

1.1. Определение. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, на пересечении которых располагаются *ячейки* матрицы. Ячейки матрицы заполняются элементами матрицы.

Для обозначения матриц используется различные варианты. Рассмотрим все основные из них.

1.2. Обозначение 1. Матрица $A = (a_k^j)_n^m$. В этом обозначении верхний индекс j указывает на номер строчки, где располагается элемент a_k^j, а нижний индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a_k^j:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & k & & & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
j & * & * & a_k^j & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array} \tag{1.4}$$

1.3. Обозначение 2. Матрица $A = (a_{jk})_{m,n}$. Здесь первый индекс j указывает на номер строчки матрицы, где расположен элемент a_{jk}, а второй индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a_{jk} :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & k & & & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
j & * & * & a_{jk} & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array} \tag{1.5}$$

1.4. Обозначение 3 Матрица $A = (a^{jk})^{m,n}$. Здесь первый индекс j указывает на номер строчки матрицы, где расположен элемент a^{jk}, а второй индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a_{jk} :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & k & & & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
j & * & * & a^{jk} & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array} \tag{1.6}$$

1.5. Обозначение 4. *Развернутая форма записи.* Матрицу A можно записать в развернутой форме тремя способами — либо с одним нижним и одним верхним либо с двумя нижними индексами либо с двумя верхними индексами:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & \cdots & a_k^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

$$\begin{pmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1k} & \cdots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{j1} & \cdots & a^{jk} & \cdots & a^{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{m1} & \cdots & a^{mk} & \cdots & a^{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Особую роль играют матрицы размеров $m \times 1$ и $1 \times n$. Дадим определение.

1.6. Определение. Матрицы размера $m \times 1$ называются столбцами длины m, а матрицы размера $1 \times n$ называются строчками длины n.

1.7. Обозначение 5. Для матриц–столбцов и матриц–строчек используются следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_n). \tag{1.9}$$

Отметим, что удобно (и важно!) использовать верхний индекс для нумерации элементов столбца и нижний индекс для нумерации элементов строчки. В связи с тем, что мы ввели матрицу–столбец и матрицу–строчку, то для матрицы $A = (a^j_k)^m_n$ используются еще две важные формы записи матриц.

1.8. Обозначение 6. Запись матрицы через столбцы. Эта форма записи имеет следующий вид:

$$A = \| \, A_1, \, \cdots, \, A_k, \, \cdots, \, A_n \, \| \,, \tag{1.10}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ \vdots \\ a^j_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a^1_k \\ \vdots \\ a^j_k \\ \vdots \\ a^m_k \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a^1_n \\ \vdots \\ a^j_n \\ \vdots \\ a^m_n \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

1.9. Обозначение 5. Запись матрицы через строчки. Эта форма записи матрицы имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad A^j = (a^j_1, \cdots, a^j_k, \cdots, a^j_n), \quad j = \overline{1, m}. \tag{1.12}$$

1.10. Примеры. Обсудим теперь вопрос: *какие элементы могут заполнять ячейки матрицы*? Ответ — *абсолютно любые.* Чаще всего элементами матрицы являются вещественные или комплексные числа. Например, в квантовой механике в теории *спина электрона* широко используются так называемые матрицы В. Паули, имеющие следующий вид:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Однако возможны и «экзотические» ситуации, когда элементами матрицы могут быть не только числа но и *операторы*, например, оператор дифференцирования:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & d/dx \\ d/dx & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где id — это так называемый единичный оператор, который действует на функцию $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mathrm{id}\, f(x) = f(x),$$

а оператор d/dx — это оператор, который действует на дифференцируемую функцию $f(x)$ следующим образом:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Теперь мы рассмотрим еще один способ записи матриц.

1.11. Обозначение 6. Запись матрицы через блоки — блочные матрицы. Один из примеров блочной записи матриц:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \hline a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\|,$$

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = (a_1^3, a_2^3), \quad A_2^2 = a_3^3.$$

1.12. Примеры. Отметим, что известный физик П. А. М. Дирак при рассмотрении релятивистской теории электрона ввёл следующие блочные 4×4 матрицы:

$$\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O \\ \hline O & -\sigma_0 \end{array} \right\|, \quad \gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O \end{array} \right\|, \tag{1.16}$$

$$\gamma_2 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O \end{array} \right\|, \quad \gamma_3 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_3 \\ \hline -\sigma_3 & O \end{array} \right\|, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

где матрицы В. Паули σ_0, σ_1, σ_2 и σ_3 размера 2×2 определены равенствами (1.13) и (1.14). Таким образом, в развернутой форме записи 4×4 матрицы γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 имеют следующий вид:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

где мы использовали правило умножения матрицы на число для нахождения 2×2 матриц $-\sigma_0$, $-\sigma_1$, $-\sigma_2$ и $-\sigma_3$, которое мы детально обсудим в следующем разделе.

Рассмотрим теперь матрицы частного вида, широко использующиеся в дальнейшем.

1.13. Пример. Квадратная матрица. Эта матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, т. е. матрица имеет следующий вид $A = (a^j_k)^n_n$ или в развернутой форме записи

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}.$$

Элементы $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ образуют главную диагональ квадратной матрицы A.

1.14. Пример. Нулевая матрица. Это матрица A (размера $m \times n$), все ячейки которой заполнены числом нуль. Например, такая матрица размера 3×5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является нулевой.

1.15. Пример. Диагональная матрица. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю. Например, матрица П. А. М. Дирака γ_0

является диагональной

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что диагональной матрицей является и нулевая матрица. Например, такая матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.16. Пример. След квадратной матрицы. Пусть задана квадратная матрица $A = (a^j_k)^n_n$. Тогда ее следом называется следующая величина:

$$\operatorname{tr} A = a^1_1 + a^2_2 + \cdots + a^n_n, \tag{1.20}$$

т.е. след квадратной матрицы — это сумма слагаемых, расположенных на главной диагонали матрицы. Заметим, что все 4×4 матрицы П. А. М. Дирака γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 обладают важным свойством — их следы равны нулю! Матрицы 2×2 В. Паули σ_1, σ_2 и σ_3 тоже имеют нулевой след, а вот матрица В. Паули σ_0 имеет след, равный двум.

2. Сложение матриц и умножение матриц на числа

1.17. Операция извлечения элемента из матрицы — фигурные скобки. Пусть $A = (a^j_k)^m_n$ — матрица размера $m \times n$, заполненная элементами a^j_k при $j \in \overline{1,m}$, $k \in \overline{1,n}$. Будем использовать следующую операцию:

$$\{A\}^j_k = a^j_k. \tag{1.21}$$

Аналогичным образом для матриц $B = (b_{jk})_{m,n}$ и $C = (c^{jk})^{m,n}$ Будем использовать такую же операцию

$$\{B\}^j_k = b_{jk}, \quad \{C\}^j_k = c^{jk}. \tag{1.22}$$

Фигурные скобки в этих определениях означают операцию «извлечения элемента из матрицы», расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

1.18. Пример. Рассмотрим следующие три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} c^{11} & c^{12} \\ c^{21} & c^{22} \end{pmatrix}. \qquad (1.23)$$

Тогда, например, имеем

$$\{A\}_2^1 = a_2^1, \quad \{B\}_2^2 = b_{22}, \quad \{C\}_1^1 = c^{11}.$$

В дальнейшем мы будем использовать обозначение для матриц с одним верхним и одним нижним индексами: $A = (a_k^j)_n^m$. Отметим, что при рассмотрении тензоров у нас будут встречаться матрицы и с двумя нижними и с двумя верхними индексами.

Дадим определение равных матриц.

1.19. Определение. Две матрицы $A = (a_k^j)_n^m$ и $B = (b_k^j)_n^m$ называются равными, если $a_k^j = b_k^j$ для $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$. Отметим, что матрицы A и B, одинакового размера $m \times n$, равны, тогда и только тогда, когда $\{A\}_k^j = \{B\}_k^j$ для $j = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,n}$.

Дадим определение операции умножения матрицы на число. Предположим, что рассматриваемые матрицы заполнены *вещественными или комплексными* числами.

1.20. Определение. Произведением вещественного или комплексного числа α на матрицу $A = \{a_k^j\}_n^m$ называется матрица того же размера $B = \{b_k^j\}_n^m$, элементы которой равны $b_k^j = \alpha a_k^j$.

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \cdots & \alpha a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_1^m & \cdots & \alpha a_n^m \end{pmatrix}.$$

1.21. Определение. Суммой двух матриц одного и того же размера $A = (a_k^j)_n^m$ и $B = (b_k^j)_n^m$ называется матрица того же размера $C = (c_k^j)_n^m$, элементы которой равны $c_k^j = a_k^j + b_k^j$.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1^1 + b_1^1 & \cdots & a_n^1 + b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m + b_1^m & \cdots & a_n^m + b_n^m \end{pmatrix}.$$

1.22. С учетом обозначения (1.21) операции умножения матрицы на число и сложения матриц одинакового размера можно записать в следующих формах:

$$\{\alpha A\}_k^j := \alpha \{A\}_k^j, \quad \{A + B\}_k^j := \{A\}_k^j + \{B\}_k^j, \quad j = \overline{1,m}, \ k = \overline{1,n}. \qquad (1.24)$$

Сложение матриц одного размера и умножение матриц на числа (вещественные или комплексные) обладают набором из восьми свойств, которые мы сейчас последовательно сформулируем и докажем. Все матрицы размера $m \times n$, состоящие из вещественных чисел мы будем для удобства обозначать как $\mathbb{R}^{m\times n}$, а состоящие из комплексных чисел будем обозначать как $\mathbb{C}^{m\times n}$. Заметим, что имеет место теоретико–множественное вложение $\mathbb{R}^{m\times n} \subset \mathbb{C}^{m\times n}$.

Пусть $A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — фиксированные матрицы, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — фиксированные комплексные числа, где либо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ либо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.23. Свойство 1. Коммутативность сложения матриц. Это свойство означает, что $A + B = B + A$.

☐ Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\{A+B\}^j_k = \{A\}^j_k + \{B\}^j_k = \{B\}^j_k + \{A\}^j_k = \{B+A\}^j_k. \tag{1.25}$$

Здесь мы воспользовались коммутативностью сложения комплексных чисел. ☒

1.24. Свойство 2. Ассоциативность сложения матриц. Это свойство означает, что $(A + B) + C = A + (B + C)$.

☐ Действительно, справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}\{(A+B)+C\}^j_k = \{A+B\}^j_k + \{C\}^j_k = (\{A\}^j_k + \{B\}^j_k) + \{C\}^j_k = \\ = \{A\}^j_k + (\{B\}^j_k + \{C\}^j_k) = \{A\}^j_k + \{B+C\}^j_k = \\ = \{A+(B+C)\}^j_k.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь мы воспользовались ассоциативностью сложения комплексных чисел. ☒

1.25. Свойство 3. Существование нулевой матрицы. Существует такая матрица, которая обозначается как $O \in \mathbb{K}^{m\times n}$, что $A+O = A$.

☐ Пусть O — это нулевая матрица размера $m \times n$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\{A+O\}^j_k = \{A\}^j_k + \{O\}^j_k = \{A\}^j_k + 0 = \{A\}^j_k. \quad ☒ \tag{1.27}$$

1.26. Свойство 4. Существование обратной матрицы по отношению к операции сложения матриц. Свойство означает, что для всякой матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ определена такая матрица $A' \in \mathbb{K}^{m\times n}$, что $A + A' = O$, где O — нулевая матрица размера $m \times n$.

☐ Действительно, для заданной матрицы $A = (a^j_k)^m_n \in \mathbb{C}^{m\times n}$ в качестве матрицы $A' \in \mathbb{C}^{m\times n}$ возьмём такую матрицу, что

$$\{A'\}^j_k := -\{A\}^j_k \Rightarrow \{A+A'\}^j_k = \{A\}^j_k + \{A'\}^j_k = \{A\}^j_k - \{A\}^j_k = 0. \quad ☒ \tag{1.28}$$

1.27. Свойство 5. Число $1 \in \mathbb{K}$**.** Свойство заключается в том, что $1 \cdot A = A$.

$\square$ Действительно, справедливы равенства

$$\{1A\}_k^j = 1\{A\}_k^j = \{A\}_k^j. \quad \boxtimes \tag{1.29}$$

1.28. Свойство 6. Ассоциативность умножения на числа. Свойство заключается в том, что $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

$\square$ Действительно, справедливы равенства

$$\{\alpha(\beta A)\}_k^j = \alpha\{\beta A\}_k^j = \alpha(\beta\{A\}_k^j) = (\alpha\beta)\{A\}_k^j = \{(\alpha\beta)A\}_k^j. \tag{1.30}$$

Здесь мы воспользовались ассоциативностью умножения чисел из $\mathbb{K}$. $\boxtimes$

1.29. Свойство 7. Дистрибутивность относительно сложения матриц. Свойство означает, что $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \{\alpha(A+B)\}_k^j = \alpha\{A+B\}_k^j = \alpha\left(\{A\}_k^j + \{B\}_k^j\right) = \\ = \alpha\{A\}_k^j + \alpha\{B\}_k^j = \{\alpha A\}_k^j + \{\alpha B\}_k^j = \{\alpha A + \alpha B\}_k^j. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью чисел из $\mathbb{K}$ относительно сложения. $\boxtimes$

1.30. Свойство 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Свойство означает, что $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \{(\alpha+\beta)A\}_k^j = (\alpha+\beta)\{A\}_k^j = \alpha\{A\}_k^j + \beta\{A\}_k^j = \\ = \{\alpha A\}_k^j + \{\beta A\}_k^j = \{\alpha A + \beta A\}_k^j. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью чисел из $\mathbb{K}$ относительно сложения. $\boxtimes$

В дальнейшем будет введено понятие абстрактного *линейного пространства*, в котором определены две операции — сложения элементов и умножения элемента на число (вещественное или комплексное), которые должны удовлетворять этим восьми свойствам. В связи с этим понятием мы будем называть операции сложения матриц и умножения матриц на числа (вещественные или комплексные) *линейными операциями*.

Заметим, что следствием рассмотренных свойств операций над матрицами являются некоторые несложные утверждения, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

1.31. Свойство 9. Из равенства $A + B = A$ вытекает, что $B = O$ — нулевая матрица.

$\square$ Действительно, имеем

$$\{A\}_k^j = \{A + B\}_k^j = \{A\}_k^j + \{B\}_k^j \Leftrightarrow \{B\}_k^j = 0. \quad \boxtimes$$

1.32. Свойство 10. Обратная матрица A' единственна.

$\square$ Действительно, пусть существуют две матрицы $B_1, B_2 \in \mathbb{K}^{m\times n}$ такие, что

$$\begin{aligned} A + B_1 = A + B_2 = O \Rightarrow B_1 = B_1 + O = B_1 + (A + B_2) = \\ = (B_1 + A) + B_2 = (A + B_1) + B_2 = O + B_2 = B_2. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.33. Свойство 11. $nA = A + A + \cdots + A$.

$\square$ Доказательство проведем по индукции. Действительно, в силу свойств 5 и 8 справедливо равенство

$$2A = (1 + 1)A = 1A + 1A = A + A.$$

Пусть $n \geqslant 3$ и для $n-1$ утверждение доказано. Тогда в силу свойств 5 и 8 справедливо следующее равенство:

$$nA = (n-1+1)A = (n-1)A+1A = (n-1)A+A = A+A+\cdots+A. \quad \boxtimes$$

1.34. Свойство 12. Обратная относительно операции сложения матрица $A' = (-1)A$.

$\square$ Действительно, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \{A + (-1)A\}_k^j = \{A\}_k^j + \{(-1)A\}_k^j = \\ = \{A\}_k^j + (-1)\{A\}_k^j = \{A\}_k^j - \{A\}_k^j = 0 \Rightarrow A' = (-1)A. \end{aligned} \tag{1.34}$$

В силу единственности (см. свойство 10) обратной матрицы A' относительно операции сложения матриц приходим к утверждению. $\boxtimes$

3. Умножение матриц

Зачем нам нужно умножать матрицы? Прежде всего для того, чтобы записать произвольную линейную систему уравнений в виде произведения матриц. Например, система трех уравнений (1.1) записана при помощи умножения матриц в виде (1.2).

1.35. Правило умножения «строчка на столбец». Умножение матриц основано на правиле умножения «строчка на столбец».

Именно,

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} := a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n.$$

Сразу же отметим, что мы можем умножить строчку на столбец <u>только одинаковых длин!</u>

Теперь сформулируем общее определение умножения матриц. Пусть матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$.

1.36. Определение. Произведением матрицы A размера $m \times p$ на матрицу B размера $p \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, имеющая следующий вид:

$$C = (c_k^j)_n^m \in \mathbb{C}^{m\times n}, \quad c_k^j = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s. \tag{1.35}$$

1.37. Наблюдение 1. Давайте раскроем знак суммы в формуле (1.35) и получим следующее равенство:

$$c_k^j = a_1^j b_k^1 + a_2^j b_k^2 + \cdots + a_p^j b_k^p = (a_1^j, a_2^j, \cdots, a_p^j) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix},$$

где мы воспользовались правилом умножения «строчка на столбец». Заметим, чтобы получить элемент c_k^j, расположенный на пересечении j–й строчки и k–го столбца нужно умножить j–ю строчку матрицы A на k–й столбец матрицы B :

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_k^1 & \cdots & c_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^j & \cdots & \boxed{c_k^j} & \cdots & c_n^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^m & \cdots & c_k^m & \cdots & c_n^m \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_s^1 & \cdots & a_p^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & \cdots & a_s^j & \cdots & a_p^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_p^m & \cdots & a_p^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_k^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^s & \cdots & b_k^s & \cdots & b_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^p & \cdots & b_k^p & \cdots & b_n^p \end{pmatrix}.$$

1.38. Наблюдение 2. Умножить матрицу A на матрицу B можно тогда и только тогда, когда длина строчек матрицы A совпадает с длиной столбцов матрицы B или, что равносильно, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

1.39. Примеры. Вычислим следующие произведения матриц:

$$(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1{\cdot}1{+}1{\cdot}1{+}1{\cdot}1 = 3, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как мы видим результат произведения двух матриц (при условии, что их можно перемножить как в одном порядке, так и в противоположном) существенно зависит от порядка произведения матриц.

1.40. Коммутатор матриц. Пусть нам заданы две квадратные матрицы одинакового размера $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Дадим определение.

1.41. Определение. Коммутатором квадратных матриц $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ называется матрица из $\mathbb{K}^{n\times n}$, имеющая следующий вид:

$$[A, B] := A \cdot B - B \cdot A. \tag{1.36}$$

Если коммутатор $[A, B] = O$ — нулевая матрица размера $n \times n$, то матрицы A и B называются коммутирующими. Антикоммутатором матриц A и B называется следующая величина:

$$[A, B]_+ := A \cdot B + B \cdot A. \tag{1.37}$$

1.42. Наблюдение. Очевидно, что две равные квадратные матрицы коммутируют. Кроме того, справедливо следующее равенство $[A, B] = -[B, A]$.

1.43. Примеры. Коммутаторы матриц В. Паули. Докажем, что справедливы следующие три равенства:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2. \tag{1.38}$$

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3, \quad (1.39)$$

$$\sigma_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_3. \quad (1.40)$$

Итак, из равенств (1.39) и (1.40) вытекает первое равенство из формулы (1.38). Аналогичным образом доказываются оставшиеся равенства из формулы (1.38).

1.44. Произведение блочных матриц. Выпишем матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ в следующих блочных формах:

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad B = \left\| B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n \right\|, \quad (1.41)$$

$$A^j = (a^j_1, \cdots, a^j_p), \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.42)$$

Отметим, что поскольку длина каждой строчки A^j матрицы A равна p, а длина каждого столбца B_k матрицы B тоже равна p, то поэтому для любых $j = \overline{1, m}$ и $k = \overline{1, n}$ определено произведение

$$A^j \cdot B_k = (a^j_1, \cdots, a^j_p) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{p} a^j_s b^s_k \in \mathbb{K}.$$

Отметим, что матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ как блочная матрица имеет размер $m\times 1$, а матрица $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ как блочная матрица имеет размер $1\times n$. Поэтому согласно правилу «строчка на столбец» можно умножить блочную матрицу A на матрицу B и их произведение AB будет состоять из $m \times n$ блоков вида $A^j B_k$, причем по доказанному блок $A^j B_k$ — это матрица размера 1×1:

$$A \cdot B = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\| \|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\| =$$

$$= \begin{pmatrix} A^1 \cdot B_1 & \cdots & A^1 \cdot B_k & \cdots & A^1 \cdot B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^j \cdot B_1 & \cdots & A^j \cdot B_k & \cdots & A^j \cdot B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^m \cdot B_1 & \cdots & A^m \cdot B_k & \cdots & A^m \cdot B_n \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

Из этого представления вытекают важные наблюдения.

1.45. Наблюдения. Запишем произведение матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ в двух блочных видах через столбцы и через строчки

$$C = A \cdot B = \|C_1, \cdots, C_k, \cdots C_n\|, \quad C = A \cdot B = \left\| \begin{matrix} C^1 \\ \vdots \\ C^j \\ \vdots \\ C^m \end{matrix} \right\|. \quad (1.44)$$

Из сравнения равенств (1.43) и (1.44) приходим к следующим формулам:

$$C_k = \begin{pmatrix} A^1 \cdot B_k \\ \vdots \\ A^j \cdot B_k \\ \vdots \\ A^m \cdot B_k \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\| \cdot B_k = A \cdot B_k, \quad (1.45)$$

где мы опять воспользовались правилом умножения «строчка на столбец», поскольку блочная матрица A имеет размер $m \times 1$ а блочная матрица B_k имеет размер (как блочной матрицы) 1×1. Кроме того, произведение $A^j B_k$ определено и представляет собой число из $\mathbb{C}$. Аналогичным образом можно доказать справедливость следующих равенств:

$$C^j = \left(A^j \cdot B_1, \cdots, A^j \cdot B_k, \cdots, A^j \cdot B_n\right) =$$
$$= A^j \cdot \|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\| = A^j \cdot B. \quad (1.46)$$

1.46. Произведение блочных матриц более сложного вида. Теперь мы приступим к рассмотрению произведения блочных матриц более сложного вида. Действительно, рассмотрим следующие две блочные матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$, составленные из блоков следующим образом:

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^1 & B_2^1 \\ \hline B_1^2 & B_2^2 \end{array} \right\|, \tag{1.47}$$

блоки которых являются матрицами следующих размеров:

$$A_1^1 \in \mathbb{K}^{m_1\times p_1}, \quad A_2^1 \in \mathbb{K}^{m_1\times p_2}, \quad A_1^2 \in \mathbb{K}^{m_2\times p_1}, \quad A_2^2 \in \mathbb{K}^{m_2\times p_2}, \tag{1.48}$$

$$B_1^1 \in \mathbb{K}^{p_1\times n_1}, \quad B_2^1 \in \mathbb{K}^{p_1\times n_2}, \quad B_1^2 \in \mathbb{K}^{p_2\times n_1}, \quad B_2^2 \in \mathbb{K}^{p_2\times n_2}, \tag{1.49}$$

$$m_1 + m_2 = m, \quad p_1 + p_2 = p, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Согласно определению произведения матриц имеем

$$C = A \cdot B, \quad c_k^j = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.50}$$

Теперь рассмотрим формальное произведение блочных матриц (1.47), полученное как если бы элементами матриц были не блоки, а числа. В результате получим следующую матрицу:

$$D := \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 \cdot B_1^1 + A_2^1 \cdot B_1^2 & A_1^1 \cdot B_2^1 + A_2^1 \cdot B_2^2 \\ \hline A_1^2 \cdot B_1^1 + A_2^2 \cdot B_1^2 & A_1^2 \cdot B_2^1 + A_2^2 \cdot B_2^2 \end{array} \right\|, \tag{1.51}$$

в которой все матричные произведения определены в силу сделанных нами предположений относительно размеров блоков. Кроме того,

$$A_1^1 \cdot B_1^1 + A_2^1 \cdot B_1^2 \in \mathbb{K}^{m_1\times n_1}, \quad A_1^1 \cdot B_2^1 + A_2^1 \cdot B_2^2 \in \mathbb{K}^{m_1\times n_2}, \tag{1.52}$$

$$A_1^2 \cdot B_1^1 + A_1^2 \cdot B_1^2 \in \mathbb{K}^{m_2\times n_1}, \quad A_1^2 \cdot B_2^1 + A_2^2 \cdot B_2^2 \in \mathbb{K}^{m_2\times n_2}. \tag{1.53}$$

Предположим, что $j \in \overline{1, m_1}$ и $k \in \overline{1, n_1}$. Рассмотрим тогда элемент d_k^j блочной матрицы (1.51), расположенный в блоке

$$A_1^1 \cdot B_1^1 + A_2^1 \cdot B_1^2$$

на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Справедливы следующие равенства:

$$d_k^j = \sum_{s_1=1}^{p_1} a_{s_1}^j b_k^{s_1} + \sum_{s_2=p_1+1}^{p} a_{s_2}^j b_k^{s_2} = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s = a_k^j. \tag{1.54}$$

Итак, $\{D\}_k^j = \{C\}_k^j$. Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Таким образом,

$$A \cdot B = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 \cdot B_1^1 + A_2^1 \cdot B_1^2 & A_1^1 \cdot B_2^1 + A_2^1 \cdot B_2^2 \\ \hline A_1^2 \cdot B_1^1 + A_2^2 \cdot B_1^2 & A_1^2 \cdot B_2^1 + A_2^2 \cdot B_2^2 \end{array} \right\|. \tag{1.55}$$

Совершенно понятно, что аналогичная формула умножения имеет место для блочных матриц произвольного порядка.

1.47. Примеры. Антикоммутатор матриц П. А. М. Дирака. Напомним, что матрицы Дирака имеют блочный вид (1.16) и (1.17). Докажем, что справедлива следующая формула:

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1 + \gamma_1 \cdot \gamma_0 = O_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \tag{1.56}$$

где O_4 — нулевая матрица.

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_0 \cdot \sigma_1 \\ \hline \sigma_0 \cdot \sigma_1 & O_2 \end{array} \right\|, \tag{1.57}$$

$$\gamma_1 \cdot \gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_0 \cdot \sigma_1 \\ \hline -\sigma_0 \cdot \sigma_1 & O_2 \end{array} \right\|. \tag{1.58}$$

Из формул (1.57) и (1.58) вытекает следующая формула:

$$\gamma_0 \cdot \gamma_1 + \gamma_1 \cdot \gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & [\sigma_0, \sigma_1] \\ \hline [\sigma_0, \sigma_1] & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array} \right\| = O_4, \tag{1.59}$$

поскольку справедливо следующее равенство:

$$[\sigma_0, \sigma_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \\ - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2,$$

где $O_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ — нулевая матрица. ☒

Докажем, что справедлива следующая формула:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 + \gamma_2 \cdot \gamma_1 = O_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}. \tag{1.60}$$

☐ Действительно, имеем

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_1 \cdot \sigma_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_1 \cdot \sigma_2 \end{array} \right\|, \tag{1.61}$$

$$\gamma_2 \cdot \gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_2 \cdot \sigma_1 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_2 \cdot \sigma_1 \end{array} \right\|. \tag{1.62}$$

Теперь заметим, что

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{1.63}$$

$$\sigma_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

Следовательно,

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \tag{1.65}$$

Поэтому из (1.61)–(1.65) вытекают следующие равенства:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 + \gamma_2 \cdot \gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_1 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_1 \cdot \sigma_2 - \sigma_2 \cdot \sigma_1 \end{array} \right\| = O_4. \quad \boxtimes \tag{1.66}$$

4. Свойства произведения матриц

Операция умножения матриц обладает определенным набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

1.48. Свойство 1. Ассоциативность умножения. Для любых матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times r}$, $C \in \mathbb{K}^{r\times n}$ справедливо равенство

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C. \tag{1.67}$$

$\square$ Действительно, во–первых, матрицы $A\cdot(B\cdot C)$ и $(A\cdot B)\cdot C$ имеют одинаковый размер $m \times n$, а во вторых, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \{A \cdot (B \cdot C)\}^j_k &= \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{B \cdot C\}^s_k = \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \sum_{l=1}^{r} \{B\}^s_l \{C\}^l_k = \\ &= \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{B\}^s_l \right) \{C\}^l_k = \sum_{l=1}^{r} \{A \cdot B\}^j_l \{C\}^l_k = \\ &= \{(A \cdot B) \cdot C\}^j_k. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{1.68}$$

1.49. Свойство 2. Дистрибутивность слева. Для любых матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B, C \in \mathbb{K}^{p\times n}$ справедливо следующее равенство:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \tag{1.69}$$

$\square$ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\{A\cdot(B+C)\}^j_k=\sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{B+C\}^s_k=\sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\left(\{B\}^s_k+\{C\}^s_k\right)=$$
$$=\sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{B\}^s_k+\sum_{s=1}^{p}\{A\}^j_s\{C\}^s_k=\{A\cdot B\}^j_k+\{A\cdot C\}^j_k.\quad\boxtimes \tag{1.70}$$

1.50. Свойство 3. Дистрибутивность справа. Для любых матриц $A, B\in\mathbb{K}^{m\times p}$ и $C\in\mathbb{K}^{p\times n}$ справедливо следующее равенство:

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C. \tag{1.71}$$

Доказывается точно также как свойство 2.

1.51. Свойство 4. Свойство единичной матрицы. Пусть $I_n\in\mathbb{K}^{n\times n}$ — это так называемая единичная матрица, т. е. диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены 1:

$$I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

Пусть I_n и I_m — единичные матрицы размеров $n\times n$ и $m\times m$ соответственно. Тогда для любой матрицы $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ справедливы следующие равенства:

$$I_m\cdot A=A\quad\text{и}\quad A\cdot I_n=A. \tag{1.72}$$

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{I_m\cdot A\}^j_k=\sum_{s=1}^{m}\{I_m\}^j_s\{A\}^s_k=\sum_{s=1}^{m}\delta^j_s\{A\}^s_k=\{A\}^j_k, \tag{1.73}$$

$$\{A\cdot I_n\}^j_k=\sum_{s=1}^{n}\{A\}^j_s\{I_n\}^s_k=\sum_{s=1}^{n}\{A\}^j_s\delta^s_k=\{A\}^j_k, \tag{1.74}$$

где символом δ^j_k мы обозначаем символ Кронекера

$$\delta^j_k=\begin{cases}1, & \text{если}\quad j=k;\\0, & \text{если}\quad j\neq k.\end{cases}\quad\boxtimes$$

1.52. Свойство 4. Свойство следа. Для любых матриц $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ и $B\in\mathbb{K}^{n\times m}$ справедливо равенство следов произведений этих матриц

$$\operatorname{tr}(A\cdot B)=\operatorname{tr}(B\cdot A). \tag{1.75}$$

$\square$ Действительно, отметим, что в силу определения матриц A и B оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ определены, причем $A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times m}$ и $B\cdot A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Поэтому и следы $\mathrm{tr}(A\cdot B)$ и $\mathrm{tr}(B\cdot A)$ тоже определены. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{tr}\,(A\cdot B) = \sum_{j=1}^{m}\{A\cdot B\}_j^j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}\{A\}_k^j\{B\}_j^k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\{B\}_j^k\{A\}_k^j\right) = \sum_{k=1}^{n}\{B\cdot A\}_k^k = \mathrm{tr}\,(B\cdot A). \quad \boxtimes \tag{1.76}$$

5. Обратная матрица

1.53. Определение. Матрица $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ называется обратной к матрице $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, если выполнены следующие равенства:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_n. \tag{1.77}$$

Обратная матрица обладает набором свойств, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

1.54. Свойство 1. Единичная матрица I_n обратима и справедливо равенство $I_n^{-1} = I_n$.

$\square$ Действительно, это следствие следующего очевидного равенства:

$$I_n\cdot I_n = I_n. \quad \boxtimes$$

1.55. Свойство 2. Обратная матрица A^{-1} если существует, то единственна.

$\square$ Действительно, пусть существуют две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} к матрице $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}\cdot I_n = A_1^{-1}\cdot(A\cdot A_2^{-1}) = (A_1^{-1}\cdot A)\cdot A_2^{-1} = I_n\cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}. \quad \boxtimes$$

1.56. Свойство 3. *Если матрицы $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ обратимы, то их произведение $A\cdot B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ тоже обратимо и $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.*

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(B^{-1}\cdot A^{-1})\cdot(A\cdot B) = B^{-1}\cdot(A^{-1}\cdot A)\cdot B = B^{-1}\cdot I_n\cdot B = B^{-1}\cdot B = I_n,$$

$$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A\cdot(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = A\cdot I_n\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I_n. \quad \boxtimes$$

1.57. Свойство 4. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ имеет обратную A^{-1}, то обратной к A^{-1} является матрица $(A^{-1})^{-1} = A$.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A. \quad \boxtimes$$

1.58. Пример. Обратная к матрице 2×2. Пусть нам задана матрица $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.78}$$

причём $ad - bc \neq 0$, тогда обратная к этой матрице существует и имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{1.79}$$

☐ Действительно, проверим равенства (1.77):

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \tag{1.80}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$A^{-1} \cdot A = I_2. \quad \boxtimes$$

1.59. Пример. Обратные к матрицам В. Паули. Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$\sigma_j^{-1} = \sigma_j \quad \text{при} \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{1.81}$$

☐ Действительно, $\sigma_0 = I_2$ и поэтому в силу свойства 1 равенство (1.81) при $j = 0$ доказано. Теперь докажем, например, равенство (1.81) при $j = 2$. Действительно, в силу (1.79) справедливы следующие равенства:

$$\sigma_2^{-1} = \frac{1}{i^2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2. \quad \boxtimes$$

1.60. Примеры. Вычисление обратных к матрицам П. А. М. Дирака. Мы пока не знаем, как вычислять обратные матрицы к квадратным матрицам из $\mathbb{K}^{n\times n}$ при $n > 2$. Однако, мы можем воспользоваться тем, что матрицы Дирака записываются в блочном виде 2×2 через матрицы Паули и нулевую матрицу O_2, а для матриц Паули справедливы равенства (1.81), которые означают, что

$$\sigma_j^2 = \sigma_j \cdot \sigma_j = I_2 \quad \text{при} \quad j = 0, 1, 2, 3. \tag{1.82}$$

Именно, докажем, что справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0^{-1} = \gamma_0, \quad \gamma_j^{-1} = -\gamma_j \quad \text{при} \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.83}$$

□ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\gamma_0 \cdot \gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0^2 & O_2 \\ \hline O_2 & \sigma_0^2 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & I_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| = I_4 \Rightarrow \gamma_0^{-1} = \gamma_0, \quad (1.84)$$

$$\gamma_j \cdot \gamma_j = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_j \\ \hline -\sigma_j & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_j \\ \hline -\sigma_j & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_j^2 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_j^2 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} -I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| = -I_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_j^{-1} = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad \boxtimes \quad (1.85)$$

6. Транспонированная матрица

1.61. Определение. Матрицей, транспонированной по отношению к матрице $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, называется матрица $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$, с элементами $\{A^T\}_k^j = \{A\}_j^k$.

1.62. Примеры. Транспонированные матрицы к матрицам В. Паули. Справедливы следующие равенства:

$$\sigma_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0, \quad \sigma_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \quad (1.86)$$

$$\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2, \quad \sigma_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3. \quad (1.87)$$

1.63. Примеры. Транспонированные к матрицам П. А. М. Дирака. Прежде всего заметим, что транспонированная к блочной матрице

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\| \quad (1.88)$$

имеет следующий вид:

$$A^T = \left\| \begin{array}{c|c} (A_1^1)^T & (A_1^2)^T \\ \hline (A_2^1)^T & (A_2^2)^T \end{array} \right\|, \tag{1.89}$$

где символами $(A_k^j)^T$ мы обозначили матрицу транспонированную к матрице A_k^j. С учетом равенств (1.88) и (1.89) справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0^T = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0^T & O_2^T \\ \hline O_2^T & -\sigma_0^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \gamma_0, \tag{1.90}$$

$$\gamma_1^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_1^T \\ \hline \sigma_1^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = -\gamma_1, \tag{1.91}$$

$$\gamma_2^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_2^T \\ \hline \sigma_2^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| = \gamma_2, \tag{1.92}$$

$$\gamma_3^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_3^T \\ \hline \sigma_3^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & O_2 \end{array} \right\| = -\gamma_3. \tag{1.93}$$

Введём важные понятия симметричной и антисимметричной матриц.

1.64. Определение. Квадратная матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ называется симметричной, если $A^T = A$, и называется антисимметричной, если $A^T = -A$.

1.65. Очевидно, всякая нулевая квадратная матрица $O \in \mathbb{K}^{n\times n}$ является и симметричной и антисимметричной одновременно. И это единственная матрица с таким свойством.

1.66. Примеры. Примеры симметричных и антисимметричных матриц. Формулы (1.86) и (1.87) означают, что матрицы В. Паули σ_0, σ_1 и σ_3 являются симметричными, а матрица σ_2 — антисимметричной. Формулы (1.90)–(1.93) означают, что матрицы П. А. М. Дирака γ_0 и γ_2 симметричные, а матрицы γ_1 и γ_3 антисимметричные.

Операция транспонирования обладает определенными свойствами, которые мы сформулируем и докажем.

1.67. Свойство 1. Линейность операции транспонирования. Для любых матриц $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливо следующее равенство: $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.

□ Действительно, согласно определению операции транспонирования имеем

$$\{(\alpha A+\beta B)^T\}_k^j = \{\alpha A+\beta B\}_j^k = \\ = \alpha\{A\}_j^k + \beta\{B\}_j^k = \alpha\{A^T\}_k^j + \beta\{B^T\}_k^j. \quad \boxtimes \qquad (1.94)$$

1.68. Свойство 2. Инволютивность. Для любой матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ справедливо равенство $(A^T)^T = A$.

□ Действительно, имеем

$$\{(A^T)^T\}_k^j = \{A^T\}_j^k = \{A\}_k^j. \quad \boxtimes$$

1.69. Свойство 3. Транспонирование произведения. Для любых матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ справедливо равенство $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

□ Действительно, имеем

$$\{(A\cdot B)^T\}_k^j = \{A\cdot B\}_j^k = \sum_{s=1}^p \{A\}_s^k\{B\}_j^s = \sum_{s=1}^p \{A^T\}_k^s\{B^T\}_s^j = \\ = \sum_{s=1}^p \{B^T\}_s^j\{A^T\}_k^s = \{B^T\cdot A^T\}_k^j. \quad \boxtimes \qquad (1.95)$$

1.70. Свойство 4. Транспонирование обратной матрицы. Для любой обратимой матрицы $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ справедливо следующее равенство: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

□ Действительно, в силу свойства 3 имеем

$$(A^{-1})^T\cdot A^T = (A\cdot A^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$
$$A^T\cdot (A^{-1})^T = (A^{-1}\cdot A)^T = I_n^T = I_n.$$

Следовательно, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. ⊠

1.71. Заметим, что любую матрицу $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц.

□ Действительно, справедливо следующее равенство:

$$A = \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2} := A_1 + A_2. \qquad (1.96)$$

Ясно, что в силу свойств 1 и 2 имеем $A_1^T = A_1$, $A_2^T = -A_2$. ⊠

ГЛАВА 2

Определители

1. Определитель второго порядка

2.1. Рассмотрим следующую систему двух уравнений относительно неизвестных x и y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Методом исключения переменных построим решение при некотором условии, которое будет указано ниже. Найдём выражение для неизвестной x. Умножим обе части первого уравнения на b_2, а второе уравнение умножим на $-b_1$ тогда получим равенства

$$\begin{cases} b_2a_1x + b_2b_1y = b_2c_1, \\ -b_1a_2x - b_1b_2y = -b_1c_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теперь сложим эти два уравнения и получим равенство

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - c_2b_1. \tag{2.3}$$

Теперь получим выражение для неизвестной y. Умножим обе части первого уравнения из (2.1) на $-a_2$, а второе на a_1 и сложим полученные равенства. Тогда получим следующее выражение:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\, y = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{2.4}$$

Предположим, что

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{2.5}$$

тогда из равенств (2.3) и (2.4) получим следующие эквивалентные равенства:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{2.6}$$

Нетрудно проверить непосредственной проверкой, что выражения (2.6) действительно удовлетворяют уравнениям (2.1). Выражения для неизвестных x и y можно переписать в гораздо более удобном виде. Дадим определение определителя квадратной матрицы 2×2.

2.2. Определение. Определителем квадратной матрицы D размера 2×2 называется следующее выражение:

$$\det D = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1. \tag{2.7}$$

2.3. Пример. Вычислим определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, согласно определению 2.2 имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 = 1.$$

2.4. Теперь рассмотрим следующие три квадратные матрицы, связанные с коэффициентами и правами частями системы уравнений (2.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Согласно определению 2.2 имеем

$$|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1, \quad |A_1| = c_1 b_2 - c_2 b_1, \quad |A_2| = a_1 c_2 - a_2 c_1. \tag{2.9}$$

Тогда формулы (2.6) можно переписать в следующем виде:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{2.10}$$

2.5. Пример. Решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -7, \\ 5x + 4y = 12. \end{cases} \tag{2.11}$$

Составим три квадратные матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определители этих трёх матриц.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 23,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} = (-7)\cdot 4 - (-3)\cdot 12 = -28 + 36 = 8,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2\cdot 12 - (-7)\cdot 5 = 24 + 35 = 59.$$

Поскольку $|A| \neq 0$, то система уравнений (2.11) имеет единственное решение, которое даётся следующими формулами:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{8}{23}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{59}{23}.$$

Мы рассмотрели полностью случай, когда $|A| \neq 0$. Что можно сказать о существовании решения системы уравнений (2.1) в том случае, когда $|A| = 0$? Рассмотрим ряд примеров.

2.6. Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Матрица системы (2.12) A имеет в данном случае вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 0.$$

Очевидно, что эта система уравнений не имеет решений. Отметим, что в обозначениях из (2.8)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$|A_1| = 1 - 2 = -1, \quad |A_2| = 2 - 1 = 1.$$

2.7. Пример. Рассмотрим теперь следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = 2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Матрица системы (2.13) A имеет в данном случае следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 2 = 0.$$

Эта система уравнений эквивалентна одному уравнению

$$x + y = 1,$$

всё множество решений которой можно записать в следующем виде:

$$x = c, \quad y = 1 - c,$$

где c — это произвольное вещественное число. Отметим, что в данном случае

$$A_1 = A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_1| = |A_2| = 0.$$

2.8. Замечание. Могло бы показаться, что наличие бесконечного множества решений системы уравнений (2.13) связано с тем, что $|A| = |A_1| = |A_2| = 0$. Однако, это не так. Рассмотрим ещё один пример.

2.9. Пример. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

Очевидно, что последнее уравнение противоречиво и поэтому эта система уравнений не имеет решений, хотя

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$|A| = |A_1| = |A_2| = 0.$$

Теперь мы изучим вопрос о том, что можно сказать о матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

в том случае, когда $|A| = 0$. Справедливо следующее утверждение:

2.10. Лемма. Для того, чтобы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{2.15}$$

необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа α и β, не равные одновременно нулю, что выполнены следующие равенства:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Доказательство. Отметим, что равенство (2.16) эквивалентно двум равенствам

$$\alpha a_1 + \beta b_1 = 0, \quad \alpha a_2 + \beta b_2 = 0.$$

Достаточность. Пусть найдутся такие числа α и β, не равные одновременно нулю, такие что выполнено равенство (2.16). Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \neq 0$. Тогда получим следующие равенства:

$$a_1 = \gamma b_1, \quad a_2 = \gamma b_2, \quad \gamma = -\frac{\beta}{\alpha}. \tag{2.17}$$

Поэтому отсюда вытекают следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \gamma(b_1 b_2 - b_2 b_1) = 0.$$

Необходимость. Пусть $|A| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $b_2 \neq 0$. Тогда имеем

$$a_1 = \frac{a_2}{b_2} b_1. \tag{2.18}$$

Положим по определению

$$\lambda := \frac{a_2}{b_2}.$$

Тогда из (2.18) вытекают следующие равенства:

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda. \tag{2.19}$$

Случай 2. Пусть $b_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$a_2 b_1 = a_1 b_2 \Leftrightarrow a_2 = \frac{a_1}{b_1} b_2.$$

Введем число

$$\lambda := \frac{a_1}{b_1} \Rightarrow a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2.$$

Далее точно также как в первом случае приходим к следующему равенству:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad \alpha = 1, \quad \beta = -\lambda.$$

Случай 3. Пусть $b_2 = b_1 = 0$. Тогда при $\alpha = 0$ и $\beta = 1$ справедливо равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Определители квадратных матриц 2×2 обладают набором определенных свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем. Сначала дадим определение *линейно зависимых и линейно независимых столбцов*.

2.11. Определение. Столбцы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 1}$$

называются линейно зависимыми, если найдутся такие числа $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, не равные одновременно нулю, что выполнено равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Если же равенство (2.20) имеет место только при $\alpha = \beta = 0$, то соответствующие столбцы называются линейно независимыми.

2.12. Свойство 1. Для того чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

соответствующей матрицы 2×2

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

были линейно зависимы.

Доказательство.

Утверждение является непосредственным следствием леммы 2.10.

□

2.13. Свойство 2. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}. \tag{2.21}$$

Доказательство. Является непосредственным следствием явного выражения определителя (2.7). □

2.14. Свойство 3. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1 & b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{2.22}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 b_1 + \alpha_2 c_1 \\ a_2 & \alpha_1 b_2 + \alpha_2 c_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Докажем только (2.22), поскольку (2.23) доказывается аналогичным образом. Действительно,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1 & b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2 & b_2 \end{vmatrix} = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 c_1) b_2 - (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 c_2) b_1 =$$
$$= \alpha_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1) + \alpha_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) =$$
$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2.24}$$

□

2.15. Свойство 4. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Дадим определение.

2.16. Определение. Функция двух переменных $f = f(x, y)$ называется билинейной (полилинейной), если выполнены следующие равенства:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \tag{2.25}$$

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f(x, y_1) + \alpha_2 f(x, y_2) \tag{2.26}$$

для любых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ и переменных x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 из поля $\mathbb{K}$.

2.17. Пример. Например, функция $f(x, y) = xy$ является билинейной (полилинейной).

2.18. Понятие билинейности (полилинейности) можно ввести не только для функций двух переменных из поля $\mathbb{K}$, но и для функций от столбцов из $\mathbb{K}^{2\times 1}$. Действительно, пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 1}. \tag{2.27}$$

Дадим определение.

2.19. Определение. Функция $f(X,Y)$ от двух столбцов $X, Y \in \mathbb{K}^{2\times 1}$ называется билинейной (полилинейной), если для любых чисел α_1 и α_2 из $\mathbb{K}$ и для любых столбцов X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 из $\mathbb{K}^{2\times 1}$ справедливы следующие равенства:

$$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) = \alpha_1 f(X_1, Y) + \alpha_2 f(X_2, Y), \tag{2.28}$$

$$f(X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 f(X, Y_1) + \alpha_2 f(X, Y_2). \tag{2.29}$$

2.20. Пример. Самый важный для нас пример билинейной (полилинейной) функции — это определитель:

$$f(X,Y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Докажем, например, равенство (2.28). Пусть

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Справедливо равенство

$$\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2 = \begin{pmatrix} \alpha^1 x_1^1 + \alpha^2 x_2^1 \\ \alpha^1 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Тогда в силу свойства 3 имеем

$$f(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2, Y) = \begin{vmatrix} \alpha^1 x_1^1 + \alpha^2 x_2^1 & y^1 \\ \alpha^1 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 & y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha^1 \begin{vmatrix} x_1^1 & y^1 \\ x_1^2 & y^2 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} x_2^1 & y^1 \\ x_2^2 & y^2 \end{vmatrix} = \alpha^1 f(X_1, Y) + \alpha^2 f(X_2, Y). \tag{2.33}$$

2.21. Поскольку определитель матрицы 2×2 является билинейной (полилинейной) функцией своих двух столбцов, то в дальнейшем мы будем использовать еще одно обозначение для определителя матрицы $A = \|A_1, A_2\|$ размера 2×2 :

$$|A_1, A_2|. \tag{2.34}$$

Тогда свойство 1 можно переформулировать так: *для того чтобы определитель $|A| = |A_1, A_2|$ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы A_1 и A_2 были линейно зависимы*; свойство 2 можно переформулировать так $|A_1, A_2| = -|A_2, A_1|$; свойство 3 можно сформулировать так *определитель $|A| = |A_1, A_2|$ является билинейной (полилинейной) функцией своих столбцов.*

Заметим, что второе свойство: $|A_1, A_2| = -|A_2, A_1|$ называется свойством *кососимметричности* определителя матрицы A размера 2×2 как функции своих столбцов A_1 и A_2.

2. Определитель третьего порядка

2.22. Рассмотрим следующую квадратную матрицу размера 3×3:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \|A, B, C\|, \tag{2.35}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Введем понятие определителя квадратной матрицы 3×3.

2.23. Определение. Определителем квадратной матрицы D размера 3×3 называется числовая функция $|D| = |A, B, C|$ столбцов A, B и C матрицы $D = \|A, B, C\|$, обладающая следующими свойствами:

1. числовая функция $|D| = |A, B, C|$ является трилинейной (полилинейной) функцией столбцов A, B и C;
2. числовая функция $|D| = |A, B, C|$ является кососимметричной функцией столбцов A, B и C;
3. выполнено свойство нормировки $|D| = 1$ для столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.24. Замечание. Отметим, что в определение определителя матрицы размера 3×3 мы положили свойства 2–4 определителя квадратной матрицы 2×2. Отметим, что из свойства 2 кососимметричности определителя вытекает важное свойство:

2.25. Лемма. Если хотя бы два столбца матрицы 3×3 совпадают, то определитель такой матрицы равен нулю.

Доказательство.

Пусть, например, $A = B$, тогда имеем

$$|D| = |A, A, C|.$$

В силу свойства кососимметричности определителя $|D|$ относительно столбцов матрицы D, то справедливы равенства

$$|D| = |A, B, C| = -|B, A, C| \Rightarrow |A, A, C| = -|A, A, C| \Rightarrow \\ \Rightarrow 2|A, A, C| = 0 \Rightarrow |A, A, C| = 0 \Rightarrow |A, B, C| = 0. \tag{2.37}$$

$\square$

2.26. Теперь наша задача получить явный вид определителя квадратной матрицы размера 3×3. С этой целью рассмотрим множество всех столбцов $\mathbb{K}^{3\times 1}$ длины 3, состоящих из чисел из числового поля $\mathbb{K}$. В нашем курсе числовое поле $\mathbb{K}$ — либо $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$.

2.27. Определение. *Каноническим базисом* в $\mathbb{K}^{3\times 1}$ называется семейство следующих трёх столбцов:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

2.28. Лемма. Любой столбец

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 1}$$

можно представить в следующем виде:

$$A = \alpha^1\mathbf{e}_1 + \alpha^2\mathbf{e}_2 + \alpha^3\mathbf{e}_3.$$

☐ Действительно,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha^1\mathbf{e}_1 + \alpha^2\mathbf{e}_2 + \alpha^3\mathbf{e}_3. \quad \boxtimes \tag{2.39}$$

2.29. Таким образом справедливы следующие разложения по каноническому базису в $\mathbb{K}^{3\times 1}$ столбцов A, B и C :

$$A = \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad B = \sum_{\sigma_2=1}^{3} b_{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, \quad C = \sum_{\sigma_3=1}^{3} c_{\sigma_3}\mathbf{e}_{\sigma_3}. \tag{2.40}$$

2.30. Замечание. В равенствах (2.40) мы используем различные индексы суммирования σ_1, σ_2 и σ_3 и это существенно для нас. Кроме того, мы используем нижние индексы в соответствующих суммах. Это не очень хорошо, но для первого знакомства с теорией определителей допустимо.

2.31. Теперь воспользуемся свойством трилинейности (полилинейности) определителя как функции от столбцов и получим следующую цепочку равенств:

$$|D| = |A, B, C| = \left| \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, B, C \right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} \left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, B, C\right| = \sum_{\sigma_1=1}^{3} a_{\sigma_1} \left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{3} b_{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, C\right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3}\sum_{\sigma_2=1}^{3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2} \left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, C\right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3}\sum_{\sigma_2=1}^{3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2} \left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \sum_{\sigma_3=1}^{3} c_{\sigma_3}\mathbf{e}_{\sigma_3}\right| =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3}\sum_{\sigma_2=1}^{3}\sum_{\sigma_3=1}^{3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2}c_{\sigma_3} \left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\right|. \quad (2.41)$$

2.32. Рассмотрим отдельно определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ матрицы $\|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\|$.

2.33. Наблюдение 1. $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = 0$, если хотя бы два индекса из трёх $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ совпадают.

☐ Действительно, если, например, $\sigma_1 = \sigma_2$, то в определителе $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ первые два столбца совпадают. Но тогда в силу результата леммы 2.25 $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = 0$. ☒

2.34. Вывод 1. В итоговой сумме (2.41) для определителя $|D|$ остаётся только следующая часть:

$$|D| = \sum_{\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2}c_{\sigma_3} \left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\right|, \quad (2.42)$$

где S_3 — это конечное множество, состоящее из следующих 6 упорядоченных троек чисел:

$$\{1,2,3\},\ \{2,1,3\},\ \{3,2,1\},\ \{1,3,2\},\ \{2,3,1\},\ \{3,1,2\}. \quad (2.43)$$

2.35. Описать конечное множество упорядоченных троек чисел S_3 можно при помощи такого понятия как *перестановка*. Но сначала рассмотрим следующий пример из классического учебника П. С. Александрова: **Боря**, **Володя** и **Шурик** сидят в лодке в определённом порядке, считая, например, от носа к корме лодки. Их можно пересадить шестью различными способами:

1. **Боря, Володя, Шурик;**
2. **Боря, Шурик, Володя;**
3. **Володя, Боря, Шурик;**
4. **Володя, Шурик, Боря;**
5. **Шурик, Володя, Боря;**
6. **Шурик, Боря, Володя.**

Теперь сопоставим Боре число 1, Володе число 2, а Шурику числу 3. Тогда упорядоченная тройка чисел $\{1,2,3\}$ соответствует исходному расположению Бори, Володи и Шурика в лодке. А например, число $\{2,1,3\}$ означает, что Боря и Володя поменялись местами, а Шурик остался на месте. Более сложная ситуация — $\{2,3,1\}$ означает, что Боря занял место Шурика, Шурик занял место Володи, а Володя занял место Шурика. Переход от одного порядка расположения мальчиков в лодке к другому порядку, т. е. *само действие*, называется *перестановкой.*

2.36. Обсудим теперь важный вопрос о форме записи *перестановки*. Например, перестановка может быть записана в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \textbf{Боря}, & \textbf{Володя}, & \textbf{Шурик} \\ \textbf{Володя}, & \textbf{Шурик}, & \textbf{Боря} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

— эти таблицу следует читать так, **Боря** поменялся местами с **Володей**, **Володя** с **Шуриком**, а **Шурик** с **Борей**. Отметим, что *перестановка* — это *операция*, т. е. *сам процесс пересаживания*, а не результат. Поэтому чтобы задать перестановку совсем не обязательно выписывать ее в виде таблицы, упорядоченной по верхнему ряду, как в (2.44), а, например, так

$$\begin{bmatrix} \textbf{Володя}, & \textbf{Боря}, & \textbf{Шурик} \\ \textbf{Шурик}, & \textbf{Володя}, & \textbf{Боря} \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

Теперь мы можем дать точное определение перестановки. Пусть $N = \{1,2,3\}$ — это конечное неупорядоченное множество, состоящее из трёх чисел, т.е., например, $\{2,1,3\}$ — это другая форма записи того же множества N.[1]

2.37. Определение. Перестановкой множества N называется взаимно однозначное отображение множества N в себя:

$$\hat{\sigma}: \ N \to N. \tag{2.46}$$

2.38. Обозначение. Поскольку множество $N = \{1,2,3\}$ — конечное, то для того чтобы задать перестановку достаточно просто указать куда отображение $\hat{\sigma}$ переводит каждое из чисел $\{1,2,3\}$. Например, можно отображение $\hat{\sigma}$ можно задать следующим образом:

$$\hat{\sigma}: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hat{\sigma}(1) & \hat{\sigma}(2) & \hat{\sigma}(3) \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \hat{\sigma}: \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \hat{\sigma}(2) & \hat{\sigma}(1) & \hat{\sigma}(3) \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

[1] Когда мы будем считать $\{2,1,3\}$ упорядоченным множеством в том смысле, что число 2 является первым, число 1 — вторым, а число 3 — третьим — мы будем это особо подчеркивать.

2.39. Лемма. На множестве $N = \{1, 2, 3\}$ существует ровно 6 различных перестановок.

Доказательство.

Произвольная перестановка может быть записана в виде двухрядной таблицы (2.47). Подсчитаем количество вариантов заполнения второго ряда таблицы. Число $\hat{\sigma}(1)$ может быть выбрана тремя способами — фиксируем одно из трех значений для $\hat{\sigma}(1)$; теперь число $\hat{\sigma}(2)$ может быть выбрано только двумя способами — фиксируем одно из двух значений для $\hat{\sigma}(2)$; число $\hat{\sigma}(3)$ тогда выбирается однозначно. Подсчитаем количество вариантов

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

□

2.40. Эти шесть перестановок можно записать в виде двухрядных таблиц, для удобства упорядоченных по верхнему ряду.

$$\hat{\varepsilon} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.48}$$

$$\hat{\tau}_4 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_5 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_6 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

Кроме того, можно записать эти шесть перестановок в сокращенном виде, считая *верхний ряд таблицы упорядоченным по возрастанию*:

$$\hat{\varepsilon} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_2 := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_3 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.50}$$

$$\hat{\tau}_4 := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_5 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\tau}_6 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.51}$$

Применяя эти шесть перестановок к упорядоченному множеству $\{1, 2, 3\}$ мы получим все шесть элементов (2.43) множества S_3.

2.41. Наблюдение 2. Среди рассмотренных шести перестановок имеется перестановка, которую естественно назвать единичной, поскольку она оставляет числа 1, 2, и 3 на своих местах:

$$\hat{\varepsilon} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \tag{2.52}$$

2.42. Наблюдение 3. Для этих перестановок определена *операция умножения*.

□ Действительно, рассмотрим две перестановки

$$\hat{\sigma}_1 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.53}$$

Для этих двух перестановок имеем

$$\hat{\sigma}_1(1) = 2, \quad \hat{\sigma}_1(2) = 3, \quad \hat{\sigma}_1(3) = 1, \tag{2.54}$$

$$\hat{\sigma}_2(1) = 3, \quad \hat{\sigma}_2(2) = 2, \quad \hat{\sigma}_2(3) = 1. \tag{2.55}$$

Поэтому определена перестановка $\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1$, которая определяется как последовательное применение перестановок $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$:

$$\hat{\sigma}_3(1) = \hat{\sigma}_2(\hat{\sigma}_1(1)) = \hat{\sigma}_2(2) = 2, \tag{2.56}$$

$$\hat{\sigma}_3(2) = \hat{\sigma}_2(\sigma_1(2)) = \hat{\sigma}_2(3) = 1, \tag{2.57}$$

$$\hat{\sigma}_3(3) = \hat{\sigma}_2(\hat{\sigma}_1(3)) = \hat{\sigma}_2(1) = 3. \tag{2.58}$$

Итак,

$$\hat{\sigma}_3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \quad \boxtimes \tag{2.59}$$

Дадим определение.

2.43. Определение. Произведением двух произвольных перестановок $\hat{\sigma}$ на $\hat{\tau}$ называется перестановка, которая определяется следующим образом:

$$\hat{\sigma}\hat{\tau} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hat{\sigma}(\hat{\tau}(1)) & \hat{\sigma}(\hat{\tau}(2)) & \hat{\sigma}(\hat{\tau}(3)) \end{bmatrix}. \tag{2.60}$$

2.44. Наблюдение 4. Заметим, что, вообще говоря, $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \neq \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1$.

$\square$ Действительно, вычислим $\hat{\sigma}_4 := \hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2$ для перестановок (2.53). Имеем

$$\hat{\sigma}_4(1) = \hat{\sigma}_1(\hat{\sigma}_2(1)) = \hat{\sigma}_1(3) = 1, \tag{2.61}$$

$$\hat{\sigma}_4(2) = \hat{\sigma}_1(\hat{\sigma}_2(2)) = \hat{\sigma}_1(2) = 3, \tag{2.62}$$

$$\hat{\sigma}_4(3) = \hat{\sigma}_1(\hat{\sigma}_2(3)) = \hat{\sigma}_1(1) = 2. \tag{2.63}$$

Итак,

$$\hat{\sigma}_4 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.64}$$

Из сравнения (2.59) с (2.64) приходим к выводу о том, что $\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2 \neq \hat{\sigma}_2\hat{\sigma}_1$. Это свойство называется *некоммутативностью операции произведения перестановок*. $\boxtimes$

2.45. Наблюдение 5. Всегда справедливо следующее равенство $\hat{\varepsilon}\hat{\sigma} = \hat{\sigma}\hat{\varepsilon}$ для любой перестановки $\hat{\sigma}$ и единичной перестановки $\hat{\varepsilon}$.

2.46. Наблюдение 6. Для каждой перестановки $\hat{\sigma}$ определена обратная перестановка $\hat{\sigma}^{-1}$ в том смысле, что выполняются равенства

$$\hat{\sigma}\hat{\sigma}^{-1} = \hat{\sigma}^{-1}\hat{\sigma} = \hat{\varepsilon}. \tag{2.65}$$

Более того, в обозначениях (2.48) справедливы следующие равенства:

$$\hat{\varepsilon}^2 := \hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\tau}_j^2 := \hat{\tau}_j\hat{\tau}_j = \hat{\varepsilon} \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4, \tag{2.66}$$

$$\hat{\tau}_5\hat{\tau}_6 = \hat{\tau}_6\hat{\tau}_5 = \hat{\varepsilon}, \tag{2.67}$$

из которых вытекает, что

$$\hat{\varepsilon}^{-1} = \hat{\varepsilon}, \quad \hat{\tau}_j^{-1} = \hat{\tau}_j \quad \text{при} \quad j = 2, 3, 4, \tag{2.68}$$

$$\hat{\tau}_5^{-1} = \hat{\tau}_6, \quad \hat{\tau}_6^{-1} = \hat{\tau}_5. \tag{2.69}$$

2.47. Вывод 2. Множество перестановок на множестве $N = \{1, 2, 3\}$ образуют некоммутативную группу, которая называется *симметрической группой.*

2.48. Теперь рассмотрим конечное множество S_3 и множество (2.48) и (2.49) всех перестановок на множестве $N = \{1, 2, 3\}$. Совершенно понятно, что эти два множества можно отождествить следующим образом:

$$\{1, 2, 3\} \leftrightarrow \hat{\varepsilon}, \quad \{2, 1, 3\} \leftrightarrow \hat{\tau}_2, \quad \{3, 2, 1\} \leftrightarrow \hat{\tau}_3, \tag{2.70}$$

$$\{1, 3, 2\} \leftrightarrow \hat{\tau}_4, \quad \{2, 3, 1\} \leftrightarrow \hat{\tau}_5, \quad \{3, 1, 2\} \leftrightarrow \hat{\tau}_6. \tag{2.71}$$

Как нетрудно заметить, что отождествления (2.70) и (2.71) основаны на результате применения той или иной перестановки к упорядоченному множеству $\{1, 2, 3\}$. Здесь мы приходим к возможности называть операцию и результат её применения к упорядоченному набору чисел $\{1, 2, 3\}$ одним и тем же названием — перестановка. В частности, введенное ранее множество S_3, состоящее из шести упорядоченных наборов чисел, мы имеем полное право называть множеством перестановок.

2.49. Для дальнейшего нам нужно ввести понятие *четной* и *нечетной* перестановок. Сначала введём операцию *транспозиции* в упорядоченном множестве $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, которая является перестановкой.

2.50. Определение. Транспозицией в упорядоченном множестве $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ называется произвольная перестановка соседних чисел.

2.51. Определение. Перестановка $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ называется четной, если она может быть получена из перестановки $\{1, 2, 3\}$ четным числом транспозиций, и называется нечётной, если она может быть получена из перестановки $\{1, 2, 3\}$ нечётным числом транспозиций.

2.52. Корректность определения. Строго говоря, мы должны доказать, что определение 2.51 корректно. Действительно, для получения последовательностью транспозиций заданной перестановки мы можем применять разное количество транспозиций и нужно доказать, что для любой фиксированной перестановки число этих перестановок всегда либо чётное либо нечётное. Для рассмотрения этого вопроса мы отсылаем к более специальной литературе, поскольку наш курс является вводным в эту область алгебры.

2.53. Поскольку у нас число перестановок равно шести, то мы можем просто описать все *чётные* перестановки и все *нечётные* перестановки. При этом одной транспозицией можно из чётной перестановки сделать нечётную и наоборот. Поэтому число чётных перестановок совпадает с числом нечётных перестановок. Итак, всего три четные и три нечетные перестановки из S_3.

1. Перестановка $\{1,2,3\}$ считается чётной по определению;
2. Перестановка $\{2,1,3\}$ является нечётной, поскольку получена следующей транспозицией:
$$\{1,2,3\} \mapsto \{2,1,3\};$$
3. Перестановка $\{3,2,1\}$ является нечётной, поскольку получена тремя следующими транспозициями:
$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\} \mapsto \{3,1,2\} \mapsto \{3,2,1\};$$
4. Перестановка $\{1,3,2\}$ является нечётной, поскольку получена одной следующей транспозицией:
$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\};$$
5. Перестановка $\{2,3,1\}$ является чётной, поскольку получена следующими двумя транспозициями:
$$\{1,2,3\} \mapsto \{2,1,3\} \mapsto \{2,3,1\};$$
6. Перестановка $\{3,1,2\}$ является чётной, поскольку получена следующими двумя транспозициями:
$$\{1,2,3\} \mapsto \{1,3,2\} \mapsto \{3,1,2\}.$$

Дадим определение знака $\operatorname{sign}\hat{\sigma}$ перестановки.

2.54. Определение. Если $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$, то
$$\operatorname{sign}\hat{\sigma} := \begin{cases} 1, & \text{если перестановка} \quad \hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \text{ — чётная;} \\ -1, & \text{если перестановка} \quad \hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \text{ — нечётная.} \end{cases} \tag{2.72}$$

Докажем следующее важное утверждение:

2.55. Лемма. Справедливо равенство $\operatorname{sign}(\hat{\sigma}\hat{\tau}) = \operatorname{sign}\hat{\sigma}\operatorname{sign}\hat{\tau}$.

Доказательство.

Прежде всего заметим, что при транспозиции, очевидно, меняется чётность перестановки. Пусть перестановки $\hat{\sigma}$ и $\hat{\tau}$ можно представить в виде произведения последовательности транспозиций следующим образом:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_{n-1}\cdots\hat{\sigma}_1, \quad \hat{\tau} = \hat{\tau}_m\hat{\tau}_{m-1}\cdots\hat{\tau}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \hat{\sigma}\hat{\tau} = \hat{\sigma}_n\hat{\sigma}_{n-1}\cdots\hat{\sigma}_1\hat{\tau}_m\hat{\tau}_{m-1}\cdots\hat{\tau}_1. \quad (2.73)$$

Тогда согласно определению знака перестановки (2.72) имеем

$$\operatorname{sign}\hat{\sigma} = (-1)^n, \quad \operatorname{sign}\hat{\tau} = (-1)^m, \quad (2.74)$$

$$\operatorname{sign}(\hat{\sigma}\hat{\tau}) = (-1)^{n+m} = (-1)^n(-1)^m = \operatorname{sign}\hat{\sigma}\operatorname{sign}\hat{\tau}. \quad (2.75)$$

$\square$

2.56. Теперь обратимся к полученной ранее формуле (2.42), которую с учетом отождествления перестановок и элементов множества S_3 можно записать в следующем виде:

$$|D| = \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} a_{\sigma_1}b_{\sigma_2}c_{\sigma_3}\left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\right|. \quad (2.76)$$

Рассмотрим отдельно определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ при $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$.

2.57. Наблюдение 7. Определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ в зависимости от перестановки $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ принимает всего два значения: либо 1 либо -1.

$\square$ Например, рассмотрим перестановку $\hat{\sigma} = \{2, 1, 3\}$. Тогда определитель имеет следующий вид:

$$|\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3| = -|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = -1,$$

где мы воспользовались свойством 2 кососимметричности определителя и свойством нормировки определителя: $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = 1$. Таким образом, произвольный определитель $|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}|$ в случае, когда $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — перестановка, отличается от определителя $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|$ только знаком. $\boxtimes$

Дадим определение транспозиции в определителе матрицы D размера 3×3.

2.58. Определение. Транспозицией столбцов $|A, B, C|$ определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ называется перестановка двух соседних столбцов.

2.59. Наблюдение 8. Справедливо следующее равенство:

$$\left|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\right| = \operatorname{sign}\hat{\sigma}\left|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\right|, \quad \hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3. \quad (2.77)$$

□ Заметим, что, с одной стороны, упорядоченная тройка столбцов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ конечным числом транспозиций столбцов может быть приведена к следующей упорядоченной тройке столбцов: $\{\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\}$, где $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — перестановка. Справедливо аналогичного содержание утверждение: **упорядоченная тройка чисел $\{1, 2, 3\}$ конечным числом транспозиций может быть приведена к упорядоченной тройке чисел** $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \in S_3$. Эти транспозиции

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \overset{\hat{\sigma}}{\mapsto} \{\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}\},$$

$$\{1, 2, 3\} \overset{\hat{\sigma}}{\mapsto} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

можно выбрать в точности совпадающими. Более того, пусть эта итоговая перестановка $\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ является произведением последовательности транспозиций следующего вида:[1]

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_n \hat{\sigma}_{n-1} \cdots \hat{\sigma}_1. \tag{2.78}$$

Справедливо следующее очевидное равенство:

$$|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = \operatorname{sign}\{1, 2, 3\} |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3|. \tag{2.79}$$

Теперь будем последовательно применять заданную последовательности транспозиций (2.78) в левой части равенства (2.79) к упорядоченной тройке столбцов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и в правой части равенства (2.79) к упорядоченной тройке чисел $\{1, 2, 3\}$. Количество этих транспозиций одно и тоже. При этом при транспозиции в определителе в левой части равенства (2.79) в силу кососимметричности меняет знак на противоположный, но и знак полученной перестановки в правой части равенства (2.79) после применения транспозиции тоже меняет знак на противоположный. Таким образом, знак равенства в выражении (2.79) после каждой транспозиции и в правой части и в левой части одновременно меняется на противоположный. В результате применения указанным образом последовательности транспозиций (2.78) мы получим искомое равенство

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}| = \operatorname{sign}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \, |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| \, . \quad \boxtimes$$

2.60. Таким образом, из выражения (2.76) для определителя $|D|$ матрицы D и полученного равенства (2.77) мы с учетом свойства 3 нормировки определителя $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3| = 1$ приходим к следующему выражению для определителя:

$$|D| = \sum_{\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3\} \in S_3} \operatorname{sign} \hat{\sigma} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3}. \tag{2.80}$$

---

[1] Очевидно, каждая транспозиция является перестановкой.

Кроме того, знаки всех шести перестановок из S_3 нам известны:

$$\operatorname{sign}\hat{\varepsilon} = \operatorname{sign}\{1,2,3\} = 1, \quad \operatorname{sign}\hat{\tau}_2 = \operatorname{sign}\{2,1,3\} = -1, \tag{2.81}$$

$$\operatorname{sign}\hat{\tau}_3 = \operatorname{sign}\{3,2,1\} = -1, \quad \operatorname{sign}\hat{\tau}_4 = \operatorname{sign}\{1,3,2\} = -1, \tag{2.82}$$

$$\operatorname{sign}\hat{\tau}_5 = \operatorname{sign}\{2,3,1\} = 1, \quad \operatorname{sign}\hat{\tau}_6 = \operatorname{sign}\{3,1,2\} = 1. \tag{2.83}$$

Таким образом, из равенства (2.80) и (2.81)–(2.83) вытекает следующее равенство:

$$|D| = a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2. \tag{2.84}$$

Формулы (2.80) и (2.84) называются формулами полного развёртывания определителя третьего порядка.

2.61. Правило Саррюса. На рисунке указано правило вычисления произведений, входящих в формулу (2.84) со знаком «+» и входящих в формулу (2.84) со знаком «−»:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.85}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.86}$$

Со знаком «+» в формулу (2.84) входят слагаемые, полученные произведением элементов, указанных в (2.85), а со знаком «-» — входят слагаемые, полученные произведением элементов, указанных в (2.86). Можно заметить, что со знаком «+» входят слагаемые, полученные произведением элементов, расположенных на главной диагонали и двух «малых» диагоналей, параллельных главной, а со знаком «-» входят слагаемые, полученные произведением элементов, расположенных на побочной диагонали, и двух «малых» диагоналей, параллельных побочной.

2.62. Определитель матрицы 2×2. Заметим, что определитель матрицы 2×2 может быть записан в форме, аналогичной форме (2.80) для определителя матрицы 3×3. Прежде всего, рассмотрим множество S_2, состоящее из двух упорядоченных пар чисел

$$\{1,2\} \quad \text{и} \quad \{2,1\}. \tag{2.87}$$

Точно также как в случае определителя 3×3 мы можем ввести перестановки на неупорядоченном множестве $N = \{1,2\}$ — этих (различных) перестановок всего две:

$$\hat{\varepsilon} : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

которые можно отождествить с результатом их применения к упорядоченной паре чисел $\{1,2\}$. Точно также как и ранее вводится определение транспозиции в перестановке и знака перестановки. При этом

$$\operatorname{sign}\hat{\varepsilon} = 1, \quad \operatorname{sign}\hat{\tau}_2 = -1. \tag{2.89}$$

Теперь мы можем формулу (2.7) для определителя матрицы D размера 2×2 переписать в следующем эквивалентном виде:

$$|D| = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\}\in S_2} \operatorname{sign}\hat{\sigma} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} = |A, B|, \tag{2.90}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

2.63. Определитель матрицы $n \times n$. Определитель матрицы D размера $n \times n$ при $n > 3$ вводится точно также как и определитель матрицы размера 3×3 как полилинейная, кососимметричная функция столбцов $|D| = |A_1, A_2, \ldots, A_n|$ матрицы $D = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|$, удовлетворяющая условию нормировки

$$|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = 1,$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее точно также рассматривается множество S_n, состоящее из $n!$ различных упорядоченных наборов из первых n натуральных чисел, полученных перестановками из упорядоченного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Знак перестановки вводится точно также как и в трехмерном случае и мы приходим к формуле полного развертывания определителя n–го порядка[1]

$$|D| = \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}\in S_n} \operatorname{sign}\hat{\sigma} a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}, \tag{2.91}$$

[1] В этой формуле мы вынуждены перейти к правильным обозначениям и, в частности, использовать два индекса — один снизу, нумерующий столбец A_k матрицы D, и один вверху, нумерующий строчку в столбце, в которой расположен элемент.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \ \ldots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}, \qquad (2.92)$$

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1} \mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad A_2 = \sum_{\sigma_2=1}^{n} a_2^{\sigma_2} \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, A_n = \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n} \mathbf{e}_{\sigma_n}, \quad (2.93)$$

причём справедливо следующее равенство, аналогичное (2.77):

$$|\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_n}| = \operatorname{sign} \hat{\sigma}\, |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = \operatorname{sign} \hat{\sigma}, \qquad (2.94)$$

$$\hat{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \in S_n, \qquad (2.95)$$

поскольку по третьему свойству нормировки $|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n| = 1$.

3. Свойства определителей третьего и n–го порядков

Докажем следующее вспомогательное утверждение:

2.64. Лемма. Если $F = F(A, B, C)$ — произвольная трилинейная (полилинейная) и кососимметрическая функция столбцов матрицы $D = \|A, B, C\|$, тогда справедливо следующее равенство:

$$F(A, B, C) = |D| F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \qquad (2.96)$$

Доказательство.

Достаточно проследить за выводом формулы полного развертывания определителя и получить следующую формулу:

$$F(A, B, C) = \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3\} \in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} F(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}). \qquad (2.97)$$

Теперь можно доказать следующее равенство, аналогичное равенству (2.77)

$$F(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \mathbf{e}_{\sigma_3}) = \operatorname{sign} \hat{\sigma} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \qquad (2.98)$$

Из формул (2.97) и (2.98) вытекает следующее равенство:

$$F(A, B, C) = \\ = \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1, \sigma_2 \sigma_3\} \in S_3} a_{\sigma_1} b_{\sigma_2} c_{\sigma_3} \operatorname{sign} \hat{\sigma} F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) |D|, \qquad (2.99)$$

$$|D| = |A, B, C|.$$

□

2.65. Для дальнейшего нам понадобится явный вид для транспонированной матрицы D^T к матрице D :

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{2.100}$$

Справедливо следующее важное утверждение:

2.66. Лемма. $|D^T| = |D|$.

Доказательство.
Введём следующие обозначения:

$$D^T = \|\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\|,$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Согласно формулам (2.80) и (2.84) справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} |D^T| = &\sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign}\hat{\sigma}\widetilde{a}_{\sigma_1}\widetilde{b}_{\sigma_2}\widetilde{c}_{\sigma_3} = \\ &= \widetilde{a}_1\widetilde{b}_2\widetilde{c}_3 - \widetilde{a}_2\widetilde{b}_1\widetilde{c}_3 - \widetilde{a}_3\widetilde{b}_2\widetilde{c}_1 - \widetilde{a}_1\widetilde{b}_3\widetilde{c}_2 + \widetilde{a}_2\widetilde{b}_3\widetilde{c}_1 + \widetilde{a}_3\widetilde{b}_1\widetilde{c}_2 = \\ &= a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 = \\ &= |D|. \end{aligned} \tag{2.101}$$

□

Из этой леммы вытекает следующая:

2.67. Лемма. При перестановке любых строк в определителе матрицы D размера 3×3 определитель меняет знак.

Доказательство.
В силу результата леммы 2.66 справедливо равенство $|D| = |D^T|$. При этом строки матрицы D являются столбцами матрицы D^T с теми же самыми номерами. При этом перестановке строк матрицы D соответствует перестановка соответствующих столбцов

матрицы D^T и при этом $|D^T|$ меняет знак. Но тогда в силу равенства $|D| = |D^T|$ определитель $|D|$ тоже меняет знак. Для наглядности рассмотрим пример: докажем, что при перестановке первых двух строк матрицы D определитель меняет знак на противоположный. Действительно, имеем

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (2.102)$$

где два раза применили операцию транспонирования матрицы и результат леммы 2.66.

□

Справедлива следующая:

2.68. Лемма. Имеет место следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.103)$$

Доказательство.

Воспользуемся формулой (2.84) полного развёртывания определителя, в которой положим $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$ и получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.104)$$

Здесь мы воспользовались формулой (2.7) полного развертывания определителя второго порядка.

□

4. Алгебраические дополнения и дополнительные миноры

2.69. Отметим, что формулы (2.80) и (2.91) полного развертывания определителей третьего и n–го порядков удобны для теоретических рассуждений, но не всегда удобны для вычисления определителей. В этом разделе мы получим рекуррентные формулы для вычисления определителей. Для этого нам понадобятся понятия *алгебраического дополнения* и *дополнительного минора*.

2.70. Пусть задана матрица $D = \|A, B, C\|$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Разложим сначала столбец A по каноническому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$A = \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k. \tag{2.105}$$

С учётом (2.105) и определения 4 определителя третьего порядка мы приходим к следующей цепочки равенств:

$$|D| = |A, B, C| = \left| \sum_{k=1}^{3} a_k \mathbf{e}_k, B, C \right| = \sum_{k=1}^{3} a_k A_{a_k}, \quad A_{a_k} := |\mathbf{e}_k, B, C|. \tag{2.106}$$

Вычислим определитель A_{a_k} для каждого $k = 1, 2, 3$.

□ Действительно, имеем

$$A_{a_1} = |\mathbf{e}_1, B, C| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2.107}$$

где мы воспользовались формулой (2.103). Справедлива цепочка равенств

$$A_{a_2} = |\mathbf{e}_2, B, C| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2.108}$$

где мы переставили местами первую и вторую строчки определителя и воспользовались результатом леммы 2.67. Далее, имеем

$$A_{a_3} = |\mathbf{e}_3, B, C| = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 \\ 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \tag{2.109}$$

где мы совершили две перестановки строк в определителе. ⊠

2.71. Итак, из формул (2.106)–(2.109) вытекает искомая *формула разложения определителя третьего порядка по первому столбцу*:

$$|D| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.110}$$

2.72. Замечание 5. Давайте обсудим знаки в формуле (2.110) при трёх слагаемых. С этой целью заметим, что знак при определителе второго порядка в формуле (2.107) для A_{a_1} совпадает с выражением $(-1)^{1+1}$, причём элемент a_1 располагается на пересечении 1–й строчки и 1–го столбца в матрице D. Аналогичным образом убеждаемся, что в формуле (2.108) для A_{a_2} знак при определителе второго порядка совпадает с числом $(-1)^{1+2}$, причём элемент a_2 располагается на пересечении первого столбца и второй строчки в матрице D. Наконец, в формуле (2.109) для A_{a_3} знак при определителе второго порядка совпадает с числом $(-1)^{1+3}$, причём элемент a_3 располагается на пересечении первого столбца и третьей строчки.

2.73. Формулу (2.110) можно переписать в следующем виде:

$$|D| = \sum_{k=1}^{3} a_k A_{a_k}, \quad A_{a_k} := (-1)^{1+k} M_{a_k}, \tag{2.111}$$

$$M_{a_1} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{a_2} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad M_{a_3} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.112}$$

Дадим определение.

2.74. Определение. «Определитель со знаком»[1] A_{a_k} называется алгебраическим дополнением элемента a_k первого столбца A матрицы $D = \|A, B, C\|$, а определитель M_{a_k} называется дополнительным минором к элементу a_k.

2.75. Правило вычисления дополнительных миноров. Для того чтобы получить дополнительный минор M_{a_1} элемента нужно из определителя третьего порядка вычеркнуть первый столбец и первую строчку. Собрать в определитель второго порядка оставшиеся элементы в том же порядке и этот определитель второго порядка и будет дополнительным минором. Аналогичным образом для того чтобы получить дополнительный минор M_{a_2} нужно из определителя третьего порядка вычеркнуть первый столбец и вторую строчку,

[1] Простите за мой французский.

а для того чтобы получить M_{a_3} нужно из определителя второго порядка вычеркнуть первый столбец и третью строчку:

$$M_{a_1}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{a_2}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{a_3}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2.76. Получим теперь формулы разложения определителя матрицы $D = \|A, B, C\|$ по второму и третьему столбцу. Сначала получим формулу разложения по второму столбцу.

$$B = \sum_{k=1}^{3} b_k \mathbf{e}_k, \quad |D| = |A, B, C| = \left| A, \sum_{k=1}^{3} b_k \mathbf{e}_k, C \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} b_k B_{b_k}, \quad B_{b_k} = |A, \mathbf{e}_k, C| = -|\mathbf{e}_k, A, C|, \quad (2.113)$$

где последнее равенство получено перестановкой первого и второго столбцов. Справедливы следующие равенства:

$$B_{b_1} = -|\mathbf{e}_1, A, C| = -\begin{vmatrix} 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (2.114)$$

$$B_{b_2} = -|\mathbf{e}_2, A, C| = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad (2.115)$$

$$B_{b_3} = -|\mathbf{e}_3, A, C| = -\begin{vmatrix} 0 & a_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_3 & c_3 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ 0 & a_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.116}$$

2.77. Таким образом, из равенств (2.108)–(2.116) приходим к следующей формуле:

$$|D| = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.117}$$

2.78. Введём дополнительные миноры M_{b_1}, M_{b_2} и M_{b_3} как определители матриц 2×2, полученных из матрицы D вычёркиванием соответствующих строк и столбцов, на пересечении которых располагаются элементы b_1, b_2 и b_3 второго столбца B:

$$M_{b_1}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{b_2}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$M_{b_3}: \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

2.79. По аналогии с определением 12 «определители со знаком» B_{b_1}, B_{b_2} и B_{b_3} назовём *алгебраическими дополнениями* соответствующих элементов второго столбца матрицы D, а определители M_{b_1}, M_{b_2} и M_{b_3} назовём *дополнительными минорами* к соответствующим элементам второго столбца матрицы D. Нетрудно заметить, что имеют место следующие равенства:

$$B_{b_k} = (-1)^{2+k} M_{b_k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.118}$$

2.80. Наконец, аналогичным образом устанавливаются следующие формулы разложения определителя матрицы D по элементам третьего столбца:

$$C = \sum_{k=1}^{3} c_k \mathbf{e}_k, \quad |D| = |A, B, C| = \sum_{k=1}^{3} c_k C_{c_k}, \tag{2.119}$$

$$C_{c_k} := |A, B, \mathbf{e}_k| = -|A, \mathbf{e}_k, B| = |\mathbf{e}_k, A, B|, \tag{2.120}$$

$$C_{c_1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{2.121}$$

$$C_{c_2} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{2.122}$$

$$C_{c_3} = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 1 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a_3 & b_3 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{2.123}$$

$$|D| = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2.124}$$

2.81. По аналогии введём дополнительные миноры M_{c_1}, M_{c_2} и M_{c_3} к соответствующим элементам последнего столбца, как определители матриц 2×2, полученных вычеркиванием столбца и строчки, на пересечении которых расположены соответствующие элементы третьего столбца C:

$$M_{c_1} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{2.125}$$

$$M_{c_2} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{2.126}$$

$$M_{c_3} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{2.127}$$

$$C_{c_k} = (-1)^{3+k} M_{c_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.128}$$

Определители C_{c_k} называются *алгебраическими дополнениями* к элементам c_k третьего столбца C, а определители M_{c_k} называются *дополнительными минорами* к соответствующим элементам третьего столбца.

2.82. Теперь наша задача получить разложение определителя матрицы D по её строчкам. Сначала получим формулу разложения определителя матрицы D по первой строчке. С этой целью воспользуемся равенством

$$|D| = |D^T|, \quad D^T = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 & \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{a}_2 & \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{a}_3 & \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{a}_1 \\ \widetilde{a}_2 \\ \widetilde{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \widetilde{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{c}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся формулой (2.110) разложения определителя по первому столбцу и получим следующее равенство:

$$|D| = |D^T| = \widetilde{a}_1 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \\ \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{vmatrix} - \widetilde{a}_2 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{b}_3 & \widetilde{c}_3 \end{vmatrix} + \widetilde{a}_3 \begin{vmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{c}_1 \\ \widetilde{b}_2 & \widetilde{c}_2 \end{vmatrix} =$$
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$
$$= a_1 A_{a_1} + b_1 B_{b_1} + c_1 C_{c_1}. \quad (2.129)$$

Аналогичным образом получаем из формул (2.117) и (2.124) получаем следующие формулы разложения определителя матрицы D по второй и третьей строчке:

$$|D| = a_2 A_{a_2} + b_2 B_{b_2} + c_2 C_{c_2}, \quad (2.130)$$

$$|D| = a_3 A_{a_3} + b_3 B_{b_3} + c_3 C_{c_3}. \quad (2.131)$$

2.83. Фальшивые разложения определителя. Рассмотрим матрицу 3×3, полученной из матрицы D заменой первого столбца столбцом

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \widetilde{D} = \begin{pmatrix} x & b_1 & c_1 \\ y & b_2 & c_2 \\ z & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $\widetilde{D}$ мы разложим по первому столбцу и получим следующее равенство:

$$|\widetilde{D}| = x A_{a_1} + y A_{a_2} + z A_{a_3}. \quad (2.132)$$

Отметим, что если

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (2.133)$$

то определитель $|\widetilde{D}| = 0$, поскольку у него в этих случаях будут два одинаковых столбца. Отсюда и из (2.132) приходим к следующим равенствам:

$$b_1 A_{a_1} + b_2 A_{a_2} + b_3 A_{a_3} = 0, \quad c_1 A_{a_1} + c_2 A_{a_2} + c_3 A_{a_3} = 0. \tag{2.134}$$

Эти равенства называются *фальшивыми разложениями* определителя. Аналогичным образом можно получить и все оставшиеся фальшивые разложения по столбцам:

$$a_1 B_{b_1} + a_2 B_{b_2} + a_3 B_{b_3} = 0, \quad c_1 B_{b_1} + c_2 B_{b_2} + c_3 B_{b_3} = 0, \tag{2.135}$$

$$a_1 C_{c_1} + a_2 C_{c_2} + a_3 C_{c_3} = 0, \quad b_1 C_{c_1} + b_2 C_{c_2} + b_3 C_{c_3} = 0. \tag{2.136}$$

Кроме того, справедливы следующие фальшивые разложения определителя по строчкам:

$$a_2 A_{a_1} + b_2 B_{b_1} + c_2 C_{c_1} = 0, \quad a_3 A_{a_1} + b_3 B_{b_1} + c_3 C_{c_1} = 0, \tag{2.137}$$

$$a_1 A_{a_2} + b_1 B_{b_2} + c_1 C_{c_2} = 0, \quad a_3 A_{a_2} + b_3 B_{b_2} + c_3 C_{c_2} = 0, \tag{2.138}$$

$$a_1 A_{a_3} + b_1 B_{b_3} + c_1 C_{c_3} = 0, \quad a_2 A_{a_3} + b_2 B_{b_3} + c_2 C_{c_3} = 0. \tag{2.139}$$

2.84. Алгебраические дополнения и дополнительные миноры в случае определителя порядка n. Рассмотрим определитель матрицы $D = \|A_1, A_2, \cdots, A_n\|$ размера $n \times n$: $|D| = |A_1, A_2, \cdots, A_n|$. Разложим k–й столбец A_k по базису

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \ \mathbf{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \quad k = \overline{1, n}.$$

Тогда справедливо следующее равенство:

$$|D| = \left| A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j, \quad \mathcal{A}_k^j := |A_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, A_n| \,.$$

2.85. Теперь вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_k^j$ элемента a_k^j.

☐ Действительно,

$$\mathcal{A}_k^j = |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & 0 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & 0 & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & 1 & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & 0 & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Теперь многократно переставляя k–й столбец мы получим следующий определитель

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^j &= |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ &= (-1)^{k-1} |\mathbf{e}_j, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ &= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь многократно мы должны переставить j–ую строчку. В результате получим равенство

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой для вычисления блочной матрицы, аналогичной формуле (2.68), и получить следующую формулу:

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j, \tag{2.140}$$

где символом $\overline{M}^j_k$ мы обозначили *дополнительный минор* к элементу a^j_k. Черта сверху означает, что мы из определителя $\det A$ вычеркнули j–ю строчку и k–й столбец:

$$\overline{M}^j_k = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a^1_1 & \cdots & a^1_{k-1} & a^1_{k+1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{j-1}_1 & \cdots & a^{j-1}_{k-1} & a^{j-1}_{k+1} & \cdots & a^{j-1}_n \\ \hline a^{j+1}_1 & \cdots & a^{j+1}_{k-1} & a^{j+1}_{k+1} & \cdots & a^{j+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_{k-1} & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{array}\right|.$$

Дополнительный минор $\overline{M}^j_k$ — это определитель $(n-1)$–го порядка.

2.86. Теорема. *Справедливы следующие формулы*:

$$|D| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\overline{M}^j_k a^j_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\overline{M}^j_k a^j_k. \tag{2.141}$$

2.87. Фальшивое разложение определителя порядка n. Рассмотрим определитель

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n|, \tag{2.142}$$

у которого вместо столбца A_k находится столбец B_p, который зададим его разложением по арифметическому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ следующим образом:

$$B_p = \sum_{j=1}^{n} b^j_p \mathbf{e}_j. \tag{2.143}$$

После подстановки (2.143) в (2.142) получим равенство

$$\begin{aligned} &|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} b^j_p\,|A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} b^j_p \mathcal{A}^j_k, \end{aligned} \tag{2.144}$$

где $\mathcal{A}^j_k$ — это алгебраическое дополнение элемента a^j_k матрицы A. Теперь возьмём в качестве $B_p = A_p$. Тогда если $p \neq k$ мы получим равенство

$$0 = |A_1, \ldots, A_{k-1}, A_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a^j_p \mathcal{A}^j_k,$$

поскольку в определителе два столбца равны в этом случае.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

2.88. Теорема. *Справедливы следующие формулы*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} |D|, & \text{если} \quad p = k; \\ 0, & \text{если} \quad p \neq k. \end{cases} \tag{2.145}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^q \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} |D|, & \text{если} \quad q = j; \\ 0, & \text{если} \quad q \neq j. \end{cases} \tag{2.146}$$

5. Важные теоремы об определителях третьего порядка

Справедлива следующая:

2.89. Теорема. *Для того чтобы определитель квадратной матрицы* 3×3

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{2.147}$$

был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие числа α, β, γ, *не равные одновременно нулю, что*

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = O, \tag{2.148}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Выражение (2.148) эквивалентно следующим равенствам:

$$\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = 0, \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = 0, \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = 0. \end{cases}$$

Достаточность. Пусть выполнено равенство (2.148). Без ограничения общности предположим, что $\alpha \neq 0$, тогда справедливо следующее равенство:

$$A = -\frac{\beta}{\alpha} B - \frac{\gamma}{\alpha} C.$$

Подставим это выражение для определителя, записанного как функция от столбцов матрицы:

$$|D| = |A, B, C| = \left| -\frac{\beta}{\alpha}B - \frac{\gamma}{\alpha}C, B, C \right| = \\ = -\frac{\beta}{\alpha}|B, B, C| - \frac{\gamma}{\alpha}|C, B, C| = 0,$$

поскольку в определителях $|B, B, C|$ и $|C, B, C|$ имеются два одинаковых столбца.

Необходимость. Пусть $|D| = 0$. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть $a_1 = b_1 = c_1 = 0$. Докажем, что в этом случае найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.149)$$

$\square$ Действительно, рассмотрим следующее уравнение с неизвестными x, y, z :

$$x \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.150)$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \qquad (2.151)$$

Полученную приведенную систему двух уравнений относительно трех неизвестных x, y, z можно переписать в следующем виде:

$$x \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что три произвольных столбца из $\mathbb{K}^{2\times 1}$ всегда *линейно зависимы*, поэтому существует нетривиальное решение этой системы уравнений

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Второй случай. Пусть $(a_1, b_1, c_1) \neq (0, 0, 0)$. Без ограничения общности предположим, что $a_1 \neq 0$. В противном случае мы можем переставить местами столбцы. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = |A, B, C| = \left| A, B - \frac{b_1}{a_1} A, C - \frac{c_1}{a_1} A \right|. \tag{2.152}$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} &\left| A, B - \frac{b_1}{a_1} A, C - \frac{c_1}{a_1} A \right| = \\ &\qquad = \left| A, B, C - \frac{c_1}{a_1} A \right| - \frac{b_1}{a_1} \left| A, A, C - \frac{c_1}{a_1} A \right| = \\ &\qquad = |A, B, C| - \frac{c_1}{a_1} |A, B, A| - \frac{b_1}{a_1} \left| A, A, C - \frac{c_1}{a_1} A \right| = \\ &\qquad = |A, B, C|. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{2.153}$$

Проведём вычисления.

$$\begin{aligned} B - \frac{b_1}{a_1} A &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \frac{b_1}{a_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{b_1}{a_1} a_2 \\ \frac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 \\ b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.154}$$

$$C - \frac{c_1}{a_1} A = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{pmatrix}. \tag{2.155}$$

Продолжим цепочку равенств (2.152).

$$0 = |D| = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 - \frac{b_1}{a_1} a_2 & c_2 - \frac{c_1}{a_1} a_2 \\ a_3 & b_3 - \frac{b_1}{a_1} a_3 & c_3 - \frac{c_1}{a_1} a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 & c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 & c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{vmatrix} = a_1|D_1, D_2| \Rightarrow |D_1, D_2| = 0, \tag{2.156}$$

поскольку $a_1 \neq 0$, где

$$D_1 = \begin{pmatrix} b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix}.$$

В силу результата леммы 2.10 этой лекции найдутся такие числа β и γ, не равные одновременно нулю, что

$$\beta D_1 + \gamma D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta\left(b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2\right) + \gamma\left(c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2\right) = 0, \\ \beta\left(b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3\right) + \gamma\left(c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3\right) = 0. \end{cases} \tag{2.157}$$

Но тогда будет выполнено следующее равенство тоже

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.158}$$

Заметим, что

$$\beta \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 - \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \\ b_3 - \dfrac{b_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \beta\left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \frac{b_1}{a_1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right] = \beta\left[B - \frac{b_1}{a_1}A\right], \tag{2.159}$$

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 - \dfrac{c_1}{a_1}a_2 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{a_1}a_3 \end{pmatrix} = \gamma\left[C - \frac{c_1}{a_1}A\right]. \tag{2.160}$$

Таким образом, в силу равенств (2.158)–(2.160) вытекает следующее равенство:

$$\beta\left[B - \frac{b_1}{a_1}A\right] + \gamma\left[C - \frac{c_1}{a_1}A\right] = O, \tag{2.161}$$

из которого вытекает равенство

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = O, \quad \alpha = -\frac{b_1}{a_1}\beta - \frac{c_1}{a_1}\gamma, \tag{2.162}$$

причём $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$ и тем более $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$.

□

Справедлива следующая:

2.90. Теорема. *Если* $A = \|A_1, A_2, A_3\|$ *и* $B = \|B_1, B_2, B_3\|$ *— две квадратные матрицы размера* 3×3, *то* $|AB| = |A||B|$.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы нам удобно использовать два индекса в формуле (2.91) полного развертывания определителя. Итак, пусть

$$A = \|A_1, A_2, A_3\| \quad \text{и} \quad B = \|B_1, B_2, B_3\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ b_1^3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ b_2^3 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} b_3^1 \\ b_3^2 \\ b_3^3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $C := AB$, тогда согласно известному результату первой лекции имеем

$$C = \|C_1, C_2, C_3\|, \quad C_k = A \cdot B_k = \sum_{\sigma_k=1}^{3} A_{\sigma_k} b_k^{\sigma_k} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.163}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \left| \sum_{\sigma_1=1}^{3} A_{\sigma_1} b_1^{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{3} A_{\sigma_2} b_2^{\sigma_2}, \sum_{\sigma_3=1}^{3} A_{\sigma_3} b_3^{\sigma_3} \right| =$$
$$= \sum_{\sigma_1=1}^{3} \sum_{\sigma_2=1}^{3} \sum_{\sigma_3=1}^{3} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} \left| A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3} \right|. \tag{2.164}$$

При выводе этого равенства мы воспользовались трилинейностью (полилинейностью) определителя третьего порядка, а в силу кососимметричности определителя имеем

$$|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}| = 0 \quad \text{для} \quad \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \tag{2.165}$$

с повторениями, поскольку тогда в этом определителе будет по меньшей мере два одинаковых столбца. Следовательно, точно также как и при выводе формулы полного развёртывания определителя из (2.164) приходим к следующей формуле:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} \left|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}\right|. \quad (2.166)$$

Точно также как при доказательстве формулы (2.77) приходим к равенству

$$\left|A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}\right| = \operatorname{sign}\hat{\sigma}\left|A_1, A_2, A_3\right|. \quad (2.167)$$

Следовательно, из формул (2.166) и (2.167) вытекает следующая цепочка равенств:

$$|C| = |C_1, C_2, C_3| = \\ = |A_1, A_2, A_3| \sum_{\hat{\sigma}=\{\sigma_1,\sigma_2\sigma_3\}\in S_3} \operatorname{sign}\hat{\sigma} b_1^{\sigma_1} b_2^{\sigma_2} b_3^{\sigma_3} = |A||B|. \quad (2.168)$$

□

6. Обратная матрица

Справедлива следующая:

2.91. Теорема. *Квадратная матрица* D *размера* 3×3 *обратима, тогда и только тогда, когда* $|D| \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица D обратима и D^{-1} — обратная. Тогда имеет место следующее равенство:

$$D \cdot D^{-1} = I_3 \Rightarrow |D||D^{-1}| = |I_3| = 1 \Rightarrow |D| \neq 0. \quad (2.169)$$

Достаточность. Пусть $|D| \neq 0$ и матрица D имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.170)$$

Рассмотрим матрицу $D^{\vee}$, составленную из соответствующих алгебраических дополнений к элементам матрицы D^T :

$$D^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{a_1} & A_{a_2} & A_{a_3} \\ B_{b_1} & B_{b_2} & B_{b_3} \\ C_{c_1} & C_{c_2} & C_{c_3} \end{pmatrix}. \quad (2.171)$$

Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$D \cdot D^{\vee} = D^{\vee} \cdot D = |D| I_3. \quad (2.172)$$

□ Действительно, докажем, например, равенство $DD^{\vee} = |D|I_3$. В силу (2.106), (2.108), (2.119), (2.129)–(2.131), (2.134)–(2.139) справедливы следующие равенства:

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_1^1 = a_1 A_{a_1} + b_1 B_{b_1} + c_1 C_{c_1} = |D|,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_2^1 = a_1 A_{a_2} + b_1 B_{b_2} + c_1 C_{c_2} = 0,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_3^1 = a_1 A_{a_3} + b_1 B_{b_3} + c_1 C_{c_3} = 0,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_1^2 = a_2 A_{a_1} + b_2 B_{b_1} + c_2 C_{c_1} = 0,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_2^2 = a_2 A_{a_2} + b_2 B_{b_2} + c_2 C_{c_2} = |D|,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_3^2 = a_2 A_{a_3} + b_2 B_{b_3} + c_2 C_{c_3} = 0,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_1^3 = a_3 A_{a_1} + b_3 B_{b_1} + c_3 C_{c_1} = 0,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_2^3 = a_3 A_{a_2} + b_3 B_{b_2} + c_3 C_{c_2} = 0,$$

$$\{D \cdot D^{\vee}\}_3^3 = a_3 A_{a_3} + b_3 B_{b_3} + c_3 C_{c_3} = |D|. \quad \boxtimes$$

Итак, если $|D| \neq 0$, то обратная матрица существует и имеет следующий вид:

$$D^{-1} = \frac{1}{|D|} D^{\vee} \Rightarrow D^{\vee} = |D| D^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D^{\vee}| = |D|^3 |D^{-1}| = |D|^3 \frac{1}{|D|} = |D|^2.$$

□

2.92. Формулы Крамера. Справедлива следующая важная теорема, которая носит название формулы Крамера вычисления решения системы трёх уравнений относительно трёх переменных:

2.93. Теорема. *Если определитель*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.173}$$

то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3, \end{cases} \tag{2.174}$$

имеет единственное решение, которое имеет следующий вид:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}. \tag{2.175}$$

Доказательство.

Сейчас ограничимся доказательством единственности. Именно,докажем, что если решение существует, то оно даётся указанными формулами. Запишем систему уравнений (2.174) в следующем эквивалентном виде:

$$xA + yB + zC = d, \quad D = \|A, B, C\|, \tag{2.176}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$|d, B, C| = |xA + yB + zC, B, C| = \\ = x\,|A, B, C| + y\,|B, B, C| + z\,|C, B, C| = x\,|A, B, C|\,, \tag{2.177}$$

$$|A, d, C| = |A, xA + yB + zC, C| = \\ = x|A, A, C| + y|A, B, C| + z|A, C, C| = y|A, B, C|, \tag{2.178}$$

$$|A, B, d| = |A, B, xA + yB + zC| = \\ = x|A, B, A| + y|A, B, B| + z|A, B, C| = z|A, B, C|. \tag{2.179}$$

Поскольку при $|D| \neq 0$ решение рассматриваемой системы уравнений существует, а значит имеет вид (2.175).

□

7. Необходимые и достаточные условия коллинеарности и компланарности векторов

Справедлива следующая важная:

2.94. Теорема. *Для того чтобы два вектора* $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ *и* $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, *заданные координатами относительно общей декартовой системе координат в пространстве* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены равенства*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.180}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны. Тогда они линейно зависимы и поэтому найдутся такие числа α_1 и α_2, что выполнено равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0), \tag{2.181}$$

которое в координатах можно переписать в следующем виде:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{2.182}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в пространстве, то из (2.182) вытекают следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 = 0, \tag{2.183}$$

которые можно переписать в виде равенств для столбцов

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.184}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.185}$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.186}$$

Но тогда из леммы 2.10 вытекает, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.187}$$

Осталось воспользоваться равенством $|D^T| = |D|$.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (2.180). Если все числа $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, то вектор $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$ и поэтому коллинеарен любому вектору, в частности, вектору $\mathbf{a}_2$. Пусть теперь хотя бы одно число из трёх отлично от нуля. Пусть, например, $x_1 \neq 0$. Тогда имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_2 = \frac{x_2}{x_1} y_1 \Leftrightarrow \lambda := \frac{x_2}{x_1}, \quad x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1. \qquad (2.188)$$

Кроме того,

$$\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_2 x_1 = z_1 x_2 \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1. \qquad (2.189)$$

Итак, имеем

$$\mathbf{a}_2 = x_2 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + z_2 \mathbf{e}_3 = \lambda (x_1 \mathbf{e}_1 + y_1 \mathbf{e}_2 + z_1 \mathbf{e}_3) = \lambda \mathbf{a}_1. \qquad (2.190)$$

Значит, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны.

□

Справедливо следующее важное следствие:

2.95. Лемма. Для того чтобы два вектора $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на плоскости, заданные координатами $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2\}$ относительно общей декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ на плоскости, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.191)$$

Доказательство. Рассмотрим общую декартову систему координат в пространстве $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$, где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к рассматриваемой плоскости. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ имеют координаты

$$\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, 0\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, 0\}.$$

Осталось теперь применить результат теоремы 2.94 при $z_1 = z_2 = 0$ и получить утверждение леммы.

□

Справедлива следующая:

2.96. Теорема. *Для того чтобы три вектора* $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$, *заданные своими координатами относительно общей декартовой системы координат в пространстве* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, *были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено равенство*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.192)$$

Доказательство.

Как нами было ранее доказано, три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ компланарны, тогда и только тогда, когда найдутся такие числа α_1, α_2 и α_3, что

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0). \tag{2.193}$$

Из (2.193) вытекает следующее равенство:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)\mathbf{e}_1 + \\ + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{2.194}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в пространстве, то из (2.194) вытекают следующие равенства:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \\ = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0, \tag{2.195}$$

которые можно переписать в виде столбцов

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.196}$$

при $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0, 0, 0)$. Из результата теоремы 2.89 вытекает, что равенство (2.196) эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Осталось воспользоваться равенством $|D^T| = |D|$.

$\square$

ГЛАВА 3

Линейные пространства

1. Аксиомы линейного пространства

3.1. Определение. Множество векторов $\mathcal{L}$ с определенными на нём операциями сложения векторов и умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, не выводящие сумму векторов и произведение вектора на число из множества $\mathcal{L}$, называется линейным пространством, если справедливы следующие свойства:

ВП1. коммутативность сложения: для любых векторов x и y

$$x + y = y + x;$$

ВП2. ассоциативность сложения: для любых векторов x, y и z

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

ВП3. свойство нулевого вектора: существует нулевой вектор θ такой, что для любого вектора x

$$x + \theta = x;$$

ВП4. существование противоположного вектора: для любого вектора x существует такой вектор $-x$, что

$$x + (-x) = \theta;$$

ВП5. свойство единицы: для любого вектора x

$$1 \cdot x = x;$$

ВП6. ассоциативность умножения на число: для любого вектора x и любых чисел α и β

$$(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x);$$

ВП7. дистрибутивность относительно сложения векторов: для любых векторов x и y и любого числа α

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

ВП8. дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора x и любых чисел α и β

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

3.2. Аксиомы **ВП1–ВП4** относятся к внутреннему закону композиции «$+$»; аксиомы **ВП5**, **ВП6** относятся к внешнему закону композиции «$\cdot$» умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, а аксиомы **ВП7**, **ВП8** связывают свойства внутреннего закона композиции «$+$» и умножения векторов на числа «$\cdot$» из поля $\mathbb{K}$.

3.3. Предложение. *Нулевой вектор линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть существуют два вектора $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{L}$ такие, что

$$\theta_1 + a = a \quad \text{и} \quad \theta_2 + a = a \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{L}.$$

Тогда с учетом аксиомы **ВП1** коммутативности сложения и аксиомы нулевого вектора **ВП3** справедлива следующая цепочка равенств:

$$\theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1.$$

□

3.4. Предложение. *Противоположный вектор к вектору линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть

$$a + b = \theta \quad \text{и} \quad a + c = \theta.$$

Тогда с учетом аксиом коммутативности **ВП1**, ассоциативности **ВП2** и нулевого вектора **ВП3** справедлива следующая цепочка равенств:

$$b = b + \theta = \theta + b = (a + c) + b = (c + a) + b = c + (a + b) = c + \theta = c.$$

□

3.5. Предложение. *Уравнение*

$$a + x = b \tag{3.1}$$

для любых $a, b \in \mathcal{L}$ имеет единственное решение

$$x = b + (-a). \tag{3.2}$$

Доказательство. Действительно, из (3.1), а также аксиом коммутативности **ВП1** и ассоциативности **ВП2** вытекают равенства

$$\begin{aligned} x = x + \theta = x + (a + (-a)) = \\ = (x + a) + (-a) = (a + x) + (-a) = b + (-a). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Поэтому если решение уравнения (3.1) существует, то оно имеет вид (3.2). Обратно справедливы следующие равенства:

$$a+(b+(-a)) = a+((-a)+b) = (a+(-a))+b = \theta+b = b+\theta = b, \tag{3.4}$$

где мы воспользовались аксиомами **ВП1–ВП4**. □

3.6. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*
$$0 \cdot a = \theta \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8** имеем
$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$
Это равенство можно переписать в следующем виде:
$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a,$$
из которого в силу Предложения 3.5 и **ВП4** вытекает равенство
$$0 \cdot a = 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = \theta.$$
□

3.7. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*
$$k \cdot \theta = \theta \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{K}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8** и **ВП3** справедливы следующие равенства:
$$k \cdot \theta = k \cdot (\theta + \theta) = k \cdot \theta + k \cdot \theta.$$
Отсюда получаем
$$k \cdot \theta + k \cdot \theta = k \cdot \theta.$$
Из Предложения 3.5 и **ВП4** имеем
$$k \cdot \theta = k \cdot \theta + (-k \cdot \theta) = \theta.$$
□

3.8. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*
$$-a = (-1) \cdot a \quad \text{для любого} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП5**, **ВП8** и Предложения 3.6 справедлива следующая цепочка равенств:
$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = \theta \Rightarrow -a = (-1) \cdot a.$$
□

3.9. Предложение. *Аксиома* **ВП1** *коммутативности сложения вытекает из остальных аксиом и при постулирование дополнительной аксиомы единственности противоположного вектора.*

Доказательство. Действительно, в силу Предложения 3.8 и аксиомы **ВП2** вытекает следующая цепочка равенств:
$$(a+b)+(-(b+a)) = (a+b)+(-1)\cdot(b+a) = a+b+(-1)\cdot b+(-1)\cdot a = \\ = a + \theta + (-1) \cdot a = a + (-1) \cdot a = \theta, \tag{3.8}$$

Введем следующие обозначения:

$$c_1 := a + b, \quad c_2 := b + a.$$

С учетом результата предложения 3.8 равенство (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$c_1 + (-1) \cdot c_2 = \theta,$$

т.е. противоположным вектором к вектору c_1 будет вектор $(-1) \cdot c_2$. В силу единственности противоположного вектора и результата (3.7) предложения 3.8 имеем равенство

$$(-1) \cdot c_1 = (-1) \cdot c_2 \Leftrightarrow (-1)(-1) \cdot c_1 = (-1)(-1) \cdot c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

Следовательно, $a + b = b + a$. □

2. Линейная комбинация. Линейная зависимость

3.10. Определение. Пусть дано конечное число векторов линейного пространства $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ и числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa \in \mathbb{K}$, которых столько же сколько и векторов. Всякий вектор $x \in \mathcal{L}$, представимый в виде

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q,$$

называется линейной комбинацией элементов $a, b, c, \ldots, q$. Говорят также, что x линейно выражается через $a, b, c, \ldots, q$.

3.11. Определение. Линейная комбинация векторов $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ называется тривиальной, если

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \kappa = 0,$$

и называется нетривиальной, если среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

3.12. Определение. Система векторов $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов $a, b, c, \ldots, q$, равная нулевому вектору; иначе говоря, если справедливо равенство

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta,$$

где среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

3.13. Определение. Система векторов $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \kappa = 0.$$

3.14. Лемма. Система векторов, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство. Действительно, рассмотрим равенство $\alpha \cdot x = \theta$. Если $x \neq \theta$, то это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Обратно, равенство $\alpha \cdot \theta = \theta$ имеет место, например, при $\alpha = 1$. $\square$

3.15. Лемма. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.

Доказательство. Пусть известно, что в системе векторов $a, b, c, \ldots, q$ часть, состоящая, например, из векторов $c, \ldots, q$ линейно зависима. Тогда найдется такая их линейная комбинация, что

$$\gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta$$

и числа $\gamma, \ldots, \kappa$ одновременно в ноль не обращаются. Но тогда справедливо следующее равенство:

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta,$$

причем это нетривиальная линейная комбинация векторов. Значит, вся система векторов $a, b, c, \ldots, q$ линейно зависима. $\square$

3.16. Лемма. Если вся система векторов линейно независима, то ее любая часть векторов тоже линейно независима.

Доказательство. Действительно, пусть некоторая часть системы векторов $a, b, c, \ldots, q$ является линейно зависимой, но тогда в силу леммы 3.15 и вся система векторов является линейно зависимой. Следовательно, любая часть этой системы векторов линейно независима. $\square$

3.17. Лемма. Для того чтобы система векторов, состоящая не менее чем из двух векторов, была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы существовал какой-то вектор этой системы, линейно выражающийся через остальные векторы системы.

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов $a, b, c, \ldots, q$ является линейно зависимой. Тогда существует такая линейная их комбинация

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta,$$

в которой числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ одновременно в ноль не обращаются. Например, пусть $\alpha \neq 0$. Тогда имеет место равенство

$$a = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot b - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot c - \cdots - \frac{\kappa}{\alpha} \cdot q,$$

т.е. вектор a линейно выражается через оставшиеся векторы рассматриваемой системы.

Достаточность. Пусть, например, вектор a линейно выражается через оставшиеся векторы системы:

$$a = \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \dots + \kappa \cdot q.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(-1) \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \dots + \kappa \cdot q = \theta.$$

Это нетривиальная линейная комбинация векторов рассматриваемой системы. Значит, семейство векторов $a, b, c, \dots, q$ линейно зависимо. $\square$

3.18. Лемма. Пусть $a_1, \dots, a_k$ какие–нибудь векторы линейного пространства $\mathcal{L}$. Пусть каждый из векторов $c_1, c_2, \dots, c_n$ того же линейного пространства $\mathcal{L}$ линейно выражаются через $a_1, \dots, a_k$:

$$c_1 = \alpha_{11} \cdot a_1 + \dots + \alpha_{k1} \cdot a_k, \tag{3.9}$$

$$c_2 = \alpha_{12} \cdot a_1 + \dots + \alpha_{k2} \cdot a_k, \tag{3.10}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{3.11}$$

$$c_n = \alpha_{1n} \cdot a_1 + \dots + \alpha_{kn} \cdot a_k. \tag{3.12}$$

Пусть, далее, $b \in \mathcal{L}$ линейно выражается через семейство векторов $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_n$:

$$b = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_k \cdot a_k + \mu_1 \cdot c_1 + \dots + \mu_n \cdot c_n. \tag{3.13}$$

Тогда вектор $b \in \mathcal{L}$ линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_k$.

Доказательство. Действительно, из (3.9)–(3.13) вытекает следующее равенство:

$$b = (\lambda_1 + \mu_1\alpha_{11} + \dots + \mu_n\alpha_{1n}) \cdot a_1 + \dots + \\ + (\lambda_k + \mu_1\alpha_{k1} + \dots + \mu_n\alpha_{kn}) \cdot a_k. \tag{3.14}$$

$\square$

3. Теорема о базисном миноре

3.19. Определение. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Рассмотрим произвольные $k \in [1, \min\{m, n\}]$ строк матрицы A и произвольные $k \in [1, \min\{m, n\}]$ столбцов матрицы A. Определитель матрицы $B \in \mathbb{K}^{k \times k}$, образованной из элементов на пересечении выделенных k строк и k столбцов и записанный в том же порядке, что и в матрице A, называется минором порядка k данной матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_{i_1}^m & \cdots & a_{i_2}^m & \cdots & a_{i_k}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\ a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}.$$

3.20. Определение. Минор матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ порядка $k \in [1, \min\{m, n\}]$ называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка $k+1$, если они существуют, равны нулю.

3.21. Лемма. Если у матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ существуют базисный минор порядка $k \in \mathbb{N}$, а также существуют миноры порядков $k+2, \ldots, k+p$ при $p \geqslant 2$, то они все равны нулю.

Доказательство. Доказательство основано на методе математической индукции. Заметим, что минор порядка $k+2$ можно разложить, например, по первой строчке. Это разложение будет состоять из суммы определителей порядка $k+1$ с какими-то коэффициентами. Осталось заметить, что согласно определению базисного минора все миноры порядка $k+1$ равны нулю. Аналогично и в общем случае вытекает утверждение леммы. $\square$

3.22. Определение. Столбцы и строки матрицы, пересекающие базисный минор, называются базисными столбцами и базисными строками.

3.23. Теорема. Теорема о базисном миноре. *Базисные столбцы матрицы линейно независимы. Всякий столбец матрицы через них линейно выражается.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор расположен на пересечении первых r строк и первых r столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Первое утверждение. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \ \cdots, \ A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Второе утверждение. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r+1$, полученный «окаймлением» базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1,r}$ и $s \in \overline{r+1,m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора. Таким образом, во всех случаях определитель (3.15) $r+1$ порядка равен нулю.

Теперь мы можем разложить этот определитель (3.15) по s–й строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1,m}, \tag{3.16}$$

где $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_r, \mathcal{M}$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки, причем

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку это базисный минор рассматриваемой матрицы.

Отметим, что по своему построению алгебраические дополнения к элементам s–ой строчки не зависят от элементов этой строчки. Итак, из (4.2) вытекает, что

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1,m}.$$

Отсюда получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \dots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \dots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.$$

$\square$

3.24. Аналогичное утверждение имеет место для базисных строк матрицы A.

4. Линейные оболочки и подпространства линейного пространства

3.25. Определение. Пусть дано семейство векторов $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathcal{L}$ и числа $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^r \in \mathbb{K}$. Линейной оболочкой семейства векторов $b_1, b_2, \dots, b_r \in \mathcal{L}$ называется следующее множество:

$$L(b_1, b_2, \dots, b_r) :=$$
$$= \left\{ \alpha^1 \cdot b_1 + \alpha^2 \cdot b_2 + \dots + \alpha^r \cdot b_r : \ \forall\, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^r \in \mathbb{K} \right\}. \quad (3.17)$$

3.26. Лемма. Пусть семейство векторов $a_1, \dots, a_p$ принадлежат линейной оболочке семейства векторов $b_1, \dots, b_r$. Тогда

$$L(a_1, \dots, a_p) \subset L(b_1, \dots, b_r).$$

Доказательство. По условию $a_j \in L(b_1, \dots, b_r)$ для любого $j = \overline{1, p}$. Поэтому найдутся такие числа

$$\alpha_j^k \in \mathbb{K}, \quad k = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p},$$

что справедливо следующее равенство:

$$a_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^k \cdot b_k. \quad (3.18)$$

Пусть $c \in L(a_1, \dots, a_p)$. Тогда найдутся такие числа $\beta^j \in \mathbb{K}$ при $j = \overline{1, p}$, что в силу (3.18) справедливы следующие равенства:

$$c = \sum_{j=1}^{p} \beta^j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{p} \beta^j \cdot \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{r} \gamma^k \cdot a_k \in L(a_1, \dots, a_r), \quad (3.19)$$

где
$$\gamma^k := \sum_{j=1}^{p} \beta^j \alpha_j^k.$$
$\square$

3.27. Определение. Подмножество $P \subset \mathcal{L}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейным подпространством, если
$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in P$$
для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и для всех векторов $a, b \in P$.

3.28. Лемма. Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_r)$ семейства векторов $\{a_1, \ldots, a_r\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ является его подпространством.

Доказательство. Действительно, пусть векторы $b, c \in L(a_1, \ldots, a_r)$, тогда
$$b = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \cdot a_k, \quad c = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \cdot a_k.$$
$$\alpha \cdot b + \beta \cdot c = \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha\alpha^k + \beta\beta^k\right) \cdot a_k = \sum_{k=1}^{r} \delta^k \cdot a_k \in L(a_1, \ldots, a_r),$$
где $\delta^k = \alpha\alpha^k + \beta\beta^k$. $\square$

3.29. Лемма. Линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ само является линейным пространством над тем же полем.

Доказательство. Несложное доказательство предлагаем провести читателю. $\square$

3.30. Следствие. *Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_k)$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ само является линейным пространством над тем же полем.*

5. Теорема о двух системах векторов одного линейного пространства

3.31. Теорема. *Если семейство векторов*
$$c_1, \ldots, c_s, b_1, \ldots, b_r \in \mathcal{L},$$
причем
$$c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r), \quad s > r,$$
то векторы $c_1, \ldots, c_s$ линейно зависимы.

Доказательство. Введём обозначения.

$$\mathbf{X} = (b_1, \ldots, b_r), \quad \mathbf{Y} = (c_1, \ldots, c_s). \tag{3.20}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию найдутся такие числа a_k^j при $j = \overline{1, r}$ и $k = \overline{1, s}$, что

$$\begin{array}{c} c_1 = a_1^1 \cdot b_1 + a_1^2 \cdot b_2 + \cdots + a_1^r \cdot b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_s = a_s^1 \cdot b_1 + a_s^2 \cdot b_2 + \cdots + a_s^r \cdot b_r \end{array} \tag{3.21}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (3.20) и (3.22) выражение (3.21) можно переписать в следующем виде:

$$(c_1, \ldots, c_s) = (b_1, \ldots, b_r) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

или в компактной форме записи

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{3.24}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix}, \quad z^1, z^2, \ldots, z^s \in \mathbb{K} \tag{3.25}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \cdots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \cdots + a_s^2 z^s = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \cdots + a_s^r z^s = 0. \end{array} \right. \tag{3.26}$$

Эту систему уравнений можно переписать в следующем виде:

$$z^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^r \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^r \end{pmatrix} + \dots + z^s \begin{pmatrix} a_s^1 \\ a_s^2 \\ \vdots \\ a_s^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{r\times 1}.$$

Заметим, что любые $s > r \geqslant 1$ столбцов из $\mathbb{K}^{r\times 1}$ линейно зависимы. Поэтому существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{s\times 1}. \tag{3.27}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $c_1, \dots, c_s$:

$$z_0^1 \cdot c_1 + \dots + z_0^s \cdot c_s = \mathbf{Y} \cdot Z_0 = \mathbf{X} \cdot AZ_0 = \mathbf{X} \cdot O = \theta \in \mathcal{L}. \tag{3.28}$$

Следовательно, векторы $c_1, \dots, c_s$ линейно зависимы. □

3.32. Следствие. *Если векторы* $c_1, \dots, c_s \in L(b_1, \dots, b_r)$ *и линейно независимы, то* $s \leqslant r$.

6. Размерность и базис линейного пространства

3.33. Определение. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathcal{L}$ называется *бесконечномерным*.

3.34. Определение. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если выполнены следующие два условия:

1. в $\mathcal{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;
2. любое семейство векторов из $\mathcal{L}$, состоящее из $n+1$ векторов линейно зависимо.

Число n называется размерностью линейного пространства $\mathcal{L}$ и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Линейное пространство $\{\theta\}$ называется нульмерным.

3.35. Примеры. Линейное пространство $\{\theta\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.
P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

3.36. Определение. *Базисом* конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимое семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Столбец коэффициентов X называется столбцом координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

3.37. Определение. Семейство векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \in \mathcal{L}$ называется *полным*, если любой вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этого семейства.

3.38. Лемма. Если семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис линейного пространства $\mathcal{L}$, то линейная оболочка $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.

Доказательство. Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L},$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

□

3.39. Лемма. Разложение по базису линейного пространства единственно.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — это строчка, состоящая из векторов базиса в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1) \cdot \mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2) \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + (x^n - y^n) \cdot \mathbf{e}_n = \theta.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем

$$x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n.$$

□

3.40. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении индекс встречается ровно два раза один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \mathbf{e}_i = x^i \cdot \mathbf{e}_i.$$
2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,
$$a_k b^k c^k,$$
хотя
$$(a_k + b_k)c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c^k.$$

Введем важный *символ Кронекера*:
$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$
Заметим, что
$$a_j \delta_k^j = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_k^j = a_k.$$

3.41. Теорема. *Все базисы конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности* $\dim \mathcal{L}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда
$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathcal{L}, \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$
Следовательно, в силу следствия 3.32 из теоремы 3.31 имеют место два неравенства
$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$
С другой стороны, любое семейство из $n+1$ векторов
$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$
поэтому в силу теоремы 3.31 семейство $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,
$$n = \dim \mathcal{L}.$$

□

3.42. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} (x^k + y^k) \cdot \mathbf{e}_k, \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x^k) \cdot \mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

7. Ранг системы векторов

3.43. Определение. Рангом системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется $\dim L(a_1, \ldots, a_k)$ — размерность линейной оболочки этой системы векторов как линейного пространства. Будем использовать следующее обозначение

$$\mathrm{rk}\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

3.44. Следствие. *Если векторы $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$ одного и того же линейного пространства $\mathcal{L}$, то ранг системы векторов $c_1, \ldots, c_s$ не выше ранга системы векторов $b_1, \ldots, b_r$.*

Доказательство. Пусть $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ — это базис в $L(c_1, \ldots, c_s)$. В частности, имеем

$$k_p = \mathrm{rk}\{c_1, \ldots, c_s\}.$$

Пусть $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ — это базис в $L(b_1, \ldots, b_r)$. В частности,

$$j_d = \mathrm{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

Заметим, что

$$L(b_1, \ldots, b_r) = L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}).$$

Поскольку $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, то имеем

$$c_{k_1}, \ldots, c_{k_p} \in L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}),$$

причем семейства векторов $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ и $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ по построению являются линейно независимыми. Поэтому в силу следствия 3.32 получаем неравенство

$$k_p \leqslant j_d \Rightarrow \mathrm{rk}\{c_1, \ldots, c_s\} \leqslant \mathrm{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

□

3.45. Следствие. *Если векторы $c_1, \dots, c_s \in L(b_1, \dots, b_r)$, а векторы $b_1, \dots, b_r \in L(c_1, \dots, c_s)$, то ранги систем векторов $b_1, \dots, b_r$ и $c_1, \dots, c_s$ совпадают.*

Доказательство. Действительно, дважды применяя результат следствия 3.44, получим два неравенства

$$\operatorname{rk}\{c_1, \dots, c_s\} \leqslant \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_r\} \quad \text{и} \quad \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_r\} \leqslant \operatorname{rk}\{c_1, \dots, c_s\},$$

из которых вытекает равенство

$$\operatorname{rk}\{c_1, \dots, c_s\} = \operatorname{rk}\{b_1, \dots, b_r\}.$$

□

8. Ранг матрицы

3.46. Определение. Рангом матрицы $A = \|A_1, \dots, A_n\|$ называется $\dim L(A_1, \dots, A_n)$. **Обозначение**. $\operatorname{rk} A$.

3.47. Теорема. Теорема о ранге матрицы. *Ранг произвольной матрицы равен порядку ее базисного минора.*

Доказательство. Случай $\operatorname{rk} A = 0$. В этом случае $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ — нулевая матрица и поэтому у нее нет отличных от нуля миноров. Поэтому порядок базисного минора этой матрицы считается равным нулю.

Случай $\operatorname{rk} A > 0$. В этом случае матрица $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ненулевая. Для определенности пусть

$$A = \|A_1, \dots, A_n\|,$$

а $A_1, \dots, A_r$ — базисные столбцы матрицы A, где $r \in [1, n]$ — это порядок базисного минора матрицы A. Тогда, с одной стороны, базисные столбцы $A_1, \dots, A_r$ этой матрицы в силу теоремы о базисном миноре являются линейно независимыми. С другой стороны, любой столбец A_k матрицы A по той же теореме о базисном миноре линейно выражается через r базисных столбцов:

$$A_k \in L(A_1, \dots, A_r),\ k = \overline{1, n} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_n) = L(A_1, \dots, A_r).$$

Значит, имеем $\operatorname{rk} A = r$. □

3.48. Следствие. *Ранг семейства строк матрицы A равен порядку базисного минора этой матрицы.*

Доказательство. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ нулевая, то утверждение очевидно. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ не нулевая. Рассмотрим транспонированную матрицу $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Тогда строчки матрицы

A перейдут в столбцы матрицы A^T. В силу результата теоремы 3.47 имеем $\operatorname{rk} A^T = r$, где r — порядок базисного минора матрицы A^T. С другой стороны, при транспонировании, очевидно, что базисные столбцы переходят в базисные строки, а базисные строки — в базисные столбцы. Таким образом, порядок базисного минора не меняется. Поэтому порядок базисного минора матрицы A^T совпадает с порядком базисного минора матрицы A. Таким образом, $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$. Осталось воспользоваться результатом теоремы 3.47. $\square$

3.49. Следствие. *Если* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, *то* $\operatorname{rk} A$ *не превосходит* $\min\{m, n\}$.

Доказательство. Действительно, порядок базисного минора не превосходит числа строк и числа столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Стало быть, приходим к выводу о том, что $\operatorname{rk} A = r \leqslant \min\{m, n\}$. $\square$

Справедливо следующее важное для дальнейшего утверждение:

3.50. Лемма. Если $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$, то для произведения этих матриц $C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{rk} C \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$C = \|C_1, \ldots, C_n\| = \left\| \begin{matrix} C^1 \\ \vdots \\ C^m \end{matrix} \right\|$$

тогда имеем

$$C_k = A \cdot B_k = \sum_{j=1}^{p} b_k^j A_j \Rightarrow L(C_1, \ldots, C_n) \subset L(A_1, \ldots, A_p), \tag{3.30}$$

$$C^j = A^j \cdot B = \sum_{k=1}^{p} a_k^j B^k \Rightarrow L(C^1, \ldots, C^m) \subset L(B^1, \ldots, B^p). \tag{3.31}$$

Из вложений (3.30) и (3.31) и следствия 3.44 вытекает утверждение леммы. $\square$

9. Геометрия подпространств. Прямая сумма подпространств

3.51. Лемма. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это два подпространства в линейном пространстве $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда

1. $\dim \mathcal{Q} \leqslant \dim \mathcal{P}$;
2. если $\dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P}$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство. Шаг 1. Действительно, пусть $a_1, \ldots, a_r$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $b_1, \ldots, b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому

$$b_1, \ldots, b_s \in L(a_1, \ldots, a_r).$$

В силу следствия 3.32 из теоремы 3.31 имеем $\dim \mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim \mathcal{P}$.

Шаг 2. Действительно, пусть $b_1, \ldots, b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т. е. $s = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $c \in \mathcal{P}$, что $c \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $b_1, \ldots, b_s$. Следовательно, семейство

$$b_1, \ldots, b_s, c$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. □

3.52. Определение. Пусть L_1 и L_2 — произвольные линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. Совокупность

$$L = \{a = a_1 + a_2 : \ a_1 \in L_1, \ a_2 \in L_2\}$$

называется суммой подпространств. **Обозначение.** $L_1 + L_2$.

3.53. Лемма. Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in L = L_1 + L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда найдутся такие $a_1, b_1 \in L_1$ и $a_2, b_2 \in L_2$, что справедливы равенства

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b = (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1) + (\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2) \in L_1 + L_2,$$

поскольку $\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \in L_1$, $\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \in L_2$. □

3.54. Определение. Совокупность $N = \{a : \ a \in L_1, \ a \in L_2\}$ называется пересечением подпространств L_1 и L_2. **Обозначение.** $L_1 \cap L_2$.

3.55. Лемма. $L_1 \cap L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in L_1 \cap L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда $a, b \in L_1$ и $a, b \in L_2$ и поэтому

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_1, \quad \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_2 \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_1 \cap L_2.$$

□

3.56. Лемма. Объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств а в общем случае не является подпространством в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a \in L_1$, $a \notin L_2$ и $b \in L_2$, $b \notin L_1$. Тогда, вообще говоря, $a+b \notin L_1 \cup L_2$. Действительно, рассмотрим на плоскости две различные прямые, проходящие через начало некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Тогда сумма двух любых ненулевых векторов таких, что один вектор лежит на одной прямой, а другой вектор лежит на другой прямой. Тогда их сумма не будет лежать на этих прямых. □

3.57. Теорема. *Справедливо следующее равенство*:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \tag{3.32}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\dim(L_1 \cap L_2) \equiv k, \quad \dim L_1 \equiv k + l_1, \quad \dim L_2 \equiv k + l_2.$$

В этих обозначениях нам нужно доказать, что

$$\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2, \tag{3.33}$$

поскольку

$$\dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = k + l_1 + k + l_2 - k = k + l_1 + l_2.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$. Дополним этот базис до базисов подпространств L_1 и L_2 :

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1} - \text{базис в} \quad L_1, \tag{3.34}$$

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2} - \text{базис в} \quad L_2. \tag{3.35}$$

Докажем, что набор векторов

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2} \tag{3.36}$$

образуют базис в $L_1 + L_2$, откуда и будет следовать, что $\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2$.

Полнота. Прежде всего заметим, что любой вектор $x \in L_1 + L_2$ можно представить в виде линейной комбинации семейства векторов (3.36), поскольку $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и в силу (3.34), (3.35) векторы x_1 и x_2 раскладываются по базисам (3.34), (3.35).

Линейная независимость. Пусть существует нетривиальный набор чисел

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{l_1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l_2} \in \mathbb{K},$$

такой, что

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} + \gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 + \cdots + \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2} = \theta. \tag{3.37}$$

Равенство (3.37) можно переписать в следующем виде:

$$a := \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} = \\ = -\gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \cdots - \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2}. \tag{3.38}$$

Из (3.38) с учетом (3.34) и (3.35) вытекает, что $a \in L_1$ и $a \in L_2$, т.е. $a \in L_1 \cap L_2$. А поскольку $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$, то найдутся такие числа $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство

$$a = \delta_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \delta_k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{3.39}$$

Из равенств (3.38) и (3.39) вытекает, что

$$\delta_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \delta_k \cdot \mathbf{e}_k = -\gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \dots - \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2}. \tag{3.40}$$

По построению (см. (3.35)) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{l_2}$ является линейно независимым семейством в линейном пространстве L_2. Поэтому равенство (3.40) возможно тогда и только тогда, когда

$$\delta_1 = \dots = \delta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_{l_2} = 0. \tag{3.41}$$

Из (3.37) и (3.41) вытекает равенство

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} = \theta. \tag{3.42}$$

В силу (3.34) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{l_1}$ линейно независимо в L_1. Тогда равенство (3.42) возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_{l_1} = 0. \tag{3.43}$$

Из (3.41) и (3.43) вытекает, что равенство (3.37) возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_{l_1} = \gamma_1 = \dots = \gamma_{l_2} = 0, \tag{3.44}$$

т.е. семейство векторов (3.36) линейно независимо. Стало быть, семейство (3.36) образует базис в $L_1 + L_2$. Поэтому справедливо равенство (3.33). □

3.58. Определение. Подпространства L_1 и L_2 называются дизъюнктными, если их пересечение состоит из нулевого вектора θ, т.е. если $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

3.59. Определение. Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется прямой, если представление любого вектора $x \in L$ в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ единственно. **Обозначение**. $L = L_1 \oplus L_2$.

3.60. Теорема. *Для того чтобы сумма подпространств L_1 и L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$ и $z_0 \in L_1 \cap L_2$. Для произвольного $x \in L$ справедливо следующее разложение:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2. \tag{3.45}$$

Но тогда справедливо следующее разложение:

$$x = (x_1 + z_0) + (x_2 - z_0), \quad x_1 + z_0 \in L_1, \quad x_2 - z_0 \in L_2. \tag{3.46}$$

Поскольку разложение (3.45) должно быть единственным, то с учетом (3.46) получаем равенства

$$x_1 = x_1 + z_0, \quad x_2 = x_2 - z_0 \Rightarrow z_0 = \theta. \tag{3.47}$$

Следовательно, $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Достаточность. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Предположим, что для $x \in L = L_1 + L_2$ справедливы следующие два разложения:

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2. \tag{3.48}$$

Но тогда

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in L_1 \cap L_2 = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \tag{3.49}$$

т.е. разложение любого $x \in L = L_1 + L_2$ единственно и поэтому $L = L_1 \oplus L_2$. □

3.61. Теорема. *Для того чтобы линейное пространство* $\mathcal{L}$ *разлагалось в прямую сумму подпространств* L_1 *и* L_2, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия*: a) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}$, b) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2$, то согласно результату теоремы 3.60 вытекает, что $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ и $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Поэтому с учетом теоремы 3.57 имеем $\dim \mathcal{L} = \dim L_1 + \dim L_2$.

Достаточность. Поскольку $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, то нам достаточно доказать, что $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Очевидно, что $L_1 + L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$, причем в силу 3.57

$$\begin{aligned} \dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = \\ = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Поэтому в силу леммы 3.51 о монотонности размерности имеем $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. И, следовательно,

$$\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2.$$

□

10. Изоморфизм линейных пространств

3.62. Определение. Взаимно однозначное отображение

$$\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2,$$

линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ называется изоморфизмом, если для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство

$$\phi(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot \phi(x_1) + \alpha^2 \cdot \phi(x_2).$$

3.63. Лемма. Изоморфизм $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ удовлетворяет свойству

$$\phi(\theta_1) = \theta_2,$$

где $\theta_1 \in \mathcal{L}_1$ и $\theta_2 \in \mathcal{L}_2$ — соответствующие нулевые векторы.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\phi(\theta_1) = \phi(0 \cdot \theta_1) = 0 \cdot \phi(\theta_1) = \theta_2.$$

□

3.64. Теорема. *Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.*

Доказательство. Шаг 1. Построение изоморфизма. Сначала докажем, что любое линейное пространство $\mathcal{L}$ размерности $n = \dim \mathcal{L}$ изоморфно линейному пространству столбцов $\mathbb{K}^{n \times 1}$.

Пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — строчка, составленная из векторов некоторого базиса в $\mathcal{L}$. Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ справедливо разложение

$$\mathbf{x} = x^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{3.51}$$

В силу единственности разложения вектора по базису и того, что любой набор чисел $Y = (y^1, \ldots, y^n)^T$ по формуле

$$\mathbf{y} = y^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{3.52}$$

порождает некоторый вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$, то определено взаимно однозначное отображение

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = X, \quad X = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad \mathbf{x} = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \tag{3.53}$$

$$\phi_{\mathbf{E}} : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^{n \times 1}.$$

□ Действительно, с однородной стороны, проверим однозначность отображения (3.53). Имеем

$$\mathbf{x} = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow (x_1^k - x_2^k) \cdot \mathbf{e}_k = \theta \Leftrightarrow x_1^k = x_2^k \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, докажем однозначность обратного к (3.53) отображения. Имеем

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) = \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2) = X \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = x^k \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x_2}. \quad \boxtimes$$

Теперь докажем, что отображение (3.53) линейное. Пусть

$$\mathbf{x}_1 = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} = x^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = (x_1^1 + x_1^2, \ldots, x_1^n + x_2^n)^T =$$
$$= (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T + (x_2^1, \ldots, x_2^n)^T = \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) + \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2),$$

$$\phi_{\mathbf{E}}(\alpha \cdot \mathbf{x}) = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)^T = \alpha (x^1, \ldots, x^n)^T = \alpha \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}).$$

Итак, $\phi_{\mathbf{E}}$ — изоморфизм.

Шаг 2. Изоморфность двух линейных пространств одной размерности. Итак, пусть у нас имеются два изоморфизма

$$\phi_{1\mathbf{E}_1} : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \phi_{2\mathbf{E}_2} : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad n = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2.$$

Тогда определено взаимно однозначное отображение

$$\phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2} : \mathbb{K}^{1\times n} \to \mathcal{L}_2, \quad \phi_{2\mathbf{E}_2}(\mathbf{x}) = X \Leftrightarrow \mathbf{x} = \phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X),$$

$$\phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}_2 \cdot (X_1 + X_2) = \mathbf{E}_2 \cdot X_1 + \mathbf{E}_2 \cdot X_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \\ = \phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X_1) + \phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X_2),$$

$$\phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(\alpha X) = \mathbf{E}_2 \cdot (\alpha X) = \alpha \cdot \mathbf{E}_2 \cdot X = \alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}(X).$$

Итак, $\phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2}$ тоже изоморфизм. Тогда имеем

$$\phi = \phi_{1\mathbf{E}_1} \circ \phi^{-1}_{2\mathbf{E}_2} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2.$$

Предлагаем студентам доказать несложное утверждение о том, что композиция изоморфизмов является изоморфизмом. Тогда взаимно однозначное отображение ϕ является искомым изоморфизмом. ☐

3.65. Теорема. *Между двумя конечномерными линейными пространствами различных размерностей не существует изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ — это два линейных пространства размерностей $n = \dim \mathcal{L}_n$ и $m = \dim \mathcal{L}_m$, причем $m < n$ и существует тем не менее изоморфизм

$$\phi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{L}_m.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}_n$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — базис в $\mathcal{L}_m$ и, кроме того, $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset \mathcal{L}_m$, где $\phi_j = \phi(\mathbf{e}_j)$. Таким образом, имеем

$$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset \mathcal{L}_m = L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m).$$

Значит, семейство векторов $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ линейно зависимо в $\mathcal{L}_m$ в силу доказанной ранее теоремы 3.31 о системе двух векторов, поскольку $n > m$. Таким образом, существует следующая нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору

$$c^k \cdot \phi_k = \theta_2 \Leftrightarrow c^k \cdot \phi(\mathbf{e}_k) = \phi(\theta_1) \Rightarrow \phi(c^k \cdot \mathbf{e}_k - \theta_1) = \theta_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow c^k \cdot \mathbf{e}_k - \theta_1 = \phi^{-1}(\theta_2) = \theta_1 \Rightarrow c^k \cdot \mathbf{e}_k = \theta_1,$$

что противоречит линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}_n$. Здесь мы воспользовались результатом леммы 3.63, а также тем, что ϕ^{-1} изоморфизм, поскольку ϕ изоморфизм. □

11. Примеры решения задач

3.66. Пример. Линейное пространство. Является ли линейным пространством множество $X = \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Q}\}$ над полем $\mathbb{Q}$, если операции сложения и умножения на числа стандартные?

Решение. Легко видеть, что множество X замкнуто относительно операций сложения и относительно умножения на рациональное число. Поскольку это множество является подмножеством множества действительных чисел, а введенные на нем операции — стандартные, свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности выполнены автоматически. Тривиальным элементом по сложению является $0+0\cdot\sqrt{2}$, а обратным к элементу $a+b\sqrt{2}$ является элемент $-a - b\sqrt{2}$. Следовательно, X — линейное пространство.

3.67. Пример. Линейная зависимость. Каким условиям должен удовлетворять скаляр x, чтобы столбцы

$$(0, x, -1)^T, \quad (x, 0, 1)^T, \quad (1, -1, x)^T \tag{3.54}$$

из $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимы? Каким будет ответ на этот же вопрос при замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$?

Решение. Образуем следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Вычислим определитель этой матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x(2 - x^2). \tag{3.56}$$

Таким образом, столбцы (3.54) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x = 0$ или $x = \pm\sqrt{2}$.

В том случае если рассматривается линейное пространство $\mathbb{Q}^3$, то эти столбцы линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x = 0$, поскольку числа $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3.68. Пример. Базис и координаты. Доказать, что многочлены

$$1, \quad t - 1, \quad (t-1)^2, \quad (t-1)^3 \tag{3.57}$$

образуют базис в P^3 — вещественных многочленов степени не выше 3, и найти координаты многочлена

$$p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1 \tag{3.58}$$

в этом базисе.

Решение. Шаг 1. Докажем, что (3.57) — базис в P^3. Сначала докажем, что многочлены (3.57) линейно независимы. Рассмотрим их линейную комбинацию

$$a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3 = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.59}$$

в которой сделаем замену $s = t - 1$ и получим равенство

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = 0 \quad \text{для всех} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{3.60}$$

Из равенства (3.60) при $s = 0$ получаем, что $a_0 = 0$. Теперь продифференцируем по s обе части равенства (3.60) и в точке $s = 0$ получим равенство $a_1 = 0$ и так далее. В итоге получим, что равенство (3.60), а с ним и равенство (3.59) возможно только при $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т.е. многочлены (3.57) линейно независимы.

Докажем теперь полноту семейства многочленов (3.57) в P^3. Действительно, для этого нужно воспользоваться формулой Тейлора в точке $t = 1$:

$$p(t) = p(1) + p'(1)(t-1) + \frac{p''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{p'''(1)}{6}(t-1)^3 \tag{3.61}$$

для любого $p(t) \in P^3$, поскольку

$$p^{(k)}(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 4.$$

Формула Тейлора (3.61) и есть разложение произвольного $p(t) \in P^3$ по линейно независимой системе многочленов (3.57). Таким образом, эта система полна и, значит, образует базис в P^3.

Шаг 2. Найдем теперь координаты многочлена (3.58) в базисе (3.57). Действительно, воспользуемся формулой (3.61). Справедливы равенства

$$p(1) = 3, \quad p'(1) = 4, \quad p''(1) = 2, \quad p'''(1) = 6. \tag{3.62}$$

Из (3.61) и (3.62) получаем формулу

$$p(t) = 3 + 4(t-1) + (t-1)^2 + (t-1)^3. \tag{3.63}$$

Значит, координаты многочлена (3.58) в базисе (3.57) следующие:

$$X = (3, 4, 1, 1)^T.$$

3.69. Пример. Линейные подпространства. В линейном пространстве P^n вещественных многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ задано подмножество $p(2) = 0$. Требуется доказать, что это множество является линейным подпространством и найти в нем базис.

Решение. Очевидно, что если

$$p_1(2) = p_2(2) = 0, \quad p_1(t), p_2(t) \in P^n,$$

то и

$$\alpha p_1(2) + \beta p_2(2) = 0.$$

Таким образом, указанное множество является линейным подпространством.

Пусть $p(t) \in P^n$ — фиксированный многочлен. Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 2$ и получим следующее равенство:

$$p(t) = p'(2)(t-2) + \frac{p''(2)}{2!}(t-2)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(2)}{n!}(t-2)^n, \qquad (3.64)$$

поскольку $p(2) = 0$. Следовательно, полиномы

$$t-2, \quad (t-2)^2, \cdots, (t-2)^n \qquad (3.65)$$

образуют полное семейство в рассматриваемом линейном подпространстве. Как и в предыдущем примере, несложно показать, что семейство полиномов (3.65) является линейно независимым. Поэтому семейство (3.65) образует базис в линейном подпространстве

$$\{p(t) \in P^n : \; p(2) = 0\}.$$

3.70. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1^T = A_1$ и $A_2^T = A_2$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2)^T = \alpha^1 A_1^T + \alpha^2 A_2^T = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2.$$

Шаг 2. Размерность всего пространства $\mathbb{R}^{N\times N}$ равна N^2. Если $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $A^T = A$, то имеем

$$\{A\}^j_k = \{A\}^k_j \quad \text{при} \quad j,k = \overline{1,N},$$

т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{jj} E_{jj} + \sum_{j<k} a_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj} \right), \quad (3.66)$$

где E_{jk} — матрица, состоящая из нулей за исключением j–ой строчки и k–го столбца, где располагается число 1. Докажем, что семейство матриц, состоящих из наборов $\{E_{jj}\}$ и $\{E_{jk} + E_{kj}\}$, образует базис в данном линейном подпространстве.

☐ Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^{N} b_{jj} E_{jj} + \sum_{j<k} b_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj} \right) = O \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j,k=1,1}^{N,N} c_{jk} E_{jk} = O, \quad c_{kj} = c_{jk} = b_{jk}$$

Поскольку семейство матриц $\{E_{jk}\}$, очевидно, линейно независимо, то приходим к выводу о том, что $c_{jk} = 0$. Следовательно, все коэффициенты $b_{jk} = 0$. Значит, семейство линейно независимо. Полнота этого семейства следует из (3.66). ⊠

Тогда базис этого линейного подпространства симметричных матриц прежде всего состоит из следующих N матриц:

$$E_{11}, \cdots, E_{NN}. \quad (3.67)$$

В силу симметричности матриц следующие матрицы дополняют матрицы (3.67) до базиса во всем пространстве

$$F_{jk} = E_{jk} + E_{kj} \quad \text{при} \quad j \neq k. \quad (3.68)$$

Вычислим число этих матриц. С этой целью заметим, что базис во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ состоит из семейства матриц

$$\{E_{jk}\}, \quad j,k = \overline{1,N}. \quad (3.69)$$

Этот базис можно записать как состоящий из матриц (3.67) и из матриц

$$\{E_{jk}\} \quad \text{при} \quad j > k, \quad (3.70)$$

$$\{E_{jk}\} \quad \text{при} \quad j < k. \quad (3.71)$$

Число матриц (3.70) и (3.71) одинаково и равно M, которое можно вычислить

$$2M + N = N^2 \Leftrightarrow M = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (3.72)$$

Нетрудно понять, что число матриц (3.68) тоже равно M. Следовательно, базисных матриц (3.67) и (3.68) в линейном подпространстве симметричных матриц равно

$$M + N = \frac{N(N-1)}{2} + N = \frac{N(N+1)}{2}. \tag{3.73}$$

3.71. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1^T = -A_1$ и $A_2^T = -A_2$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2)^T = \alpha^1 A_1^T + \alpha^2 A_2^T = -(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2).$$

Шаг 2. Поскольку для матриц этого линейного подпространства

$$\{A\}_k^j = -\{A\}_j^k \quad \text{при} \quad j, k = \overline{1, N},$$

то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1N} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k<j} a_{jk} \left(E_{jk} - E_{kj}\right). \tag{3.74}$$

Поэтому базис этого линейного подпространства образуют матрицы вида

$$D_{jk} = E_{jk} - E_{kj}, \quad k > j. \tag{3.75}$$

Докажем, что это семейство матриц образует базис в данном линейном подпространстве.

☐ Действительно, пусть выполнено равенство

$$\sum_{k>j} b_{jk} D_{jk} = O \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k>j} b_{jk} E_{jk} - \sum_{k>j} b_{jk} E_{kj} = O,$$

$$\sum_{j\neq k} c_{jk} E_{jk} = O, \quad c_{jk} = \begin{cases} b_{jk}, & \text{если} \quad k > j; \\ -b_{jk}, & \text{если} \quad k < j. \end{cases}$$

Поскольку семейство матриц $\{E_{jk}\}$ линейно независимо, то линейно независимо и любое его под семейство. Следовательно, приходим к выводу о том, что $c_{jk} = 0$, т.е. $b_{jk} = 0$. Линейная независимость доказана. Полнота семейства $\{D_{jk}\}$ следует из равенства (3.74). ☒

Можно заметить, что количество этих базисных матриц совпадает с числом матриц (3.68). Поэтому размерность линейного подпространства антисимметричных матриц равно

$$\frac{N(N-1)}{2}. \tag{3.76}$$

3.72. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом (т.е. сумма диагональных элементов матрицы равна нулю), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} A_2 = 0$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2 = 0.$$

Шаг 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $\operatorname{tr} A = 0$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN} = 0. \tag{3.77}$$

Отсюда получаем равенство

$$\begin{aligned} A = \sum_{j\neq k} a_{jk}E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj}E_{jj} + a_{NN}E_{NN} = \\ = \sum_{j\neq k} a_{jk}E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj}E_{jj} - \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj}E_{NN} = \\ = \sum_{j\neq k} a_{jk}E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj}(E_{jj} - E_{NN}). \end{aligned} \tag{3.78}$$

Докажем, что семейство матриц, состоящее из наборов $\{E_{jk}\}$ при $j \neq k \in \overline{1, N}$ и $\{E_{jj} - E_{NN}\}$ при $j = \overline{1, N}$ образуют базис в данном линейном подпространстве.

□ Действительно, рассмотрим равенство

$$\sum_{j\neq k} b_{jk}E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{jj}(E_{jj} - E_{NN}) = O \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

из которого получаем равенство

$$\sum_{j\neq k} b_{jk}E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{jj}E_{jj} + b_0E_{NN} = O, \quad b_0 = -\sum_{j=1}^{N} b_{jj}.$$

В силу линейной независимости семейства $\{E_{jk}\}$ приходим к выводу о том, что $b_{jk} = 0$. Следовательно, линейная независимость данного семейства матриц доказана. Полнота следует из равенства (3.78). ⊠

Заметим, что число элементов базиса равно

$$N^2 - N + (N-1) = N^2 - 1.$$

3.73. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N\times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собою прямую сумму двух своих линейных подпространств: линейного подпространства симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$) и линейного подпространства антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$).

Решение. Произвольную матрицу $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ можно единственным образом представить в виде суммы симметричной матрицы из $\mathbb{R}^{N\times N}$ и антисимметричной матрицы из $\mathbb{R}^{N\times N}$ следующим образом:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Докажем единственность разложения.

□ Действительно, пусть имеют место два разложения

$$A = A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}_s, \quad B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}_{as}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \Leftrightarrow \mathbb{R}^{N\times N}_s \ni A_1 - A_2 = B_2 - B_1 \in \mathbb{R}^{N\times N}_{as},$$

$$(A_1 - A_2)^T = (B_2 - B_1)^T \Rightarrow A_1 - A_2 = B_1 - B_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 - A_2 = O = B_1 - B_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2. \quad (3.79)$$

Поэтому прямая сумма линейного подпространства симметричных матриц $\mathbb{R}^{N\times N}_s$ и линейного подпространства антисимметричных матриц $\mathbb{R}_{as}^{N\times N}$ образует все линейное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$:

$$\mathbb{R}_s^{N\times N} \oplus \mathbb{R}_{as}^{N\times N} = \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Поэтому

$$\dim \mathbb{R}_s^{N\times N} + \dim \mathbb{R}_{as}^{N\times N} = \dim \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Проверяем

$$\frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2.$$

3.74. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собою прямую сумму двух своих линейных подпространств: линейного подпространство матриц с нулевым следом и линейного подпространства матриц λI_N, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — единичная матрица.

Решение. Шаг 1. Существование. Прежде всего докажем существование указанного разложения. Действительно, пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$A - \lambda I_N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} - \lambda I_N =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\lambda \end{pmatrix} := A_0, \quad (3.80)$$

где число $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda = \frac{a_{11} + \cdots + a_{NN}}{N}. \quad (3.81)$$

Тогда матрица A_0 в правой части равенства (3.80) имеет нулевой след. Тогда из (3.80) имеем

$$A = A_0 + \lambda I_N, \quad \operatorname{tr} A_0 = 0. \quad (3.82)$$

Шаг 2. Единственность. Пусть разложений два

$$A = A_{01} + \lambda_1 I_N = A_{02} + \lambda_2 I_N, \quad \operatorname{tr} A_{01} = \operatorname{tr} A_{02} = 0. \quad (3.83)$$

В силу линейности операции взятия следам матрицы имеем

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 N = \lambda_2 N \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow A_{01} = A_{02}.$$

Таким образом, разложение (3.82) единственное.

3.75. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^N$ представляет собой прямую сумму своих линейных подпространств: линейного подпространства столбцов, сумма элементов которого равна нулю, и линейного подпространства столбцов вида $\lambda \cdot (1, ..., 1)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение. Шаг 1. Существование. Пусть $A \in \mathbb{R}^N$:

$$A - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda \\ \vdots \\ a_N - \lambda \end{pmatrix} := A_0, \quad (3.84)$$

где

$$\lambda = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}.$$

Таким образом, приходим к разложению

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 + \cdots + b_N = 0. \quad (3.85)$$

Шаг 2. Единственность. Пусть разложений два:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

где $b_1 + \cdots + b_N = c_1 + \cdots + c_N = 0$. Из (3.86) получаем равенства

$$a_1 + \cdots + a_N = \lambda_1 N = \lambda_2 N \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow (b_1, \ldots, b_N) = (c_1, \ldots, c_N),$$

т.е. разложение (3.85) единственно.

3.76. Пример. Экзаменационная задача. Показать, что множество $\mathbb{C}^N$ является линейным пространством как над полем вещественных чисел $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$, так и над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Найти размерности этих линейных пространств и указать какие–либо базисы.

Решение. Шаг 1. Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$ и $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$ действительно линейные пространства.

Шаг 2. Базис в $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Пусть $A \in \mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Тогда имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_N\mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

причем семейства столбцов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$, очевидно, линейно независимо. Значит, $\dim \mathbb{C}^N(\mathbb{C}) = N$.

Шаг 2. Базис в $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$. Пусть $A \in \mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Тогда имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} a_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \operatorname{Im} a_1 \\ \vdots \\ i \operatorname{Im} a_N \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{Re} a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \operatorname{Re} a_N \cdot \mathbf{e}_N + \\ + \operatorname{Im} a_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + \operatorname{Im} a_N \cdot \mathbf{f}_N, \quad (3.87)$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{f}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

Значит, $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2N$.

3.77. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $P_{2N}(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше $2N$). Является ли линейным подпространством линейного пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$ множество всех полиномов F, удовлетворяющих условиям: $F(-1) = F(1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой–либо базис этого пространства.

Решение. Шаг 1. Нетрудно доказать, что указанное множество полиномов образует линейное подпространство линейного пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$.

Шаг 2. Пусть $F(t) \in P_{2N}(\mathbb{R})$ и $F(-1) = F(1) = 0$. Тогда имеем

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{2N-1} t^{2N-1} + a_{2N} t^{2N}, \quad (3.88)$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2N-1} + a_{2N} = 0, \quad (3.89)$$

$$F(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 + \dots - a_{2N-1} + a_{2N} = 0. \quad (3.90)$$

Из равенств (3.89) и (3.90) получаем следующие равенства:

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2N} = 0 \Rightarrow a_0 = -a_2 - a_4 - \dots - a_{2N}, \quad (3.91)$$

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2N-1}=0 \Rightarrow a_1=-a_3-a_5-\cdots-a_{2N-1}. \quad (3.92)$$

Подставляя (3.91) и (3.92) в (3.88) получим выражение

$$F(t)=a_2(t^2-1)+a_3(t^3-t)+\cdot+a_{2N-1}(t^{2N-1}-t)+a_{2N}(t^{2N}-1). \quad (3.93)$$

Нетрудно проверить, что семейство полиномов

$$t^2-1,\ t^3-t,\ t^4-1,\ t^5-t,\ \ldots,t^{2N-1}-t,\ t^{2N}-1$$

образует базис указанного линейного подпространства и его размерность равна $2N-2$.

3.78. Пример. Вычислительная задача. Для каждого $p\in\mathbb{R}$ выполнить задания: найти базис линейной оболочки симметричных матриц:

$$X_{1,p}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ X_{2,p}=\begin{pmatrix}2p & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix},\ X_{3,p}=\begin{pmatrix}-p & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \quad (3.94)$$

и найти размерность линейной оболочки $L(X_{1,p},X_{2,p},X_{3,p})$; разложить элементы $X_{1,p}$, $X_{2,p}$, $X_{3,p}$ по найденному базису.

Решение. Введем базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^{2\times2}_s$ вещественных симметричных матриц размера 2×2:

$$E_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Тогда справедливы разложения матриц (3.94) по базису (3.95):

$$X_{1,p}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=1\cdot E_1+1\cdot E_2+(-1)\cdot E_3=E\cdot Y_1, \quad (3.96)$$

$$X_{2,p}=\begin{pmatrix}2p & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=1\cdot E_1+2p\cdot E_2+3\cdot E_3=E\cdot Y_2, \quad (3.97)$$

$$X_{3,p}=\begin{pmatrix}-p & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=2\cdot E_1+(-p)\cdot E_2+2\cdot E_3=E\cdot Y_3, \quad (3.98)$$

где $E=(E_1,E_2,E_3)$ и

$$Y_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\quad Y_2=\begin{pmatrix}1\\ 2p\\ 3\end{pmatrix},\quad Y_3=\begin{pmatrix}2\\ -p\\ 2\end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Образуем следующую матрицу:

$$A=\left\|\begin{matrix}Y_1^T\\ Y_2^T\\ Y_3^T\end{matrix}\right\|=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2p & 3\\ 2 & -p & 2\end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Прежде всего заметим, что $\operatorname{rk} A \geqslant 2$, поскольку первые две строчки матрицы A линейно независимы. Вычислим определитель матрицы A.

$$\det A = 12p + 4. \tag{3.101}$$

Значит, при $p = -1/3$ имеем $\operatorname{rk} A = 2$, а при $p \neq -1/3$ имеем $\operatorname{rk} A = 3$.

Случай 1. Итак, в случае $p \neq -1/3$ базис линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3p})$ образуют матрицы $\{X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}\}$ и разложение матриц $X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}$ по этому базису очевидным образом выписываются. Очевидно, что $\dim L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}) = 3$.

Случай 2. Пусть $p = -1/3$. Тогда матрица A примет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2/3 & 3 \\ 2 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.102}$$

Ясно, что третья строчка есть сумма первых двух. Поэтому

$$Y_3 = Y_1 + Y_2 \Rightarrow X_{3,p} = E \cdot Y_3 = E \cdot (Y_1 + Y_2) = X_{1,p} + X_{2,p}.$$

Итак, в случае $p = -1/3$ базис линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p})$ образуют, например, матрицы $X_{1,p}$ и $X_{2,p}$, $\dim L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}) = 2$ и справедливо разложение по базису

$$X_{3,p} = 1 \cdot X_{1,p} + 1 \cdot X_{2,p}.$$

ГЛАВА 4

Взаимный базис векторов и его применения

1. Определение взаимного базиса

4.1. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — тройка некомпланарных *свободных векторов* в пространстве. Для векторов в пространстве мы будем использовать обозначение $\mathbb{V}_3$. Мы надеемся, что читатель знаком с понятиями скалярного произведения векторов, векторного произведения векторов и, наконец, смешанного произведения векторов, для которых используются следующие обозначения:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \text{и} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \text{для произвольных} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}_3.$$

В стандартном курсе «Аналитическая геометрия» доказывается, что векторы семейства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют базис в $\mathbb{V}_3$, т.е. для произвольного вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$ найдутся единственные числа $x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}$, что будет справедливо равенство

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \tag{4.1}$$

или в обозначениях Эйнштейна

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j. \tag{4.2}$$

Дадим определение взаимного базиса

4.2. Определение. *Взаимным базисом*[1] к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ называется семейство векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$, определяемые следующим образом:

$$\left(\mathbf{e}^j, x\right) = x^j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{4.3}$$

где x^j — j–ая координата в разложении (4.1) вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$.

4.3. Справедливы следующие свойства взаимного базиса

$$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$$

к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$, которые мы собрали в виде следующей леммы:

---

[1] Слово базис используется потому, что ниже мы докажем, что это семейство действительно образует базис в $\mathbb{V}_3$.

4.4. Лемма. Для любых $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{V}_3$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$\left(\mathbf{e}^j, \alpha^1\mathbf{x}_1 + \alpha^2\mathbf{x}_2\right) = \alpha^1\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}_1\right) + \alpha^2\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}_2\right), \quad j = 1, 2, 3; \tag{4.4}$$

$$\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k\right) = \delta^j_k, \tag{4.5}$$

где

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Доказательство. Первое равенство — есть свойство линейности скалярного произведения по второму аргументу при фиксированном первом. Второе равенство прямое следствие определения взаимного базиса. □

4.5. Лемма. Взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$ определяется единственным образом по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$.

Доказательство. Пусть существует еще один взаимный базис $\{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2, \mathbf{f}^3\} \subset \mathbb{V}_3$. Тогда справедливы равенства

$$\left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}\right) = x^j = \left(\mathbf{f}^j, \mathbf{x}\right), \tag{4.6}$$

из которых в силу свойства линейности скалярного произведения по первому аргументу при фиксированном втором аргументе:

$$\left(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{x}\right) = 0, \tag{4.7}$$

причем это равенство выполнено для всех векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$. В частности, возьмем

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j. \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) вытекает равенство

$$0 = \left(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j\right) = \left|\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j\right|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{f}^j = \mathbf{e}^j \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, 3. \tag{4.9}$$

□

4.6. Теорема. *Взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$ *к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ *имеет такой и только такой вид:*

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Согласно определению взаимного базиса

$$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$$

к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ справедливы следующие равенства:

$$\big(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1\big) = 1, \quad \big(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_2\big) = 0, \quad \big(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_3\big) = 0, \tag{4.11}$$

$$\big(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}_1\big) = 0, \quad \big(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}_2\big) = 1, \quad \big(\mathbf{e}^2, \mathbf{e}_3\big) = 0, \tag{4.12}$$

$$\big(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_1\big) = 0, \quad \big(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_2\big) = 0, \quad \big(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3\big) = 1. \tag{4.13}$$

Согласно свойству векторного произведения векторов из $\mathbb{V}_3$ в силу двух последних равенств из (4.11) будем искать вектор $\mathbf{e}^1$ в следующем виде:

$$\mathbf{e}^1 = a_1[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \tag{4.14}$$

Тогда два последних равенства из (4.11) выполнены. А из первого равенства получаем

$$1 = \big(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1\big) = a_1([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) = \\ = a_1(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) = a_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{4.15}$$

поскольку семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейно независимо и поэтому их смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0$.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{4.16}$$

Аналогичны образом доказываются оставшиеся два равенства из (4.10). Осталось воспользоваться результатом леммы 13.8. ☐

4.7. Теорема. *Взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$ *к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ *образует базис в* $\mathbb{V}_3$.

Доказательство. В курсе «Аналитическая геометрия» было доказано, что тройка некомпланарных (линейно независимых) векторов в $\mathbb{V}_3$ образуют базис в $\mathbb{V}_3$. Поэтому нам достаточно доказать, что семейство векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$, определенных равенствами (4.10), являются не компланарными, т.е. являются линейно независимыми.

Действительно, рассмотрим линейную комбинацию

$$\beta_1\mathbf{e}^1 + \beta_2\mathbf{e}^2 + \beta_3\mathbf{e}^3 = \mathbf{0}, \tag{4.17}$$

в которой $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}^3$. Умножим скалярно обе части равенства (4.17) на $\mathbf{e}_1$ и с учетом равенства (4.5) получим равенство $\beta^1 = 0$. Теперь умножим обе части равенства (4.5) умножим скалярно на $\mathbf{e}_2$

и получим $\beta_2 = 0$, а умножая скалярно (4.17) на $\mathbf{e}_3$ получим $\beta_3 = 0$. $\square$

4.8. Лемма. Если базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ является ортонормированным, т. е.

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k, \end{cases} \tag{4.18}$$

то взаимный базис имеет следующий вид

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{4.19}$$

Доказательство. Пусть в обозначениях Эйнштейна имеем

$$\mathbf{x} = x^j \mathbf{e}_j,$$

тогда имеем

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{e}^j, \mathbf{x}\right) = x^j = (\mathbf{e}_j, \mathbf{x}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\mathbf{e}^j - \mathbf{e}_j, \mathbf{x}\right) = 0 \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{V}_3. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_j$ для всех $j = 1, 2, 3$. Осталось воспользоваться результатом леммы 13.8. $\square$

4.9. Важное замечание. Заметим, что взаимный базис

$$\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \subset \mathbb{V}_3$$

к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \subset \mathbb{V}_3$ принадлежат одному и тому же пространству свободных векторов $\mathbb{V}_3$. Ниже мы введем понятие ковекторного взаимного базиса, который нельзя путать с рассматриваемым в данной главе взаимным базисом. Приведем пример.

4.10. Пример. Оказывается ковекторным взаимным базисом к базису

$$1, t, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}$$

в пространстве полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ будет семейство ковекторов $\{D_t^0, D_t^1, \ldots, D_t^n\}$, которые действуют на полином

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}$$

следующим образом:

$$D_t^j p_n(t) = p_n^{(j)}(0) = a_j,$$

где символом $p_n^{(j)}(0)$ мы обозначили производную j–го порядка от полинома $p_n(t)$, вычисленную в точке $t = 0$.

4.11. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в $\mathbb{V}_3$, а $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — взаимный базис в $\mathbb{V}_3$, то справедливы следующие равенства:

$$\left[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\right] = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{4.21}$$

$$\left[\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\right] = \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \tag{4.22}$$

$$\left[\mathbf{e}^3, \mathbf{e}^1\right] = \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{4.23}$$

Доказательство. Докажем только равенство (4.21). Равенства (4.22) и (4.23) доказываются аналогично. С этой целью введем обозначение

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]. \tag{4.24}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}[][[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] &= [\mathbf{x}, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] = \mathbf{e}_3(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \\ &= \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}) - \mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) - \\ &\quad - \mathbf{e}_1([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).\end{aligned} \tag{4.25}$$

С учетом итогового равенства (4.25) приходим к следующей цепочке равенств:

$$\left[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\right] = \frac{[[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2} = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{4.26}$$

□

2. Применения взаимного базиса

В этом разделе мы рассмотрим ряд приложений взаимного базиса в пространстве свободных векторов $\mathbb{V}_3$.

4.12. Пример. Рассмотрим в аффинном пространстве в некотором репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ плоскость, заданную своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \tag{4.27}$$

Предлагается найти выражение для вектора нормали $\mathbf{n}$ к этой плоскости.

Доказательство. Действительно, рассмотрим взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{n} = A\mathbf{e}^1 + B\mathbf{e}^2 + C\mathbf{e}^3, \tag{4.28}$$

который не равен нулю, поскольку $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — базис в силу теоремы 4.7 и по условию $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, а равенство

$$A\mathbf{e}^1 + B\mathbf{e}^2 + C\mathbf{e}^3 = \mathbf{0}$$

возможно тогда и только тогда, когда $A = B = C = 0$. Теперь введем радиус–вектор

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{4.29}$$

Если скалярно умножить вектор $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}$, то используя равенство (4.5), получим равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = Ax + By + Cz. \tag{4.30}$$

Из (4.27) и (4.30) мы получаем уравнение плоскости (4.27) в следующем виде:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}. \tag{4.31}$$

Заметим, что существует следующее решение уравнения (4.31):

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})} D. \tag{4.32}$$

Действительно, несложно проверить равенство

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + D = 0. \tag{4.33}$$

Из (4.31) и (4.33) приходим к уравнению

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}. \tag{4.34}$$

Несложный анализ последнего равенства приводит к выводу о том, что вектор $\mathbf{n}$ является вектором нормали к плоскости (4.27). $\square$

4.13. Пример. Рассмотрим в пространстве в некотором репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ две плоскости, заданные своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \tag{4.35}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \tag{4.36}$$

Найти необходимые и достаточные условия того, чтобы плоскости (4.35) и (4.36) были параллельны.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — взаимный базис. Введем векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям (4.35) и (4.36) соответственно. Они имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{e}^1 + B_1\mathbf{e}^2 + C_1\mathbf{e}^3, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{e}^1 + B_2\mathbf{e}^2 + C_2\mathbf{e}^3. \tag{4.38}$$

Очевидно, что необходимым условием того, чтобы плоскости (4.35) и (4.36) были параллельны — это условие, чтобы векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ были коллинеарны, т.е. найдется такое ненулевое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что будет справедливо равенство

$$\mathbf{n}_2 = \lambda\mathbf{n}_1 \Leftrightarrow (A_2 - \lambda A_1)\mathbf{e}^1 + (B_2 - \lambda B_1)\mathbf{e}^2 + (C_2 - \lambda C_1)\mathbf{e}^3 = \mathbf{0}. \tag{4.39}$$

В силу результата теоремы 4.7 семейство векторов $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ линейно независимо (базис) и поэтому из (4.39) вытекают равенства

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1. \tag{4.40}$$

Заметим, что плоскости (4.35) и (4.36), очевидно, совпадают, если

$$D_2 = \lambda D_1 \tag{4.41}$$

и параллельны, если

$$D_2 \neq \lambda D_1. \tag{4.42}$$

Таким образом, искомое необходимое и достаточное условие — это равенства (4.40) и неравенство (4.42). □

4.14. Пример. Рассмотрим в аффинном пространстве в некотором репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ три плоскости, заданные своими общими уравнениями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \tag{4.43}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0. \tag{4.44}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \quad A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 > 0. \tag{4.45}$$

Найти необходимое и достаточное условие, что эти три плоскости пересекаются в единственной точке и найти радиус–вектор $\mathbf{r}_0$ этой точки.

Доказательство. Рассмотрим векторы нормалей $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ а соответствующим плоскостям (4.43)–(4.45):

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{e}^1 + B_1\mathbf{e}^2 + C_1\mathbf{e}^3, \tag{4.46}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{e}^1 + B_2\mathbf{e}^2 + C_2\mathbf{e}^3, \tag{4.47}$$

$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{e}^1 + B_3\mathbf{e}^2 + C_3\mathbf{e}^3. \tag{4.48}$$

Из геометрических соображений понятно, что три плоскости пересекаются в единственной точке, тогда и только тогда, когда векторы нормалей $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ к рассматриваемым плоскостям некомпланарны (линейно независимы). Согласно примеру 4.12 плоскости (4.43)–(4.45) можно переписать в следующих векторных формах:

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}) = -D_1, \tag{4.49}$$

$$(\mathbf{n}_2, \mathbf{r}) = -D_2, \tag{4.50}$$

$$(\mathbf{n}_3, \mathbf{r}) = -D_3. \tag{4.51}$$

Поскольку семейство векторов $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ является некомпланарным семейством (линейно независимым), то они образуют базис в $\mathbb{V}_3$. Поэтому существует взаимный базис $\{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3\} \subset \mathbb{V}_3$, к базису $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\} \subset \mathbb{V}_3$. Рассмотрим следующий радиус–вектор:

$$\mathbf{r}_0 = -D_1\mathbf{n}^1 - D_2\mathbf{n}^2 - D_3\mathbf{n}^3. \tag{4.52}$$

Используя равенства (4.5) приходим к выводу о том, что радиус-вектор (4.52) удовлетворяет системе уравнений (4.49)–(4.51). □

4.15. Пример. Докажите тождество

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})[\mathbf{x},\mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix}. \tag{4.53}$$

Доказательство. Если $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = 0$, то семейство векторов $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \subset \mathbb{V}_3$ является компланарным (линейно зависимым). Тогда найдутся такие числа $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, что справедливо равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0. \tag{4.54}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\gamma \neq 0$. Тогда из (4.54) вытекает равенство

$$\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{a} + \gamma_2\mathbf{b}, \quad \gamma_1 = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \gamma_2 = -\frac{\beta}{\gamma}. \tag{4.55}$$

Подставим выражение (4.55) для вектора $\mathbf{c}$ в определитель в правой части (4.53). Используя полилинейность определителя относительно столбцов, линейность скалярного произведения векторов относительно обоих аргументов, в результате получим следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{c},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{c},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = \gamma_1 \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{a},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{a},\mathbf{y}) \end{vmatrix} + \\ + \gamma_2 \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{b} \\ (\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y}) \end{vmatrix} = 0, \tag{4.56}$$

поскольку у первого определителя совпадают первый и третий столбцы, а у второго определителя — второй и третий.

Пусть теперь $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq 0$. Тогда $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ — это базис в пространстве свободных векторов $\mathbb{V}_3$. Введём взаимный базис в пространстве $\mathbb{V}_3$

$$\mathbf{f}^1 = \frac{[\mathbf{b},\mathbf{c}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}^2 = \frac{[\mathbf{c},\mathbf{a}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}^3 = \frac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}. \tag{4.57}$$

Пусть

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{f}^1 + x_2\mathbf{f}^2 + x_3\mathbf{f}^3, \quad \mathbf{y} = y_1\mathbf{f}^1 + y_2\mathbf{f}^2 + y_3\mathbf{f}^3. \tag{4.58}$$

При этом в силу (4.5) и (4.21)–(4.23) справедливы следующие свойства:

$$(\mathbf{f}^1,\mathbf{a})=1,\quad(\mathbf{f}^1,\mathbf{b})=0,\quad(\mathbf{f}^1,\mathbf{c})=0,\tag{4.59}$$

$$(\mathbf{f}^2,\mathbf{a})=0,\quad(\mathbf{f}^2,\mathbf{b})=1,\quad(\mathbf{f}^2,\mathbf{c})=0,\tag{4.60}$$

$$(\mathbf{f}^3,\mathbf{a})=0,\quad(\mathbf{f}^3,\mathbf{b})=0,\quad(\mathbf{f}^3,\mathbf{c})=1;\tag{4.61}$$

$$[\mathbf{f}^1,\mathbf{f}^2]=\frac{\mathbf{c}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})},\quad[\mathbf{f}^2,\mathbf{f}^3]=\frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})},\quad[\mathbf{f}^3,\mathbf{f}^1]=\frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}.\tag{4.62}$$

Если воспользоваться равенствами (4.62) и антикоммутативностью векторного произведения, то мы получим равенства

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=$$
$$=\frac{1}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\left[(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{c}+(x_3y_1-x_1y_3)\mathbf{b}+(x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{a}\right]=$$
$$=\frac{1}{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})}\begin{vmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}&\mathbf{c}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}.$$

Осталось заметить, что в силу (4.58) и (4.59)–(4.61)

$$x_1=(\mathbf{x},\mathbf{a}),\quad x_2=(\mathbf{x},\mathbf{b}),\quad x_3=(\mathbf{x},\mathbf{c}),$$
$$y_1=(\mathbf{y},\mathbf{a}),\quad y_2=(\mathbf{y},\mathbf{b}),\quad y_3=(\mathbf{y},\mathbf{c}).$$

□

4.16. Пример. Докажите тождество

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z})(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}(\mathbf{x},\mathbf{a})&(\mathbf{x},\mathbf{b})&(\mathbf{x},\mathbf{c})\\(\mathbf{y},\mathbf{a})&(\mathbf{y},\mathbf{b})&(\mathbf{y},\mathbf{c})\\(\mathbf{z},\mathbf{a})&(\mathbf{z},\mathbf{b})&(\mathbf{z},\mathbf{c})\end{vmatrix}.\tag{4.63}$$

Доказательство. Случай $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=0$ рассматривается аналогично предыдущему примеру. Поэтому предположим, что $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\neq0$. В обозначениях предыдущего примера выполнены следующие равенства:

$$\mathbf{z}=(\mathbf{z},\mathbf{a})\mathbf{f}^1+(\mathbf{z},\mathbf{b})\mathbf{f}^2+(\mathbf{z},\mathbf{c})\mathbf{f}^3,\tag{4.64}$$

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\mathbf{a}\begin{vmatrix}(\mathbf{b},\mathbf{x})&(\mathbf{c},\mathbf{x})\\(\mathbf{b},\mathbf{y})&(\mathbf{c},\mathbf{y})\end{vmatrix}-\mathbf{b}\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{x})&(\mathbf{c},\mathbf{x})\\(\mathbf{a},\mathbf{y})&(\mathbf{c},\mathbf{y})\end{vmatrix}+\mathbf{c}\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{x})&(\mathbf{b},\mathbf{x})\\(\mathbf{a},\mathbf{y})&(\mathbf{b},\mathbf{y})\end{vmatrix}.\tag{4.65}$$

Тогда

$$(\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}])=$$
$$=(\mathbf{a},\mathbf{z})\begin{vmatrix}(\mathbf{b},\mathbf{x})&(\mathbf{c},\mathbf{x})\\(\mathbf{b},\mathbf{y})&(\mathbf{c},\mathbf{y})\end{vmatrix}-(\mathbf{b},\mathbf{z})\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{x})&(\mathbf{c},\mathbf{x})\\(\mathbf{a},\mathbf{y})&(\mathbf{c},\mathbf{y})\end{vmatrix}+$$

$$+\,(\mathbf{c},\mathbf{z})\begin{vmatrix}(\mathbf{a},\mathbf{x}) & (\mathbf{b},\mathbf{x})\\ (\mathbf{a},\mathbf{y}) & (\mathbf{b},\mathbf{y})\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(\mathbf{x},\mathbf{a}) & (\mathbf{x},\mathbf{b}) & (\mathbf{x},\mathbf{c})\\ (\mathbf{y},\mathbf{a}) & (\mathbf{y},\mathbf{b}) & (\mathbf{y},\mathbf{c})\\ (\mathbf{z},\mathbf{a}) & (\mathbf{z},\mathbf{b}) & (\mathbf{z},\mathbf{c})\end{vmatrix},$$

где нужно воспользоваться разложением этого определителя третьего порядка по последней строчке. $\square$

ГЛАВА 5

Системы линейных уравнений

1. Основные теоремы

5.1. Определение. Алгебраической линейной системой m уравнений с n неизвестными называется система уравнений

$$a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1, \tag{5.1}$$

$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2, \tag{5.2}$$

$$\dots\dots\dots\dots \tag{5.3}$$

$$a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m, \tag{5.4}$$

где $a_j^k, b^s \in \mathbb{K}$ для $j = \overline{1,n}$, $k, s = \overline{1,m}$, а переменные $x^1, \dots, x^n$ принимают значения из поля $\mathbb{K}$.

5.2. Из чисел a_j^k можно составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей системы (2.1)–(2.4). Числа b^k при $k = \overline{1,m}$ называются свободными членами системы, а x^j — неизвестными системы (2.1)–(2.4). *Систему уравнений* (2.1)–(2.4) можно переписать в следующем виде:

$$A \cdot X = B, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

5.3. Определение. Решением системы из определения 5.1 называется набор чисел

$$x^1, x^2, \dots, x^n,$$

который, будучи поставленным в систему, обращает все ее уравнения в тождества. Система, имеющая решение, называется **совместной,** а не имеющая решений — **несовместной**.

5.4. Определение. Если не все b^k равны нулю система уравнений из определения 5.1 называется **неоднородной,** если же все $b^k = 0$, система называется **однородной**.

5.5. Определение. Однородную систему уравнений $A \cdot X = O$ с той же матрицей A, что и у неоднородной системы (5.5), называется однородной системой, соответствующей неоднородной системе (5.5).

5.6. Определение. Две линейные системы уравнений

$$A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A' \cdot X = B'$$

называются эквивалентными, если все решения первой системы являются решениями второй системы и, наоборот, все решения второй системы являются решениями первой системы.

5.7. Систему (5.5) можно переписать в следующем виде:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \tag{5.6}$$

где

$$A = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

При такой записи системы уравнений (5.5) рассмотрение этой системы уравнений с позиции линейных пространств состоит в построении всевозможных разложений столбца B по столбцам $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

5.8. Определение. Система уравнений (5.5) называется системой Крамера, если $m = n$ и набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым.

5.9. Теорема. Система Крамера. *Система Крамера* (5.5) *для любого столбца $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ правой части имеет единственное решение.*

Доказательство. Поскольку набор столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым, то они образуют базис в линейном пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ длины n.

□□ Действительно, как известно, базис пространства столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ состоит из n векторов и поэтому размерность этого линейного пространства равна $n \in \mathbb{N}$. Поэтому семейство столбцов $\{B, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ линейно зависимо, поскольку их число равно $n+1$. Следовательно, найдутся такие числа $\beta, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$, не все равные нулю, что справедливо равенство

$$\beta B + \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{5.7}$$

Если $\beta = 0$, то получим равенство

$$\alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1} \Rightarrow \alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0,$$

поскольку семейство столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независимо. Противоречие. Следовательно, $\beta \neq 0$. Поэтому из (5.7) вытекает равенство

$$B = -\frac{\alpha^1}{\beta} A_1 - \cdots - \frac{\alpha^n}{\beta} A_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{5.8}$$

Отсюда получаем полноту семейства столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. ⊠⊠

Следовательно, произвольный столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ можно единственным образом разложить по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Следовательно,

$$X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

— есть единственное решение системы уравнений, записанной в форме (5.6). □

5.10. Теорема. Теорема Кронекера–Капелли. *Для того чтобы система уравнений* (5.6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы столбец правой части* $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Доказательство. Необходимость. Если система уравнений (5.6) имеет решение, то эта система уравнений выполняется при некотором наборе $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ и поэтому $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Достаточность. Пусть $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, то найдутся такие числа $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

И, следовательно, столбец $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T$ является решением системы уравнений (5.6). $\square$

5.11. Следствие. *Для того чтобы система* (5.6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* $\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \dots, A_n) = \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \dots, A_n, B)$.

Доказательство. С одной стороны, совершенно понятно, что $L(A_1, A_2, \dots, A_n) \subset L(A_1, A_2, \dots, A_n, B)$. С другой стороны, в силу результата теоремы 5.10 система уравнений (5.6) имеет решение, тогда и только тогда, когда $B \in L(A_1, A_2, \dots, A_n)$, что равносильно тому что, $L(A_1, A_2, \dots, A_n, B) \subset L(A_1, A_2, \dots, A_n)$. Следовательно, $L(A_1, A_2, \dots, A_n) = L(A_1, A_2, \dots, A_n, B)$. Таким образом, согласно определению ранга семейства столбцов имеем

$$\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \dots, A_n) = \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \dots, A_n, B).$$

$\square$

5.12. Теорема. Альтернативы Фредгольма 1. *Если квадратная однородная система уравнений, состоящая из n уравнений относительно n переменных*:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A_n = O, \quad A_k,\ O \in \mathbb{K}^{n \times 1}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{5.9}$$

отвечающая неоднородной системе уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A_n = B, \quad B \in \mathbb{K}^{n \times 1} \tag{5.10}$$

имеет только тривиальное решение, то неоднородная система (5.10) *имеет единственное решение для любого столбца* $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$.

Если же однородная система (5.9) *имеет решения, отличные от тривиального, то существует такой столбец* $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$, *при котором неоднородная система* (5.10) *не имеет ни одного решения.*

Доказательство. Если однородная система уравнений (5.9) имеет только тривиальное решение $(x^1, x^2, \dots, x^n) = (0, 0, \dots, 0)$, то набор столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n \times 1}$ является линейно независимым, а поскольку их число равно n, то они образуют базис в пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n \times 1}$. Следовательно, любой столбец $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ можно разложить единственным образом по базису $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \dots + \xi^n A_n.$$

Стало быть, неоднородная система уравнений (5.10) имеет единственное решение $(x^1, x^2, \dots, x^n) = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$ для любого столбца правой части $B \in \mathbb{K}^{n \times 1}$.

Во втором случае набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ является линейно зависимым и поэтому столбцы этого набора не образуют базиса в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Значит, найдется такой столбец $B \neq O$ из $\mathbb{K}^{n\times 1}$, который нельзя выразить через столбцы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, т. е. уравнение

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n$$

невозможно не для какого-либо набора чисел $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. □

5.13. Теорема. Альтернативы Фредгольма 2. *Если однородная система* (5.9) *имеет решения, отличные от тривиального, то для того чтобы неоднородная система уравнений* (5.10) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы* $B^T \cdot Y = 0$ *для всех решений* Y *однородной системы уравнений*

$$A^T \cdot Y = O. \tag{5.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть неоднородная система уравнений (5.10) имеет решение $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — произвольное решение однородной системы уравнений (5.11). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A^T \cdot Y = O \Rightarrow Y^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot B \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow (Y^T \cdot A \cdot X)^T = (Y^T \cdot B)^T \Rightarrow X^T \cdot (A^T \cdot Y) = B^T \cdot Y \Rightarrow \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow X^T \cdot O = B^T \cdot Y \Rightarrow B^T \cdot Y = O
\end{aligned}$$

для всех решений $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ матричного уравнения (5.11), где мы воспользовались известными равенствами для операции транспонирования матриц

$$Z^{TT} = Z, \quad (Z_1 \cdot Z_2)^T = Z_2^T \cdot Z_1^T$$

для всех

$$Z \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_1 \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_2 \in \mathbb{K}^{p\times r}.$$

Достаточность. Пусть выполнено следующее условие:

$Y^T \cdot B = 0$ для всех решений $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ уравнения $A^T \cdot Y = O$.

Заметим, что

$$A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|, \; A^T = \|A^1, \ldots, A^n\|, \; Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \; Y^T = (y^1, \ldots, y^n),$$

причем

$$A^T \cdot Y = O \Leftrightarrow Y^T \cdot A = O \Leftrightarrow (y^1, \cdots, y^n) \left\| \begin{array}{c} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (5.11) можно переписать в следующем виде:

$$y^1 A^1 + \cdots + y^n A^n = O, \tag{5.12}$$

а уравнение $Y^T \cdot B = 0$ можно переписать в следующем виде:

$$y^1 b^1 + \cdots + y^n b^n = 0. \tag{5.13}$$

Равенства (5.12) и (5.13) можно переписать в следующем виде:

$$y^1 (A^1, b^1) + \cdots + y^n (A^n, b^n) = (O, 0) \tag{5.14}$$

или в свернутом матричном виде

$$Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|0\| \tag{5.15}$$

для всех столбцов $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — решений однородного уравнения (5.11).

Предположим теперь, что неоднородная система уравнений (5.10) не совместна. Это означает, что методом Гаусса–Жордана расширенную матрицу $\widetilde{A} = \|A|B\|$ методом элементарных преобразований строк можно привести к такому упрощенному виду, что у расширенной матрицы появится строчка следующего вида:

$$(0, \ldots, 0, 1),$$

причем эта строчка согласно методу Гаусса–Жордана является линейной комбинацией исходных строк расширенной матрицы $\widetilde{A} = \|A|B\|$. Следовательно, найдутся такие числа $y^1, \ldots, y^n \in \mathbb{K}$, что

$$y^1 (A^1, b^1) + \cdots + y^n (A^n, b^n) = (0, \ldots, 0, 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|1\|. \tag{5.16}$$

Из равенства (5.16) вытекает, что есть такой столбец $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, что он одновременно удовлетворяет равенствам (5.15) и (5.16), причем

$$A^T \cdot Y = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

Противоречие. Значит, система (5.10) совместна. $\square$

2. Фундаментальное Семейство Решений

5.14. В этом параграфе будет показано, что множество решений однородной системы m линейных уравнений относительно n неизвестных является подпространством линейного пространства $\mathbb{K}^{n\times 1}$, а множество решений неоднородной системы линейных уравнений представляет из себя *линейное многоообразие* — аналог плоскости и прямой в трехмерном пространстве. При этом мы будем использовать векторную форму записи неоднородной системы уравнений:

$$x^1A_1 + x^2A_2 + \cdots + x^nA_n = B. \tag{5.17}$$

и соответствующей однородной системы уравнений

$$x^1A_1 + x^2A_2 + \cdots + x^nA_n = O. \tag{5.18}$$

5.15. Теорема. *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений* (5.18) *образует линейное подпространство в арифметическом пространстве* $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Доказательство. Пусть

$$X_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)^T \quad \text{и} \quad X_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)^T$$

— два решения однородной системы уравнений

$$x^1A_1 + x^2A_2 + \cdots + x^nA_n = O \Leftrightarrow A \cdot X = O.$$

Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$A \cdot (\alpha^1X_1 + \alpha^2X_2) = \alpha^1A \cdot X_1 + \alpha^2A \cdot X_2 = \alpha^1O + \alpha^2O = O.$$

□

5.16. Определение. Множество всех решений линейной однородной системы (5.18) называется пространством решений и обозначается далее знаком $\mathcal{N}$.

5.17. Обозначение. Множество всех решений линейной неоднородной системы уравнений (5.17) обозначается знаком $\mathcal{M}$.

5.18. Определение. Плоскостью π в арифметическом пространстве $\mathbb{K}^{n\times 1}$, проходящую через точку $Y_1 \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, и с направляющим $r-$мерным подпространством $L_r \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ при $r \in [1, n-1]$ называется множество всех точек $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ таких, что

$$Y - Y_1 \subset L_r.$$

При $r = 1$ плоскость называется прямой, а при $r = n-1$ плоскость называется гиперплоскостью. Используется обозначение $\pi = Y_1 + L_r$.

5.19. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ — это базис линейного r–мерного подпространства $L_r \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$. Тогда для любого столбца $X \in L_r$ найдутся такие числа $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство

$$X = t_1\mathbf{e}_1 + \dots + t_r\mathbf{e}_r.$$

Тогда уравнение r–мерной плоскости π из определения 5.18 можно записать в векторной параметрической форме

$$\pi = \left\{Y \in \mathbb{K}^{n\times 1} : \ Y = Y_1 + t_1\mathbf{e}_1 + \dots + t_r\mathbf{e}_r, \ \forall\, t_1, \dots, t_r \in \mathbb{K}\right\}.$$

5.20. Геометрическая интерпретация решений неоднородных линейных уравнений. Множество $Y_1 + L_r$ с геометрической точки зрения называется r–мерной плоскостью, а с алгебраической точки зрения называется линейным многообразием.

5.21. Теорема. *Множество всех решений неоднородной системы линейных уравнений* (5.17) *образует линейное многообразие в* $\mathbb{K}^{n\times 1}$, *т.е. плоскость.*

Доказательство. Пусть

$$Y_1 = (y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^n)^T, \quad Y = (y^1, y^2, \dots, y^n)^T$$

— два решения неоднородной системы линейных уравнений (5.17). Образуем их разность $X = Y - Y_1$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A \cdot X = A \cdot (Y - Y_1) = A \cdot Y - A \cdot Y_1 = B - B = O.$$

Отсюда, с одной стороны, получаем, что $Y - Y_1 \in \mathcal{N}$ для всех $Y \in \mathcal{M}$ и некоторого $Y_1 \in \mathcal{M}$. Но тогда имеем

$$\mathcal{M} \subset Y_1 + \mathcal{N}. \tag{5.19}$$

С другой стороны, если $X \in \mathcal{N}$ — произвольное решение соответствующей однородной системы уравнений (5.18), а $Y_1 \in \mathcal{M}$ — какое–то решение неоднородной системы линейных уравнений, то справедливы равенства

$$A \cdot (Y_1 + X) = A \cdot Y_1 + A \cdot X = B + O = B.$$

Следовательно,

$$Y_1 + \mathcal{N} \subset \mathcal{M}. \tag{5.20}$$

Итак, из (5.19) и (5.20) получаем равенство множеств $\mathcal{M} = Y_1 + \mathcal{N}$, из которого вытекает, что $\mathcal{M}$ есть плоскость, проходящая через точку $Y_1 \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ с направляющим подпространством $\mathcal{N}$. $\square$

5.22. Определение. Базис в пространстве решений $\mathcal{N}$ однородной системы уравнений (5.17) называется Фундаментальной Системой Решений или ФСР.

5.23. Построение ФСР. Рассмотрим матрицу линейной однородной системы уравнений:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Предположим, что матрица $A \neq O$ и поэтому у матрицы A существует базисный минор порядка $r \in [1, \min\{m,n\}]$. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор этой матрицы расположен в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

При этом исходная система однородных линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Тогда в силу теоремы о базисном миноре строчки матрицы системы (5.22) с номерами от $r+1$ до m линейно выражаются через первые r строк. Поэтому эквивалентная к (5.22) однородная система линейных уравнений имеет матрицу системы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix},$$

а сама эквивалентная система однородных линейных уравнений к (5.22) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.23)$$

При этом используя свойства произведения матриц эквивалентную систему линейных уравнений (5.23) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная однородная система линейных уравнений (5.22) эквивалентна следующей, вообще говоря, неоднородной линейной системе уравнений:

$$\widetilde{A}_r \cdot X_r = \widetilde{B}_r, \quad X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T, \qquad (5.24)$$

$$\widetilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_r = -\begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

причем система линейных уравнений (5.24) относительно переменных $X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T$ является Крамеровской (см. 5.8), поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$.

5.24. Определение. В эквивалентной системе линейных уравнений (5.24) переменные $x^1, \ldots, x^r$ называются *независимыми*, а переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ называются *свободными*.

5.25. Построение ФСР. Продолжение. Для построения всех линейно независимых решений однородной системы уравнений

$$A \cdot X = O, \quad X = (x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^n)^T \qquad (5.25)$$

с матрицей A, определенной равенством (5.21), воспользуемся полученной эквивалентной системой уравнений (5.24). Для этого сначала построим так называемое *нормальное семейство решений* рассматриваемой однородной линейной системы уравнений.

Шаг 1. Сначала положим в системе уравнений (5.24) свободные переменные равными $x^{r+1} = 1$, $x^{r+2} = \cdots = x^n = 0$ и получим из (5.24) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ \vdots \\ a_{r+1}^r \end{pmatrix}, \tag{5.26}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение

$$X_{1r} = (x_1^1, \ldots, x_1^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^r, 1, 0, \ldots, 0)^T \tag{5.27}$$

однородной системы уравнений (5.25).

Шаг 2. Теперь положим в системе уравнений (5.24) свободные переменные равными $x^{r+1} = 0$, $x^{r+2} = 1$, $x^{r+3} = \cdots = x^n = 0$ и получим из (5.24) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+2}^1 \\ \vdots \\ a_{r+2}^r \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение $X_{2r} = (x_2^1, \ldots, x_2^r)^T$. Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^r, 0, 1, \ldots, 0)^T \tag{5.29}$$

однородной системы уравнений (5.25).

Шаг $n - r$. На этом завершающем шаге построения нормального семейства решений положим свободные переменные равными $x^{r+1} = \cdots = x^{n-1} = 0$ и $x^n = 1$ и получим из (5.24) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^r \end{pmatrix}, \tag{5.30}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение $X_{n-rr} = (x_n^1, \ldots, x_n^r)^T$. Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_{n-r} = (x_{n-r}^1, \ldots, x_{n-r}^r, 0, 0, \ldots, 1)^T \tag{5.31}$$

однородной системы уравнений (5.25).

5.26. Лемма. Нормальное семейство решений линейной однородной системы уравнений (5.25)

$$X_1 = (x_1^1, \ldots, x_1^r, 1, 0, \ldots, 0)^T, \tag{5.32}$$

$$X_2 = (x_2^1, \ldots, x_2^r, 0, 1, \ldots, 0)^T, \tag{5.33}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{5.34}$$

$$X_{n-r} = (x_{n-r}^1, \ldots, x_{n-r}^r, 0, 0, \ldots, 1)^T \tag{5.35}$$

линейно независимое.

Доказательство. Предположим, что столбцы нормального семейства решений однородной системы уравнений (5.25) линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-r} \in \mathbb{K}$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство

$$\alpha^1 X_1 + \cdots + \alpha^{n-r} X_{n-r} = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \tag{5.36}$$

но тогда согласно свойствам операций сложения столбцов и умножения столбцов на числа приходим к равенству следующего вида:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^r \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{n-r} = 0.$$

Таким образом, равенство (5.36) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{n-r} = 0$. Следовательно, построенное нормальное семейство решений (5.32)–(5.35) линейно независимое. $\square$

5.27. Лемма. Нормальное семейство решений (5.32)–(5.35) линейной однородной системы уравнений (5.25) полно в линейном пространстве $\mathcal{N}$ решений линейной однородной системы уравнений (5.25).

Доказательство. Шаг 1. Рассмотрим эквивалентную систему линейных уравнений (5.24). Поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$, то при заданной правой части $\widetilde{B}_r$ эта система имеет единственное решение $X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T$. Но в силу явного вида столбца $\widetilde{B}_r$ правой части видно, что он однозначно определяется заданием свободных переменных $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Отсюда приходим к важному выводу о том, что задание свободных переменных $x^{r+1}, \dots, x^n$ однозначно определяет решение $X = (x^1, \dots, x^r, x^{r+1}, \dots, x^n)^T$ исходной однородной системы уравнений (5.25). Этим результатом мы воспользуемся на следующем шаге доказательства леммы.

Шаг 2. Пусть $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^r, x_0^{r+1}, \dots, x_0^n)^T$ — произвольное решение однородной линейной системы уравнений (5.25). Тогда это решение можно представить в виде следующей линейной комбинации нормального семейства решений:

$$X_0 = x_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r}. \tag{5.37}$$

□□ Действительно, с одной стороны, заметим, что правая часть равенства (5.37) в силу теоремы 5.15 является решением линейной однородной системы уравнений (5.25). С другой стороны, используя свойства сложения столбцов и умножения столбца на числа правая часть равенства (5.37) представима в следующем виде:

$$x_0^{r+1} X_1 + \dots + x_0^n X_{n-r} = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ \vdots \\ z_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} := Y_0, \tag{5.38}$$

причем в силу результата шага 1 решение Y_0 однозначно определяется числами $x_0^{r+1}, \dots, x_0^n$ как и решение X_0. Следовательно, $Y_0 = X_0$. ⊠⊠ □

5.28. Следствие. $\dim \mathcal{N} = n - r$, *где* $r = \operatorname{rk} A$.

5.29. Теорема. *Общее решение совместной неоднородной системы уравнений $A \cdot X = B$ можно представить в следующем виде:*

$$X = Y + \sum_{k=1}^{n-r} c^k X_k, \tag{5.39}$$

где Y — какое–либо частное решение неоднородной системы линейных уравнений, а $\{X_1, \dots, X_{n-r}\}$ — ФСР соответствующей линейной однородной системы уравнений $A \cdot X = O$.

Доказательство. Результат теоремы является следствием теоремы 5.21 и следствия 5.28. □

5.30. Теорема. *Пусть матрица B состоит из столбцов, образующих ФСР линейной однородной системы уравнений*

$$A \cdot X = O. \tag{5.40}$$

Тогда пространство решений однородной линейной системы уравнений

$$B^T \cdot Y = O \tag{5.41}$$

совпадает с линейной оболочкой строк матрицы A.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $\operatorname{rk} A = r \geqslant 1$. Тогда ФСР линейной однородной системы уравнений (5.40) состоит из $n - r$ вектор–столбцов $X_1, \ldots, X_{n-r} \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Составим из этих столбцов матрицу B

$$B = \|X_1, \ldots, X_{n-r}\| \in \mathbb{K}^{n\times(n-r)}, \tag{5.42}$$

причем

$$A \cdot X_j = O \in \mathbb{K}^{m\times 1}, \quad j = \overline{1, n-r}. \tag{5.43}$$

Поэтому из (5.42) и (5.43) вытекают следующие равенства:

$$\mathbb{K}^{m\times(n-r)} \ni O = \|A \cdot X_1, \ldots, A \cdot X_{n-r}\| = \\ = A \cdot \|X_1, \ldots, X_{n-r}\| = A \cdot B \tag{5.44}$$

Используя операцию транспонирования матриц с учетом ранее доказанных свойств транспонирования получим из (5.44) равенство

$$B^T \cdot A^T = O \in \mathbb{K}^{(n-r)\times m}. \tag{5.45}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T \cdot Y = O, \quad B^T \in \mathbb{K}^{(n-r)\times n}, \quad A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{5.46}$$

Из сравнения (5.45) и (5.46) приходим к выводу о том, что все столбцы матрицы A^T являются решениями системы уравнений (5.46). Поскольку $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A = r$, то число линейно независимых столбцов матрицы A^T совпадает с числом линейно независимых строк матрицы A и равно r. Теперь выясним число столбцов в ФСР системы уравнений (5.46). Заметим, что по построению $\operatorname{rk} B^T = \operatorname{rk} B = n - r$. Следовательно, ФСР состоит из $n - (n-r) = r$ столбцов. Таким образом, пространством решений однородной системы уравнений (5.46) является линейная оболочка столбцов матрицы A^T, т.е. линейная оболочка строчек матрицы A, и только она. □

3. Примеры решения задач

5.31. Пример. Система уравнений, задающая линейную оболочку системы векторов и только ее. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{5.47}$$

Запишем координаты векторов–столбцов v_1, v_2, v_3, v_4 по строкам в матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{5.48}$$

и рассмотрим соответствующую линейную однородную систему уравнений

$$A \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)^T. \tag{5.49}$$

ФСР этой системы уравнений находится методом Гаусса–Жордана и имеет следующий вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.50}$$

Запишем матрицу B в следующем виде:

$$B = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.51}$$

Тогда имеем

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.52}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)^T, \tag{5.53}$$

которую можно переписать в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.54}$$

из которой получаем искомую систему уравнений

$$-y^1 + y^2 + 2y^3 = 0, \tag{5.55}$$

$$y^1 - y^2 + 2y^4 = 0, \tag{5.56}$$

$$-2y^1 - y^2 + y^5 = 0. \tag{5.57}$$

5.32. Пример. Сумма и пересечение линейных подпространств. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2 :

$$V_1 = L(X_1, X_2, X_3), \quad V_2 = L(Y_1, Y_2, Y_3), \tag{5.58}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{5.59}$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

Решение. Шаг 1. $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. Прежде всего составим матрицу

$$A = \|X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

и найдем методом Гаусса–Жордана ее ранг.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 3. Поэтому $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ и базис в $V_1 + V_2$ можно взять, например, следующий

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Базис в $V_1 \cap V_2$. Сначала зададим линейное подпространство V_1 как решение некоторой системы уравнений (см. теорему 5.30). Для этого запишем матрицу

$$A_1 = \|X_1, X_2, X_3\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Теперь построим ФСР в пространстве решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$A_1 \cdot X = O, \quad (5.64)$$

которая в силу (5.63) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

из которой получаем

$$x^1 + x^2 - x^3 = 0, \quad x^2 + 2x^3 = 0,$$

ФСР которой состоит, например, из вектора

$$X_4 = (3 - 2, 1)^T. \tag{5.66}$$

Тогда согласно результату теоремы 5.30 линейное подпространство V_1 можно определить как решение следующей системы уравнений:

$$X_4^T \cdot X = 0 \Leftrightarrow 3x^1 - 2x^2 + x^3 = 0. \tag{5.67}$$

Теперь запишем линейное подпространство V_2 как решение некоторой линейной однородной системы уравнений. Для этого запишем матрицу

$$A_2 = \|Y_1, Y_2, Y_3\|^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \tag{5.68}$$

Таким образом, из (5.68) получаем, что система уравнений

$$A_2 \cdot Y = O \tag{5.69}$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^1 - 8y^3 = 0, \quad y^2 + 5y^3 = 0. \tag{5.70}$$

Таким образом, ФСР системы уравнений (5.69) состоит, например, из столбца

$$Y_4 = (8, -5, 1)^T. \tag{5.71}$$

Тогда согласно результату теоремы 5.30 линейное подпространство V_2 можно определить как решение следующей системы уравнений:

$$Y_4^T \cdot Y = 0 \Leftrightarrow 8y^1 - 5y^2 + y^3 = 0. \tag{5.72}$$

Но тогда базис в $V_1 \cap V_2$ — есть в точности ФСР системы уравнений (5.67) и (5.72):

$$3x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \quad 8x^1 - 5x^2 + x^3 = 0. \tag{5.73}$$

ФСР этой системы уравнений состоит из одного столбца, например,

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = L(Z_0). \tag{5.74}$$

5.33. Пример. Прямая сумма подпространств. Пусть в линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^4$ заданы два линейных подпространства:

$$U = L(X_1, X_2), \quad V = L(X_3, X_4), \tag{5.75}$$

$$X_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \quad X_2 = (-1, -2, 0, 1)^T, \tag{5.76}$$

$$X_3 = (-1, -1, 1, -1)^T, \quad X_4 = (2, 2, 0, 1)^T. \tag{5.77}$$

Доказать, что имеет место разложение в прямую сумму $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, и найти проекцию столбца

$$w = (4, 2, 4, 4)^T \tag{5.78}$$

на линейное подпространство U параллельно V.

Решение. Шаг 1. Докажем сначала, что столбцы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы. Запишем матрицу

$$A = \|X_1, X_2, X_3, X_4\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.79}$$

т.е. ранг матрицы A равен 4 и, стало быть, столбцы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы. Следовательно, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Шаг 2. Найдем систему уравнений, которая определяет линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. Здесь можно поступить следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow X = \alpha X_1 + \beta X_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.80}$$

Отсюда вытекает равенство столбцов

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}, \tag{5.81}$$

из которого вытекает

$$x^1 = \alpha - \beta, \quad x^2 = \alpha - 2\beta, \quad x^3 = \alpha, \quad x^4 = \alpha + \beta. \tag{5.82}$$

Отсюда приходим к следующей системе уравнений

$$x^1 + x^4 = 2x^3, \quad x^2 + 2x^4 = 3x^3, \tag{5.83}$$

определяющая линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. Произвольный столбец линейного подпространства $V = L(X_3, X_4)$ имеет следующий вид:

$$v = \lambda X_3 + \mu X_4 = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{5.84}$$

Искомое разложение столбца w имеет следующий вид:

$$w = u + v, \quad u \in U = L(X_1, X_2), \quad v \in V = L(X_3, X_4). \tag{5.85}$$

Но тогда $w - v \in U$. Заметим, что

$$w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \lambda - 2\mu \\ 2 + \lambda - 2\mu \\ 4 - \lambda \\ 4 + \lambda - \mu \end{pmatrix}. \tag{5.86}$$

Подставим координаты столбца $w - v$ из (5.86) в систему (5.83), определяющая линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. В результате получим следующую систему уравнений:

$$4\lambda = 3\mu, \quad 3\lambda = 2\mu + 1 \Rightarrow \lambda = 3, \quad \mu = 4. \tag{5.87}$$

Но тогда из (5.84) получим равенства

$$v = 3X_3 + 4X_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.88}$$

$$u = w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{5.89}$$

5.34. Пример. Вычислительная задача. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы:

$$x_1(t) = -1 + 3t + 2t^2, \quad x_2(t) = 2t + 3t^2, \quad x_3(t) = -1 + 7t + 8t^2,$$

Используя метод Гаусса, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; найти $\dim L(x_1, x_2, x_3)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3 по найденному базису.

Решение. Семейство

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = t^2$$

образует базис в $P_2(\mathbb{R})$. Полиномы x_1, x_2 и x_3 можно разложить по этому базису следующим образом:

$$x_1(t) = \mathbf{E}X_1, \quad x_2(t) = \mathbf{E}X_2, \quad x_3(t) = \mathbf{E}X_3, \tag{5.90}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{5.91}$$

Составим матрицу

$$A = \left\| \begin{matrix} X_1^T \\ X_2^T \\ X_3^T \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{5.92}$$

Методом Гаусса найдем базисный минор матрицы A. Вычитая из третьей строчки матрицы первую строчку получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{5.93}$$

Последняя матрица имеет базисный минор, расположенный на пересечении первых строк и первых двух столбцов. Кроме того, имеем

$$X_2^T = \frac{1}{2}(X_3^T - X_1^T) \Leftrightarrow X_2 = \frac{1}{2}(X_3 - X_1) \Leftrightarrow X_3 = X_1 + 2X_2. \tag{5.94}$$

Поэтому в силу (5.90) и (5.94) имеем

$$x_3(t) = \mathbf{E}X_3 = \mathbf{E}(X_1 + 2X_2) = \mathbf{E}X_1 + 2\mathbf{E}X_2 = x_1(t) + 2x_2(t). \tag{5.95}$$

Следовательно, базис в $L(x_1, x_2, x_3)$ образуют полиномы $x_1(t)$, $x_2(t)$ и, стало быть, $\dim L(x_1, x_2, x_3) = 2$. А разложение по базису с учетом (5.95) имеет вид

$$x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2, \quad x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2, \quad x_3 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2.$$

5.35. Пример. Вычислительная задача. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ исследовать на совместность неоднородную СЛАУ, заданную расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right). \tag{5.96}$$

Найти общее решение во всех случаях, когда система совместна.

Решение. Вычислим определитель основной матрицы и получим, что он равен нулю при $p = 1$ и при $p = -1$. Рассмотрим соответствующие случаи.

Случай 1. $p = 1$. В этом случае расширенная матрица (5.96) примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

т.е. система не совместна.

Случай 2. $p = -1$. В этом случае расширенная матрица (5.96) примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Общее решение имеет следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ -1+t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Случай 3. $p \neq 1$ *и* $p \neq -1$. Тогда решая СЛАУ с расширенной матрицей(5.96), получим, что

$$X = \begin{pmatrix} p/(1-p) \\ -p/(1-p) \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 6

Приложения теоремы Кронекера–Капелли

1. Теорема Кронекера–Капелли

6.1. Теорема. *Линейная система* $A \cdot X = B$ *совместна тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} \|A\| = \operatorname{rang} \|A \mid B\|.$$

2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Рассмотрим две прямые на плоскости, заданные уравнениями

$$l_1: \ A_1 x + B_1 y = C_1, \quad l_2: \ A_2 x + B_2 y = C_2, \tag{6.1}$$

где $A_j^2 + B_j^2 > 0$, $j = 1, 2$ в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Рассмотрим матрицу A системы (6.1) и расширенную матрицу $\widetilde{A}$ системы уравнений (6.1):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Ранг $\operatorname{rk} A$ матрицы A может принимать значения 1 и 2, поскольку матрица ненулевая и поэтому $\operatorname{rk} A \neq 0$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Прямые пересекаются. Система уравнений (6.1) имеет единственное решение — прямые пересекаются. Это означает, что $|A| \neq 0$, т. е. ранг матрицы A максимален: $\operatorname{rk} A = 2$. Заметим, что $\operatorname{rk} \widetilde{A}$ не может быть меньше 2, поскольку содержит базисный минор

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \widetilde{A} = 2$.

Случай 2. Прямые параллельны. Система уравнений (6.1) не имеет решений — прямые параллельны. С алгебраической точки зрения это означает, что $\operatorname{rk} A < \operatorname{rk} \widetilde{A}$. Как мы уже указывали, $\operatorname{rk} A \geqslant 1$. Поскольку случай $\operatorname{rk} A = 2$ соответствует уже рассмотренной ситуации, то поэтому $\operatorname{rk} A = 1$. Так как $\operatorname{rk} \widetilde{A}$ может быть больше только на единицу, поскольку матрица $\widetilde{A}$ содержит ровно на один столбец больше, чем матрица A, то $\operatorname{rk}\widetilde{A} = 2$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (6.1) не имеет решений.

Случай 3. Прямые совпадают. Система уравнений (6.1) имеет бесконечно много решений — прямые совпадают. После рассмотрения первых двух случаев осталась только единственная ситуация: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\widetilde{A} = 1$. По теореме Кронекера–Капелли система уравнений (6.1) совместна.

3. Взаимное расположение трех прямых на плоскости

Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 заданы общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$l_1: \quad A_1x + B_1y = C_1, \quad A_1^2 + B_1^2 > 0, \tag{6.3}$$

$$l_2: \quad A_2x + B_2y = C_2, \quad A_2^2 + B_2^2 > 0, \tag{6.4}$$

$$l_3: \quad A_3x + B_3y = C_3, \quad A_3^2 + B_3^2 > 0. \tag{6.5}$$

Случай 1. Прямые пересекаются в единственной точке.

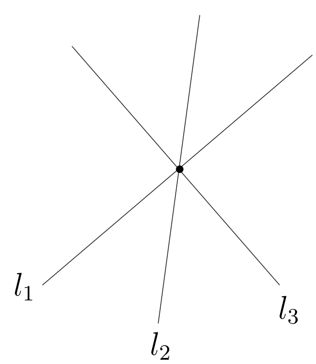

Рис. 6.1. Три прямые пересекаются в одной точке.

С одной стороны, это означает, что каждые две прямые из трёх пересекаются в единственной точке — это значит, что любые две системы уравнений из трех (6.3)–(6.5) имеют единственное решение (смотри первый случай предыдущего параграфа), т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система всех трех уравнений совместна, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

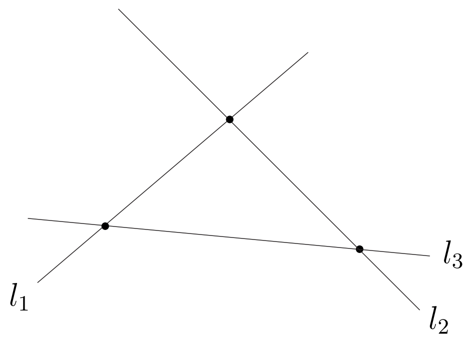

Рис. 6.2. Три прямые попарно пересекаются.

Случай 2. Прямые попарно пересекаются, но все три прямые не имеют общих точек. С одной стороны, как и в случае 1, любые два уравнения из трёх (6.3)–(6.5) имеют единственное решение, что означает выполнение равенств

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, все три уравнения не имеют решений, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} > \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}, \tag{6.6}$$

где

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2, \tag{6.7}$$

поскольку, с одной стороны, у этой матрице имеется базисный минор второго порядка, например, образованный на пересечении первых двух строк и двух столбцов. С другой стороны,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \tag{6.8}$$

поскольку выполнено неравенство (6.6) и, кроме того, матрица из (6.8) отличается от матрицы из (6.7) ровно на один столбец.

Случай 3. Две прямые из трёх параллельны, а оставшаяся прямая их пересекает.

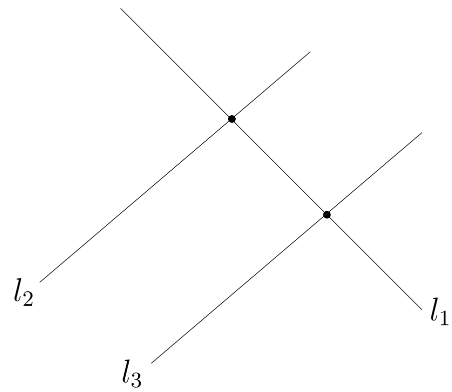

Рис. 6.3. Две прямые параллельны, а третья их пересекает.

Без ограничения общности можно считать, что прямые l_2 и l_3 параллельны, а прямая l_1 их пересекает. С одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2;$$
$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют единственные решения. А система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

решений не имеет. Итак,

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но (смотри второй случай предыдущего параграфа)

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения общности пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 их пересекает.

Тогда, с одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2;$$
$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

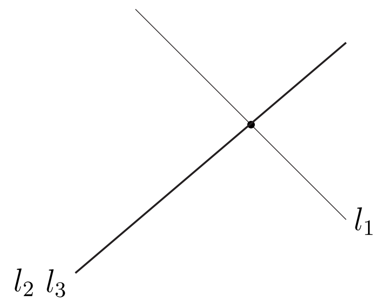

Рис. 6.4. Две прямые совпадают, а третья их пересекает.

имеют каждая единственное решение. А система уравнений
$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$
имеет бесконечное число решений. Итак,
$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$
но (смотри третий случай предыдущего параграфа)
$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Случай 5. Три прямые параллельны.

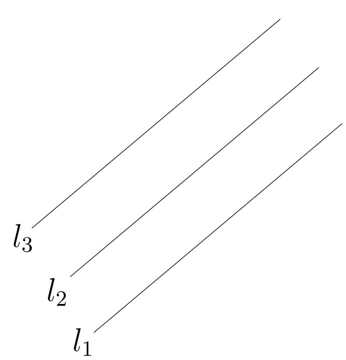

Рис. 6.5. Три прямые параллельны.

Это означает, что каждые два уравнения из трёх (6.3)–(6.5) не имеют решений (см. случай 2 предыдущего параграфа), т. е.
$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 1,$$

но

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6. Две прямые из трёх совпадают, а третья им параллельна.

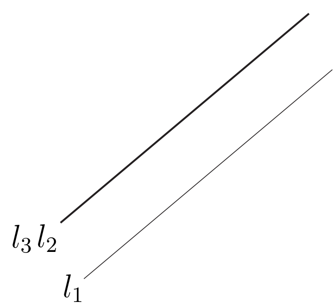

Рис. 6.6. Две прямые совпадают, а третья им параллельна.

Без ограничения общности, пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 им параллельна. С одной стороны, система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют бесконечно много решений, а, с другой стороны, каждая система уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2;$$

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

не имеют решений. Поэтому (см. случаи 1 и 3 из предыдущего параграфа)

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7. Все три прямые совпадают.

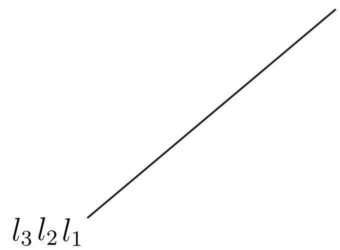

Рис. 6.7. Три прямые совпадают.

Это означает, что совпадают прямые l_1 и l_2, совпадают прямые l_2 и l_3, и поэтому совпадают прямые l_1 и l_3, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

4. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Пусть в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в пространстве две плоскости заданы общими уравнениями

$$p_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad p_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{6.9}$$

причём

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Векторы нормалей к плоскостям p_1 и p_2 имеют следующий вид[1]:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \quad \mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{6.10}$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2\}$ взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Случай 1. Плоскости пересекаются. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \tag{6.11}$$

имеет решение, но плоскости не совпадают. Значит

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{6.12}$$

[1] см. главу «Взаимный базис векторов и его применения»

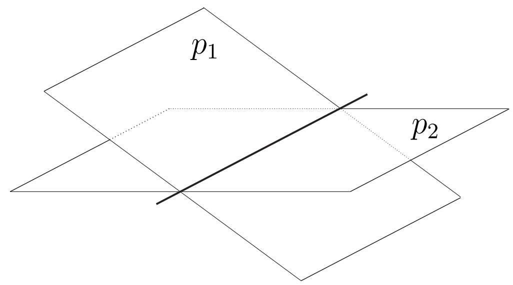

Рис. 6.8. Две плоскости пересекаются по прямой.

□ Действительно, во–первых,

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \geqslant 1,$$

поскольку $A_j^2 + B_j^2 + C_j^2 > 0$ при $j = 1, 2$. Поскольку плоскости не параллельны и не совпадают, то их векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ не коллинеарны, а значит, являются линейно независимыми:

$$\alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{6.13}$$

В силу (6.10) равенство (6.13) эквивалентно следующим равенствам:

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \alpha B_1 + \beta B_2 = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0, \tag{6.14}$$

которое можно записать в свою очередь в виде строчек

$$\alpha(A_1, B_1, C_1) + \beta(A_2, B_2, C_2) = (0, 0, 0), \tag{6.15}$$

которое в силу (6.13) возможно тогда и только тогда когда $\alpha = \beta = 0$. Следовательно, строчки у матрицы системы (6.11) линейно независимы. ⊠

Очевидно, что в силу теоремы Кронекера–Капелли имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2.$$

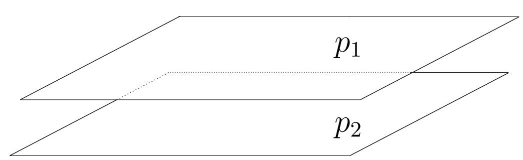

Рис. 6.9. Две плоскости параллельны.

Случай 2. Плоскости параллельны. Это означает, что система уравнений (6.11) не имеет решений. Заметим, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

☐ Действительно, в этом случае векторы нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям p_1 и p_2 коллинеарны. В этом случае точно также рассуждая, что и в предыдущем случае можно доказать, что строчки матрицы системы линейно зависимы. ☒

При этом

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

☐ Действительно, случай 2 — это случай не совместности системы уравнений и поэтому согласно теореме Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы должен быть больше ранга основной матрицы системы. ☒

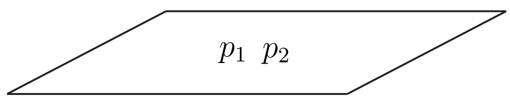

Рис. 6.10. Две плоскости совпадают.

Случай 3. Плоскости совпадают. Это означает, что система уравнений (6.11) имеет решения. Тогда

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

☐ Во–первых, это последняя ситуация из возможных.

Во–вторых, поскольку плоскости совпадают, то их векторы нормалей (6.10) коллинеарны и поэтому строчки основной матрицы системы (6.9) линейно зависимы. А в силу теоремы Кронекера–Капелли ранг расширенной матрицы системы должен совпадать с рангом основной матрицы. ☒

5. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве

Пусть три плоскости заданы общими уравнениями

$$p_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \tag{6.16}$$

$$p_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0, \tag{6.17}$$

$$p_3 : \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \quad A_3^2 + B_3^2 + C_3^2 > 0 \tag{6.18}$$

в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём векторы нормалей к плоскостям

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3, \tag{6.19}$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3, \tag{6.20}$$

$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3. \tag{6.21}$$

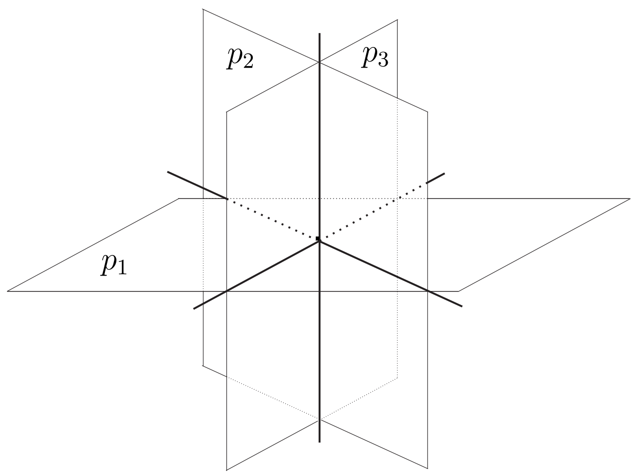

Рис. 6.11. Три плоскости пересекаются в одной точке.

Случай 1. Три плоскости пересекаются в единственной точке. Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \tag{6.22}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \tag{6.23}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{6.24}$$

имеет единственное решение. Следовательно,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

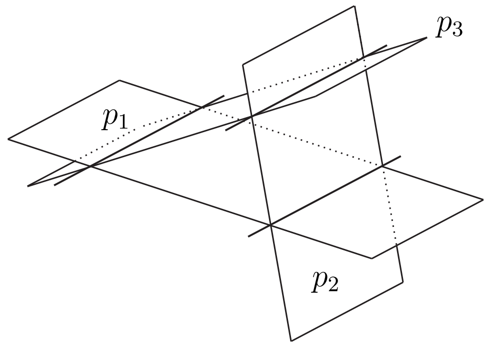

Рис. 6.12. Плоскости попарно перескаются по прямым.

Случай 2. Плоскости попарно пересекаются, но три плоскости не имеют общих точек. Это означает, что любые два уравнения из трёх (6.22)–(6.24) имеют решения, но все три уравнения (6.22)–(6.24) не имеют решений.

Заметим, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2. \quad (6.25)$$

☐ Действительно, рассмотрим, например, плоскости p_1 и p_2. Нормали к ним имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3,$$

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3,$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ линейно независимы (не коллинеарны). Поэтому строчки

$$(A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad (A_2, B_2, C_2)$$

тоже линейно независимы. Следовательно,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2. \quad \boxtimes$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли выполнены равенства

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система уравнений (6.22)–(6.24) трёх уравнений не имеет решений. Следовательно,

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2. \tag{6.26}$$

$\square$ Во–первых, в матрице системы

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

любые две строчки в силу (6.25) линейно независимы и поэтому

$$3 \geqslant \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \geqslant 2.$$

Во–вторых, если

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3$$

— это рассмотренный выше случай 1, когда три плоскости пересекаются в одной точке, т.е. система уравнений (6.22)–(6.24) имеет решение (единственное). $\boxtimes$

При этом в силу равенства (6.26) и теоремы Кронекера–Капелли

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3,$$

где мы опять воспользовались тем, что расширенная матрица системы (6.22)–(6.24) отличается от основной матрицы системы ровно на один столбец и поэтому их ранги могут отличаться не более, чем на 1.

Случай 3. Две плоскости параллельны параллельны, а третья их пересекает. Без ограничения общности будем считать, что плоскости p_2 и p_3 параллельны, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{6.27}$$

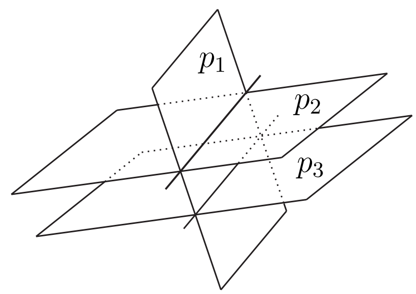

Рис. 6.13. Две плоскости параллельна, а третья их пересекает.

не имеет решений, а системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2; \tag{6.28}$$

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3 \tag{6.29}$$

имеют решения, но соответствующие плоскости не совпадают (см. предыдущий параграф). Итак, с одной стороны, из несовместности системы уравнений (6.27) имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2, \tag{6.30}$$

☐ Действительно, нужно воспользоваться разобранным уже случаем 2 из параграфа 4. ☒

С другой стороны, из совместности систем уравнений (6.28), (6.29), а также результата случая 1 параграфа 4 приходим к следующим равенствам:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Три плоскости пересекаются по прямой. Это означает, что каждые две плоскости из двух пересекаются по прямой, т.е. каждые два уравнения из трёх (6.22)–(6.24) имеют решение — прямую (см. случай 1 параграфа 4). Стало быть, с одной стороны, имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} =$$

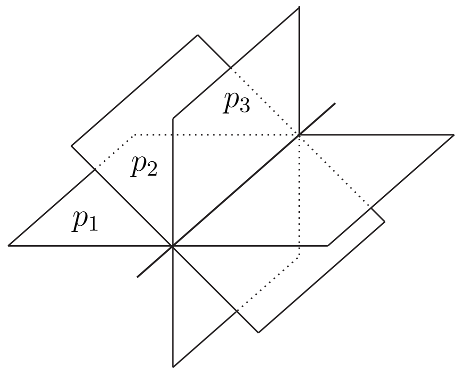

Рис. 6.14. Три плоскости пересекаются по общей прямой.

$$= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2. \quad (6.31)$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера–Капелли имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, поскольку система уравнений (6.22)–(6.24) совместна и случай максимального ранга рассмотрен в случае 1, поэтому

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2. \quad (6.32)$$

☐ Действительно, прежде всего имеем

$$1 \leqslant \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \leqslant 3.$$

При этом, с одной стороны, случай максимального ранга 3 нами уже изучен в случае 1 и в этом случае три плоскости пересекаются в единственной точке. С другой стороны, в силу (6.31) у матрицы системы (6.16)–(6.18) есть базисный минор второго порядка, например, на пересечении первых строк и первых двух столбцов. Поэтому ранг основной матрицы системы (6.16)–(6.18) равен двум. Наконец, осталось воспользоваться теоремой Кронекера–Капелли и получить равенство (6.32). ⊠

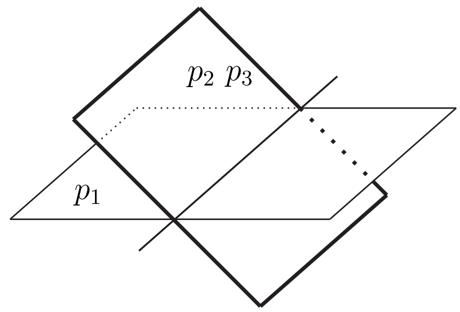

Рис. 6.15. Две плоскости совпадает, а третья из пересекает.

Случай 5. Две плоскости совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения будем считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеет бесконечно много решений (см. случай 2 параграфа 4) и поэтому имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

□ Действительно, одно из уравнений является следствием другого. Поэтому строчки

$$(A_2, B_2, C_2, D_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3, D_3)$$

линейно зависимы. ⊠

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2;$$

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решение — прямую (пересекаются, но не совпадают). Здесь нужно снова рассмотреть нормали к плоскостям, как это мы делали ранее (см. случай 1 параграфа 4). Тогда

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом в силу теоремы Кронекера-Капелли имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

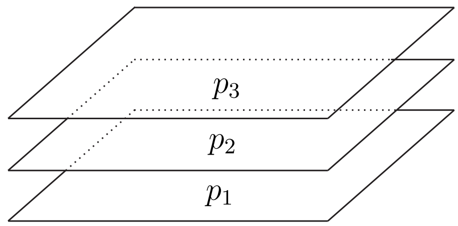

Рис. 6.16. Три плоскости параллельны.

Случай 6. Три плоскости параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из системы трёх уравнений (6.22)–(6.24) не имеют решений (см. предыдущий параграф). Это означает, что

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 1,$$

поскольку нормали

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3$$

попарно коллинеарны и поэтому строчки

$$(A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad (A_2, B_2, C_2),$$
$$(A_2, B_2, C_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3),$$
$$(A_3, B_3, C_3) \quad \text{и} \quad (A_1, B_1, C_1)$$

линейно зависимы и при этом

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2$$

в силу теоремы Кронекера–Капелли.

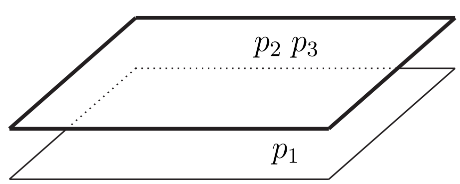

Рис. 6.17. Две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

Случай 7. Две плоскости из трёх совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности можно считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 им параллельна. Действительно, равенство $p_2 = p_3$ означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

совместна и векторы нормалей

$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3$$

к плоскостям p_2 и p_3 коллинеарны и поэтому строчки

$$(A_2, B_2, C_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3)$$

линейно зависимы. В силу теоремы Кронекера–Капелли справедливы следующее равенство:

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2;$$
$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеют решение вовсе. Следовательно, точно также как при рассмотрении случая 3 параграфа 4 имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом по теореме Кронекера–Капелли имеем

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

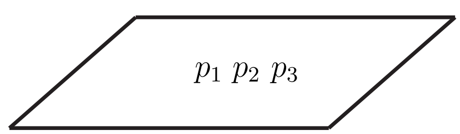

Рис. 6.18. Три плоскости совпадают.

Случай 8. Три плоскости совпадают. Это означает, что нормали

$$\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{f}_1 + B_1\mathbf{f}_2 + C_1\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{f}_1 + B_2\mathbf{f}_2 + C_2\mathbf{f}_3,$$
$$\mathbf{n}_3 = A_3\mathbf{f}_1 + B_3\mathbf{f}_2 + C_3\mathbf{f}_3$$

к плоскостям p_1, p_2 и p_3 попарно коллинеарны м и поэтому строчки

$$(A_1, B_1, C_1) \quad \text{и} \quad (A_2, B_2, C_2),$$
$$(A_2, B_2, C_2) \quad \text{и} \quad (A_3, B_3, C_3),$$
$$(A_3, B_3, C_3) \quad \text{и} \quad (A_1, B_1, C_1)$$

линейно зависимы. Следовательно, у основной матрицы системы (6.16)–(6.18) базисный минор имеет порядок 1, поскольку любые две строчки линейно зависимы:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Поэтому в силу совместности всех трех уравнений и теоремы Кронекера–Капелли имеем

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

6. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими векторными параметрическими уравнениями. Для удобства запишем эти уравнения в следующей форме:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{a}t, \quad l_2: \quad \mathbf{r} = -\mathbf{r}_2 + \mathbf{b}\tau, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \tag{6.33}$$

Приравняем эти уравнения и получим уравнение

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}t + \mathbf{b}\tau. \tag{6.34}$$

Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это общая декартова система координат. Пусть в этой системе координат

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Тогда из (6.34) приходим к системе трёх уравнений относительно двух неизвестных t и τ :

$$a_x t + b_x \tau = c_x, \tag{6.35}$$
$$a_y t + b_y \tau = c_y, \tag{6.36}$$

$$a_z t + b_z \tau = c_z. \tag{6.37}$$

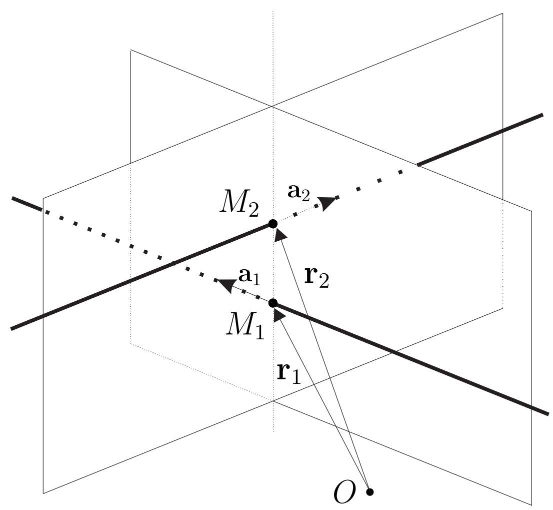

Рис. 6.19. Скрещивающиеся прямые.

Случай 1. Прямые скрещиваются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2. \tag{6.38}$$

☐ Действительно, поскольку направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не нулевые, то

$$1 \leqslant \operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \leqslant 2. \tag{6.39}$$

Если этот ранг равен 1, то столбцы матрицы линейно зависимы, т.е.

$$\alpha \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0). \tag{6.40}$$

Но тогда выполнены равенства

$$\alpha a_x + \beta b_x = \alpha a_y + \beta b_y = \alpha a_z + \beta b_z = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0). \tag{6.41}$$

Поскольку

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_1 + a_y \mathbf{e}_2 + a_z \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{e}_1 + b_y \mathbf{e}_2 + b_z \mathbf{e}_3. \tag{6.42}$$

Из (6.41) и (6.42) вытекает равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{при} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0),$$

которое противоречит линейной независимости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Значит, ранг матрицы системы (6.35)–(6.37) равен двум. ⊠

Система уравнений (6.35)–(6.37) не имеет решений, т. е. по теореме Кронекера-Капелли

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 3,$$

поскольку расширенная матрица системы отличается от основной матрицы системы ровно одним столбцом.

Случай 2. Прямые параллельны. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1,$$

а система уравнений (6.35)–(6.37) не имеет решений, т. е. по теореме Кронекера-Капелли

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Прямые пересекаются. Это означает, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 2,$$

а система уравнений (6.35)–(6.37) имеет единственное решение, т. е. по теореме Кронекера-Капелли

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4. Прямые совпадают. Это означает, что направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е.

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} = 1$$

и система уравнений (6.35)–(6.37) совместна, т. е. по теореме Кронекера-Капелли

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = 1.$$

ГЛАВА 7

Линейные формы

1. Линейные формы и линейные функционалы

7.1. Определение. *Линейной формой* называется функция $f(x)$, определенная на конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, со значениями в числовом поле $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$:

$$f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$$

и обладающая свойством линейности:

$$f(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 f(x_1) + \alpha^2 f(x_2) \tag{7.1}$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$. *Линейным функционалом* называется функция $f(x)$, определенная на бесконечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, со значениями в числовом поле $\mathbb{K}$, удовлетворяющая свойству линейности (7.1).

7.2. Иногда линейные формы называют *ковекторами*.

7.3. В этом определении мы использовали обозначение $f(x)$ для значения линейной формы f на векторе x линейного пространства $\mathcal{L}$. Это обозначение не очень удобно в дальнейшем при рассмотрении так называемых обобщенных функций, к которым относится, наверное, вам уже известная δ–функция Дирака. Поэтому ниже мы будем использовать такое обозначение для результата применения линейной формы f к вектору $x \in \mathcal{L}$:

$$\langle f, x \rangle. \tag{7.2}$$

Используемое обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ носит название *скобок двойственности* или *угловых скобок*. Не путайте их со скалярным произведением в евклидовом или в унитарном пространствах, которое мы рассмотрим ниже и для которого мы будем использовать другое обозначение (y, x). В обозначении (7.2) свойство линейности (7.1) примет следующий вид:

$$\langle f, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle = \alpha^1 \langle f, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle f, x_2 \rangle \tag{7.3}$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$.

7.4. Пример. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$ и $x \in \mathcal{L}$. Запишем разложение вектора x по введенному базису:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \tag{7.4}$$

где мы пользуемся обозначением Эйнштейна (по индексу $i \in \overline{1,n}$ предполагается суммирование). Рассмотрим следующую числовую функцию:

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle \stackrel{def:}{=} x^j, \tag{7.5}$$

где x^j — j–ая координата в разложении по базису (7.4) вектора $x \in \mathcal{L}$. Проверим, что $\mathbf{e}^j$ есть линейная форма. Действительно, пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и справедливы следующие разложения по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad y = y^i \cdot \mathbf{e}_i, \tag{7.6}$$

причем

$$(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)^i \mathbf{e}_i = \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha x^i \cdot \mathbf{e}_i + \beta y^i \cdot \mathbf{e}_i = (\alpha x^i + \beta y^i) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{7.7}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^j, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \rangle = (\alpha \cdot x + \beta \cdot y)^j = \alpha x^j + \beta y^j = \alpha \langle \mathbf{e}^j, x \rangle + \beta \langle \mathbf{e}^j, y \rangle.$$

Следовательно, $\mathbf{e}^j$ — линейная форма.

7.5. Пример. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ с вещественными коэффициентами рассмотрим следующее отображение:

$$\langle f_{t_0}, p \rangle := p(t_0), \tag{7.8}$$

которое сопоставляет произвольному полиному $p(t) \in P^n$ его значение в некоторой фиксированной точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Докажем, что f_{t_0} является линейной формой.

$\triangle$ Действительно, пусть $p(t), q(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle f_{t_0}, \alpha p + \beta q \rangle = (\alpha p(t) + \beta q(t))(t_0) = \alpha p(t_0) + \beta q(t_0) = \\ = \alpha \langle f_{t_0}, p \rangle + \beta \langle f_{t_0}, q \rangle. \quad \boxtimes$$

7.6. Пример. Для любого полинома $q(t)$ отображение, определенное на P^n следующим образом:

$$\langle f_q, p \rangle := \int\limits_0^1 q(t) p(t)\, dt$$

является линейной формой, если определенный интеграл понимается в смысле Римана или Лебега.

$\triangle$ Действительно, для любых $p(t), g(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$\langle f_q, \alpha p + \beta g\rangle = \int\limits_0^1 q(t)\,[\alpha p(t) + \beta q(t)]\; dt =$$

$$= \alpha \int\limits_0^1 q(t)p(t)\,dt + \beta \int\limits_0^1 q(t)g(t)\,dt = \alpha\langle f_q, p\rangle + \beta\langle f_q, g\rangle. \quad \boxtimes \tag{7.9}$$

7.7. Пример. Бесконечномерное пространство $\mathbb{C}[0,1]$. Прежде всего заметим, что в линейном пространстве полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, для которого используется обозначение P^n базисом является следующее семейство полиномов $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ (докажите сами!), причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $P^n \subset \mathbb{C}[0,1]$, где $\mathbb{C}[0,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций. Следовательно, линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является бесконечномерным.

Для любой непрерывной функции $g(t) \in \mathbb{C}[0,1]$ определим линейный функционал над линейным пространством $\mathbb{C}[0,1]$:

$$\langle f_g, x(t)\rangle := \int\limits_0^1 g(t)x(t)\,dt,$$

линейность которого доказывается точно также как и в (7.9).

7.8. Пример. δ–функция Дирака. Эта функция определяется следующим образом:

$$\langle \delta, \phi\rangle = \phi(0)$$

и определен этот линейный функционал над линейным пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, построение которого далеко выходит за рамки нашего курса. Заметим, что действие δ–функции на основных функций нельзя записывать в виде интеграла Римана (и даже в виде интеграла Лебега):

$$\langle \delta, \phi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\phi(x)\,dx, \quad \delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad x = 0; \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Эта запись неверна.

7.9. Определение. Линейные формы f и g называются равными, и пишут $f = g$, если для всех векторов $x \in \mathcal{L}$ имеет место равенство

$$\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle.$$

7.10. Пример. Показать, что две линейные формы f_1 и f_2, заданные на линейном пространстве полиномов P^2 степени не выше 2, равенствами

$$\langle f_1, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} g_1(t)p(t)\,dt, \quad \langle f_2, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} g_2(t)p(t)\,dt, \tag{7.10}$$

совпадают, если $g_1(t) - g_2(t) = 5t^3 - 3t$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle f_1 - f_2, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} [g_1(t) - g_2(t)]p(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} [5t^3 - 3t][a_0 + a_1 t + a_2 t^2]\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [a_0 5t^3 + a_1 5t^4 + 5a_2 t^5 - 3a_0 t - 3a_1 t^2 - 3a_2 t^3]\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [a_1 5t^4 - 3a_1 t^2]\,dt = a_1[2 - 2] = 0,$$

поскольку

$$\int\limits_{-1}^{1} t^n\,dt = 0 \quad \text{для любого нечетного} \quad n \in \mathbb{N}. \quad \boxtimes$$

7.11. Лемма. Всякая линейная форма $f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ однозначно определяется своими значениями $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на векторах базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть линейная форма f задана. Тогда однозначно определены ее значения $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на элементах базиса. Обратно. Пусть заданы значения формы $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на элементах базиса. Рассмотрим разложение элемента $x \in \mathcal{L}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i \Rightarrow \langle f, x\rangle = \langle f, x^i \cdot \mathbf{e}_i\rangle = x^i \langle f, \mathbf{e}_i\rangle.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. □

2. Сопряженное линейное пространство

7.12. Определение. Суммой линейных форм f и g называется отображение $h : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, определяемое равенством

$$\langle h, x\rangle \stackrel{def:}{=} \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

7.13. Определение. Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, для всех векторов $x \in \mathcal{L}$ определяемое равенством

$$\langle l, x\rangle \stackrel{def:}{=} \alpha\langle f, x\rangle.$$

Обозначение. $l = \alpha \cdot f$.

7.14. Лемма. Сумма линейных форм и произведение линейной формы на число являются линейными формами.

Доказательство. Шаг 1. Линейность суммы форм. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ — произвольны и $h = f + g$. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle h, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = \langle f, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle + \langle g, \alpha x + \beta y\rangle = \\ = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle + \alpha\langle g, x\rangle + \beta\langle g, y\rangle = \\ = \alpha(\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle) + \beta(\langle f, y\rangle + \langle g, y\rangle) = \alpha\langle h, x\rangle + \beta\langle h, y\rangle.\end{aligned}$$

Шаг 2. Линейность произведения формы на число. Пусть $l = \gamma \cdot f$.

$$\begin{aligned}\langle l, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = \gamma\langle f, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = \gamma(\alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle) = \\ = \gamma\alpha\langle f, x\rangle + \gamma\beta\langle f, y\rangle = \alpha\gamma\langle f, x\rangle + \beta\gamma\langle f, y\rangle = \alpha\langle l, x\rangle + \beta\langle l, y\rangle.\end{aligned}$$

□

7.15. Определение. Нулевой формой θ^* называется отображение, сопоставляющая любому вектору $x \in \mathcal{L}$ нуль поля $0 \in \mathbb{K}$:

$$\langle \theta^*, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

7.16. Лемма. Нулевая форма θ^* является линейной.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle \theta^*, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha\langle \theta^*, x\rangle + \beta\langle \theta^*, y\rangle.$$

□

7.17. Теорема. *Множество всех линейных форм с введенными законами сложения* 7.12 *и умножения на числа* 7.13 *является линейным пространством.*

Доказательство. Пусть f, g, h — произвольные линейные формы и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольные числа. Проверим все аксиомы линейного пространства.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle f + g, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle = \langle g, x\rangle + \langle f, x\rangle = \langle g + f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + g = g + f$.

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\langle (f + g) + h, x\rangle = \langle f + g, x\rangle + \langle h, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle + \langle h, x\rangle = \\ = \langle f, x\rangle + \langle g + h, x\rangle = \langle f + (g + h), x\rangle.\end{aligned}$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + (g + h) = (f + g) + h$.

Шаг 3. Нулевая форма. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 7.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle f + \theta^*, x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle \theta^*, x\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + \theta^* = f$.

Шаг 4. Существование противоположного элемента. Определим противоположный элемент f' к линейной форме f следующим образом:

$$\langle f', x\rangle \stackrel{def:}{=} -\langle f, x\rangle.$$

Тогда для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие равенства:

$$\langle f + f', x\rangle = \langle f, x\rangle + \langle f', x\rangle = 0 = \langle \theta^*, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + f^{'} = \theta^*$.

Шаг 5. Свойство $1 \in \mathbb{K}$. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 7.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle 1 \cdot f, x\rangle = 1\langle f, x\rangle = \langle f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $1 \cdot f = f$.

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 7.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (\alpha\beta) \cdot f, x\rangle = (\alpha\beta)\langle f, x\rangle = \alpha\langle \beta \cdot f, x\rangle = \langle \alpha \cdot (\beta \cdot f), x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$.

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения элементов. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 7.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle \alpha \cdot (f+g), x \rangle = \alpha \langle f+g, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \alpha \langle g, x \rangle = \\ = \langle \alpha \cdot f, x \rangle + \langle \alpha \cdot g, x \rangle = \langle \alpha \cdot f + \alpha \cdot g, x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $\alpha \cdot (f+g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 7.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (\alpha + \beta) \cdot f, x \rangle = (\alpha + \beta) \langle f, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle + \beta \langle f, x \rangle = \\ = \langle \alpha \cdot f, x \rangle + \langle \beta \cdot f, x \rangle = \langle \alpha \cdot f + \beta \cdot f, x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$. □

7.18. Определение. Линейное пространство всех линейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется сопряженным к $\mathcal{L}$ линейным пространством и обозначается символом $\mathcal{L}^*$.

7.19. Лемма. Для произвольных $f \in \mathcal{L}^*$, $x \in \mathcal{L}$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$\langle \alpha \cdot f, x \rangle = \alpha \langle f, x \rangle = \langle f, \alpha \cdot x \rangle. \tag{7.11}$$

Доказательство. Здесь нужно воспользоваться определением умножения линейной формы на числа и линейностью формы $f \in \mathcal{L}^*$. □

7.20. Теорема. *Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Набор форм $\{\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n\}$, действующих по правилу*

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j, \tag{7.12}$$

где $x = x^j \cdot \mathbf{e}_j$, образуют базис сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$.

Доказательство. Полнота. Пусть $f \in \mathcal{L}^*$ и $x \in \mathcal{L}$ — произвольны. Тогда с учетом леммы 7.19 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f, x \rangle = \langle f, x^j \cdot \mathbf{e}_j \rangle = x^j \langle f, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \langle f, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{e}^j, x \rangle.$$

Поскольку последнее равенство должно быть выполнено для всех $x \in \mathcal{L}$, то в силу определения 7.9 равенства линейных форм приходим к равенству

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{e}^j,$$

т.е. набор $\{\mathbf{e}^1, \dots \mathbf{e}^n\}$ полный.

Линейная независимость. Прежде всего заметим, что

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta_i^j,$$

Пусть

$$\alpha_j \cdot \mathbf{e}^j = \theta^*. \tag{7.13}$$

Применим обе части равенства (7.13) к $\mathbf{e}_i$ и получим следующие равенства:

$$\alpha_i = \alpha_j \delta_i^j = \alpha_j \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \alpha_j \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \theta^*, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, набор $\{\mathbf{e}^1, \dots \mathbf{e}^n\}$ линейно независим в $\mathcal{L}^*$.

Таким образом, с учетом полноты этого семейства ковекторов они образуют базис в $\mathcal{L}^*$. □

7.21. Следствие. *Справедливо равенство* $\dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}$.

7.22. Определение. Построенный в теореме 7.20 базис $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}^*$ называется взаимным к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

7.23. Лемма. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливо следующее равенство:

$$x = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j. \tag{7.14}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j.$$

□

7.24. Лемма. Взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть существуют два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^n\}$ для данного базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$, которые определяются равенствами

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j = \langle \mathbf{f}^j, x \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Таким образом,

$$\langle \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Значит, из определения 7.9 равенства линейных форм получаем, что

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n}.$$

□

3. Дважды сопряженное пространство*

7.25. Данный параграф не входит в основной курс линейной алгебры. Однако, заинтересованному читателю мы предлагаем изучить данный параграф после изучения основного материала курса лекций.

7.26. Определение. Сопряженное к линейному пространству $\mathcal{L}^*$ носит название дважды сопряженного пространства и обозначается символом $\mathcal{L}^{**}$.

7.27. Действие линейной формы из $\hat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ на линейном пространстве $\mathcal{L}^* \ni f$ мы будем обозначать следующим образом:

$$\langle \hat{x}, f \rangle_*. \tag{7.15}$$

Мы используем такое обозначение, чтобы подчеркнуть, что скобки двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$, вообще говоря, отличаются от $\langle \cdot, \cdot \rangle$. И это действительно имеет место в бесконечномерных пространствах. Однако, в конечномерном случае справедливо следующее утверждение:

7.28. Теорема. *Справедливо следующее равенство:*

$$\langle \hat{x}, f \rangle_* = \langle f, x \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{L}^*, \tag{7.16}$$

где определено линейное взаимно однозначное отображение на все $\mathcal{L}^{**}$

$$J:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}, \tag{7.17}$$

т.е. для каждого $\hat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ *найдется единственное* $x \in \mathcal{L}$, *что справедливо равенство*

$$\hat{x} = Jx. \tag{7.18}$$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный к $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}^*$ и, наконец, $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ — взаимный к $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ базис в $\mathcal{L}^{**}$. По определению 7.22 справедливы следующие равенства:

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta^j_i, \tag{7.19}$$

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_j, f \rangle_* = f_j, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow \langle \hat{\mathbf{e}}_j, \mathbf{e}^i \rangle_* = \delta^i_j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{7.20}$$

В силу леммы 7.31 взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$, а взаимный базис $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\} \in \mathcal{L}^{**}$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$. Таким образом, базис $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\} \in \mathcal{L}^{**}$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Введем следующее отображение:

$$J:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**},\ \langle Jx, f \rangle_* \stackrel{def:}{=} \langle f, x \rangle \ \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{L}^{**}. \tag{7.21}$$

Шаг 2. Прежде всего докажем, что отображение J линейное. Действительно, пусть $x, y \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{L}^*$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y), f\rangle_* = \langle f, \alpha \cdot x + \beta \cdot y\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle = \\ = \alpha\langle Jx, f\rangle_* + \beta\langle Jy, f\rangle_* = \langle \alpha \cdot Jx + \beta \cdot Jy, f\rangle_*,$$

из которого вытекает, что

$$\langle J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) - \alpha \cdot Jx - \beta \cdot Jy, f\rangle_* = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{L}^*.$$

Следовательно,

$$J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) - \alpha \cdot Jx - \beta \cdot Jy = \theta^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow J(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot Jx + \beta \cdot Jy.$$

Значит, *отображение J линейное.*

Шаг 3. Докажем, что

$$\hat{\mathbf{e}}_i = J\mathbf{e}_i \quad \text{при} \quad i = \overline{1, n}. \tag{7.22}$$

Действительно, в силу (7.19) и (7.20) справедливы следующие равенства:

$$\langle J\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j\rangle_* = \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = \delta_i^j = \langle \hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^j\rangle_* \Rightarrow \langle J\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^j\rangle = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f_j\langle J\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{e}^j\rangle = 0 \Rightarrow \langle J\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{e}}_i, f_j \cdot \mathbf{e}^j\rangle = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle J\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{e}}_i, f\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j \in \mathcal{L}^* \Rightarrow \\ \Rightarrow J\mathbf{e}_i - \hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\theta} \in \mathcal{L}^{**} \Rightarrow \hat{\mathbf{e}}_i = J\mathbf{e}_i, \tag{7.23}$$

где символом $\hat{\theta}$ мы обозначили нулевой вектор линейного пространства $\mathcal{L}^{**}$.

Шаг 4. Докажем, что $\ker J = \{\theta\}$, где символом $\ker J$ мы обозначили *ядро отображения* J:

$$\ker J \stackrel{def:}{=} \{x \in \mathcal{L} : \ Jx = \hat{\theta}\}.$$

Предположим, что $x \in \ker J$ и $x \neq \theta$. Тогда имеет место разложение

$$x = \alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \tag{7.24}$$

причем числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ одновременно в нуль не обращаются. Тогда с учетом (7.22) имеем

$$\alpha^1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + \cdots + \alpha^n \cdot \hat{\mathbf{e}}_n = Jx = \hat{\theta}. \tag{7.25}$$

Но поскольку $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ — линейно независимое семейство (базис), то равенство (7.25) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0$. что противоречит тому, что числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ одновременно в нуль не обращаются.

Поэтому отображение $J : \ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}$ является *инъекцией.*

Шаг 5. Докажем, что $\operatorname{im} J = \mathcal{L}^{**}$, где символом $\operatorname{im} J$ мы обозначили *образ отображения* J:

$$\operatorname{im} J = \{\hat{x} = Jx : \ \forall\, x \in \mathcal{L}\}.$$

Пусть $\hat{x} = \hat{x}^j \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ — произвольный фиксированный вектор. Тогда в силу (7.22) и линейности отображения J имеем

$$\hat{x} = \hat{x}^j \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{x}^j \cdot J\mathbf{e}_j = J(\hat{x}^j \cdot \mathbf{e}_j) = Jx, \quad x = \hat{x}^j \cdot \mathbf{e}_j \in \mathcal{L}. \tag{7.26}$$

Таким образом, отображение J *сюръекция*.

Шаг 6. Следовательно, линейное в силу шага 2 отображение $J : \ \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{**}$ является изоморфизмом. Поэтому для любого $\hat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ найдется такое единственное $x \in \mathcal{L}$, что для всех $f \in \mathcal{L}$ будут справедливы следующие равенства:

$$\langle \hat{x}, f\rangle_* = \langle Jx, f\rangle_* = \langle f, x\rangle.$$

Теорема доказана полностью.

□

7.29. Следствие. *Для любой линейной формы* (*ковектора*) $f \in \mathcal{L}^*$ *справедливо равенство*

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j, \tag{7.27}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ *— взаимный базис к базису* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Первый вариант. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$ — произвольная линейная форма, а $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\} \in \mathcal{L}^{**}$ взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$. Напомню, что тогда справедливы следующие равенства:

$$f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad \langle \hat{\mathbf{e}}_j, f\rangle_* = f_j. \tag{7.28}$$

Тогда в силу равенства (7.16) теоремы 7.28 получаем равенство

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_j, f\rangle_* = \langle f, \mathbf{e}_j\rangle. \tag{7.29}$$

Стало быть, из (7.28) и (7.29) вытекает равенство (7.27).

Второй вариант. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad \langle \mathbf{e}^j, x\rangle = x^j,$$

$$\langle f, x\rangle = \langle f, x^j \cdot \mathbf{e}_j\rangle = x^j\langle f, \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}^j, x\rangle\langle f, \mathbf{e}_j\rangle = \langle\langle f, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j, x\rangle.$$

Поскольку $x \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор, то

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j.$$

□

4. Линейные формы над P^n

7.30. Над линейным пространством P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим формы, определенные следующим образом:

$$D_t^{(s)} : P^n \to \mathbb{R}, \quad \langle D_t^{(s)}, p(t)\rangle := p^{(s)}(0), \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{7.30}$$

где индексом s мы указываем порядок производной $D_t^{(s)}$ по переменной t.

7.31. Лемма. Формы $D_t^{(s)} \in (P^n)^*$, т.е. являются линейными.

Доказательство. Пусть $p(t), q(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle D_t^{(s)}, \alpha p(t) + \beta q(t)\rangle = (\alpha p(t) + \beta q(t))^{(s)}(0) = \\ = \alpha p^{(s)}(0) + \beta q^{(s)}(0) = \alpha \langle D_t^{(s)}, p(t)\rangle + \beta \langle D_t^{(s)}, q(t)\rangle.$$

□

7.32. Лемма. Набор линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$ образуют базис линейного пространства $(P^n)^*$.

Доказательство. Шаг 1. Линейная независимость. Рассмотрим линейную комбинацию этих линейных форм

$$\alpha_0 D_t^{(0)} + \alpha_1 D_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n D_t^{(n)} = \theta^*. \tag{7.31}$$

Применим обе части этого равенства к полиному t^k при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и получим следующие равенства:

$$\langle \alpha_0 D_t^{(0)} + \alpha_1 D_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n D_t^{(n)}, t^k\rangle = \langle \theta^*, t^k\rangle = 0, \tag{7.32}$$

Справедливы следующие выражения:

$$\langle D_t^{(j)}, t^k\rangle = k(k-1)\cdots(k-j+1)t^{k-j}\Big|_{t=0} = 0, \quad j \in [0, k-1], \tag{7.33}$$

$$\langle D_t^{(k)}, t^k\rangle = k!, \tag{7.34}$$

$$\langle D_t^{(j)}, t^k\rangle = 0, \quad j \in [k+1, n]. \tag{7.35}$$

Таким образом, из (7.32) с учетом (7.33)–(7.35) получим равенство

$$\alpha_k k! = 0 \quad \text{для} \quad k = \overline{0, n}.$$

Итак, равенство (7.31) возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е. семейство линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\} \in (P^n)^*$ линейно независимо.

Шаг 2. Базис. Из следствия 7.21 вытекает, что

$$\dim P^n = \dim (P^n)^*.$$

При этом, как нам уже известно, $\dim P^n = n+1$. Но линейно независимый набор $D_t^{(0)},\dots,D_t^{(n)}$ состоит из $n+1$ элементов, т.е. этот набор образует базис в $(P^n)^*$. $\square$

7.33. Лемма. Набор линейных форм $\{D_t^{(0)},\dots,D_t^{(n)}\}$ является взаимным базисом в $(P^n)^*$ к базису $\{1,t,t^2/2,\dots,t^n/n!\}$ линейного пространства P^n.

Доказательство. Шаг 1. Линейная независимость. Прежде всего докажем, что набор $\{1,t,t^2/2,\dots,t^n/n!\}$ образует базис линейного пространства P^n. Действительно, рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2\frac{t^2}{2!}+\dots+\alpha_n\frac{t^n}{n!}=\theta. \tag{7.36}$$

Из этого равенства при $t=0$ получим равенство $\alpha_0=0$. Дифференцируя это равенство в точке $t=0$ получим $\alpha_1=0$. Продолжая дифференцировать, мы получим в итоге равенства $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$. Итак, набор $\{1,t,t^2/2,\dots,t^n/n!\}$ образует линейно независимое семейство в линейном пространстве P^n.

Шаг 2. Полнота. Пусть $p(t)\in P^n$. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n=\\ =a_0 1+a_1\frac{t}{1}+a_2 2!\frac{t^2}{2!}+\dots+a_n n!\frac{t^n}{n!}\end{aligned} \tag{7.37}$$

Из равенства (7.37) вытекает, что набор $\{1,t,t^2/2,\dots,t^n/n!\}$ полон в P^n. Таким образом, из первых двух шагов данного доказательства вытекает, что набор $\{1,t,t^2/2,\dots,t^n/n!\}$ образует базис в P^n.

Шаг 3. Взаимный базис. С учетом равенств (7.33)–(7.35) мы приходим к следующему выражению:

$$\left\langle D_t^{(j)},p(t)\right\rangle=\delta^{jk}\left\langle D_t^{(k)},a_k\frac{t^k}{k!}\right\rangle=a_k\delta^{jk}, \tag{7.38}$$

где δ^{jk} — символ Кронекера и

$$p(t)=a_0+a_1t+a_2\frac{t^2}{2!}+\dots+a_n\frac{t^n}{n!}$$

и в частности,

$$\left\langle D_t^{(j)},\frac{t^k}{k!}\right\rangle=\delta^{jk}.$$

Отсюда и в силу результата леммы 7.32 приходим к выводу о том, что набор $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$ — это взаимный базис в $(P^n)^*$ к базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n. $\square$

7.34. Можно получить разложение полинома $p(t) \in P^n$ не пользуясь формулой Тейлора, а только фактом, что базис $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\} \subset (P^n)^*$ является взаимным к базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n. Действительно, справедлива следующая лемма:

7.35. Лемма. Всякий полином $p(t) \in P^n$ разлагается по базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ согласно формуле

$$p(t) = p(0) + p'(0)t + p''(0)\frac{t^2}{2!} + \cdots + p^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}. \tag{7.39}$$

Доказательство. В силу результата леммы 7.33 и равенства (7.14) мы приходим к выводу о том, что справедливо следующее равенство:

$$x = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j, \tag{7.40}$$

в котором нужно положить

$$x = p(t) \in P^n, \quad \mathbf{e}^j = D_t^{(j)}, \quad \mathbf{e}_j = \frac{t^j}{j!} \tag{7.41}$$

и в результате получим равенство

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \langle D_t^{(j)}, p(t) \rangle \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}. \tag{7.42}$$

$\square$

ГЛАВА 8

Линейные операторы

1. Преобразование базисов и координат

8.1. Прежде всего введем (или напомним) обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всех лекций. Прежде всего укажем, что для матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, т.е. состоящей из m строк и n столбцов используются три формы записи для элементов матрицы. Первая запись — a^j_k, вторая форма — a_{jk}, и, наконец, третья форма a^{jk}, где $j \in \overline{1,m}$ нумерует строчки матрицы, $k \in \overline{1,n}$ — нумерует столбцы матрицы, на пересечении которых находится соответствующий элемент из поля $\mathbb{K}$.

8.2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ — две произвольные матрицы. С учетом введенных обозначений в пункте 8.1, произведение $C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ в обозначениях Эйнштейна можно записать следующими шестью способами:

$$c^j_k = a^j_s b^s_k, \quad c_{jk} = a_{js} b_{sk}, \quad c^j_k = a^j_s b_{sk}, \quad c_{jk} = a_{js} b^s_k,$$

$$c^{jk} = a^{js} b^{sk}, \quad c^{jk} = a^{js} b^s_k.$$

Запишем эти суммы произведений в матричных формах записи.

$$c^j_k = a^j_s b^s_k = (a^j_1, \ldots, a^j_p) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js} b_{sk} = (a_{j1}, \ldots, a_{jp}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^j_k = a^j_s b_{sk} = (a^j_1, \ldots, a^j_p) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js}b_k^s = (a_{j1}, \dots a_{jp}) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js}b^{sk} = (a^{j1}, \dots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js}b_k^s = (a^{j1}, \dots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix}.$$

8.3. Теперь мы сделаем очень важное замечание об обозначениях. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда для обозначения новых базисов мы будем использовать «штрихованные индексы». Например,

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\},\ \{\mathbf{e}_{1''}, \dots, \mathbf{e}_{n''}\} \text{ и так далее.}$$

Отметим, что в вычислениях для обозначения нового базиса лучше использовать другую букву, например, новый базис можно обозначить так: $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$. Мы, кстати говоря, в дальнейшем тоже будем использовать такое обозначение для нового базиса.

8.4. Итак, пусть нам заданы старый базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Разложим новый базис по старому и для этого разложения будем использовать матрицу $(c_{i'}^i)_{n'}^n$, причем натуральные числа n и n' равны. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}_{1'} = c_{1'}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_{1'}^n \cdot \mathbf{e}_n, \tag{8.1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{8.2}$$

$$\mathbf{e}_{n'} = c_{n'}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c_{n'}^n \cdot \mathbf{e}_n. \tag{8.3}$$

В обозначениях Эйнштейна формулы (8.1)–(8.3) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^i \cdot \mathbf{e}_i. \tag{8.4}$$

Последнее равенство, записанное в координатной форме, можно представить в матричной форме записи:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \tag{8.5}$$

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), \tag{8.6}$$

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}. \tag{8.7}$$

Из формул (8.5)–(8.7), пользуясь правилом умножения матриц «строчка на столбец», легко получаются равенства (8.1)–(8.3). Для квадратной матрицы C справедлива следующая лемма:

8.5. Лемма. $\det C \neq 0$.

Доказательство. Пусть противное и квадратная матрица C перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{E}'$ вырождена: $\det C = 0$. Тогда столбцы матрицы C линейно зависимы:

$$\alpha^{1'} C_{1'} + \cdots + \alpha^{n'} C_{n'} = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad C = \|C_{1'}, C_{2'}, \ldots, C_{n'}\|, \tag{8.8}$$

где числа $\alpha^{1'}, \ldots, \alpha^{n'}$ одновременно в нуль не обращаются. Согласно правилу умножения «строчка на столбец» из равенства (8.5) получаем равенство

$$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{E} \cdot C_{i'}, \quad i' \in \overline{1', n'}. \tag{8.9}$$

В обозначениях Эйнштейна справедливы следующие равенства:

$$\alpha^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'} = \alpha^{i'} \cdot (\mathbf{E} \cdot C_{i'}) = \mathbf{E} \cdot \left(\alpha^{i'} C_{i'}\right) = \mathbf{E} \cdot O = \theta.$$

Таким образом, семейство $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейно зависимо, что противоречит тому, что это семейство образует базис. Значит, $\det C \neq 0$. □

8.6. С одной стороны, из результата леммы 8.5 и из равенства (8.5) вытекает равенство

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cdot C^{-1}. \tag{8.10}$$

Будем в дальнейшем использовать следующее обозначение:

$$C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n.$$

С другой стороны, из равенства (8.4) в наших обозначениях (штрихованные индексы) вытекает обратное равенство

$$\mathbf{e}_i = c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{8.11}$$

Из сравнения (8.10) с (8.11) приходим к выводу о том, что

$$C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \cdots & c^{1'}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n'}_1 & \cdots & c^{n'}_n \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$C \cdot C^{-1} = I, \quad C^{-1} \cdot C = I \Leftrightarrow \boxed{c^i_{i'} c^{i'}_j = \delta^i_j,} \quad \boxed{c^{i'}_i c^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}.}$$

Сделаем еще одно замечание. Если вы захотите записать транспонированную к матрице C, определенной равенством (8.7), то нельзя переставлять местами индексы. Транспонированной к матрице C является следующая матрица:

$$C^T = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^n_{1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^1_{n'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}, \quad \text{а не матрица} \quad \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \cdots & c^{n'}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{1'}_n & \cdots & c^{n'}_n \end{pmatrix}.$$

8.7. Мы получили формулы (8.4) и (8.11) перехода от одного базиса линейного пространства к другому базису. Теперь наша задача выяснить как при переходе к другому базису преобразуются координаты векторов линейного пространства.

8.8. Действительно, пусть $x \in \mathcal{L}$ — это произвольных вектор. Тогда с учетом равенства (8.4) и линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (базиса в $\mathcal{L}$) справедливы следующие равенства:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k = x^{k'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = x^{k'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^k - c^k_{k'} x^{k'}) \cdot \mathbf{e}_k = \theta \Leftrightarrow \boxed{x^k = c^k_{k'} x^{k'}.} \tag{8.13}$$

Кроме того, имеем

$$x = x^{k'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = x^k \cdot \mathbf{e}_k = x^k c^{k'}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} \Rightarrow \boxed{x^{k'} = c^{k'}_k x^k.} \tag{8.14}$$

Аналогичные рассуждения можно провести в матричной форме записи. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Из (8.15) с учетом (8.5) приходим к следующей цепочке выражений:

$$\mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot C \cdot X_{e'} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot (X_e - C \cdot X_{e'}) = \theta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{X_e = C \cdot X_{e'},\ X_{e'} = C^{-1} \cdot X_e.} \tag{8.16}$$

Сравним теперь законы преобразования базисов и координат:

$$\boxed{\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k, \quad x^{k'} = c^{k'}_k x^k} \tag{8.17}$$

или

$$\boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \quad X_{e'} = C^{-1} \cdot X_e.} \tag{8.18}$$

Мы видим, что закон преобразования базисов отличается от закона преобразования координат вектора линейного пространства при переходе от старого базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ к новому базису $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$.

8.9. Определение. Закон преобразования базиса линейного пространства $\mathcal{L}$ при переходе от старого базиса к новому базису называется *ковариантным*, а соответствующий закон преобразования координат вектора линейного пространства называется *контравариантным*.

8.10. Лемма. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, причем $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$, связанный со старым соотношением

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Тогда

$$\mathbf{e}^{j'} = c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{E}}' = C^{-1} \cdot \hat{\mathbf{E}} \tag{8.19}$$

— взаимный базис к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, где

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{n'} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, имеем

$$\mathbf{e}^j = c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{E}} = C \cdot \hat{\mathbf{E}}'. \tag{8.20}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{L}$. Тогда имеем

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'}, \tag{8.21}$$

$$x^{j'} = c^{j'}_j x^j = c^{j'}_j \langle \mathbf{e}^j, x \rangle = \langle c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j, x \rangle. \tag{8.22}$$

Взаимный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\} \subset \mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\} \subset \mathcal{L}$ однозначно определяется равенствами

$$\langle \mathbf{e}^{j'}, x \rangle := x^{j'}, \quad x = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'}.$$

Значит, отсюда и из (8.22) приходим к выводу о том, что

$$\mathbf{e}^{j'} = c_j^{j'} \cdot \mathbf{e}^j, \quad j' = \overline{1', n'}$$

— есть взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$.

Используя наше правило умножения «строчка на столбец» получаем матричную форму записи. □

8.11. Лемма. Справедливы следующие формулы преобразования координат линейной формы $f \in \mathcal{L}^*$:

$$f_j = f_{j'} c_j^{j'}, \quad f_{j'} = f_j c_{j'}^j, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad f = f_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} \tag{8.23}$$

или

$$F_{e'} = F_e \cdot C, \quad F_e = F_{e'} \cdot C^{-1}, \tag{8.24}$$

$$F_e = (f_1, \ldots, f_n), \quad F_{e'} = (f_{1'}, \ldots, f_{n'}).$$

Доказательство. С учетом (8.19) справедливы следующие равенства:

$$f = f_j \cdot \mathbf{e}^j = f_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} = f_{j'} c_j^{j'} \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow f_j = f_{j'} c_j^{j'}.$$

Меняя местами j и j', получим равенство

$$f_{j'} = f_j c_{j'}^j.$$

Следовательно, равенства (8.23) доказаны. Докажем теперь равенства (8.24). Действительно, с учетом (8.19) справедливы равенства

$$f = F_e \cdot \hat{\mathbf{E}} = F_{e'} \cdot \hat{\mathbf{E}}' = F_{e'} \cdot C^{-1} \cdot \hat{\mathbf{E}} \Rightarrow F_e = F_{e'} \cdot C^{-1}.$$

Отсюда сразу же получаем второе равенство: $F_{e'} = F_e \cdot C$. Тем самым, равенства (8.24) доказаны. □

8.12. Из результатов лемм 8.10 и 8.11 вытекает, что взаимный базис при переходе к новому базису преобразуется контравариантным образом, а координаты линейной формы при переходе к новому базису преобразуется ковариантным образом.

8.13. Из полученных формул преобразования координат вектора и координат ковектора вытекает общее правило. Пусть у нас имеется один из этих объектов a_i, $a_{i'}$, a^i и $a^{i'}$, то преобразуются эти объекты следующим образом:

$$a_i = c_i^{i'} a_{i'}, \quad a_{i'} = c_{i'}^i a_i, \quad a^i = c_{i'}^i a^{i'}, \quad a^{i'} = c_i^{i'} a^i.$$

Это правило позволяет не задумываться над тем как преобразуются эти объекты, а писать «машинально» правильные формулы.

2. Линейные операторы

8.14. Определение. Линейным оператором $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется однозначное отображение линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{M}$, обладающее свойством линейности

$$A(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

8.15. Определение. Множество $\{y = Ax : \ \forall\, x \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{M}$ называется образом оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и обозначается символом $\operatorname{im} A$.

8.16. Определение. Множество $\{x \in \mathcal{L} : \ Ax = \theta \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{L}$ называется ядром оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и обозначается символом $\ker A$.

8.17. Лемма. Множества $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ и $\ker A \subset \mathcal{L}$ являются линейными подпространствами в соответствующих линейных пространствах.

Доказательство. Шаг 1. $\operatorname{im} A$. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что

$$y_1 = Ax_1, \quad y_2 = Ax_2.$$

Докажем, что $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in \operatorname{im} A$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) \in \operatorname{im} A,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A.

Шаг 2. $\ker A$. Пусть $x_1, x_2 \in \ker A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot \theta + \alpha^2 \cdot \theta = \theta,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A. Следовательно, $\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \in \ker A$. □

8.18. Определение. Линейный оператор $A : \ \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется линейным оператором в пространстве $\mathcal{L}$.

8.19. Лемма. Если $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, то как линейное отображение $A : \mathbb{K}^{n\times 1} \to \mathbb{K}^{n \times 1}$ обладает следующим свойством:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = n = \dim \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{8.25}$$

Доказательство. Итак, пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ и $O, X, Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Тогда

$$\operatorname{im} A = \{Y = A \cdot X, \quad \forall\, X \in \mathbb{K}^{n\times 1}\}, \ \ker A = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : \ A \cdot X = O\}.$$

Введем канонический базис в арифметическом пространстве $\mathbb{K}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y \in \operatorname{im} A$. Тогда найдется такой столбец $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

что справедливо равенство $Y = A \cdot X$. Заметим, что

$$X = x^1\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n\mathbf{e}_n.$$

Тогда имеем

$$Y = A \cdot X = A \cdot (x^k\mathbf{e}_k) = x^k A \cdot \mathbf{e}_k \in L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{im} A \subset L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n). \quad (8.26)$$

Обратно. Пусть $Y \in L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n)$. Тогда

$$Y = c^1 A\cdot\mathbf{e}_1 + \cdots + c^n A\cdot\mathbf{e}_n = A\cdot(c^k\mathbf{e}_k) = A\cdot Z, \quad Z = c^k\mathbf{e}_k \Rightarrow Y \in \operatorname{im} A.$$

Итак, $\operatorname{im} A = L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n)$. Заметим, что

$$A \cdot \mathbf{e}_1 = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_1$$

и в общем случае получаем, что

$$A \cdot \mathbf{e}_j = A_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n) = L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Тогда, с одной стороны,

$$r = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{im} A.$$

С другой стороны, $\ker A$ состоит из всех решений однородной линейной однородной системы уравнений $A \cdot X = O$ и только из них. Базис пространства решений состоит из $n - r$ столбцов. Следовательно, имеем

$$\dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

$\square$

8.20. Определение. Операторы $A, B : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называются равными, если $Ax = Bx$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

8.21. Пример. Оператор I в пространстве $\mathcal{L}$, определяемый равенством $Ix = x$ для всех $x \in \mathcal{L}$, является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$I(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = \alpha^1 \cdot Ix_1 + \alpha^2 \cdot Ix_2. \quad \boxtimes$$

8.22. Определение. Оператор I называется единичным оператором.

8.23. Пример. Оператор $O : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, определяемый равенством

$$Ox = \theta \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L},$$

где θ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{M}$, является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$O(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \theta = \alpha^1 \cdot \theta + \alpha^2 \cdot \theta = \alpha^1 \cdot Ox_1 + \alpha^2 \cdot Ox_2. \quad \boxtimes$$

8.24. Определение. Оператор O называется нулевым оператором.

8.25. Пример. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ определим дифференцирование $D : P^n \to P^{n-1}$ формулой

$$Dp(t) = \frac{dp(t)}{dt}.$$

Оператор D является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $p_1(t), p_2(t) \in P^n$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$D(\alpha^1 p_1(t) + \alpha^2 p_2(t)) = \frac{d}{dt}\left(\alpha^1 p_1(t) + \alpha^2 p_2(t)\right) = \\ = \alpha^1 \frac{dp_1(t)}{dt} + \alpha^2 \frac{dp_2(t)}{dt} = \alpha^1 Dp_1(t) + \alpha^2 Dp_2(t). \quad \boxtimes$$

8.26. Пример. Зададим отображение $A : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ следующим образом:

$$Y = A \cdot X, \tag{8.27}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}.$$

Отображение A является линейным.

$\square$ Действительно, для любых $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу свойств сложения матриц и умножения матриц на числа справедливы равенства

$$A \cdot (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A \cdot X_1 + \alpha^2 A \cdot X_2. \quad \boxtimes$$

8.27. Определение. Одномерным линейным оператором $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется такой линейный оператор, что $\dim \operatorname{im} A = 1$.

8.28. Лемма. Для того чтобы линейный оператор $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ был одномерным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $f \in \mathcal{M}$, $f \neq \theta$ и $l \in \mathcal{L}^*$, что было справедливо равенство

$$Ax = \langle l, x\rangle \cdot f \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{8.28}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть линейный оператор $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ одномерный, т.е. $\dim \operatorname{im} A = 1$. Ввиду одномерности оператора A он представим в следующем виде:

$$Ax = l(x) \cdot f \subset \{\alpha \cdot f,\ \alpha \in \mathbb{K}\}, \quad f \in \mathcal{M},\ f \neq \theta, \tag{8.29}$$

поскольку

$$\dim\{\alpha \cdot f,\ \alpha \in \mathbb{K}\} = 1, \quad \text{если} \quad f \neq \theta^*,$$

где функция $l(x)$ — скалярная функция. В силу линейности оператора A для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство

$$A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2,$$

из которого с учетом (8.29) справедливо равенство

$$\begin{aligned} &l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) f = \alpha^1 l(x_1) \cdot f + \alpha^2 l(x_2) \cdot f \Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow \left[l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) - \alpha^1 l(x_1) - \alpha^2 l(x_2)\right] \cdot f = \theta \Rightarrow \\ &\qquad\Rightarrow l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) - \alpha^1 l(x_1) - \alpha^2 l(x_2) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $f \neq \theta$. Значит, форма $l \in \mathcal{L}^*$, т.е. является линейной формой. Стало быть, справедливо равенство (8.28).

Достаточность. Пусть отображение $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ задано формулой (8.28). Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу линейности f справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) &= \langle l, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2\rangle \cdot f = \\ &= \alpha^1 \langle l, x_1\rangle \cdot f + \alpha^2 \langle l, x_2\rangle \cdot f = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2. \end{aligned}$$

Значит, оператор A линейный, а поскольку $f \neq \theta$, то $\dim \operatorname{im} A = 1$. $\square$

3. Матрица линейного оператора

8.29. Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$, т.е.

$$A:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

Для того чтобы задать линейный оператор A нам нужно знать его значение Ax на каждом $x \in \mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение вектора $x \in \mathcal{L}$ по этому базису

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j.$$

В силу линейности оператора A имеют место следующие равенства:

$$A(x) = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j). \tag{8.30}$$

Отсюда приходим к выводу о том, что для того чтобы задать линейный оператор, необходимо и достаточно, задать его значения на базисе рассматриваемого линейного пространства $\mathcal{L}$.

8.30. Разложим теперь $A\mathbf{e}_j$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a_j^k \cdot \mathbf{e}_k \tag{8.31}$$

или в матричной форме (используя правило умножения матриц «строчка на столбец»)

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \tag{8.32}$$

8.31. Определение. Матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{8.33}$$

называется матрицей линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

8.32. Рассмотрим уравнение

$$y = Ax, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j,$$

из которого получаем равенства

$$y^k \cdot \mathbf{e}_k = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = x^j a_j^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow y^k = a_j^k x^j$$

или в матричной форме

$$\boxed{Y_e = A_e \cdot X_e,} \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{8.34}$$

8.33. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$ с матрицей перехода $C = (c^j_{j'})^n_{n'}$ от старого базиса к новому:

$$\mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j.$$

Пусть A_e — матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $A_{e'}$ — в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Справедлива следующая теорема:

8.34. Теорема. *Имеют место равенства*

$$\boxed{A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C} \quad \text{или} \quad \boxed{a^{k'}_{j'} = c^j_{j'} c^{k'}_k a^k_j.} \tag{8.35}$$

Доказательство. Первый способ. Используя формулы связывающие элементы старого и нового базисов, приходим к следующим равенствам:

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = a^{k'}_{j'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = a^{k'}_{j'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k, \tag{8.36}$$

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = A(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j) = c^j_{j'} \cdot A(\mathbf{e}_j) = c^j_{j'} a^k_j \cdot \mathbf{e}_k. \tag{8.37}$$

Из (8.36) и (8.37) вытекает равенство

$$a^{k'}_{j'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k = c^j_{j'} a^k_j \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow a^{k'}_{j'} c^k_{k'} = c^j_{j'} a^k_j \tag{8.38}$$

или переставляя множители, получим равенство

$$c^k_{k'} a^{k'}_{j'} = a^k_j c^j_{j'} \tag{8.39}$$

или в матричной форме

$$C \cdot A_{e'} = A_e \cdot C \Leftrightarrow A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C. \tag{8.40}$$

Из полученной формулы (8.40) вытекает следующая цепочка равенств:

$$a^{k'}_{j'} = \{A_{e'}\}^{k'}_{j'} = \{C^{-1}\}^{k'}_k \{A_e \cdot C\}^k_{j'} = c^{k'}_k a^k_j c^j_{j'}.$$

Второй способ. Воспользуемся равенством (8.34) в старом и новом базисах:

$$Y_e = A_e \cdot X_e, \quad Y_{e'} = A_{e'} \cdot X_{e'}, \tag{8.41}$$

где

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \; X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \; Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \; Y_{e'} = \begin{pmatrix} y^{1'} \\ \vdots \\ y^{n'} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что имеют место следующие формулы:

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'}. \tag{8.42}$$

Из формул (8.41) и (8.42) вытекают следующие равенства:

$$C \cdot Y_{e'} = Y_e = A_e \cdot X_e = A_e \cdot C \cdot X_{e'} \Rightarrow C \cdot A_{e'} \cdot X_{e'} = A_e \cdot C \cdot X_{e'} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (C \cdot A_{e'} - A_e \cdot C) \cdot X_{e'} = O \Rightarrow C \cdot A_{e'} = A_e \cdot C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C,}$$

где мы воспользовались тем, что столбец $X_{e'}$ произвольный. □

8.35. Лемма. Для элементов матрицы линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ справедливо следующее выражение:

$$a_i^k = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle, \tag{8.43}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}^k, a_i^j \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j \rangle a_i^j = \delta_j^k a_i^j = a_i^k.$$

□

8.36. Пример. Рассмотрим линейное пространство P^n полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$. Выберем в этом линейном пространстве базис следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \; \mathbf{e}_2 = t, \; \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \; \ldots, \; \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{8.44}$$

Оператор дифференцирования $\hat{D}$ действует следующим образом:

$$\hat{D}\mathbf{e}_1 = \theta = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \cdots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \tag{8.45}$$

$$\hat{D}\mathbf{e}_2 = 1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \cdots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \tag{8.46}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{D}\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n = 0\mathbf{e}_1 + \cdots + 1\mathbf{e}_n + 0\mathbf{e}_{n+1}. \tag{8.47}$$

С учетом равенств (8.45)–(8.47) приходим к следующему выражению:

$$\left(\hat{D}\mathbf{e}_1, \hat{D}\mathbf{e}_2, \ldots, \hat{D}\mathbf{e}_{n+1}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.48}$$

Таким образом, матрица D линейного оператора

$$\hat{D}: \ P^n \to P^{n-1} \subset P^n$$

в рассматриваемом базисе имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

4. Линейное пространство линейных операторов

8.37. Определение. Множество всех линейных операторов $A: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ будем обозначать символом $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$.

8.38. Определение. Суммой линейных операторов $A, B: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется оператор $C: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, действующий по правилу $Cx = Ax + Bx$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

8.39. Определение. Произведением оператора $A: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$ называется оператор $D: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, действующий по правилу $Dx = \alpha \cdot Ax$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

8.40. Лемма. Сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на число являются линейным операторами.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} C(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) + B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \\ = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 + \alpha^1 \cdot Bx_1 + \alpha^2 \cdot Bx_2 = \\ = \alpha^1 \cdot (Ax_1 + Bx_1) + \alpha^2 \cdot (Ax_2 + Bx_2) = \alpha^1 \cdot Cx_1 + \alpha^2 \cdot Cx_2, \end{gathered}$$

$$D(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha \cdot A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha\alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha\alpha^2 \cdot Ax_2 =$$

$$= \alpha^1\alpha \cdot Ax_1 + \alpha^2\alpha \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot D(x_1) + \alpha^2 \cdot D(x_2).$$

$\square$

8.41. Лемма. Множество $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ является линейным пространством относительно введенных операций сложения операторов и умножения оператора на число.

Доказательство. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ — произвольные линейные операторы и $x \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Справедливы равенства

$$(A+B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B+A)x,$$

поскольку $Ax, Bx \in \mathcal{M}$, а $\mathcal{M}$ — линейное пространство и, следовательно, в нем справедливо свойство коммутативности сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$A+B = B+A.$$

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Справедливы равенства

$$((A+B)+C)x = (Ax+Bx)+Cx = Ax+(Bx+Cx) = \\ = Ax+(B+C)x = (A+(B+C))x,$$

поскольку $\mathcal{M}$ — линейное пространство и поэтому в нем справедлива ассоциативность сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

Шаг 3. Свойство нулевого оператора. Справедливы равенства

$$(A+O)x = Ax + Ox = Ax + \theta = Ax.$$

Здесь мы воспользовались свойством нулевого вектора θ линейного пространства $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:

$$A+O = A.$$

Шаг 4. Существование противоположного оператора. Для линейного оператора A противоположным является линейный оператор $(-1)\cdot A$. Действительно, имеют место равенства

$$(A+(-1)\cdot A)x = Ax + (-1)\cdot Ax = (1-1)\cdot Ax = 0\cdot Ax = \theta = Ox.$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью сложения векторов в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A + (-1)\cdot A = O.$$

Шаг 5. Свойство единицы. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(1\cdot A)x = 1\cdot Ax = Ax,$$

где мы воспользовались свойством единицы в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$1 \cdot A = A.$$

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Справедливы равенства

$$((\alpha\beta) \cdot A)x = (\alpha\beta) \cdot Ax = \alpha \cdot (\beta \cdot Ax) = (\alpha \cdot (\beta \cdot A))x,$$

где мы воспользовались свойством ассоциативности умножения на числа в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A).$$

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения операторов. Справедливы равенства

$$(\alpha \cdot (A + B))x = \alpha \cdot (A + B)x = \alpha \cdot Ax + \alpha \cdot Bx = \\ = (\alpha \cdot A)x + (\alpha \cdot B)x = (\alpha \cdot A + \alpha \cdot B)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности операции сложения векторов в $\mathcal{M}$ относительно умножения на числа. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B.$$

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Имеют место следующие равенства:

$$((\alpha + \beta) \cdot A)x = (\alpha + \beta) \cdot Ax = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ax = (\alpha \cdot A + \beta \cdot A)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности относительно сложения чисел в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к выводу, что

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A.$$

□

8.42. Определение. Матрица $A_{ef} = (\alpha_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n}$, определенная равенством

$$A\mathbf{e}_i = \alpha_i^k \cdot \mathbf{f}_k \quad \text{или} \quad (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) \cdot A_{ef}, \qquad (8.49)$$

называется матрицей линейного оператора A, где $A: \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ — базисы соответствующих линейных пространств.

8.43. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующие одномерные операторы (см. определение 8.27 и лемму 8.28):

$$A_k^i x \stackrel{def:}{=} \langle \mathbf{e}^i, x\rangle \cdot \mathbf{f}_k : \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}, \qquad (8.50)$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$. Справедлива следующая теорема:

8.44. Теорема. *Одномерные операторы* $A^i_k \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$, *определенные равенством* (8.50) *образуют базис линейного пространства* $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$.

Доказательство. Линейная независимость. Прежде всего заметим, что
$$A^i_k \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle \cdot \mathbf{f}_k = \delta^i_j \cdot \mathbf{f}_k. \tag{8.51}$$
Рассмотрим линейную комбинацию
$$\beta^k_i \cdot A^i_k = O. \tag{8.52}$$
Применим обе части этого равенства ко всем векторам базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ и с учетом (8.51) получим равенства
$$\beta^k_i \cdot A^i_k \mathbf{e}_j = \beta^k_i \delta^i_j \cdot \mathbf{f}_k = \beta^k_j \cdot \mathbf{f}_k = \theta \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}. \tag{8.53}$$
Из (8.53) в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ приходим к равенствам
$$\beta^k_j = 0 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m}.$$
Значит, семейство $\{A^i_k\}^n_m$ является линейно независимым в линейном пространстве $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$.

Полнота. Пусть
$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i \in \mathcal{L}, \quad A\mathbf{e}_i = \alpha^k_i \cdot \mathbf{f}_k. \tag{8.54}$$
Тогда справедливы следующие равенства:
$$\begin{aligned} Ax = x^i \cdot A\mathbf{e}_i = x^i \alpha^k_i \cdot \mathbf{f}_k = \langle \mathbf{e}^i, x \rangle \alpha^k_i \cdot \mathbf{f}_k = \\ = \alpha^k_i \langle \mathbf{e}^i, x \rangle \cdot \mathbf{f}_k = \alpha^k_i \cdot A^i_k x, \end{aligned} \tag{8.55}$$
из которого в силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:
$$A = \alpha^k_i A^i_k. \tag{8.56}$$
$\square$

8.45. Лемма. Для элементов матрицы линейного оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ справедливо следующее выражение:
$$\alpha^k_i = \langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i \rangle, \tag{8.57}$$
где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ — базис, а $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^m\} \in \mathcal{M}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Из (8.49) вытекает следующее равенство:

$$\langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{f}^k, \alpha_i^j \cdot \mathbf{f}_j \rangle = \alpha_i^j \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{f}_j \rangle = \alpha_i^j \delta_j^k = \alpha_i^k. \tag{8.58}$$

□

8.46. Следствие. *Матрица одномерного оператора* A_k^i, *определенного равенством* (8.50), *равна*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.59}$$

где 1 *расположена на пересечении* k*–ой строчки и* i*–го столбца.*

Доказательство. Доказательство следует из равенства (8.51). Действительно, используя правило умножения матриц «строчка на столбец», получим следующее равенство:

$$(A_k^i \mathbf{e}_1, \ldots, A_k^i \mathbf{e}_n) = (\delta_1^i \mathbf{f}_k, \ldots, \delta_n^i \mathbf{f}_k) =$$

$$= (\theta, \ldots, \theta, \delta_i^i \mathbf{f}_k, \theta, \ldots, \theta) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

□

8.47. Следствие. *Справедливо равенство*

$$\dim L(\mathcal{L}; \mathcal{M}) = \dim \mathcal{L} \cdot \dim \mathcal{M}.$$

Доказательство. Равенство является следствием теоремы 8.44, из которой вытекает, что число элементов в базисе линейного пространства $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ равно $m \cdot n$, где $m = \dim \mathcal{M}$ и $n = \dim \mathcal{L}$. □

8.48. Лемма. Матрица линейной комбинации $\alpha \cdot A + \beta \cdot B$ линейных операторов $A, B \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ с числами $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ получается следующим образом:

$$\{\alpha \cdot A + \beta \cdot B\}_i^k = \alpha \{A\}_i^k + \beta \{B\}_i^k. \tag{8.60}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)\mathbf{e}_i = \{\alpha \cdot A + \beta \cdot B\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k, \qquad (8.61)$$

$$(\alpha \cdot A + \beta \cdot B)\mathbf{e}_i = \alpha \cdot A\mathbf{e}_i + \beta \cdot B\mathbf{e}_i, \qquad (8.62)$$

$$\alpha \cdot A\mathbf{e}_i = \alpha\{A\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k, \quad \beta \cdot B\mathbf{e}_i = \beta\{B\}_i^k \cdot \mathbf{f}_k. \qquad (8.63)$$

Из (8.61) и (8.63) вытекает следующее равенство:

$$\{\alpha\cdot A+\beta\cdot B\}_i^k\cdot\mathbf{f}_k = \alpha\{A\}_i^k\cdot\mathbf{f}_k+\beta\{B\}_i^k\cdot\mathbf{f}_k = (\alpha\{A\}_i^k+\beta\{B\}_i^k)\cdot\mathbf{f}_k. \qquad (8.64)$$

Поскольку $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \in \mathcal{M}$ — базис, то из (8.64) вытекает искомое равенство (8.60). □

8.49. Лемма. Линейное пространство $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ изоморфно линейному пространству матриц $\mathbb{K}^{m\times n}$ при фиксированных базисах $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ и $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$, где $m = \dim \mathcal{M}$, $n = \dim \mathcal{L}$, базис которого образуют матрицы E_i^k, у которых все элементы равны нулю за исключением элемента, расположенного на пересечении k–ой строчки и i–го столбца и равного 1.

Доказательство. Докажем, что матрицы E_i^k образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{K}^{m\times n}$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k E_i^k = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_i^k = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \overline{1,n},\ k \in \overline{1,m}.$$

Значит, матрицы E_i^k линейно независимы и их количество равно $m \cdot n$. Кроме того, любую матрицу $A = (a_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n}$ можно представить в следующем виде:

$$A = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i^k E_i^k.$$

Значит, семейство матриц $\{E_i^k\}$ при $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$ образуют базис в $\mathbb{K}^{m\times n}$.

С учетом результата леммы 8.48 приходим к результату о изоморфизме линейного пространства $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ и линейного пространства $\mathbb{K}^{m\times n}$.

□

5. Алгебры операторов и матриц

8.50. В этом параграфе мы рассмотрим новую операцию — операцию умножения операторов и докажем, что операторы из линейного пространства $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ образуют ассоциативную и некоммутативную алгебру операторов с единицей. Учтем результаты предыдущего раздела в случае $\mathcal{M}=\mathcal{L}$ и докажем, что алгебра операторов $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$, где $n=\dim\mathcal{L}$ и $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел, над которым определено линейное пространство $\mathcal{L}$.

8.51. Определение. Произведением линейных операторов

$$A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$$

называется оператор $C:\ \mathcal{L}\to\mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$Cx \overset{def:}{=} B(Ax) \quad \text{для всех} \quad x\in\mathcal{L}. \tag{8.65}$$

8.52. Лемма. Оператор C — линейный, т.е. $C\in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда в силу линейности операторов $A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы следующие равенства:

$$C(\alpha^1\cdot x_1+\alpha^2\cdot x_2) = B(A(\alpha^1\cdot x_1+\alpha^2\cdot x_2)) =$$
$$= B(\alpha^1\cdot Ax_1+\alpha^2\cdot Ax_2) = \alpha^1\cdot B(Ax_1)+\alpha^2\cdot B(Ax_2) = \alpha^1\cdot Cx_1+\alpha^2\cdot Cx_2.$$

□

8.53. Заметим, что, вообще говоря, $AB\neq BA$.

8.54. Лемма. Для любых $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы свойства дистрибутивности справа и слева

$$(A+B)C = AC+BC, \quad A(B+C) = AB+AC, \tag{8.66}$$

а также ассоциативности

$$(AB)C = A(BC). \tag{8.67}$$

Доказательство. Шаг 1. Дистрибутивность. Пусть $x\in\mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда с учетом определения сложения операторов и произведения операторов справедливы следующие равенства:

$$(A+B)Cx = A(Cx)+B(Cx) =$$
$$= (AC)x+(BC)x = (AC+BC)x.$$

В силу произвольности вектора $x\in\mathcal{L}$ приходим к равенству

$$(A+B)C = AC+BC.$$

Докажем второе равенство из (8.66). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A(B+C)x = A(Bx) + A(Cx) = \\ = (AB)x + (AC)x = (AB+AC)x,$$

из которого в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Ассоциативность. Справедливы равенства

$$(AB)Cx = A(B(Cx)) = A((BC)x) = A(BC)x,$$

из которых в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ вытекает равенство (8.67). □

8.55. Определение. Алгеброй над числовым полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство $\mathcal{A}$, снабженное внутренней операцией умножения $\bullet$:

$$x \bullet y: \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \tag{8.68}$$

обладающее следующим свойствами дистрибутивности слева и справа:

$$(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z, \tag{8.69}$$

$$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z \tag{8.70}$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z), \tag{8.71}$$

и коммутативной, если для любых $x, y \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$x \bullet y = y \bullet x. \tag{8.72}$$

Также говорят, что у алгебры $\mathcal{A}$ есть единица $\mathbf{e}$, если существует такой вектор $\mathbf{e} \in \mathcal{A}$, что для всех $x \in \mathcal{A}$ справедливы равенства

$$x \bullet \mathbf{e} = \mathbf{e} \bullet x = x. \tag{8.73}$$

8.56. Теорема. *Линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ является ассоциативной, некоммутативной алгеброй с единицей относительно операции умножения операторов.*

Доказательство. Утверждение является следствием лемм 8.52, 8.54. Единицей этой алгебры является единичный оператор. □

8.57. Посмотрим, что происходит с матрицами линейных операторов при произведении операторов. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Справедливы следующие равенства:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad A\mathbf{e}_i = a_i^l \cdot \mathbf{e}_l, \quad B\mathbf{e}_l = b_l^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{8.74}$$

С учетом равенств (8.74) при $C = BA$ имеет место следующая цепочка выражений:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \cdot \mathbf{e}_k = B(A\mathbf{e}_i) = B(a_i^l \cdot \mathbf{e}_l) = \\ = a_i^l \cdot B\mathbf{e}_l = a_i^l b_l^k \cdot \mathbf{e}_k = b_l^k a_i^l \cdot \mathbf{e}_k. \tag{8.75}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, то из (8.75) приходим к следующему равенству:

$$c_i^k = b_l^k a_i^l \Leftrightarrow C_e = B_e \cdot A_e, \tag{8.76}$$

где $C_e = (c_i^k)_n^n$, $A_e = (a_i^l)_n^n$ и $B_e = (b_l^k)_n^n$. Таким образом, доказана следующая лемма:

8.58. Лемма. Произведению BA операторов $A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ соответствует произведение матриц операторов в этом базисе $B_e \cdot A_e \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

8.59. В курсе «Аналитическая геометрия» фактически было доказано следующее утверждение:

8.60. Теорема. *Линейное пространство квадратных матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ является ассоциативной и некоммутативной алгеброй с единицей (единичная матрица) относительно операции умножения матриц.*

8.61. Теорема. *Алгебра операторов $L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.*

Доказательство. Доказательство утверждения теоремы является следствием результатов теорем 8.56, 8.60 и лемм 8.52–8.58. Определим искомое отображение в следующем виде:

$$\phi_{\mathbf{E}}:\ L(\mathcal{L};\mathcal{L}) \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad n = \dim \mathcal{L}, \tag{8.77}$$

$$\phi_{\mathbf{E}}(A) = A_e, \quad A \cdot \mathbf{E} := (A\mathbf{e}_1, \cdots, A\mathbf{e}_n) = \mathbf{E} \cdot A_e,$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Отметим, что при фиксированном базисе в $\mathcal{L}$ единичный оператор при данном изоморфизме переходит в единичную матрицу. $\square$

6. Транспонированный оператор

8.62. Теорема. *Для каждого линейного оператора* $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ *найдется единственный оператор* $A^T \in L(\mathcal{L}^*;\mathcal{L}^*)$ *такой, что*

$$\langle A^T f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad f \in \mathcal{L}^*. \tag{8.78}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию от векторов из $\mathcal{L}$ при фиксированном $f \in \mathcal{L}^*$:

$$l(x) := \langle f, Ax\rangle. \tag{8.79}$$

Докажем, что это линейная функция. Действительно, справедливы равенства

$$l(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \langle f, A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)\rangle = \langle f, \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2\rangle = \\ = \alpha^1 \langle f, Ax_1\rangle + \alpha^2 \langle f, Ax_2\rangle = \alpha^1 l(x_1) + \alpha^2 l(x_2).$$

Значит, найдется такая линейна форма $l \in \mathcal{L}^*$, что будет для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$\langle f, Ax\rangle = \langle l, x\rangle. \tag{8.80}$$

Отметим, что для каждого $f \in \mathcal{L}^*$ форма $l \in \mathcal{L}^*$ единственная. Действительно, пусть $f \in \mathcal{L}^*$ соответствуют две линейный формы $l^1, l^2 \in \mathcal{L}^*$ такие, что справедливы равенства

$$\langle f, Ax\rangle = \langle l_1, x\rangle = \langle l_2, x\rangle \Rightarrow \langle l_1 - l_2, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow l_1 - l_2 = \theta^* \in \mathcal{L}^* \Rightarrow l_1 = l_2.$$

Итак, определено однозначное отображение

$$A^T(f) = l, \quad A^T: \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*, \tag{8.81}$$
$$\langle A^T(f), x\rangle = \langle l, x\rangle = \langle f, Ax\rangle.$$

Докажем линейность оператора A^T. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle A^T(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2), x\rangle = \langle \alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2, Ax\rangle = \\ = \alpha_1 \langle f^1, Ax\rangle + \alpha_2 \langle f^2, Ax\rangle = \alpha^1 \langle A^T f^1, x\rangle + \alpha_2 \langle A^T f^2, x\rangle = \\ = \langle \alpha^1 \cdot A^T f^1, x\rangle + \langle \alpha^2 \cdot A^T f^2, x\rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle A^T(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) - \alpha^1 \cdot A^T f^1 - \alpha^2 \cdot A^T f^2, x\rangle = 0.$$

В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A^T(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) = \alpha^1 \cdot A^T f^1 + \alpha^2 \cdot A^T f^2.$$

Значит, оператор A^T линейный и поэтому $A^T \in L(\mathcal{L}^*;\mathcal{L}^*)$. Отсюда с учетом (8.80) и (8.81) приходим к существованию единственного отображения $A^T \in L(\mathcal{L}^*; \mathcal{L}^*)$, что для всех $x \in \mathcal{L}$ и всех $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство

$$\langle f, Ax \rangle = \langle A^T f, x \rangle.$$

$\square$

8.63. Определение. Оператор $A^T \in L(\mathcal{L}^*; \mathcal{L}^*)$ называется транспонированным оператором.

8.64. Обсудим связь матриц $(A^T)_e$ и A_e транспонированного и исходного операторов. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $f, g \in \mathcal{L}^*$ таковы, что имеют место равенства

$$y = Ax, \quad y = y^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad x = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad A\mathbf{e}_j = \alpha_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \tag{8.82}$$

$$f = A^T g, \quad f = f_i \cdot \mathbf{e}^i, \quad g = g_k \cdot \mathbf{e}^k, \quad A^T \mathbf{e}^j = (\alpha^T)_k^j \cdot \mathbf{e}^k. \tag{8.83}$$

Из (8.82) вытекают равенства

$$y^i \cdot \mathbf{e}_i = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \alpha_k^i \cdot \mathbf{e}_i \Leftrightarrow y^i = \alpha_k^i x^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y_e = A_e \cdot X_e, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \tag{8.84}$$

а из (8.83) вытекают следующие равенства:

$$f_i \cdot \mathbf{e}^i = A^T (g_k \cdot \mathbf{e}^k) = g_k (\alpha^T)_i^k \cdot \mathbf{e}^i \Rightarrow f_i = g_k (\alpha^T)_i^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_e = G_e \cdot (A^T)_e, \quad F_e = (f_1, \dots, f_n), \quad G_e = (g_1, \dots, g_n). \tag{8.85}$$

В силу (8.78) и в силу (8.82), (8.83) справедливы равенства

$$(\alpha^T)_i^k = \langle A^T \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \alpha_i^k \Leftrightarrow (A^T)_e = A_e.$$

Теперь мы видим, что матрицы исходного и транспонированного оператора совпадают, однако если в формуле (8.84) матрица A_e умножается справа на столбец, то в формуле (8.85) матрица $(A^T)_e$ матрица слева умножается на строчку. Вот такое отличие.

7. Дважды транспонированный оператор*

8.65. Данный параграф при первом чтении можно опустить.

8.66. Лемма. Справедливо равенство

$$A^{TT} = JAJ^{-1}, \tag{8.86}$$

где J — линейный оператор взаимно однозначного отображения $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^{**}$, введенный в третьей главе.

Доказательство. При доказательстве этого утверждения мы будем использовать обозначения третьей главы.

Шаг 1. Транспонированный оператор к A^T. Для любых $\hat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ и $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство

$$\langle \hat{x}, A^T f \rangle_* = \langle A^{TT} \hat{x}, f \rangle_*, \tag{8.87}$$

где $A^{TT} = (A^T)^T \in L(\mathcal{L}^{**}; \mathcal{L}^{**})$. Доказательство равенства (8.87) в точности повторяет доказательство теоремы 8.62 с точностью до обозначений.

Шаг 2. Равенство (8.86). Для доказательства равенства (8.86) воспользуемся результатом теоремы 7.28. С учетом результата теоремы 8.62 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f, Ax \rangle = \langle A^T f, x \rangle = \langle Jx, A^T f \rangle_* = \\ = \langle A^{TT} Jx, f \rangle_* = \langle f, J^{-1} A^{TT} Jx \rangle,$$

которые выполнены для всех $x \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$. Поэтому справедливы равенства для всех $x \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$

$$\langle f, Ax - J^{-1} A^{TT} Jx \rangle = 0 \Leftrightarrow Ax - J^{-1} A^{TT} Jx = \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A = J^{-1} A^{TT} J \Leftrightarrow A^{TT} = JAJ^{-1}.$$

□

8.67. Иногда авторы называют транспонированный оператор сопряженным и утверждают, что $A^{TT} = A$. Из результата леммы 8.66 вытекает, что это равенство неверно.

8.68. Определение. Оператор $A^{TT} \in L(\mathcal{L}^{**}; \mathcal{L}^{**})$ называется дважды транспонированным оператором.

8. Теорема об обратном операторе

8.69. Теорема. *Если* $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$, *то справедливо равенство*

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}, \tag{8.88}$$

где, напомним,

$$\ker A = \{x \in \mathcal{L} : \; Ax = \theta\}, \quad \operatorname{im} A = \{y = Ax : \; \forall\, x \in \mathcal{L}\}.$$

Доказательство. Ранее в лемме 8.17 было доказано, что $\ker A \subset \mathcal{L}$ и $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ являются подпространствами в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, соответственно. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис в $\ker A$, где $\dim \ker A = k$. Дополним это семейство векторов до базиса в $\mathcal{L}$. Пусть

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\} \tag{8.89}$$

— базис в $\mathcal{L}$. Рассмотрим теперь набор

$$\{A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n\} \subset \operatorname{im} A \subset \mathcal{M}. \tag{8.90}$$

Докажем, что этот набор линейно независим в линейном пространстве $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot A\mathbf{e}_s = \theta \Rightarrow A\left(\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot \mathbf{e}_s\right) = \theta \Rightarrow \sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot \mathbf{e}_s \in \ker A.$$

Следовательно, найдутся такие числа β^j, $j = \overline{1,k}$, что

$$\alpha^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \beta^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

а поскольку набор (8.89) линейно независим, то все числа

$$\alpha^{k+1} = \cdots = \alpha^n = \beta^1 = \cdots = \beta^k = 0.$$

Итак, набор (8.90) линейно независим. Докажем его полноту в $\operatorname{im} A$. Действительно, для любого $y \in \operatorname{im} A$ найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что справедливы следующие равенства:

$$y = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = A\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) =$$

$$= \theta + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot A\mathbf{e}_j.$$

Итак, полнота набора (8.90) в $\operatorname{im} A$ доказана. Следовательно, этот набор образует базис в $\operatorname{im} A$. Таким образом, имеют место равенства

$$\dim \operatorname{im} A = n - k = \dim \mathcal{L} - \dim \ker A \Leftrightarrow \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}.$$

□

8.70. Следствие. *Справедливы следующие равенства:*

$$\dim \ker A^T + \dim \operatorname{im} A^T = \dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}. \tag{8.91}$$

8.71. Теорема. *Следующие три свойства для оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ эквивалентны:*

1. *Оператор A обратим и $A^{-1} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$;*
2. $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$*;*
3. $\ker A = \{\theta\}$.

Доказательство. Докажем, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Шаг 1. $1 \Rightarrow 2$. Пусть оператор $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ обратим. Тогда уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение для любого $y \in \mathcal{L}$. Поэтому $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$.

Шаг 2. $2 \Rightarrow 3$. Пусть $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Тогда $\dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}$ и из равенства (8.88) вытекает, что $\dim \ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\theta\}$.

Шаг 3. $3 \Rightarrow 1$. Пусть $\ker A = \{\theta\}$. Тогда $\dim \ker A = 0$. В силу равенства (8.88) получаем, что $\dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}$. Значит, $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. С одной стороны, из равенства $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$ вытекает, что уравнение $Ax = y$ для каждого $y \in \mathcal{L} = \operatorname{im} A$ имеет решение $x \in \mathcal{A}$. С другой стороны, если для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ существует два решения $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, то имеют место следующие равенства:

$$Ax_1 = y_0 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Стало быть, для каждого $y \in \mathcal{L}$ существует единственное решение $x \in \mathcal{L}$ уравнения $Ax = y$. Поэтому определено обратное отображение A^{-1}. Докажем, что $A^{-1} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, т.е. осталось доказать линейность оператора A^{-1}. Пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие единственные $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что справедливы равенства

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2, \quad x_1 = A^{-1}y_1, \quad x_2 = A^{-1}y_2,$$

$$A^{-1}(\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2) = A^{-1}(\alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2) =$$
$$= A^{-1}A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = \alpha^1 \cdot A^{-1}y_1 + \alpha^2 \cdot A^{-1}y_2.$$

Итак, оператор A^{-1} — линейный. □

8.72. Лемма. Если $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ и оператор $A^{-1} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, причем A_e — матрица оператора A в фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда матрица $(A^{-1})_e$ оператора A^{-1} в том же базисе равна $(A_e)^{-1}$.

Доказательство. Пусть

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \quad X_e = (x^1, \cdots, x^n)^T,$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} A(x) = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \ldots, A(\mathbf{e}_n)) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y_e, \quad Y_e = A_e \cdot X_e, \end{aligned} \tag{8.92}$$

где $Y_e = (y^1, y^2, \ldots, y^n)^T$. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = x = A^{-1}(A(x)) = A^{-1}(y^k \cdot \mathbf{e}_k) = y^k \cdot A^{-1}(\mathbf{e}_k) = \\ = (A^{-1}(\mathbf{e}_1), A^{-1}(\mathbf{e}_2), \ldots, A^{-1}(\mathbf{e}_n)) \cdot Y_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A^{-1})_e \cdot A_e \cdot X_e. \end{aligned} \tag{8.93}$$

Отсюда имеем
$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \bigl[I_e - (A^{-1})_e \cdot A_e\bigr] \cdot X_e = \theta \in \mathcal{L}.$$
Поскольку семейство $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимо, то приходим к равенству
$$\bigl[I_e - (A^{-1})_e \cdot A_e\bigr] \cdot X_e = O \in \mathbb{K}^{n\times 1},$$
а в силу произвольности $X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ приходим к равенству
$$(A^{-1})_e \cdot A_e = I_e \Leftrightarrow (A^{-1})_e = (A_e)^{-1}.$$
□

9. Инвариантные подпространства линейного оператора

8.73. Определение. Линейное подпространство $U \subset \mathcal{L}$ называется инвариантным подпространством относительно линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, если
$$AU \subset U,$$
т.е. $Ax \in U$ для всех $x \in U$. Символом $A|_U$ мы обозначаем ограничение оператора A на инвариантное подпространство U.

8.74. Лемма. Ограничение $A|_U$ линейного оператора A на инвариантное подпространство U является линейным оператором:
$$A|_U \in L(U;U).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in U$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда, с одной стороны, поскольку U — линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{L}$, то $\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \in U$. С другой стороны, в силу того, что U — инвариантное подпространство оператора A справедливы следующие соотношения:
$$A|_U(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \\ = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot A|_U x_1 + \alpha^2 \cdot A|_U x_2.$$
□

8.75. Лемма. Если базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ выбран таким образом, что инвариантное подпространство $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, то матрица A_e оператора A в этом базисе имеет следующий блочный вид:
$$A_e = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{8.94}$$
где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, C — квадратная матрица порядка $n-k$ и D — какая–то матрица размера $k \times (n-k)$.

Доказательство. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i. \tag{8.95}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис инвариантного подпространства U, то $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j = \overline{1,k}$ и поэтому $a^i_j = 0$ при $i = \overline{k+1,n}$. Поэтому справедливо следующее выражение:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & a^1_{k+1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k & a^k_{k+1} & \cdots & a^k_n \\ 0 & \cdots & 0 & a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix} \tag{8.96}$$

Заметим, что $A\mathbf{e}_j = A|_U\mathbf{e}_j$ при $j = \overline{1,k}$. Поэтому из равенства (8.95) получаем равенство

$$A|_U\mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1,k}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{8.97}$$

Но тогда справедливо равенство

$$(A|_U\mathbf{e}_1, \ldots, A|_U\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\cdot B.$$

Следовательно, B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейного подпространства $U \subset \mathcal{L}$. □

8.76. Лемма. Если $\mathcal{L} = U \oplus V$, где U и V — инвариантные подпространства оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, то в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таком, что $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ матрица A_e этого линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{8.98}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, а C — матрица оператора $A|_V$ в базисе $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Пусть $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ и $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. С одной стороны, справедливо равенство (8.95). С другой стороны, $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j \in \overline{1,k}$ и $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ при

$j \in \overline{k+1,n}$. Поэтому в равенстве (8.95) $a^i_j = 0$ при $i = \overline{k+1,n}$, $j = \overline{1,k}$ и $a^i_j = 0$ при $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{k+1,n}$. Следовательно, справедливы следующие выражения:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \tag{8.99}$$

Заметим, что

$$A|_U \mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,k}, \tag{8.100}$$

$$A|_V \mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{k+1,n}, \quad j = \overline{k+1,n}. \tag{8.101}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$(A|_U\mathbf{e}_1, \ldots, A|_U\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\cdot B,$$

$$(A|_V\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A|_V\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot \begin{pmatrix} a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =$$
$$= (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot C.$$

□

8.77. Лемма. Если $\mathcal{L} = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$, то в базисе $\mathcal{L}$, составленном из базисов инвариантных подпространств $U_1, \ldots, U_m$ оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, матрица A_e оператора A примет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathrm{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & A_m \end{pmatrix},$$

где A_j — матрица оператора $A|_{U_j}$ в соответствующем базисе линейного подпространства U_j.

10. Собственные векторы

8.78. Основной задачей теории линейных операторов является нахождение такого базиса, в котором его матрица является наиболее простой. Пределом мечтаний является нахождение базиса, в котором матрица линейного оператора диагональна. Как мы покажем, такой базис может не существовать.

8.79. Определение. Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ называется собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, если $Ae = \lambda \cdot e$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом собственным значением оператора A, отвечающим собственному вектору e.

8.80. Лемма. Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, тогда и только тогда, когда линейное подпространство $L(e)$ инвариантно и $\dim L(e) = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. Тогда e — базис в линейной оболочке $L(e)$. Предположим, что $y \in L(e)$. Тогда найдется такое число $\alpha \in \mathbb{K}$, что $y = \alpha \cdot e$. Справедливы следующие равенства:

$$Ay = \alpha \cdot Ae = \alpha\lambda \cdot e \in L(e).$$

Следовательно, $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство.

Достаточность. Пусть $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство. Пусть e — его базис. Тогда справедливо соотношение

$$Ae \in L(e) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad Ae = \lambda \cdot e.$$

Следовательно, $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. $\square$

8.81. Лемма. Для того чтобы матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ состоял из собственных векторов этого линейного оператора A; при этом диагональные элементы матрицы A_e являются собственными значениями оператора A.

Доказательство. Шаг 1. Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это такой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Тогда для матрицы A_e оператора A в этом базисе имеет следующий вид:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, \lambda_n \cdot \mathbf{e}_n) =$$

$$= (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ имеет следующий диагональный вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

но тогда согласно определению матрицы оператора справедливы равенства

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

из которых получаем, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1, n},$$

причем поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, то $\mathbf{e}_j \neq \theta$. $\square$

8.82. Собственные значения λ_j, $j = \overline{1, n}$ могут попарно совпадать. Например, у единичного оператора.

8.83. Пример. Выберем базис в линейном пространстве P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ следующим специальным образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{8.102}$$

Любой полином $p_n(t) \in P^n$ можно разложить по базису (8.102) следующим образом:

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}. \tag{8.103}$$

Теперь изучим вопрос о существовании собственного вектора оператора дифференцирования $D: \ P^n \to P^{n-1} \subset P^n$. С этой целью применим оператор дифференцирования D к полиному $p_n(t)$ и получим полином $p_{n-1}(t) \in P^{n-1} \subset P^n$:

$$p_{n-1}(t) \stackrel{def:}{=} Dp_n(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{8.104}$$

Рассмотрим равенство

$$Dp_n(t) = \lambda p_n(t) \Rightarrow p_{n-1}(t) = \lambda p_n(t). \tag{8.105}$$

Сначала рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Тогда в равенстве (8.105) в правой части содержится слагаемое с старшей степенью $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda a_n \frac{t^n}{n!},$$

а в левой части слагаемое со старшей степенью — это слагаемое

$$a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Поскольку равенство (8.105) должно быть выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$, то приходим к выводу о том, что $\lambda a_n = 0$, т.е. $a_n = 0$. Далее повторяем все рассуждения и мы получим в итоге равенство $\lambda a_0 = 0$, т.е. $a_0 = 0$. Стало быть, с одной стороны, у оператора дифференцирования $D: \ P^n \to P^n$ не может быть собственного вектора с собственным значением $\lambda \neq 0$. С другой стороны, $\lambda = 0$ является собственным значением собственного вектора $\mathbf{e}_1$

$$D\mathbf{e}_1 = \theta = 0\mathbf{e}_1$$

и других собственных векторов у оператора дифференцирования нет. Стало быть, у оператора дифференцирования D в линейном пространстве P^n нет собственного базиса.

8.84. Теорема. *Вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, соответствующего собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, тогда и только тогда, когда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство*

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \tag{8.106}$$

где $X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — нетривиальное решение однородной системы уравнений

$$A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \tag{8.107}$$

а A_e — матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$Ae = \lambda \cdot e, \quad e \neq \theta. \tag{8.108}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Разложим собственный вектор $e \in \mathcal{L}$ по этому базису и получим следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{8.109}$$

Тогда справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} Ae = A((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e) = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \end{aligned} \tag{8.110}$$

$$\lambda e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e. \tag{8.111}$$

Следовательно, из равенств (8.108)–(8.111) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A_e \cdot X_e - \lambda X_e) = \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e \cdot X_e - \lambda X_e = O \Leftrightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \end{aligned} \tag{8.112}$$

поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис.

Достаточность. Справедливо следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e \neq \theta,$$

поскольку в противном случае

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = \theta$$

и в силу линейной независимости системы векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ получим $X_e = O$, что противоречит условию $X_e \neq O$.

Из (8.106), (8.107), поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, вытекают следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e, \quad e \neq \theta,$$

$$A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) X_e = \lambda \cdot (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e,$$

$$Ae = \lambda \cdot e, \quad e \neq \theta.$$

Следовательно, e — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$. □

8.85. Лемма. Если X_e — решение однородной системы уравнений (8.107), записанной в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, то в любом другом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ справедливо равенство

$$A_{e'} \cdot X_{e'} = \lambda X_{e'}. \tag{8.113}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C. \tag{8.114}$$

Тогда имеем

$$A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C, \quad X_e' = C^{-1} \cdot X_e. \tag{8.115}$$

Из равенства (8.107) с учетом (8.114), (8.115) приходим к следующим равенствам:

$$C^{-1} \cdot A_e \cdot X_e = \lambda C^{-1} \cdot X_e \Leftrightarrow C^{-1} \cdot A_e \cdot C \cdot C^{-1} \cdot X_e = \lambda C^{-1} \cdot X_e \Leftrightarrow \Leftrightarrow A_{e'} \cdot X_{e'} = \lambda X_{e'}.$$

□

8.86. Таким образом, вопрос о существовании собственного вектора у линейного оператора сводится к изучению однородной системы уравнений (8.107), а именно к изучению вопроса существования нетривиального решения (решений) этой системы уравнений. В частности, из общей теории линейных однородных квадратных систем уравнений вытекает следующее утверждение:

8.87. Лемма. Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (8.107), необходимо и достаточно, чтобы $\det(A_e - \lambda I) = 0$.

8.88. Определение. Многочлен $f(\lambda) = \det(A_e - \lambda I)$ называется характеристическим многочленом.

8.89. Лемма. Характеристический многочлен не зависят от выбора базиса, в котором записана матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$.

Доказательство. С учетом (8.115) справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_{e'} - \lambda I = C^{-1} \cdot A_e \cdot C - \lambda C^{-1} \cdot C = C^{-1} \cdot (A_e - \lambda I) \cdot C,$$

из которой получаем равенства

$$\det(A_{e'} - \lambda I) = \det(C^{-1} \cdot (A_e - \lambda I) \cdot C) = = \det C^{-1} \det(A_e - \lambda I) \det C = \frac{1}{\det C} \det(A_e - \lambda I) \det C = = \det(A_e - \lambda I).$$

□

8.90. Отметим, что из (8.88) вытекает, что характеристический многочлен имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Из этого явного вида вытекает, в частности, что коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$, а коэффициент при λ^0 равен $\det A_e$. Несколько сложнее заметить, что коэффициент при λ^{n-1} равен $-\operatorname{tr} A$, где

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + \cdots + a_n^n.$$

8.91. Теорема. *Корни характеристического многочлена из поля $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ ($A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$) — в точности собственные значения линейного оператора.*

Доказательство. Это следствие теоремы 8.84, леммы 8.87 и определения 8.88. □

8.92. Лемма. Любой оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в комплексном линейном пространстве $\mathcal{L}$ имеет собственный вектор.

Доказательство. Согласно основной теореме алгебры уравнение $\det(A_e - \lambda I) = 0$ имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Поэтому существует нетривиальное решение линейной однородной системы уравнений

$$A_e \cdot X_e = \lambda_0 X_e.$$

Но тогда $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e \neq \theta$ в силу результата теоремы 8.84 является нетривиальным решением уравнения

$$Ae = \lambda_0 \cdot e,$$

т.е. собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ_0. □

11. Комплексификация∗

При первом чтении параграф можно опустить.

8.93. Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ определено над полем вещественных чисел и оператор A линейный относительно линейных комбинаций с вещественными числами. Нам нужно построить такое продолжение A_C этого оператора, чтобы он был тоже линейным, но уже относительно линейных комбинаций с комплексными чиселами, причем сужение A_C на векторы исходного линейного пространства совпадало с исходным оператором A. С этой целью нам нужно воспользоваться процедурой «комплексификации». Эта процедура аналогичны построению множества комплексных чисел из множества вещественных чисел.

Определим линейное пространство $\mathcal{L}_C$ как множество упорядоченных пар (x, y), где $x, y \in \mathcal{L}$. Определим операции сложения и умножения на комплексные числа векторов из $\mathcal{L}_C$ следующим образом:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(\lambda + i\mu)(x, y) := (\lambda \cdot x - \mu \cdot y, \mu \cdot x + \lambda \cdot y).$$

Отождествим каждую пару вида (x, θ) с вектором $x \in \mathcal{L}$. Тогда линейное пространство $\mathcal{L}$ окажется вложенным подпространством в $\mathcal{L}_C$ в виде вещественного подпространства.

Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}$. Тогда набор

$$\{(\mathbf{e}_1, \theta), \ldots, (\mathbf{e}_n, \theta)\}$$

образует «вещественный» базис построенного пространства $\mathcal{L}_C$. Действительно, с одной стороны, заметим, что

$$i(\mathbf{e}_k, \theta) = (\theta, \mathbf{e}_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x, y) = (x, \theta) + (\theta, y) = \sum_{j=1}^{n} x^j (\mathbf{e}_j, \theta) + \sum_{k=1}^{n} y^k (\theta, \mathbf{e}_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x^j (\mathbf{e}_j, \theta) + i \sum_{k=1}^{n} y^k (\mathbf{e}_k, \theta) = \sum_{s=1}^{n} (x^s + iy^s)(\mathbf{e}_j, \theta),$$

где

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Введем оператор A_C следующим образом:

$$A_C(x, y) \overset{def:}{=} (Ax, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Докажем, что оператор $A_C \in L(\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_C)$. Действительно, пусть

$$\alpha^1 = \lambda^1 + i\mu^1, \quad \alpha^2 = \lambda^2 + i\mu^2.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$A_C(\alpha^1 (x_1, y_1) + \alpha^2 (x_2, y_2)) =$$

$$= A_C\Big((\lambda^1 \cdot x_1 - \mu^1 \cdot y_1, \mu^1 \cdot x_1 + \lambda^1 \cdot y_1) +$$

$$+ (\lambda^2 \cdot x_2 - \mu^2 \cdot y_2, \mu^2 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot y_2)\Big) =$$

$$= A_C\Big(\lambda^1 \cdot x_1 - \mu^1 \cdot y_1 + \lambda^2 \cdot x_2 - \mu^2 \cdot y_2,$$

$$\mu^1 \cdot x_1 + \lambda^1 \cdot y_1 + \mu^2 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot y_2\Big) =$$

$$= \Big(A(\lambda^1 \cdot x_1 - \mu^1 \cdot y_1 + \lambda^2 \cdot x_2 - \mu^2 \cdot y_2),$$

$$A(\mu^1 \cdot x_1 + \lambda^1 \cdot y_1 + \mu^2 \cdot x_2 + \lambda^2 \cdot y_2)\Big) =$$

$$= (\lambda^1 \cdot Ax_1 - \mu^1 \cdot Ay_1, \mu^1 \cdot Ax_1 + \lambda^1 \cdot Ay_1) +$$
$$+ (\lambda^2 \cdot Ax_2 - \mu^2 \cdot Ay_2, \mu^2 \cdot Ax_2 + \lambda^2 \cdot Ay_2) =$$
$$= \alpha^1 A_C(x_1, y_1) + \alpha^2 A_C(x_2, y_2). \quad (8.116)$$

В «вещественном» базисе $\{(\mathbf{e}_1, \theta), \ldots, (\mathbf{e}_n, \theta)\}$ матрица A_{Ce} оператора A_C определяется следующим образом:

$$(A_C(\mathbf{e}_1, \theta), \ldots A_C(\mathbf{e}_n, \theta)) = ((A\mathbf{e}_1, \theta), \ldots, (A\mathbf{e}_n, \theta)) =$$
$$= ((\mathbf{e}_1, \theta), \ldots (\mathbf{e}_n, \theta)) \cdot A_{Ce},$$

где

$$A_{Ce} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$

причем, как нетрудно заметить, что

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e,$$

где

$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$

т.е. матрицы $A_{Ce} = A_e$ в «вещественном» базисе. Хотя в $\mathcal{L}_C$ существуют другие базисы.

8.94. Лемма. Если $\mathcal{L}$ — вещественное линейное пространство и элемент $(x, y) \in \mathcal{L}_C$ является собственным вектором оператора A_C с мнимым собственным значением $\lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $U = L(x, y) \subset \mathcal{L}$ — двумерное инвариантное подпространство для оператора A, причем

$$Ax = \lambda \cdot x - \mu \cdot y, \quad Ay = \mu \cdot x + \lambda \cdot y. \quad (8.117)$$

Доказательство. Пусть

$$A_C(x, y) = (\lambda + i\mu)(x, y), \quad \mu \neq 0, \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad (x, y) \neq (\theta, \theta).$$

Отсюда получаем равенство

$$(Ax, Ay) = (\lambda \cdot x - \mu \cdot y, \mu \cdot x + \lambda \cdot y),$$

которое равносильно двум равенствам из (8.117). Теперь докажем, что $x \neq \theta$. Действительно, пусть $x = \theta$. Тогда из (8.117) получаем, что $\mu y = \theta$. Поскольку по условию $\mu \neq 0$, то приходим к выводу о том, что $y = \theta$, но тогда $(x, y) = (\theta, \theta)$. Противоречие. Точно также доказываем, что $y \neq \theta$.

Теперь докажем, что векторы x и y линейно независимы. Пусть они линейно зависимы. Тогда найдется такое $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$, что

$$y = \alpha \cdot x.$$

Подставляя это равенство в (8.117), получим равенства

$$Ax = \lambda \cdot x - \mu\alpha \cdot x, \quad \alpha \cdot Ax = \mu \cdot x + \lambda\alpha \cdot x.$$

Исключая Ax, с одной стороны, приходим к следующему равенству:

$$\mu(1+\alpha^2) \cdot x = \theta \Rightarrow \mu(1+\alpha^2) = 0,$$

поскольку по доказанному $x \neq \theta$. С другой стороны, $\mu \neq 0$ по условию. Следовательно, $1+\alpha^2 = 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Противоречие. Значит, $\dim L(x,y) = 2$. □

12. Собственные векторы. Продолжение

8.95. Теорема. *Любой оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ над полем вещественных чисел имеет одномерное или (и) двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Шаг 1. Вещественный корень. Если существует вещественный корень характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$, то существует собственный вектор $e \neq \theta$ этого оператора, а следовательно, его линейная оболочка $L(e)$ является одномерным инвариантным подпространством этого оператора.

Шаг 2. Комплексный корень. Пусть $\lambda_0 = l + i\mu \in \mathbb{C}$ при $\mu \neq 0$ — корень характеристического многочлена, который, как мы знаем, существует в силу основной теоремы алгебры, т.е. $\det(A_e - \lambda_0 I) = 0$. В силу этого равенства однородная система уравнений

$$A_e \cdot Z = (l+i\mu)Z, \quad Z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$

имеет нетривиальное решение $Z = X + iY$, $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_e \cdot (X+iY) = (l+i\mu)(X+iY) \Leftrightarrow A_e \cdot X + iA_e \cdot Y = lX - \mu Y + i(lY + \mu X),$$

из которой получаем два равенства

$$A_e \cdot X = lX - \mu Y, \quad A_e \cdot Y = lY + \mu X. \tag{8.118}$$

Рассмотрим элементы линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$u = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot X \quad \text{и} \quad v = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot Y. \tag{8.119}$$

Справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X = (A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n) \cdot X =$$
$$= x^1 \cdot A\mathbf{e}_1 + \dots + x^n \cdot A\mathbf{e}_n =$$
$$= A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = A(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot X = Au,$$

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot Y = A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y = Av.$$

Тогда из равенств (8.118) с учетом (8.119) получим следующие равенства:

$$Au = l \cdot u - \mu \cdot v, \quad Av = l \cdot v + \mu \cdot u, \quad u, v \in \mathcal{L}. \tag{8.120}$$

Отсюда сразу же в силу линейности оператора A получаем, что линейное вещественное подпространство $L(u, v)$ является инвариантным подпространством для оператора A.

$\square$ Действительно, пусть $z \in L(u, v)$. Значит,

$$\begin{aligned} z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v \Rightarrow A(z) = \alpha \cdot A(u) + \beta \cdot A(v) = \\ = \alpha \cdot (l \cdot u - \mu \cdot v) + \beta \cdot (l \cdot v + \mu \cdot u) = \\ = (\alpha l + \beta\mu) \cdot u + (-\alpha\mu + \beta l) \cdot v \in L(u, v). \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{8.121}$$

Шаг 4. Размерность. Докажем, что $\det L(u, v) = 2$.

Сначала докажем, что $X \neq O$. Действительно, пусть $X = O$. Тогда из (8.118) вытекает равенство

$$\mu Y = 0 \Rightarrow Y = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $X \neq O$.

Теперь докажем, что $Y \neq O$. Пусть $Y = O$. Тогда из (8.118) получаем равенство

$$\mu X = 0 \Rightarrow X = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $Y \neq O$.

Предположим, что столбцы X и Y линейно зависимы. Тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $X = \alpha Y$, и из равенств (8.118) получаем следующие выражения:

$$\alpha A_e \cdot Y = \alpha\lambda Y - \mu Y, \quad A_e \cdot Y = \lambda Y + \alpha\mu Y, \quad Y \neq O,$$

из которых исключая $A_e Y$ получим равенство

$$\alpha(\lambda Y + \alpha\mu Y) = \alpha\lambda Y - \mu Y \Rightarrow \mu(1+\alpha^2)Y = O \in \mathbb{R}^{n\times 1} \Rightarrow \mu(1+\alpha^2) = 0,$$

поскольку по доказанному $Y \neq O$. Равенство $\mu\alpha^2 + \mu = 0$ невозможно, поскольку $\mu \neq 0$. Итак, столбцы X и Y линейно независимы, а, стало быть, линейно независимы и элементы (8.119). Значит, $\det L(u, v) = 2$. $\square$

8.96. Лемма. Множество всех $e \in \mathcal{L}$ таких, что

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \tag{8.122}$$

где X_e пробегает все множество решений линейной однородной системы уравнений

$$A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \tag{8.123}$$

а $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, образуют линейное подпространство $V_\lambda(A)$, причем

$$V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{L}, \tag{8.124}$$

где A_e — матрица оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Кроме того, линейное подпространство $V_\lambda(A)$ инвариантно относительно оператора A.

Доказательство.

Шаг 0. Заметим, что $\ker(A - \lambda I)$ — есть линейное подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из линейной оболочки всех собственных векторов оператора A, соответствующих собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$.

Шаг 1. Пусть $e \in V_\lambda(A)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} Ae = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = (A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)) \cdot X_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A_e \cdot X_e) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (\lambda X_e) = \\ = \lambda(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = \lambda e \Rightarrow e \in \ker(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Шаг 2. Пусть $e \in \ker(A - \lambda I)$. Тогда имеем

$$Ae = \lambda \cdot e. \tag{8.125}$$

Разложим e по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e. \tag{8.126}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} Ae = A((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e) = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A\mathbf{e}_k = \\ = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \end{aligned} \tag{8.127}$$

$$\lambda \cdot e = \lambda \cdot (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e. \tag{8.128}$$

Из равенств (8.125)–(8.128) приходим к равенству

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot [A_e \cdot X_e - \lambda X_e] = \theta \Leftrightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e. \end{aligned} \tag{8.129}$$

Следовательно, $e \in V_\lambda(A)$.

Из результатов шагов 1 и 2 имеем

$$\boxed{V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I).}$$

Шаг 3. Пусть $x \in V_\lambda(A)$. Тогда имеем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x = \theta \Leftrightarrow A(x) = \lambda \cdot x \Rightarrow A(A(x)) = A(\lambda \cdot x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A(A(x)) = \lambda \cdot (A(x)) \Leftrightarrow [A - \lambda I]A(x) = \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow A(x) \in \ker(A - \lambda I) = V_\lambda(A). \end{aligned}$$

Следовательно, $V_\lambda(A)$ — инвариантное подпространство относительно оператора A.

$\square$

8.97. Определение. Подпространство $V_\lambda(A) \stackrel{def:}{=} \ker(A - \lambda I)$ называется собственным подпространством линейного оператора A.

8.98. Теорема. *Собственные векторы* $\mathbf{e}_1 \in V_{\lambda_1}(A), \ldots, \mathbf{e}_s \in V_{\lambda_s}(A)$, *соответствующие различным собственным значениям* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$[1] *оператора* A, *линейно независимы.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. При $m = 1$ доказывать нечего. Пусть $m > 1$ и $\theta \neq e_k \in V_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I)$ и $k = \overline{1, m}$ и утверждение теоремы выполнено для $m - 1$ собственных векторов. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot e_{m-1} + \alpha^m \cdot e_m = \theta. \tag{8.130}$$

Применим оператор A к обеим частям равенства (8.130) и в результате получим равенство

$$\alpha^1 \cdot Ae_1 + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot Ae_{m-1} + \alpha^m \cdot Ae_m = \theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \alpha^1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha^{m-1} \cdot e_{m-1} + \lambda_m \alpha^m \cdot e_m = \theta. \tag{8.131}$$

Теперь умножим обе части равенства (8.130) на λ_m и вычтем получившееся равенство из (8.131). В результате получим равенство

$$\alpha^1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot e_1 + \cdots + \alpha^{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot e_{m-1} = \theta. \tag{8.132}$$

Поскольку все собственные числа попарно не совпадают и в силу предположения индукции векторы $e_1, \ldots, e_{m-1}$ линейно независимы получаем, что $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{m-1} = 0$. Тогда из равенства (8.130) получаем, что $\alpha^m = 0$. Итак, равенство (8.130) возможно тогда и только тогда, когда все числа $\alpha^1 = \cdots = \alpha^m = 0$, т.е. соответствующие собственные векторы линейно независимы. $\square$

8.99. Следствие. *Если характеристический многочлен* $\det(A - \lambda I)$ *имеет* $n = \dim \mathcal{L}$ *различных корней из поля* $\mathbb{K}$, *над которым определено линейное пространство* $\mathcal{L}$, *то существует собственный базис этого оператора в линейном пространстве* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные собственные числа из поля $\mathbb{K}$, а e_k при $k = \overline{1, n}$ — это соответствующие собственные векторы. В силу результата теоремы 8.98 получаем,

[1] Из поля $\mathbb{K}$.

что они линейно независимы и их число совпадает с размерностью n линейного пространства $\mathcal{L}$. Значит, они образуют базис. $\square$

8.100. Результат этого следствия является достаточным условием существования собственного базиса линейного оператора. Например, с одной стороны, характеристический многочлен единичного оператора равен $f(\lambda) = (1-\lambda)^n$ и имеет n–кратный корень $\lambda = 1$. С другой стороны, любой базис линейного пространства $\mathcal{L}$ является собственным для единичного оператора.

8.101. Пример. Пусть $\mathcal{L} = U \oplus W$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие единственные $y \in U$ и $z \in W$, что справедливо равенство $x = y + z$. Определим следующее отображение:

$$Px = y. \tag{8.133}$$

Сначала докажем, что это отображение $P \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Действительно, пусть

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad y_1, y_2 \in U, \quad z_1, z_2 \in W, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}.$$

Тогда имеем

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = (\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2) + (\alpha^1 \cdot z_1 + \alpha^2 \cdot z_2),$$

причем $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in U$ и $\alpha^1 \cdot z_1 + \alpha^2 \cdot z_2 \in W$ и справедлива следующая цепочка равенств:

$$P(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^1 \cdot P(x_1) + \alpha^2 \cdot P(x_2).$$

Введенный **оператор P называется проектором на подпространство U параллельно подпространству W.** Отметим, что подпространства U и W являются инвариантными подпространствами проектора P. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$Px = x = 1 \cdot x \quad \text{для всех} \quad x \in U, \tag{8.134}$$

$$Px = \theta = 0 \cdot x \quad \text{для всех} \quad x \in W, \quad (\theta \in W). \tag{8.135}$$

Значит, $U = V_1(P) = \ker(P - 1 \cdot I)$ и $W = V_0(P) = \ker(P - 0 \cdot I)$. И у оператора P существует собственный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) = U$ и $L(\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) = W$, т. е. $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — какой–либо базис в U, а $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — какой–либо базис в W.

В этом базисе матрица оператора P имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

8.102. Теорема. *Оператор $P \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ является проектором для каких-то линейных подпространств U и W, $\mathcal{L} = U \oplus W$, тогда и только тогда, когда справедливо равенство $P^2 = P$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, $\mathcal{L} = U \oplus W$ и P — проектор на U параллельно W. Тогда для каждого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие единственные $y \in U$ и $z \in W$, что

$$x = y + z \Rightarrow P^2x = P(Px) = Py = y = Px \Rightarrow P^2 = P.$$

Достаточность. Пусть $P^2 = P$. Ранее нами было доказано равенство

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}.$$

Отсюда вытекает, что $\ker A \oplus \operatorname{im} A = \mathcal{L}$ точно тогда, когда

$$\ker A \cap \operatorname{im} A = \{\theta\}.$$

Докажем теперь, что $\mathcal{L} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Для этого нам нужно доказать, что $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\theta\}$. Действительно, пусть $x \in \operatorname{im} P$, т.е. найдется такое $y \in \mathcal{L}$, что $x = Py$. Тогда справедливы равенства

$$P(x) = P^2(y) = P(y) = x.$$

Поэтому если $x \in \ker P \cap \operatorname{im} P$, то $x = P(x) = \theta$. Следовательно,

$$\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\theta\} \Rightarrow \mathcal{L} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$$

и поэтому разложение любого элемента $x \in \mathcal{L}$ вида

$$x = y + z, \quad y \in \ker P, \quad z \in \operatorname{im} P$$

единственно. Рассмотрим следующее разложение:

$$x = (x - P(x)) + P(x).$$

Заметим, что $P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = \theta$. Следовательно, имеем $x - P(x) \in \ker P$, а $P(x) \in \operatorname{im} P$. Итак, P — проектор на $U = \operatorname{im} P$ параллельно $W = \ker P$. $\square$

8.103. Лемма. Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора.

Доказательство. Пусть $U \subset \mathcal{L}$ — это инвариантное подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $B = A|_U$ — ограничение линейного оператора A на инвариантном подпространстве U. Рассмотрим следующий базис в $\mathcal{L}$:

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}, \quad U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m).$$

В этом базисе, как нами ранее было показано, матрица A_e оператора A имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B_e & * \\ O & C_e \end{pmatrix},$$

где B_e — это матрица оператора $B = A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$. Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$A_e - \lambda I_n = \begin{pmatrix} B_e - \lambda I_m & * \\ O & C_e - \lambda I_{n-m} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det(A_e - \lambda I_n) = \det(B_e - \lambda I_m) \det(C_e - \lambda I_{n-m}). \quad (8.136)$$

Следовательно, характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I_n)$ оператора A делится на характеристический многочлен $\det(B_e - \lambda I_m)$ оператора $B = A|_U$. $\square$

8.104. Определение. Алгебраической кратностью n_{λ_0} собственного значения λ_0 называется его кратность как корня характеристического многочлена.

8.105. Определение. Геометрической кратностью p_{λ_0} собственного значения $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ называется размерность собственного подпространства $V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$.

8.106. Теорема. *Алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 не меньше его геометрической кратности p_{λ_0} :*

$$n_{\lambda_0} \geqslant p_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство

$$V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$$

оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующее собственному значению λ_0. Ранее мы доказали, что оно инвариантно относительно оператора A. Сужение оператора A на $V_{\lambda_0}(A)$ равно

$$B = A|_{V_{\lambda_0}} = \lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}},$$

где $I|_{V_{\lambda_0}}$ единичный оператор на $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{L}$. Характеристический многочлен введенного оператора B имеет следующий вид:

$$\det(B_e - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) = \det(\lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}} - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) =$$
$$= \det(\lambda_0 - \lambda) I|_{V_{\lambda_0}} = (\lambda_0 - \lambda)^{p_{\lambda_0}}, \quad I|_{V_{\lambda_0}} \in \mathbb{K}^{p_{\lambda_0} \times p_{\lambda_0}}, \quad p_{\lambda_0} = \dim V_{\lambda_0}.$$

поскольку размер квадратной матрицы B_e равен размерности подпространства $V_{\lambda_0}(A)$. В силу результата леммы 8.103 характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I)$ оператора A делится на характеристический многочлен $(\lambda - \lambda_0)^{p_{\lambda_0}}$ оператора B. Но это означает, что алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$ не меньше, чем p_{λ_0} — его геометрическая кратность. □

8.107. Лемма. Для различных собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ имеем

$$V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) = \{\theta\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A)$. Тогда имеем

$$Ax = \lambda_1 \cdot x, \quad Ax = \lambda_2 \cdot x \Rightarrow \lambda_1 \cdot x = \lambda_2 \cdot x \Leftrightarrow x = \theta,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

8.108. Теорема. *Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *характеристический многочлен $\det(A - \lambda I)$ разлагается на линейные множители из поля $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$;*
2) *геометрическая кратность p_λ каждого собственного значения λ равна алгебраической кратности n_λ.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda I)$ из поля $\mathbb{K}$ и $n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_s}$ — их алгебраические кратности, а V_{λ_i}, $i = \overline{1, s}$ — это соответствующие собственные подпространства, размерности p_{λ_i}. Согласно результату теоремы 8.106 имеют место следующие соотношения:

$$p_{\lambda_i} := \dim V_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i} \tag{8.137}$$

и, значит, имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} \leqslant n. \tag{8.138}$$

Однако единственный способ получить базис из собственных векторов — взять объединение базисов собственных подпространств.

Для того чтобы при этом действительно получился базис пространства $\mathcal{L}$ в силу результата леммы 8.107, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n.$$

Отсюда и с учетом (8.137) и (8.138) приходим к двум условиям:

$$\sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} = n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i}. \tag{8.139}$$

Первое из этих условий означает, что характеристический многочлен разлагается на линейные множители из поля $\mathbb{K}$. Докажем, что второе условие означает, что $p_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ для всех $i = \overline{1, s}$.

□□ Действительно, в силу результата теоремы 8.106 всегда выполнено неравенство $p_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i}$ для всех $i = \overline{1, s}$. Пусть, например, $p_{\lambda_1} < n_{\lambda_1}$. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} = p_{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{s} p_{\lambda_i} < n_{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{s} n_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i}.$$

Пришли к противоречию со вторым равенством из (8.139). ⊠⊠

□

8.109. Спектральное разложение. Пусть выполнены условия теоремы 8.108 и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все различные собственные значения оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ из поля $\mathbb{K}$, над которым определено линейное пространство $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение линейного пространства $\mathcal{L}$ в прямую сумму

$$\mathcal{L} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}, \quad V_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I), \quad j = \overline{1, s}.$$

Отметим, что

$$A|_{V_{\lambda_j}} = \lambda_j I|_{V_{\lambda_j}},$$

где $I|_{V_{\lambda_j}}$ — единичный оператор на V_{λ_j}. Символом P_j обозначим проектор на собственное подпространство V_{λ_j}. Отметим, что тогда

$$P_j|_{V_{\lambda_j}} = I|_{V_{\lambda_j}}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Тогда справедливо следующее спектральное разложение линейного оператора A:

$$A = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j.$$

13. Примеры решения задач

8.110. Пример. Оператор поворота на угол. Пусть $\mathbf{e}$ — произвольный вектор в пространстве. Рассмотрим цилиндрическую систему координат с осью Oz, совпадающей с направлением вектора $\mathbf{e}$. Рассмотрим отображение, которое сопоставляет каждому радиус–вектору $\mathbf{r}$ с концом в точке (ρ, ϕ, h) радиус–вектор $\mathbf{r}'$, конец которого имеет координаты $(\rho, \phi + \alpha, h)$:

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'. \tag{8.140}$$

Найти явное выражение для этого оператора, доказать, что он линейный, найти все инвариантные собственные подпространства, записать его матрицу в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ таком, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ при условии, что $|\mathbf{e}| = 1$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $|\mathbf{e}| = 1$. Совершенно понятно, что если радиус–вектор $\mathbf{r}$ лежит на оси Oz, то

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}. \tag{8.141}$$

В этом случае оператор A_α является линейным для таких радиус–векторов. Действительно,

$$A_\alpha(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) = \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2 = \beta^1 A_\alpha(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_\alpha(\mathbf{r}_2). \tag{8.142}$$

Пусть теперь радиус–вектор $\mathbf{r}$ не лежит на оси Oz. Тогда однозначно определена плоскость π, в которой лежат вектора $\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$. Для радиус–вектора $\mathbf{r}$ справедливо разложение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp, \quad \mathbf{r}_\perp \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_\parallel \parallel \mathbf{e}. \tag{8.143}$$

Рассмотрим правую прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{r}_\perp, [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp], \mathbf{e}\}$. Заметим, что

$$[\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp] = [\mathbf{e}, \mathbf{r}]. \tag{8.144}$$

Для искомого повернутого на угол в указанном выше смысле вектора $\mathbf{r}'$ справедливо разложение

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\parallel + \mathbf{r}'_\perp, \quad \mathbf{r}'_\perp \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}'_\parallel \| \mathbf{e}, \tag{8.145}$$

причем

$$\mathbf{r}'_\parallel = \mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}. \tag{8.146}$$

Рассмотрим теперь в плоскости π прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{r}_\perp, [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp]\}$. Заметим также, что

$$|\mathbf{r}'_\perp| = |\mathbf{r}_\perp| \neq 0$$

для поворотов. Но тогда справедливо равенство

$$\frac{\mathbf{r}'_\perp}{|\mathbf{r}'_\perp|} = \frac{\mathbf{r}_\perp}{|\mathbf{r}_\perp|}\cos\alpha + \left[\mathbf{e}, \frac{\mathbf{r}_\perp}{|\mathbf{r}_\perp|}\right]\sin\alpha, \quad |\mathbf{e}| = 1 \tag{8.147}$$

или равносильно

$$\mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}_{\perp}]\sin\alpha. \tag{8.148}$$

из которого с учетом (8.144)–(8.146) получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\|} = \mathbf{r}_{\perp}\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}_{\perp}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e} =\\ = (\mathbf{r} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e})\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e} =\\ = \mathbf{r}\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})(1-\cos\alpha)\mathbf{e} :=\\ := A_{1\alpha}(\mathbf{r}) + A_{2\alpha}(\mathbf{r}) + A_{3\alpha}(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{8.149}$$

Итак, из (8.149) вытекает, что

$$A_{\alpha}(\mathbf{r}) = A_{1\alpha}(\mathbf{r}) + A_{2\alpha}(\mathbf{r}) + A_{3\alpha}(\mathbf{r}). \tag{8.150}$$

Поскольку сумма линейных операторов — есть линейный оператор, то нам достаточно доказать, что операторы $A_{j\alpha}(\mathbf{r})$ при $j = 1, 2, 3$ являются линейными. Действительно, это есть следствие следующих цепочек равенств:

$$\begin{aligned}A_{1\alpha}(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) = (\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2)\cos\alpha =\\ = \beta^1\mathbf{r}_1\cos\alpha + \beta^2\mathbf{r}_2\cos\alpha = \beta^1 A_{1\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{1\alpha}(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{8.151}$$

$$\begin{aligned}A_{2\alpha}(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) = [\mathbf{e}, \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2]\sin\alpha =\\ = (\beta_1[\mathbf{e}, \mathbf{r}_1] + \beta^2[\mathbf{e}, \mathbf{r}_2])\sin\alpha = \beta^1[\mathbf{e}, \mathbf{r}_1]\sin\alpha + \beta^2[\mathbf{e}, \mathbf{r}_2]\sin\alpha =\\ = \beta^1 A_{2\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{2\alpha}(\mathbf{r}_2),\end{aligned} \tag{8.152}$$

$$\begin{aligned}A_{3\alpha}(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) = (\mathbf{e}, \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2)(1-\cos\alpha)\mathbf{e} =\\ = \beta^1(\mathbf{e}, \mathbf{r}_1)(1-\cos\alpha)\mathbf{e} + \beta^2(\mathbf{e}, \mathbf{r}_2)(1-\cos\alpha)\mathbf{e} =\\ = \beta^1 A_{3\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{3\alpha}(\mathbf{r}_2).\end{aligned} \tag{8.153}$$

Таким образом, если радиус–вектор $\mathbf{r}$ не лежит на оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$, то оператор A_{α} поворота является линейным.

Заметим, что если $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{e}$, то для выражения (8.149) справедливы равенства

$$\begin{aligned}A_{\alpha}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}]\sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})(1-\cos\alpha)\mathbf{e} =\\ = \mathbf{r}\cos\alpha + \lambda(1-\cos\alpha)\mathbf{e} = \mathbf{r}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)\mathbf{r} = \mathbf{r}.\end{aligned} \tag{8.154}$$

Таким образом, для произвольных радиус–векторов $\mathbf{r}$ отображение A_{α} является линейным.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис в пространстве, причем такой, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$. Рассмотрим следующее разложение на прямую сумму подпространств трехмерного линейного пространства радиус-векторов с началом в точке O :

$$V_3 = U \oplus W, \quad U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad W = L(\mathbf{e}_3) \tag{8.155}$$

В силу (8.141) имеем

$$A_\alpha(\mathbf{e}) = \mathbf{e}, \tag{8.156}$$

т.е. вектор $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ — собственный вектор оператора A_α, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Но тогда, очевидно, что

$$A_\alpha W \subset W, \tag{8.157}$$

т.е. линейное подпространство W является инвариантным одномерным подпространством для оператора поворота A_α. Пусть теперь вектор $\mathbf{g} \in U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Значит, найдутся такие вещественные числа $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{R}$, что справедливо равенство

$$\mathbf{g} = \beta^1\mathbf{e}_1 + \beta^2\mathbf{e}_2, \quad A_\alpha(\mathbf{g}) = \beta^1 A_\alpha(\mathbf{e}_1) + \beta^2 A_\alpha(\mathbf{e}_2), \tag{8.158}$$

поскольку оператор A_α — линейный. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$A_\alpha(\mathbf{e}_1) = \cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2 \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = U, \tag{8.159}$$

$$A_\alpha(\mathbf{e}_2) = -\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2 \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = U. \tag{8.160}$$

Из (8.158) с учетом (8.159) и (8.160) приходим к выводу о том, что

$$A_\alpha U \subset U, \tag{8.161}$$

т.е. $U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — это двумерное инвариантное линейное подпространство относительно оператора поворота A_α. Значит, выражение (8.155) — есть прямая сумма одномерного и двумерного линейных подпространств инвариантных относительно оператора поворота A_α.

Наконец, из (8.156) и (8.159), (8.160) получаем равенство

$$(A_\alpha(\mathbf{e}_1), A_\alpha(\mathbf{e}_2), A_\alpha(\mathbf{e}_3)) =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.162}$$

Отметим, что операторы поворота A_α при $\alpha \in (-\pi, \pi]$ обладают следующими полезными свойствами:

$$A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_{\beta+\alpha} = A_\beta A_\alpha, \quad A_0 = I, \quad \alpha, \beta \in (-\pi, \pi], \tag{8.163}$$

которые означают, что поворот на нулевой угол совпадает с единичным оператором, а повороты A_α, A_β коммутативны и их произведение равно оператору $A_{\alpha+\beta}$ суммарного поворота на угол $\alpha + \beta$.

Соответствующие равенства могут быть получены непосредственно алгебраически, но лучше их доказать исходя из геометрических соображений.

8.111. Пример. Матрица линейного оператора. Найти матрицы линейного оператора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, заданного формулой

$$A(x) = (x, a)a, \quad a = (3, 2, 1)^T, \tag{8.164}$$

в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ и в базисе

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.165}$$

Решение. Сначала найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{e}_1) = 3a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{8.166}$$

$$A(\mathbf{e}_2) = 2a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{8.167}$$

$$A(\mathbf{e}_3) = a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.168}$$

Таким образом, из (8.166)–(8.168) получаем искомое выражение для матрицы линейного оператора (8.164) в стандартном базисе

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.169}$$

Теперь найдем матрицу линейного оператора (8.164) в базисе (8.165). Действительно, имеем

$$A(b_1) = 6a, \quad A(b_2) = 3a, \quad A(b_3) = -a. \tag{8.170}$$

Найдем разложение столбца a по базису $\{b_1, b_2, b_3\}$. Действительно, имеем

$$xb_1 + yb_2 + zb_3 = a, \tag{8.171}$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.172}$$

Откуда легко находим, что

$$x = 3, \quad y = -1, \quad z = 1. \tag{8.173}$$

Следовательно, из (8.171) и (8.173) получаем искомое разложение

$$a = 3b_1 - b_2 + b_3. \tag{8.174}$$

Из (8.170) и (8.174) получаем следующие равенства:

$$A(b_1) = 18b_1 - 6b_2 + 6b_3 = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \tag{8.175}$$

$$A(b_2) = 9b_1 - 3b_2 + 3b_3 = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{8.176}$$

$$A(b_2) = -3b_1 + b_2 - b_3 = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8.177}$$

Таким образом, из (8.175)–(8.177) вытекает искомое выражение для матрицы линейного оператора (8.164) в базисе (8.165):

$$(A(b_1), A(b_2), A(b_3)) = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 18 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8.178}$$

8.112. Пример. Матрица линейного оператора. Найти матрицу линейного оператора

$$A(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, \mathbf{x}] : \ V_3 \to V_3, \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{8.179}$$

в правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где вектор $\mathbf{a}$ — фиксированный.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{e}_1) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$
= a_3\mathbf{e}_2 - a_2\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \quad (8.180)
$$

$$
A(\mathbf{e}_2) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =
$$

$$
= a_1\mathbf{e}_3 - a_3\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad (8.181)
$$

$$
A(\mathbf{e}_3) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
= a_2\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.182)
$$

Таким образом, из (8.180)–(8.182) вытекает выражение для матрица оператора (8.179)

$$
(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.183)
$$

8.113. Пример. Ядро и образ линейного оператора. Найти базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^4$ по правилу умножения матрицы на столбец:

$$
A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X \in \mathbb{R}^4. \quad (8.184)
$$

Решение. Шаг 1. Ядро. Для того чтобы найти базис в ядре оператора A нужно найти ФСР следующей системы уравнений:

$$
A \cdot X = O \in \mathbb{R}^4, \quad X \in \mathbb{R}^4. \quad (8.185)
$$

Найдем ФСР методом Гаусса. Действительно, имеем

$$
\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim C^3 - C^4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3}C^3 \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim C^1 \leftrightarrow C^4 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim C^4 - C^3 - C^2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim C^4 \ominus \sim
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim C^3 - C^2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim C^2 + 2C^3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim C^1 - 2C^3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim
$$

$$
\sim \frac{1}{3}C^1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{8.186}
$$

Таким образом, система уравнений (8.185) эквивалентна следующей системе

$$
x^1 = 2x^4, \quad x^2 = -3x^4, \quad x^3 = -2x^4. \tag{8.187}
$$

Следовательно, базис ядро оператора A состоит из одного столбца

$$
\ker A = \{c^1 X_1, \quad c^1 \in \mathbb{R}\}, \quad X_1 = (2, -3, -2, 1)^T. \tag{8.188}
$$

Шаг 2. Образ. Здесь мы сделаем небольшое теоретическое отступление. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$ и $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Докажем, что семейство векторов

$$
\{A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)\} \in \operatorname{Im} A
$$

полно в $\operatorname{Im} A$. Действительно, пусть $y \in \operatorname{Im} A$. Тогда найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = A(x)$. Пусть

$$
x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow y = A(x) = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j).
$$

Отсюда вытекает полнота.

Теперь вернемся к нашей задаче. Рассмотрим стандартный базис линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$A(\mathbf{e}_1) = A \cdot \mathbf{e}_1 = \|A_1, \ldots, A_n\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1, \tag{8.189}$$

$$A(\mathbf{e}_j) = A_j, \quad j = \overline{1, 4}. \tag{8.190}$$

Таким образом, нам осталось выделить из семейства столбцов $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ максимальное линейно независимое подсемейство. Но мы этот вопрос фактически изучили в цепочке эквивалентных преобразований (8.186). И поэтому максимальное линейно независимое семейство столбцов матрицы A состоит из первого, второго и третьего столбцов матрицы A. Значит,

$$\operatorname{Im} A = \{Y = c^1 A_1 + c^2 A_2 + c^3 A_3,\ c^1, c^2, c^3 \in \mathbb{R}\},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что как и должно быть

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = 4.$$

8.114. Пример. Задача на собственные векторы и собственные значения. Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, заданного в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в $\mathcal{L}$ матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.191}$$

Решение. Рассмотрим характеристический многочлен

$$\det(A_e-\lambda I)=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0\\ 4 & -1-\lambda & 0\\ 8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2\\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-3). \quad (8.192)$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет два корня $\lambda=1$ и $\lambda=3$ алгебраических кратностей 2 и 1, соответственно. Построим базисы в соответствующих собственных подпространствах $V_1(A)$ и $V_3(A)$. Начнем с $V_1(A)$. Справедливы равенства

$$A_e-I=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0\\ 4 & -2 & 0\\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}\sim(2,-1,0). \quad (8.193)$$

Поэтому система линейных однородных уравнений

$$(A_e-I)\cdot X_e=O \quad (8.194)$$

эквивалентна одному уравнению

$$2x^1-x^2+0x^3=0. \quad (8.195)$$

ФСР этой системы уравнений состоит из двух векторов

$$X_1=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.196)$$

Поэтому

$$V_1(A)=\{c^1X_1+c^2X_2,\ c^1,c^2\in\mathbb{R}\}.$$

Теперь найдем базис в $V_3(A)$. Действительно,

$$A_e-3I=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0\\ 4 & -4 & 0\\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.197)$$

Поэтому система уравнений

$$(A_e-3I)\cdot X_e=O$$

эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ x^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.198)$$

ФСР которой состоит из оного вектора, например, следующего:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{8.199}$$

Поэтому

$$V_3(A) = \{c^3 X_3,\ c^3 \in \mathbb{R}\}. \tag{8.200}$$

8.115. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$. Пусть $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$. Доказать, что оператор A ортогонален, т. е.

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}, \tag{8.201}$$

тогда и только тогда, когда

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{8.202}$$

Решение. Шаг 1. Прежде всего заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered} \|B(x+y)\|^2 = (B(x+y), B(x+y)) = \\ = (B(x), B(x)) + (B(y), B(y)) - 2(B(x), B(y)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (B(x), B(y)) = \frac{1}{2}\left[\|B(x+y)\|^2 - \|B(x)\|^2 - \|B(y)\|^2\right] \end{gathered} \tag{8.203}$$

для любого $B \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$.

Шаг 2. Необходимость. Пусть оператор A — ортогональный, тогда из (8.201) при $x = y \in \mathcal{E}$ получим равенство (8.202).

Шаг 3. Достаточность. Пусть выполнено равенство (8.202) тогда при $B = A$ и при $A = I$ в (8.203) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered} (Ax, Ay) = \frac{1}{2}\left[\|A(x+y)\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}. \end{gathered} \tag{8.204}$$

8.116. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора A?

Решение. Пусть

$$H = \ker(A - \lambda_1 I) + \ker(A - \lambda_2 I) \subset \mathcal{L}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Как сумма линейных подпространств H является линейным подпространством в $\mathcal{L}$. Докажем, что H — инвариантное относительно A подпространство.

$\square$ Действительно, пусть $z \in H$. Тогда

$$z = x + y, \quad x \in \ker(A - \lambda_1 I), \quad y \in \ker(A - \lambda_2 I).$$

Имеем

$$Az = Ax + Ay = \lambda_1 x + \lambda_2 y \in \ker(A - \lambda_1 I) + \ker(A - \lambda_2 I) = H. \quad \boxtimes$$

Однако, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$ собственным подпространством H не будет.

$\square$ Действительно, пусть от противного

$$\forall z \in H = \ker(A - \lambda I) \quad \text{и} \quad Az = \lambda z. \tag{8.205}$$

Тогда возьмем

$$z = x + y, \quad \theta \neq x \in \ker(A - \lambda_1 I), \quad \theta \neq y \in \ker(A - \lambda_2 I), \tag{8.206}$$

$$Az = Ax + Ay = \lambda_1 x + \lambda_2 y. \tag{8.207}$$

Из (8.205)–(8.207) получаем равенство

$$\lambda x + \lambda y = \lambda_1 x + \lambda_2 y \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)x + (\lambda - \lambda_2)y = \theta,$$

т.е. векторы x и y ненулевые и линейно зависимы. Значит,

$$x, y \in \ker(A - \lambda_1 I) \cap \ker(A - \lambda_2 I) = \{\theta\}.$$

Пришли к противоречию. $\boxtimes$

8.117. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{L} \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = \mathcal{L}$.

Решение. Как было доказано ранее, справедливо равенство

$$\dim \ker(A - \lambda I) + \dim \operatorname{Im}(A - \lambda I) = \dim \mathcal{L}.$$

Поэтому для того, чтобы $\operatorname{Im}(A - \lambda I) = \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $\dim \ker(A - \lambda I) = 0$, т.е. чтобы

$$\ker(A - \lambda I) = \{\theta\}.$$

Таким образом, вывод такой числа λ не должны быть собственными значениями оператора A.

8.118. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{L} \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\operatorname{Im}(A - \lambda I) \neq \mathcal{L}$.

Решение. В силу решения предыдущей задачи ответ такой: когда λ — собственное значение оператора A.

8.119. Пример. Вычислительная задача. В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы элементы:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ e_{1'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (8.208)$$

Доказать, что: элементы e_1, e_2 образуют базис в $\mathbb{R}^2$; элементы $e_{1'}, e_{2'}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Найти: матрицу перехода от базиса e к базису e'.

Решение. Пусть $F = (f_1, f_2)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^2$, т. е.

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.209)$$

Тогда имеем

$$E = (e_1, e_2) = (f_1, f_2)A_1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad (8.210)$$

$$E' = (e_{1'}, e_{2'}) = (f_1, f_2)A_2, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (8.211)$$

Из (8.210) и (8.211) имеем

$$E' = (e_{1'}, e_{2'}) = (e_1, e_2)A, \quad A = A_1^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \quad (8.212)$$

8.120. Пример. Вычислительная задача. В линейном вещественном пространстве $P_1[0, 2]$ (пространстве всех полиномов на сегменте $[0, 2]$ степени не выше 1) задан линейный оператор, действующий по правилу:

$$A(x)(t) = \int\limits_0^2 (t - \tau)x(\tau)\, d\tau. \quad (8.213)$$

Найти матрицу оператора A в базисе $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$.

Решение. Справедливы равенства

$$A(e_1)(t) = \int\limits_0^2 (t - \tau)\, d\tau = 2t - 2 = -2e_1 + 2e_2, \quad (8.214)$$

$$A(e_2)(t) = \int\limits_0^2 (t - \tau)\tau\, d\tau = 2t - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}e_1 + 2e_2. \quad (8.215)$$

Из (8.214), (8.215) получаем

$$(A(e_1), A(e_2)) = (e_1, e_2)A_e, \quad A_e = \begin{pmatrix} -2 & -8/3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 9

Билинейные и квадратичные формы

1. Матрица билинейной формы

9.1. Определение. Функция $B : x, y \to B(x, y) \in \mathbb{K}$ двух векторных аргументов $x, y \in \mathcal{L}$ называется билинейной формой на $\mathcal{L}$, если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой от другого, т.е. если

$$B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 B(x_1, y) + \alpha^2 B(x_2, y), \tag{9.1}$$

$$B(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1 B(x, y_1) + \beta^2 B(x, y_2) \tag{9.2}$$

для любых $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$.

9.2. Пример. Пусть $X, Y \in \mathbb{K}^{2\times 1}$. Тогда определитель 2×2 является билинейной формой относительно двух столбцов:

$$B(X, Y) = |X, Y| = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

9.3. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис пространства $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$B(x, y) = B(x^i \cdot \mathbf{e}_i, y^j \cdot \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)x^i y^j = b_{ij}x^i y^j, \quad b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

9.4. Определение. Матрица $(b_{ij})_{n,n}$ называется матрицей билинейной формы.

9.5. Матричная запись билинейной формы. Рассмотрим отдельно выражение

$$b_{ij}x^i y^j. \tag{9.3}$$

Наша задача переписать это выражение в матричной форме. С этой целью введем следующие обозначения:

$$B_e = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix} \right\|, \quad B_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Матрица $B_e \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Поэтому $B_e \cdot Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — это столбец, причем

$$B_e \cdot Y = \begin{Vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Vmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} B_1 \cdot Y \\ \vdots \\ B_n \cdot Y \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

Теперь заметим, что

$$b_{ij} y^j = (b_{i1}, \cdots, b_{in}) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = B_i \cdot Y \tag{9.5}$$

и из (9.3), (9.4) получаем равенство

$$\begin{aligned} b_{ij} x^i y^j = x^i b_{ij} y^j = x^i B_i \cdot Y = \\ = x^1 B_1 \cdot Y + \cdots + x^n B_n \cdot Y = (x^1, \ldots, x^n) \begin{pmatrix} B_1 \cdot Y \\ \vdots \\ B_n \cdot Y \end{pmatrix} = \\ = X^T \cdot B_e \cdot Y, \quad X^T = (x^1, \ldots, x^n), \end{aligned} \tag{9.6}$$

где мы воспользовались нашим правилом умножения матриц «строчка на столбец». Таким образом, в координатах билинейная форма записывается следующим образом:

$$\boxed{B(x, y) = X^T \cdot B_e \cdot Y.} \tag{9.7}$$

9.6. Закон преобразования матрицы билинейной формы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис и

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{9.8}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} b_{i'j'} = B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = B(c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i, c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = c^i_{i'} c^j_{j'} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = c^i_{i'} c^j_{j'} b_{ij}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Наша задача переписать полученный закон преобразования матрицы билинейной формы

$$\boxed{b_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} b_{ij}} \tag{9.10}$$

в матричной форме. С одной стороны, заметим, что в силу нашего правила умножения «строчка на столбец»

$$c^j_{j'} b_{ij} = b_{ij} c^j_{j'} = \{B_e\}^i_j \{C\}^j_{j'} = \{B_e \cdot C\}^i_{j'}, \tag{9.11}$$

$$B_e = (b_{ij})_{n,n}, \quad C = (c^j_{j'})^n_{n'}.$$

С другой стороны, имеем

$$b_{i'j'} = c^i_{i'} b_{ij} c^j_{j'} = \sum_{i=1}^n c^i_{i'} \{B_e \cdot C\}^i_{j'} = \sum_{i=1}^n \{C\}^i_{i'} \{B_e \cdot C\}^i_{j'} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \{C^T\}^{i'}_i \{B_e \cdot C\}^i_{j'} = \{C^T\}^{i'}_i \{B_e \cdot C\}^i_{j'} =$$

$$= \{C^T \cdot B_e \cdot C\}^{i'}_{j'} = \{C^T \cdot B_e \cdot C\}_{i'j'}. \tag{9.12}$$

Из равенств (9.10)–(9.12) получаем равенство

$$\{B_{e'}\}_{i'j'} = \{C^T \cdot B_e \cdot C\}_{i'j'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C,} \quad B_{e'} = (b_{i'j'})_{n',n'}. \tag{9.13}$$

Предложим другой способ вывода матричного равенства (9.13). С этой целью воспользуемся матричным равенством (9.7). Кроме того, пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot X_e = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \tag{9.14}$$

$$y = y^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot Y_e = y^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}' \cdot Y_{e'}, \tag{9.15}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$. Тогда, как мы установили ранее, имеют место следующие равенства:

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'}. \tag{9.16}$$

Справедливы следующие равенства:

$$X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e = B(x, y) = X_{e'}^T \cdot B_{e'} \cdot Y_{e'}, \tag{9.17}$$

где B_e и $B_{e'}$ — матрицы билинейной формы в старом и новом базисах, из которых с учетом (9.16) получаем следующие равенства:

$$X_{e'}^T \cdot B_{e'} \cdot Y_{e'} = X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e = X_{e'}^T \cdot C^T \cdot B_e \cdot C \cdot Y_{e'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_{e'}^T \cdot (B_{e'} - C^T \cdot B_e \cdot C) \cdot Y_{e'} = 0. \quad (9.18)$$

Последнее равенство выполнено для любых столбцов $X_{e'}$ и $Y_{e'}$, поскольку равенства (9.17) справедливо для любых $x, y \in \mathcal{L}$, а значит в силу формул (9.14) и (9.15) для любых столбцов $X_e, Y_e, X_{e'}, Y_{e'}$. Поэтому из (9.18) с учетом ниже доказанной леммы 9.7 вытекает искомое равенство:

$$\boxed{B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C.}$$

9.7. Лемма. Если $X^T \cdot A \cdot Y = 0$ для любых $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и для некоторой матрице $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, то $A = O$.

Доказательство. Пусть $Y_k \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец, у которого все ячейки заполнены нулями за исключением k–ой строчки, где расположена 1. Кроме того, пусть $X_j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец заполненный нулями за исключением j–ой строчки, где расположено число 1. Справедливы следующие равенства:

$$A \cdot Y_k = \|A_1, \ldots, A_n\| \cdot Y_k = A_k, \quad 0 = (X_j)^T \cdot A \cdot Y_k = (X_j)^T \cdot A_k = a_{jk}$$

для всех $j, k \in \overline{1, n}$. Следовательно, $A = O \in \mathbb{K}^{n\times n}$. □

2. Линейное пространство билинейных форм

9.8. Определение. Суммой билинейных форм $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ называется форма

$$(B_1 + B_2)(x, y) \overset{def:}{=} B_1(x, y) + B_2(x, y),$$

а произведением билинейной формы $B(x, y)$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется следующая форма:

$$(\alpha B)(x, y) \overset{def:}{=} \alpha B(x, y).$$

9.9. Определение. Две билинейные формы $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ равны, если $B_1(x, y) = B_2(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

9.10. Лемма. Сумма билинейных форм и умножение билинейной формы на число — билинейные формы.

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$(B_1+B_2)(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = B_1(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) + B_2(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) =$$
$$= \alpha^1 B_1(x_1, y) + \alpha^2 B_1(x_2, y) + \alpha^1 B_2(x_1, y) + \alpha^2 B_2(x_2, y) =$$

$$= \alpha^1(B_1(x_1, y) + B_2(x_1, y)) + \alpha^2(B_1(x_2, y) + B_2(x_2, y)) =$$
$$= \alpha^1(B_1 + B_2)(x_1, y) + \alpha^2(B_1 + B_2)(x_2, y).$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$(B_1 + B_2)(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) =$$
$$= \beta^1(B_1 + B_2)(x, y_1) + \beta^2(B_1 + B_2)(x, y_2).$$

Итак, сумма билинейных форм — билинейная форма.

Шаг 2. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$(\alpha B)(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) =$$
$$= \alpha\alpha^1 B(x_1, y) + \alpha\alpha^2 B(x_2, y) = \alpha^1(\alpha B)(x_1, y) + \alpha^2(\alpha B)(x_2, y).$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$(\alpha B)(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1(\alpha B)(x, y_1) + \beta^2(\alpha B)(x, y_2).$$

Следовательно, произведение билинейной формы на число — билинейная форма. □

9.11. Теорема. *Множество $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ всех билинейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$ образует линейное пространство относительно операций сложения билинейных форм и умножения билинейной формы на число.*

Доказательство. Доказательство всех 8 аксиом линейного пространства проводится на основе того, что числовое поле $\mathbb{K}$ является линейным пространством относительно операций сложения чисел и умножения чисел. □

9.12. Тензорное произведение линейных форм. Рассмотрим отображение $\xi \otimes \eta$ при $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$, которое действует на упорядоченные пары (x, y), $x, y \in \mathcal{L}$ следующим образом:

$$(\xi \otimes \eta)(x, y) \overset{def:}{=} \langle \xi, x\rangle\langle \eta, y\rangle, \tag{9.19}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Заметим, что выражение $\langle \xi, x\rangle\langle \eta, y\rangle$ является билинейной формой на $\mathcal{L}$ при фиксированных $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle \xi, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2\rangle\langle \eta, y\rangle = (\alpha^1\langle \xi, x_1\rangle + \alpha^2\langle \xi, x_2\rangle)\langle \eta, y\rangle =$$
$$= \alpha^1\langle \xi, x_1\rangle\langle \eta, y\rangle + \alpha^2\langle \xi, x_2\rangle\langle \eta, y\rangle$$

и аналогичным образом получаем равенство

$$\langle \xi, x\rangle\langle \eta, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2\rangle = \beta^1\langle \xi, x\rangle\langle \eta, y_1\rangle + \beta^2\langle \xi, x\rangle\langle \eta, y_2\rangle.$$

9.13. Определение. Выражение $\xi \otimes \eta$ называется тензорным произведением линейных форм ξ и η из $\mathcal{L}^*$.

9.14. Определение. Говорят, что $\xi^1 \otimes \eta^1 = \xi^2 \otimes \eta^2$, если для любых $x, y \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(\xi^1 \otimes \eta^1)(x, y) = (\xi^2 \otimes \eta^2)(x, y). \tag{9.20}$$

9.15. Определение. Суммой двух тензорных произведений $\xi^1 \otimes \eta^1$ и $\xi^2 \otimes \eta^2$ соответствующих линейных форм определяется следующим образом:

$$(\xi^1 \otimes \eta^1 + \xi^2 \otimes \eta^2)(x, y) \overset{def:}{=} (\xi^1 \otimes \eta^1)(x, y) + (\xi^2 \otimes \eta^2)(x, y)$$

для любых $x, y \in \mathcal{L}$. Произведением тензорного произведения $\xi \otimes \eta$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ определяется следующим образом:

$$(\alpha\xi \otimes \eta)(x, y) \overset{def:}{=} \alpha(\xi \otimes \eta)(x, y).$$

9.16. Лемма. Тензорное произведение линейных форм из $\mathcal{L}^*$ обладает следующими свойствами линейности по каждому множителю:

$$(\alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2) \otimes \eta = \alpha_1 \xi^1 \otimes \eta + \alpha_2 \xi^2 \otimes \eta, \tag{9.21}$$

$$\xi \otimes (\beta_1 \cdot \eta^1 + \beta_2 \cdot \eta^2) = \beta^1 \xi \otimes \eta^1 + \beta_2 \xi \otimes \eta^2. \tag{9.22}$$

Доказательство. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$((\alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2) \otimes \eta)(x, y) = \langle \alpha_1 \cdot \xi^1 + \alpha_2 \cdot \xi^2, x\rangle\langle\eta, y\rangle =$$
$$= \alpha_1\langle\xi^1, x\rangle\langle\eta, y\rangle + \alpha_2\langle\xi^2, x\rangle\langle\eta, y\rangle = \alpha_1\langle\xi^1, x\rangle\langle\eta, y\rangle + \alpha_2\langle\xi^2, x\rangle\langle\eta, y\rangle =$$
$$= (\alpha^1\xi^1 \otimes \eta)(x, y) + (\alpha^2\xi^2 \otimes \eta)(x, y) = (\alpha^1\xi^1 \otimes \eta + \alpha^2\xi^2 \otimes \eta)(x, y)$$

для любых $x, y \in \mathcal{L}$. Отсюда вытекает равенство (9.21). Аналогичным образом доказывается равенство (9.22). $\square$

9.17. Базис в линейном пространстве билинейных форм. Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ билинейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим n^2 различных тензорных произведений из набора линейных форм $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$:

$$\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{9.23}$$

По определению 9.13 тензорного произведения линейных форм получаем, что $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ является билинейной формой. Действительно,

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y) = \langle\mathbf{e}^i, x\rangle\langle\mathbf{e}^j, y\rangle = x^i y^j,$$

где $x = x^i \cdot \mathbf{e}_i$, $y = y^j \cdot \mathbf{e}_j$. Несложно доказать равенства

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^i = \alpha^1 x_1^i + \alpha^2 x_2^i,$$

$$(\beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2)^j = \beta^1 y_1^j + \beta^2 y_2^j,$$

из которых и вытекает линейность выражения $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y)$ по каждому аргументу при фиксированном другом.

9.18. Теорема. *Набор из n^2 билинейных форм $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ при $i, j = \overline{1, n}$ образуют базис в линейном пространстве $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ всех билинейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Полнота. Пусть $B \in \mathrm{T}_2(\mathcal{L})$. Тогда для любых $x, y \in \mathcal{L}$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$B(x, y) = b_{ij} x^i y^j = b_{ij} \langle \mathbf{e}^i, x \rangle \langle \mathbf{e}^j, y \rangle = (b_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(x, y). \tag{9.24}$$

Согласно определению 9.9 равенства билинейных форм получаем, что

$$B = b_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j.$$

Линейная независимость. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = O, \tag{9.25}$$

где $O \in \mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ — нулевая билинейная форма. Применим обе части равенства (9.25) к упорядоченной паре $(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1})$ при $i_1, j_1 = \overline{1, n}$. В результате получим цепочку равенств

$$0 = (\alpha_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{j_1}) = \alpha_{ij} \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_{i_1} \rangle \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_{j_1} \rangle = \\ = \alpha_{ij} \delta^i_{i_1} \delta^j_{j_1} = \alpha_{i_1 j_1} \quad \text{для} \quad i_1, j_1 = \overline{1, n}. \tag{9.26}$$

Значит, равенство (9.25) возможно тогда и только тогда, когда все $\alpha_{ij} = 0$. Линейная независимость набора $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ доказана.

Следовательно, набор $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ — базис в $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ □

9.19. Инварианты билинейных форм. Пусть B_e — матрица билинейной формы в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $B_{e'}$ — матрица билинейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, причем

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

Тогда справедливы равенства

$$B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C \Leftrightarrow B_e = (C^{-1})^T \cdot B_{e'} \cdot C^{-1}. \tag{9.27}$$

9.20. Лемма. Ранг матрицы B_e и знак определителя матрицы B_e являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Поскольку $\det C \neq 0$, то из равенств (9.27) получаем

$$\operatorname{rk} B_{e'} \leqslant \operatorname{rk}(B_e \cdot C) \leqslant \operatorname{rk} B_e, \quad \operatorname{rk} B_e \leqslant \operatorname{rk}(B_{e'} \cdot C^{-1}) \leqslant \operatorname{rk} B_{e'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{rk} B_{e'} = \operatorname{rk} B_e. \quad (9.28)$$

Кроме того, имеем

$$\det B_{e'} = \det C^T \det B_e \det C = (\det C)^2 \det B_e.$$

□

9.21. Симметричные и кососимметричные билинейные формы.

9.22. Определение. Билинейная форма $B(x, y)$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$, и называется кососимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$, для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

9.23. Теорема. *Любую билинейную форму можно единственным образом представить в виде суммы симметричной билинейной формы и кососимметричной билинейной формы.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)) + \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x)) := \\ := B_S(x, y) + B_A(x, y).$$

Докажем теперь единственность разложения. Действительно, пусть имеют место два разложения

$$B_{S1}(x, y) + B_{A1}(x, y) = B(x, y) = B_{S2}(x, y) + B_{A2}(x, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow B_{S1}(x, y) - B_{S2}(x, y) = B_{A2}(x, y) - B_{A1}(x, y). \quad (9.29)$$

В левой части равенства (9.29) расположена симметричная билинейная форма,а в левой части кососимметричная билинейная форма. Докажем, что равенство

$$B_S(x, y) = B_A(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L} \quad (9.30)$$

возможно тогда и только тогда, когда $B_S(x, y) = B_A(x, y) = 0$. Действительно, с одной стороны, поскольку равенство (9.30) выполнено для всех $x, y \in \mathcal{L}$, то имеем

$$B_S(x, y) = B_A(x, y) \quad \text{и} \quad B_S(y, x) = B_A(y, x) \quad (9.31)$$

С другой стороны, переставляя местами аргументы в равенстве (9.30), получим равенство

$$B_S(y, x) = -B_A(y, x) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}. \quad (9.32)$$

Следовательно, из (9.31) и (9.32) вытекает, что

$$B_S(x, y) = B_A(x, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Отсюда и из (9.29) получаем равенства

$$B_{S1}(x, y) = B_{S2}(x, y) \quad \text{и} \quad B_{A2}(x, y) = B_{A1}(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{L}.$$

□

3. Квадратичные формы

9.24. Определение. Форма $Q : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ называется квадратичной, если существует такая билинейная форма $B(x, y)$ на $\mathcal{L}$, что $Q(x) = B(x, x)$. Такая билинейная форма B называется полярной к квадратичной форме $Q(x)$.

9.25. Матрица квадратичной формы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть B_e — матрица билинейной формы $B(x, y)$ в этом базисе. Тогда, как мы доказали ранее, билинейная формы примет следующий вид:

$$B(x, y) = X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e \Rightarrow Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = b_{ik} x^i x^k, \qquad (9.33)$$

где $x = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e$ и $y = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y_e$. Заметим, что в силу теоремы 9.23 билинейная форма $B(x, y)$ единственным образом представима в виде

$$B(x, y) = B_S(x, y) + B_A(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

В частности, справедливо аналогичное утверждение для квадратных матриц

$$B_e = B_{eS} + B_{eA}.$$

Поэтому справедливы равенства

$$Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = X_e^T \cdot (B_{eS} + B_{eA}) \cdot X_e = \\ = X_e^T \cdot B_{eS} \cdot X_e + X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e, \qquad (9.34)$$

$$X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = (X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e)^T = X_e^T \cdot B_{eA}^T \cdot X_e = -X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e \Rightarrow \\ \Rightarrow 2X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = 0 \Rightarrow X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = 0, \qquad (9.35)$$

поскольку $X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e$ — число. Таким образом,

$$Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = X_e^T \cdot B_{eS} \cdot X_e. \qquad (9.36)$$

9.26. Канонический вид квадратичной формы. Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ имеет вид

$$Q(x) = X_e^T \cdot Q_e \cdot X_e = q_{jk} x^j x^k.$$

9.27. Определение. Базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ называется каноническим для квадратичной формы $Q(x)$, если в этом базисе матрица $Q_{e'}$ этой квадратичной формы имеет диагональный вид, на главной диагонали которой расположены числа 1, 0, -1.

9.28. Матрица $Q_{e'}$ в каноническом базисе имеет следующий вид:

$$q_{jk} = \lambda_k \delta_{jk}, \quad \lambda_k \in \{1, 0, -1\}.$$

Тогда справедливы равенства

$$Q(x) = q_{jk} x^j x^k = \lambda_k \delta_{jk} x^j x^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x^k)^2.$$

9.29. Лемма. Если квадратичная форма $Q(x)$ порождена симметричной билинейной формой $B(x, y)$, то билинейная форма имеет следующий вид:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right]. \tag{9.37}$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x+y) = B(x+y, x+y) = B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y) =$$
$$= Q(x) + 2B(x,y) + Q(y) \Rightarrow B(x,y) = \frac{1}{2} \left[Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \right].$$

□

9.30. Пример. Пусть $\mathbb{C}[0,1]$ — линейное пространство вещественных непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$Q(x) = \int_0^1 x^2(t)\, dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}[0,1].$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{2}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)] =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(x(t) + y(t))^2 - x^2(t) - y^2(t) \right] dt =$$
$$= \int_0^1 x(t) y(t)\, dt := B(x,y).$$

Очевидно, что $B(x,y)$ — билинейная форма.

4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

9.31. Определение. Рангом квадратичной формы $Q = X_e^T \cdot Q_e \cdot X_e$, записанной в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, называется ранг ее матрицы Q_e в этом базисе.

9.32. Поскольку матрицы $Q_{e'}$ и Q_e в двух различных базисах связаны равенством $Q_{e'} = C^T \cdot Q_e \cdot C$, $\det C \neq 0$, то $\operatorname{rk} Q_{e'} = \operatorname{rk} Q_e$. Поэтому определение 9.31 корректно и матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в некотором каноническом базисе в случае когда $\operatorname{rk} Q_e = n = \dim \mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & \text{O} \\ & q_{2'2'} & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & q_{n'n'} \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1, -1\}, \quad j' = \overline{1, n},$$

а в случае, когда $\operatorname{rk} Q_e = r' \in [1, n)$ матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в некотором каноническом базисе имеет следующие вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & q_{r'r'} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1, -1\}, \quad j' = \overline{1, r'}.$$

9.33. Теорема. *Любую квадратичную форму линейным невырожденным преобразованием можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольную квадратичную форму можно записать в следующем виде:

$$Q(x) = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n + G(x^2, \dots, x^n). \quad (9.38)$$

Доказательство теоремы проведем по индукции. Квадратичная форма от одного аргумента всегда имеет канонический вид $q_{11}(x^1)^2$. Предположим, что любую квадратичную форму от $n-1$ аргумента всегда можно привести к каноническому виду. Рассмотрим произвольную квадратичную форму от n аргументов

$$Q(x) = q_{ij}x^ix^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (9.39)$$

Случай 1. Предположим, что в квадратичной форме $Q(x)$ хотя бы один из коэффициентов q_{jj} при квадрате $(x^j)^2$ отличен от нуля. Без ограничения общности, можно считать, что $q_{11} \neq 0$. Составим следующее преобразование переменных:

$$y^1 = q_{11}x^1 + \dots + q_{1n}x^n, \tag{9.40}$$

$$y^2 = x^2, \dots, y^n = x^n. \tag{9.41}$$

Преобразование (9.40), (9.41) можно записать в следующей матричной форме:

$$Y = \widetilde{C}_1 \cdot X, \tag{9.42}$$

$$\widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{9.43}$$

Заметим, что $\det \widetilde{C} = q_{11} \neq 0$, т.е. преобразование (9.42) не вырожденное. Возведем выражение (9.40) для y^1 в квадрат и разделим на $q_{11} \neq 0$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 = \frac{1}{q_{11}}(q_{11}x^1 + \dots + q_{1n}x^n)^2 = \\ = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n + \Phi(x^2, \dots, x^n), \end{aligned} \tag{9.44}$$

где $\Phi(x^2, \dots, x^n)$ — некоторая квадратичная форма относительно $n-1$ аргумента $x^2, \dots, x^n$. Определим новую квадратичную форму относительно аргументов $x^2, \dots, x^n$:

$$\Psi(x^2, \dots, x^n) \overset{def:}{=} G(x^2, \dots, x^n) - \Phi(x^2, \dots, x^n). \tag{9.45}$$

Из равенств (9.38) и (9.44) с учетом (9.45), (9.41) приходим к выражению

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(x^2, \dots, x^n) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(y^2, \dots, y^n). \tag{9.46}$$

По предположению индукции существует такое невырожденное преобразование

$$\begin{pmatrix} z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_2 \cdot \begin{pmatrix} y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad \det \widetilde{C}_2 \neq 0, \quad \widetilde{C}_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}, \tag{9.47}$$

которое приводит квадратичную форму $\Psi(y^2, \ldots, y^n)$ к каноническому виду

$$\Psi(y^2, \ldots, y^n) = \lambda_2 (z^2)^2 + \cdots + \lambda_n (z^n)^2. \tag{9.48}$$

Дополним преобразование (9.47) так чтобы в нем участвовали все n переменных. Именно, положим

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{9.49}$$

В частности, при этом преобразовании $z^1 = y^1$. Рассмотрим последовательно преобразования (9.42) и (9.49) и получим итоговое преобразование

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2 \end{pmatrix} \cdot \widetilde{C}_1 \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \tag{9.50}$$

причем $\det C_2 = \det \widetilde{C}_2 \det \widetilde{C}_1 \neq 0$ и в результате преобразования (9.50) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}} (z^1)^2 + \lambda_2 (z^2)^2 + \cdots + \lambda_n (z^n)^2. \tag{9.51}$$

Случай 2. Рассмотрим теперь случай, когда у квадратичной формы $Q(x)$ все диагональные коэффициенты $q_{jj} = 0$, $j = \overline{1, n}$, но какой–то вне диагональный элемент отличен от нуля. Например, $q_{12} \neq 0$. Тогда квадратичная форма $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = 2q_{12} x^1 x^2 + \cdots . \tag{9.52}$$

Сделаем преобразование

$$x^1 = \widetilde{x}^1 + \widetilde{x}^2, \tag{9.53}$$

$$x^2 = \widetilde{x}^1 - \widetilde{x}^2, \tag{9.54}$$

$$x^3 = \widetilde{x}^3, \ldots, x^n = \widetilde{x}^n, \tag{9.55}$$

которое можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_3 \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix}, \quad (9.56)$$

причем $\det \widetilde{C}_3 = -2$, т.е. преобразование $\widetilde{C}_3$ не вырожденное. Подставим равенства (9.53)–(9.55) в выражение (9.52) и получим равенство

$$Q(x) = 2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2 - 2q_{12}(\widetilde{x}^2)^2 + \cdots . \quad (9.57)$$

Слагаемое $2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2$ не может исчезнуть при приведении подобных слагаемых, так как все слагаемые квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (9.52), не содержат произведение x^1x^2 и поэтому не могут в результате преобразования (9.53)–(9.55) дать величину $(\widetilde{x}^1)^2$. Далее нужно воспользоваться рассуждениями, рассмотренные в случае 1.

В заключение, в выражении (9.51) нужно сделать завершающее невырожденное преобразование

$$w^1 = \frac{z^1}{|q_{11}|^{1/2}},$$

$$w^j = \begin{cases} |\lambda_j|^{1/2} z_j, & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0; \\ z_j, & \text{если} \quad \text{если} \quad \lambda_j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}$$

и в результате получить следующее каноническое уравнение квадратичной формы

$$Q(x) = \widetilde{\lambda}_1 (w^1)^2 + \widetilde{\lambda}_2 (w^2)^2 + \cdots + \widetilde{\lambda}_n (w^n)^2, \quad (9.58)$$

где $\widetilde{\lambda}_1 = \operatorname{sign}(q_{11})$,

$$\widetilde{\lambda}_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda_j = 0; \\ \operatorname{sign}(\lambda_j), & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0, \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}.$$

Таким образом, невырожденным линейным преобразованием мы привели квадратичную форму к каноническому виду (9.58). □

9.34. Нормальный вид квадратичной формы. Пусть $r = \operatorname{rk} Q$ — ранг квадратичной формы. Тогда нормальным видом квадратичной формы $Q(x)$ называется следующая квадратичная форма:

$$Q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2.$$

Используя метод Лагранжа, а также переобозначение переменных, любую квадратичную форму невырожденным линейным преобразованием можно привести к нормальному виду.

5. Закон инерции квадратичных форм

9.35. Пусть на вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана квадратичная форма ранга r :

$$Q(x) = q_{jk}x^j x^k,$$

где $\{x^s\}$ — координаты вектора $x \in \mathcal{L}$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть $\{\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}\}$ — некоторый новый базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид

$$Q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2. \qquad (9.59)$$

9.36. Определение. Число положительных и число отрицательных членов в формуле (9.59) называется соответственно положительным и отрицательным индексом формы.

9.37. Теорема. Закон инерции квадратичных форм. *Положительный и отрицательный индексы являются инвариантами квадратичной формы, т.е. не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.*

Доказательство. Предположим, что помимо вида (9.59) существует такой базис $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$, в котором квадратичная форма имеет следующий вид:

$$Q(x) = (z^1)^2 + \cdots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \cdots - (z^r)^2, \qquad (9.60)$$

где $\{z^s\}$ — координаты вектора x в базисе $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$. Нужно доказать, что $k = m$. Предположим, что $k \neq m$, например, $k > m$. Пусть координаты $Z^T = (z^1, \ldots, z^n)$ вектора x в базисе $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ связаны с координатами $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ вектора x в базисе $\{\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}\}$ следующим образом:

$$Z = D \cdot Y, \quad Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \qquad (9.61)$$

или

$$z^i = D^i_j y^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (9.62)$$

Отметим, что $\det D \neq 0$, поскольку справедливы следующие равенства:

$$\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = (\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}} \cdot D \Rightarrow \det D \neq 0.$$

Подставив выражения (9.62) в (9.60) мы должны получить выражение (9.59). Стало быть, имеет место следующее тождество:

$$(z^1)^2 + \cdots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \cdots - (z^r)^2 \equiv \\ \equiv (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2 \quad (9.63)$$

которое справедливо для любых $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ и всех $Z^T = (z^1, \ldots, z^n)$, которые связаны с $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ равенством (9.62).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений

$$D^1_1 y^1 + \cdots + D^1_k y^k = 0, \quad (9.64)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^m_1 y^1 + \cdots + D^m_k y^k = 0. \quad (9.65)$$

Поскольку число переменных k больше числа уравнений в системе (9.64)—(9.65), то у этой системы уравнений существует нетривиальное решение

$$y^1 = y^1_0, \ldots, y^k = y^k_0.$$

Пусть

$$y^{k+1}_0 = \cdots = y^r_0 = y^{r+1}_0 = \cdots = y^n_0 = 0.$$

Таким образом, получим столбец

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y^1_0 \\ \vdots \\ y^k_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.66)$$

Но тогда из (9.64) получаем равенства

$$z^1_0 = D^1_1 y^1_0 + \cdots + D^1_k y^k_0 + D^1_{k+1} 0 + \cdots + D^1_n 0 = 0, \quad (9.67)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z^m_0 = D^m_1 y^1_0 + \cdots + D^m_k y^k_0 + D^m_{k+1} 0 + \cdots + D^m_n 0 = 0. \quad (9.68)$$

Таким образом, из (9.61) имеем

$$Z_0 = D \cdot Y_0, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_0^{m+1} \\ \vdots \\ z_0^n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9.69}$$

Подставляя столбцы Y_0 и Z_0 в равенство (9.63) получим равенство

$$-(z_0^{m+1})^2 - \dots - (z_0^r)^2 = (y_0^1)^2 + \dots + (y_0^k)^2 > 0, \tag{9.70}$$

поскольку по построению числа $y_0^1, \dots, y_0^k$ одновременно в нуль не обращаются. При этом левая часть равенства неположительна. Пришли к противоречию. Значит, $k \leqslant m$. В точности точно также рассматривается случай $m > k$ с заменой $Y \leftrightarrow Z$. В результате снова придем к противоречию. Следовательно, $k = m$. $\square$

6. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра

9.38. Определение. Квадратичная форма $Q(x)$ называется положительно определенной, если $Q(x) > 0$ для всех $x \neq \theta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

9.39. Определение. Квадратичная форма $Q(x)$ называется отрицательно определенной, если $Q(x) < 0$ для всех $x \neq \theta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

9.40. Примеры. Квадратичная форма $Q(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$ на двумерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ положительно определена, а квадратичная форма $Q(x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$ является отрицательно определенной. А форма $Q(x) = (x^1)^2$ на двумерном линейном пространстве не является положительно определенной, поскольку $Q(x) = 0$ для всех $x = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2$, где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — базис в $\mathcal{L}$.

9.41. Теорема. *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее ранг r и положительный индекс инерции p равны размерности пространства n: $r = p = n$.*

Доказательство. Достаточность. Если $p = r = n$, то в каноническом базисе квадратичная форма имеет следующий нормальный вид:

$$Q(x) = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Кроме того, эта квадратичная форма обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$x^1 = \cdots = x^n = 0 \Leftrightarrow x = x^i \cdot \mathbf{e}_i = \theta.$$

Необходимость. Пусть или $p < n$ или $r < n$. Тогда в каноническом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ квадратичная форма принимает следующий вид:

$$Q(x) = Q'(x^1, \ldots, x^{n-1}) + \lambda_n (x^n)^2, \quad \lambda_n \leqslant 0.$$

При этом

$$Q(\mathbf{e}_n) = Q'(0, ..., 0) + \lambda_n = \lambda_n \leqslant 0.$$

Следовательно, $Q(x)$ не является положительно определенной квадратичной формой. Поэтому если $Q(x)$ — положительно определенная квадратичная форма, то $p = r = n$. □

9.42. Определение. Главным минором порядка $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матрицы A размера $n \times n$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием последних $n - k$ строк и $n - k$ столбцов.

9.43. Теорема. Теорема Якоби. *Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$ с матрицей Q_e в некотором базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, все главные миноры которой отличны от нуля. Тогда существует такой базис $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$ линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором*

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \left(x^{n'}\right)^2, \tag{9.71}$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \cdots + x^{n'} \cdot \mathbf{e}_{n'},$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n'1} & \cdots & q_{n'n'} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Справедлива следующая цепочка строгих вложений:

$$L(\mathbf{e}_1) \subset L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \cdots \subset L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

На линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1)$ квадратичная форма Q имеет следующий вид:

$$Q(x) = q_{11} \left(x^1\right)^2, \quad q_{11} = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0. \tag{9.72}$$

Рассмотрим в линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1)$ вектор

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{q_{11}} \mathbf{e}_1. \tag{9.73}$$

Этот вектор образует базис в $L(\mathbf{e}_1)$ и при этом

$$B(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}) = \frac{1}{q_{11}^2} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{q_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}. \tag{9.74}$$

Следовательно, в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1)$ квадратичная форма $Q(x)$ при $x \in L(\mathbf{e}_1)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2, \quad x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'}. \tag{9.75}$$

Шаг 2. Предположим, что при $m \in \overline{1, n-1}$ в линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \subset \mathcal{L}$ искомый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$[1] построен. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \subset \mathcal{L}$ для $x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ имеем

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} \left(x^{m'}\right)^2, \tag{9.76}$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \cdots + x^{m'} \cdot \mathbf{e}_{m'}.$$

Из вида квадратичной формы (9.76) имеем

$$B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \delta_{i'j'}, \quad i', j' \in \overline{1, m'}, \quad i = i'. \tag{9.77}$$

Теперь рассмотрим следующую систему уравнений:

$$B(x, \mathbf{e}_{1'}) = 0, \ldots, B(x, \mathbf{e}_{m'}) = 0, \quad x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}). \tag{9.78}$$

Заметим, что

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} x^i \cdot \mathbf{e}_i. \tag{9.79}$$

Тогда из (9.78) и (9.79) получим, следующую систему m уравнений относительно $m+1$ переменных $x^1, \ldots, x^{m+1}$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{1'}) x^i = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{m+1} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{m'}) x^i = 0. \tag{9.80}$$

Очевидно, что такая система линейных однородных уравнений имеет нетривиальное решение, которое обозначим через $x_0 \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Пусть

$$\mathbf{e}_{m'+1} := \lambda_0 \cdot x_0, \tag{9.81}$$

где $\lambda_0 \neq 0$ выберем таким образом, чтобы

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}) \cdot C, \tag{9.82}$$

[1] При этом $m' = m$.

$$\det C = \frac{1}{\Delta_{m+1}}, \quad \Delta_{m+1} = \det Q_{m+1,e}, \tag{9.83}$$

где $Q_{m+1,e}$ — это матрица квадратичной формы $Q(x)$, рассматриваемой на линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}\}$. Отметим, что $\mathbf{e}_{m'+1}$ тоже решение системы уравнений (9.78). Семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ образует базис в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$.

□□ Действительно, по построению семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ линейно независимо в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Поэтому если семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейно зависимо в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$, то

$$\mathbf{e}_{m'+1} = \sum_{i'=1}^{m'} \alpha^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{9.84}$$

Поскольку $\mathbf{e}_{m'+1}$ по построению — решение системы уравнений (9.78), то

$$\sum_{i'=1}^{m'} \alpha^{i'} B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = 0, \quad j' = \overline{1, m'}, \tag{9.85}$$

из которого в силу (9.77) получаем равенства

$$\alpha^{j'} \frac{\Delta_{j'-1}}{\Delta_{j'}} = 0 \Rightarrow \alpha^{j'} = 0, \quad j' = \overline{1, m'}. \tag{9.86}$$

Отсюда приходим к выводу о линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$, а поскольку их число равно размерности этого линейного подпространства, то они образуют базис в этом линейном подпространстве. ⊠⊠

Шаг 3. Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{B(\mathbf{e}_{m'+1}, \mathbf{e}_{m'+1})}{\Delta_m} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdots \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} B(\mathbf{e}_{m'+1}, \mathbf{e}_{m'+1}) =$$
$$= \prod_{k'=1}^{m'+1} B(\mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'}) = \det Q_{m+1,e'} = \det\left(C^T \cdot Q_{m+1,e} \cdot C\right) =$$
$$= (\det C)^2 \det Q_{m+1,e} = \frac{1}{\Delta_{m+1}}, \tag{9.87}$$

где мы воспользовались равенством (9.83) и $Q_{m+1,e'}$ — это матрица квадратичной формы $Q(x)$ в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Поэтому из (9.87) получаем равенство

$$B(\mathbf{e}_{m'+1}, \mathbf{e}_{m'+1}) = \frac{\Delta_m}{\Delta_{m+1}}. \tag{9.88}$$

Следовательно, из (9.77), (9.78) и (9.88) приходим к выводу о том, что в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$ квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(x^{1'}\right)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}\left(x^{m'}\right)^2 + \frac{\Delta_m}{\Delta_{m+1}}\left(x^{m'+1}\right)^2, \tag{9.89}$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \cdots + x^{m'} \cdot \mathbf{e}_{m'} + x^{m'+1} \cdot \mathbf{e}_{m'+1}. \tag{9.90}$$

В силу результатов шагов 1 и 3 приходим к утверждению теоремы. □

9.44. Определение. Матрица $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется положительно определенной, если соответствующая квадратичная форма

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{n} q_{ij} x^i x^j$$

является положительно определенной.

9.45. Теорема. Критерий Сильвестра. *Матрица Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:*

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доказательство. Необходимость. Доказательство проведем по индукции.

Предположение индукции. Матрица $Q \in \mathbb{R}^{k\times k}$ положительно определенная, тогда все ее главные миноры положительны.

Шаг индукции. Пусть матрица $Q \in \mathbb{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ положительно определенная. Докажем, что все ее главные миноры положительны. Рассмотрим соответствующую положительно определенную квадратичную форму

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{k+1} q_{ij} x^i x^j = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij} x^i x^j +$$

$$+\,2\sum_{i=1}^{k} q_{ik+1}x^i x^{k+1} + q_{k+1k+1}(x^{k+1})^2.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant Q(x^1, \dots, x^k, 0) = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij}x^i x^j$$

и $Q(x^1, \dots, x^k, 0) = 0$ тогда и только тогда когда, $x^1 = \dots = x^k = 0$. Следовательно, по предположению индукции все главные миноры матрицы Q до порядка k включительно положительны. Сделаем переход к каноническому базису, в котором квадратичная форма примет нормальный вид с матрицей $Q' = C^T QC$. Поскольку матрица Q положительно определенная, то матрица Q' имеет следующий вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q' = 1.$$

Тогда имеем

$$1 = \det Q' = (\det C)^2 \det Q \Rightarrow \det Q > 0.$$

Необходимость условий доказана.

Достаточность. Следует из теоремы 9.43.

□

7. Примеры решения задач

9.46. Пример. Приведение квадратичной формы невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Рассмотрим в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ квадратичную форму

$$Q(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 8(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - 16x^2x^3, \quad (9.91)$$

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j.$$

Нужно найти какой–либо базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором квадратичная форма примет нормальный вид.

Решение. Сначала рассмотрим все слагаемые в (9.91), которые содержат переменную x^1. Действительно, справедливы равенства

$$(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 =$$
$$= (x^1 + 2x^2 - x^3)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^2x^3 =$$
$$= (y^1)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^2x^3, \quad y^1 = x^1 + 2x^2 - x^3. \quad (9.92)$$

С учетом (9.92) из (9.91) получим следующее равенство:

$$Q = (y^1)^2 - 2(x^2)^2 - 9(x^3)^2 - 12x^2x^3. \tag{9.93}$$

Рассмотрим все слагаемые в (9.93), содержащие переменную x^2. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} -2(x^2)^2 - 12x^2x^3 = -2(x^2+3x^3)^2 + 18(x^3)^2 = \\ = -(y^2)^2 + 18(x^3)^2, \quad y^2 = \sqrt{2}(x^2+3x^3). \end{aligned} \tag{9.94}$$

Из (9.93) с учетом (9.94) приходим к следующим равенствам:

$$Q = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 9(x^3)^2 = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2, \tag{9.95}$$

где

$$y^1 = x^1 + 2x^2 - x^3, \quad y^2 = \sqrt{2}(x^2+3x^3), \quad y^3 = 3x^3. \tag{9.96}$$

В матричной форме имеем

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{9.97}$$

Таким образом, новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором квадратичная форма Q имеет нормальный вид связан со старым базисом соотношением

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \tag{9.98}$$

9.47. Пример. Приведение кососимметрической билинейной формы к каноническому виду. Привести кососимметрическую билинейную форму

$$\begin{aligned} B(x,y) = x^1y^2 - x^2y^1 + 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + 2x^1y^4 - 2x^4y^1 + \\ + x^2y^3 - x^3y^2 + x^3y^4 - x^4y^3, \end{aligned} \tag{9.99}$$

заданную в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Решение. Пусть $\mathcal{L}^*$ — сопряженное линейное пространство к линейному пространству $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ базис в $\mathcal{L}^*$, двойственный к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} x^iy^j - x^jy^i = \langle \mathbf{e}^i, x\rangle\langle \mathbf{e}^j, y\rangle - \langle \mathbf{e}^j, x\rangle\langle \mathbf{e}^i, y\rangle = \\ = (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i)(x,y) = (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j)(x,y), \end{aligned} \tag{9.100}$$

где мы ввели внешнее произведение ковекторов

$$\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j := \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j - \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^i. \tag{9.101}$$

С помощью операции внешнего произведения ковекторов билинейную форму (9.99) можно переписать в следующем виде:

$$B(x, y) = \Big[\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4 + \\ + \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4\Big](x, y) \tag{9.102}$$

или в еще более компактной форме

$$B = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^4 + \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4. \tag{9.103}$$

Для дальнейшего нужно заметить, что операция внешнего умножения ковекторов обладает свойством билинейности и кососимметричности. В частности,

$$\mathbf{e}^j \wedge \mathbf{e}^j = \theta^* \otimes \theta^*,$$

где $\theta^* \in \mathcal{L}^*$ — нулевой ковектор. Приведение билинейной формы B к каноническому виду осуществляется следующим образом. Сначала сгруппируем все слагаемые, содержащие ковектор $\mathbf{e}^1$:

$$B = \mathbf{e}^1 \wedge \Big(\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^4\Big) + \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4. \tag{9.104}$$

Рассмотрим новый базис $\{\mathbf{e}^{1'}, \mathbf{e}^{2'}, \mathbf{e}^{3'}, \mathbf{e}^{4'}\}$, связанный с базисом $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4\}$ равенствами

$$\mathbf{e}^{1'} = \mathbf{e}^1, \quad \mathbf{e}^{2'} = \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^3 + 2\mathbf{e}^4, \quad \mathbf{e}^{3'} = \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}^{4'} = \mathbf{e}^4 \tag{9.105}$$

или обратная связь

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^{1'}, \quad \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^{2'} - 2\mathbf{e}^{3'} - 2\mathbf{e}^{4'}, \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^{3'}, \quad \mathbf{e}^4 = \mathbf{e}^{4'}. \tag{9.106}$$

Из (9.104) с учетом (9.105) и (9.106) вытекают равенства

$$B = \mathbf{e}^{1'} \wedge \mathbf{e}^{2'} + (\mathbf{e}^{2'} - 2\mathbf{e}^{3'} - 2\mathbf{e}^{4'}) \wedge \mathbf{e}^{3'} + \mathbf{e}^{3'} \wedge \mathbf{e}^{4'} = \\ = \mathbf{e}^{1'} \wedge \mathbf{e}^{2'} + \mathbf{e}^{2'} \wedge \mathbf{e}^{3'} + 3\mathbf{e}^{3'} \wedge \mathbf{e}^{4'}. \tag{9.107}$$

Теперь соберем все слагаемые, содержащие $\mathbf{e}^{2'}$. Действительно,

$$B = (\mathbf{e}^{1'} - \mathbf{e}^{3'}) \wedge \mathbf{e}^{2'} + 3\mathbf{e}^{3'} \wedge \mathbf{e}^{4'}. \tag{9.108}$$

Перейдем к новому базису

$$\mathbf{e}^{1''} = \mathbf{e}^{1'} - \mathbf{e}^{3'}, \quad \mathbf{e}^{2''} = \mathbf{e}^{2'}, \quad \mathbf{e}^{3''} = \mathbf{e}^{3'}, \quad \mathbf{e}^{4''} = \mathbf{e}^{4'} \tag{9.109}$$

или обратная связь

$$\mathbf{e}^{1'} = \mathbf{e}^{1''} + \mathbf{e}^{3''}, \quad \mathbf{e}^{2'} = \mathbf{e}^{2''}, \quad \mathbf{e}^{3'} = \mathbf{e}^{3''}, \quad \mathbf{e}^{4'} = \mathbf{e}^{4''}. \tag{9.110}$$

Из (9.108) с учетом (9.109) и (9.110) приходим к выражению

$$B = \mathbf{e}^{1''} \wedge \mathbf{e}^{2''} + 3\mathbf{e}^{3''} \wedge \mathbf{e}^{4''}. \tag{9.111}$$

Перейдем к новому базису

$$\mathbf{e}^{1'''} = \mathbf{e}^{1''}, \quad \mathbf{e}^{2'''} = \mathbf{e}^{2''}, \quad \mathbf{e}^{3'''} = \mathbf{e}^{3''}, \quad \mathbf{e}^{4'''} = \frac{1}{3}\mathbf{e}^{4''}. \tag{9.112}$$

Тогда из (9.111) и (9.112) получим выражение

$$B = \mathbf{e}^{1'''} \wedge \mathbf{e}^{2'''} + \mathbf{e}^{3'''} \wedge \mathbf{e}^{4'''}, \tag{9.113}$$

причем из (9.106), (9.110) и (9.112) получаем

$$\mathbf{e}^{1} = \mathbf{e}^{1'''} + \mathbf{e}^{3'''}, \quad \mathbf{e}^{2} = \mathbf{e}^{2'''} - 2\mathbf{e}^{3'''} - \frac{2}{3}\mathbf{e}^{4'''}, \tag{9.114}$$

$$\mathbf{e}^{3} = \mathbf{e}^{3'''}, \quad \mathbf{e}^{4} = \frac{1}{3}\mathbf{e}^{4'''}. \tag{9.115}$$

Отметим, что мы ниже в лекции, посвященной тензорам, докажем не очень сложное утверждение, что

$$\langle \mathbf{e}^{j'''}, x \rangle = x^{j'''} \tag{9.116}$$

и поэтому из (9.113) с учетом (9.116) получим канонический вид

$$B(x,y) = x^{1'''}y^{2'''} - x^{2'''}y^{1'''} + x^{3'''}y^{4'''} - x^{4'''}y^{3'''}, \tag{9.117}$$

где в силу (9.114) и (9.115) имеем

$$x^{1} = x^{1'''} + x^{3'''}, \quad x^{2} = x^{2'''} - 2x^{3'''} - \frac{2}{3}x^{4'''}, \tag{9.118}$$

$$x^{3} = x^{3'''}, \quad x^{4} = \frac{1}{3}x^{4'''}. \tag{9.119}$$

ГЛАВА 10

Евклидовы и унитарные пространства

1. Евклидово пространство

10.1. Определение. Евклидово пространство $\mathcal{E}$ — это вещественное линейное пространство, в котором зафиксирована симметричная билинейная форма $G(x, y)$, причем соответствующая квадратичная форма $Q(x) = B(x, x)$ является положительно определенной. Значение билинейной формы на паре элементов x, y называется скалярным произведением этих векторов и обозначается (x, y), т.е.

$$(x, y) := G(x, y).$$

10.2. Лемма. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in \mathcal{E}$;
2. $(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 (x_1, y) + \alpha^2 (x_2, y)$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$;
3. $(x, x) > 0$ для всех $x \neq \theta$.

Доказательство. Первое свойство — следствие симметричности билинейной формы $G(x, y)$, второе свойство — следствие билинейности формы $G(x, y)$ и третье свойство — следствие положительной определенности соответствующей квадратичной формы $Q(x) = G(x, x)$. $\square$

10.3. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие равенства (см. главу 5):

$$(x, y) = G(x, y) = G(x^i \cdot \mathbf{e}_i, y^j \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = x^i y^j G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i y^j = X_e^T \cdot G_e \cdot Y_e,$$

где матрица $G_e = (g_{ij})$ — положительно определенная матрица.

10.4. Определение. Матрица $G_e = (g_{ij})$ называется матрицей Грама или метрическим тензором.

10.5. Элементы матрицы Грама представляют собой скалярное произведение элементов базиса:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji}.$$

При переходе к новому базису с помощью матрицы перехода C матрица Грама преобразуется по тому же закону, что и любая матрица билинейной формы

$$G_{e'} = C^T \cdot G_e \cdot C, \quad g_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}.$$

10.6. Лемма. $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Это следствие критерия Сильвестра положительной определенности матрицы. □

10.7. В силу результата леммы 10.6 матрица Грама G_e обратима. Элементы обратной матрицы G_e^{-1} обозначаются g^{ij}. Тогда справедливы равенства

$$G_e \cdot G_e^{-1} = I \Leftrightarrow \{G_e \cdot G_e^{-1}\}^l_j = \{G_e\}^l_k \{G_e^{-1}\}^k_j = \\ = \{G_e\}_{lk} \{G_e^{-1}\}^{kj} = g_{lk} g^{kj}, \quad \{I\}^l_j = \{I\}^j_l = \delta^j_l \Rightarrow g_{lk} g^{kj} = \delta^j_l, \tag{10.1}$$

$$G_e^{-1} \cdot G_e = I \Rightarrow \{G_e^{-1} \cdot G_e\}^l_j = \{G_e^{-1}\}^l_k \{G_e\}^k_j = \\ = \{G_e^{-1}\}^{lk} \{G_e\}^{kj} = g^{lk} g_{kj} \Rightarrow g^{lk} g_{kj} = \delta^l_j. \tag{10.2}$$

Заметим, что мы используем на протяжении книги следующие три обозначения:

$$\{A\}_{jk}, \quad \{A\}^j_k, \quad \{A\}^{jk},$$

где индекс j нумерует строчку, а индекс k столбец. Операции $\{A\}_{jk}, \{A\}^j_k, \{A\}^{jk}$ заключаются в извлечении элемента из матрицы A, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Например, если $A = (a^{jk})^n_m$, то

$$\{A\}_{jk} = a^{jk}.$$

Отметим, что справедлива

10.8. Теорема. *Справедливо неравенство Коши–Буняковского:*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}. \tag{10.3}$$

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathcal{E}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

$$(\alpha \cdot x + y, \alpha \cdot x + y) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\alpha) := (x, x)\alpha^2 + 2(x, y)\alpha + (y, y) \geqslant 0. \tag{10.4}$$

Для того чтобы функция $f(\alpha)$ принимала только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неположителен:

$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leqslant 0.$$

□

10.9. Лемма. Для того чтобы было выполнено равенство

$$(x,y)^2=(x,x)(y,y), \tag{10.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы векторы $x,y\in\mathcal{E}$ были линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим снова функцию $f(\alpha)$. Эта функция равна нулю тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения $f(\alpha)=0$ равен нулю, т.е. тогда и только тогда, когда выполнено равенство (10.5). Возьмем это $\alpha=\alpha_0\in\mathbb{R}$. Тогда получим равенство

$$(\alpha_0\cdot x+y,\alpha_0\cdot x+y)=0\Leftrightarrow \alpha_0\cdot x+y=0,$$

т.е. векторы x и y линейно зависимы. Здесь мы воспользовались тем, что квадратичная форма $Q(x)=B(x,x)=(x,x)$ положительно определенная. □

10.10. Пример. Линейное пространство столбцов $\mathbb{R}^{n\times 1}$ становится евклидовым пространством, если для столбцов

$$X=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}$$

определить скалярное произведение по формуле

$$(X,Y)=X^T\cdot G\cdot Y, \tag{10.6}$$

где $G\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно определенная, симметричная матрица. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(Y,X)=Y^T\cdot G\cdot X=(Y^T\cdot G\cdot X)^T=$$
$$=X^T\cdot G^T\cdot Y^{TT}=X^T\cdot G\cdot Y=(X,Y)\quad\text{для всех}\quad X,Y\in\mathbb{R}^{n\times 1},$$

поскольку $G^T=G$,

$$(\alpha^1X_1+\alpha^2X_2,Y)=(\alpha^1X_1+\alpha^2X_2)^T\cdot G\cdot Y=(\alpha^1X_1^T+\alpha^2X_2^T)\cdot G\cdot Y=$$
$$=\alpha^1X_1^T\cdot G\cdot Y+\alpha^2X_2^T\cdot G\cdot Y=$$
$$=\alpha^1(X_1,Y)+\alpha^2(X_2,Y)\quad\text{для всех}\quad X_1,X_2,Y\in\mathbb{R}^{n\times 1},\quad \alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{R},$$

$$(X, X) = X^T \cdot G \cdot X > 0 \quad \text{для всех} \quad X^T \neq (0, \ldots, 0),$$

поскольку G — положительно определенная матрица.

10.11. Пример. Скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times m}$ можно ввести по формуле

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T \cdot Y), \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Действительно, в курсе аналитической геометрии нами были доказаны следующие свойства следа квадратной матрицы:

$$\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A, \quad \operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2$$

для любых матриц $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ и произвольных чисел $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(Y, X) = \operatorname{tr}(Y^T \cdot X) = \operatorname{tr}((Y^T \cdot X)^T) = \\ = \operatorname{tr}(X^T \cdot Y) = (X, Y) \quad \text{для любых} \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m},$$

$$(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2, Y) = \operatorname{tr}((\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2)^T \cdot Y) = \\ = \operatorname{tr}(\alpha^1 X_1^T \cdot Y + \alpha^2 X_2^T \cdot Y) = \alpha^1 \operatorname{tr}(X_1^T \cdot Y) + \alpha^2 \operatorname{tr}(X_2^T \cdot Y) = \\ = \alpha^1 (X_1, Y) + \alpha^2 (X_2, Y) \quad \text{для всех} \quad Y, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(X, X) = \operatorname{tr}(X^T \cdot X) = \sum_{j=1}^{m} \{X^T \cdot X\}_j^j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \{X^T\}_k^j \{X\}_j^k = \\ = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\{X\}_j^k\right)^2 \Rightarrow (X, X) > 0 \quad \text{для всех} \quad X \neq O \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

10.12. Пример. На бесконечномерном линейном пространстве $\mathbb{C}[0, 1]$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вещественных функций можно ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 g(t)f(t)\,dt = (g,f) \quad \text{для любых} \quad f(t), g(t) \in \mathbb{C}[0,1],$$

$$(\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2, g) = \int\limits_0^1 (\alpha^1 f_1(t) + \alpha^2 f_2(t))g(t)\,dt =$$
$$= \alpha^1 \int\limits_0^1 f_1(t)g(t)\,dt + \alpha^2 \int\limits_0^1 f_2(t)g(t)\,dt =$$
$$= \alpha^1(f_1,g) + \alpha^2(f_2,g) \text{ для всех } f_1(t), f_2(t), g(t) \in \mathbb{C}[0,1],\ \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(f,f) = \int\limits_0^1 f^2(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

2. Длины и углы в евклидовом пространстве

10.13. Определение. Нормой вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число

$$\|x\| \overset{def:}{=} \sqrt{(x,x)}.$$

10.14. Теорема. *Имеют место соотношения*:

1. $\|x\| \geqslant 0$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$, *причем* $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда*, *когда* $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$ *и всех* $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *для всех* $x, y \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 (x,x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)} = |\alpha|\|x\|.$$

Для доказательства третьего утверждения заметим, что справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$$
$$= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant \|x\|^2 + 2(x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2} + \|y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

для всех $x, y \in \mathcal{E}$. □

10.15. Определение. Угол между векторами x, y — это число $\phi \in [0, \pi]$, определяемый из уравнения

$$\cos \phi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}.$$

10.16. Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что угол определен для любых двух ненулевых векторов.

3. Унитарные пространства

10.17. Определение. Полуторалинейной формой на комплексном линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется скалярная функция $G(x, y)$ двух переменных, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$;
2. $G(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 G(x_1, y) + \alpha^2 G(x_2, y)$ для всех $x_1, x_2, y \in \mathcal{L}$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$.

10.18. Лемма. Полуторалинейная форма $G(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $G(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \overline{\beta^1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2)$ для всех $x, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и всех $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{C}$;
2. $G(x, x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) &= \overline{G(\beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2, x)} = \\ &= \overline{\beta^1 G(y_1, x) + \beta^2 G(y_2, x)} = \\ &= \overline{\beta_1}\,\overline{G(y_1, x)} + \overline{\beta^2}\,\overline{G(y_2, x)} = \overline{\beta_1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2), \end{aligned}$$

$$G(x, x) = \overline{G(x, x)} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow G(x, x) \in \mathbb{R}.$$

□

10.19. Из за первого свойства антилинейности форму $G(x, y)$ называют полуторалинейной.

10.20. Определение. Полуторалинейная форма $G(x, y)$ называется положительно определенной, если

$$G(x, x) > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad x \neq \theta.$$

10.21. Определение. Унитарное пространство $\mathcal{U}$ — это комплексное линейное пространство, на котором задана полуторалинейная, положительно определенная форма $G(x, y)$. Обычно пишут (x, y) вместо $G(x, y)$ и называют выражение (x, y) скалярным произведением.

10.22. Пример. Например, на линейном пространстве $\mathbb{C}_C[0,1]$ комплекснозначных непрерывных функций можно задать следующую полуторалинейную положительно определенную форму:

$$G(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

10.23. Матрица Грама. Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ выбран базис $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(x,y) = G(x,y) = G(x^j\cdot\mathbf{e}_j, y^k\cdot\mathbf{e}_k) = \\ = x^j\overline{y^k}G(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = x^j g_{jk}\overline{y^k} = X_e^T\cdot G_e\cdot\overline{Y_e}. \quad (10.7)$$

Действительно, пусть

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \overline{Y}_e = \begin{pmatrix} \overline{y^1} \\ \vdots \\ \overline{y^n} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$G_e \in \mathbb{C}^{n\times n},\ X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$\{G_e\cdot\overline{Y}_e\}^j = \sum_{l=1}^n \{G_e\}^j_l\{\overline{Y}_e\}^l = \sum_{l=1}^n \{G_e\}_{jl}\{\overline{Y}_e\}^l = g_{jl}\overline{y}^l \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$X_e^T = (x^1,\ldots,x^n) \in \mathbb{C}^{1\times n},$$

$$X_e^T\cdot G_e\cdot\overline{Y_e} = \sum_{j=1}^n \{X_e^T\}_j\{G_e\cdot\overline{Y}_e\}^j = x^j g_{jl}\overline{y}^l.$$

Здесь мы воспользовались еще двумя операциями:

$$\{X\}^j \quad \text{и} \quad \{X^T\}_k, \quad X \in \mathbb{K}^{n\times 1},$$

где первая операция — операция извлечения из столбца X элемента, расположенного на j–ой строчке, а вторая операция — операция извлечения из строчки X^T элемента, расположенного на месте k–ого столбца строчки X^T.

Теперь найдем закон преобразования матрицы полуторалинейной формы. Справедливы следующие равенства:

$$g_{j'k'} = G(\mathbf{e}_{j'},\mathbf{e}_{k'}) = G(c^j_{j'}\cdot\mathbf{e}_j, c^k_{k'}\cdot\mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}}G(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = \\ = c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}}g_{jk} = c^j_{j'}g_{jk}\overline{c^k_{k'}} \Leftrightarrow G_{e'} = C^T\cdot G_e\cdot\overline{C}. \quad (10.8)$$

□ Действительно, с одной стороны, имеют место следующее равенство:
$$g_{jk}\overline{c}^k_{k'} = \{G_e \cdot \overline{C}\}_{jk'},$$
в котором индекс k' нумерует столбцы, а индекс j нумерует строчки. Справедлива следующая цепочка равенств:
$$c^j_{j'} g_{jk}\overline{c}^k_{k'} = (c^1_{j'}, \ldots, c^n_{j'}) \begin{pmatrix} \{G_e \cdot \overline{C}\}_{1k'} \\ \vdots \\ \{G_e \cdot \overline{C}\}_{nk'} \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \{C^T\}^{j'}_j \{G_e \cdot \overline{C}\}_{jk'} = \{C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}\}^{j'}_{k'} =$$
$$= \{C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}\}_{j'k'}, \quad (10.9)$$
поскольку как мы уже отмечали операции
$$\{A\}^j_k = \{A\}^{jk} = \{A\}_{jk} \quad \text{для любой матрицы} \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}. \quad \boxtimes$$

10.24. Теорема. *Справедливо следующее неравенство Коши–Буняковского:*
$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y) \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathfrak{U}. \quad (10.10)$$

Доказательство. Если $x = \theta$, то неравенство (10.10) выполнено. Пусть $x \neq \theta$. Справедлива следующая цепочка равенств:
$$0 \leqslant (\alpha \cdot x + y, \alpha \cdot x + y) = \alpha(x, \alpha \cdot x + y) + (y, \alpha \cdot x + y) =$$
$$= |\alpha|^2(x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}(y,x) + (y,y) =$$
$$= |\alpha|^2(x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}\overline{(x,y)} + (y,y). \quad (10.11)$$
Теперь положим в (10.11)
$$\alpha = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$$
и получим следующее неравенство:
$$\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y) \geqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$
□

10.25. Точно также как и в случае евклидова пространства вводится норма вектора унитарного пространства, а вот угол между векторами унитарного пространства ввести нельзя, поскольку $(x,y) \in \mathbb{C}$.

4. Ортогональность

10.26. Определение. Векторы x, y либо евклидова пространства $\mathcal{E}$ либо унитарного пространства $\mathcal{U}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом используется обозначение $x \perp y$. Если x ортогонально каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{P}$, то используется обозначение $x \perp \mathcal{P}$. Множество всех векторов, которые ортогональны линейному подпространству $\mathcal{P}$ обозначается символом $\mathcal{P}^{\perp}$.

10.27. Лемма. Вектор x ортогонален самому себе $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

Доказательство. Поскольку скалярное произведение и в евклидовом и в унитарном пространствах является положительно определенной билинейной или полуторалинейной формами, то $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$. □

10.28. Лемма. Если $y \perp x_1, \ldots, y \perp x_m$, то $y \perp L(x_1, \ldots, x_m)$.

Доказательство. Пусть $x \in L(x_1, \ldots, x_m)$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j \cdot x_j \Rightarrow (x, y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j (x_j, y) = 0.$$

□

10.29. Лемма. Если $x \perp \mathbf{e}_j$ для всех $j = \overline{1, n}$, где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$, то $x = \theta$.

Доказательство. Согласно результату леммы 10.28 имеем $x \perp \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда, в частности, $(x, x) = 0$. Отсюда сразу же получаем, что $x = \theta$. □

10.30. Лемма. Справедливо неравенство $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Пусть G_e — матрица Грама в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом (унитарном) пространстве $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Пусть

$$\det G_e = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^1 \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^n \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} (\alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (y, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (y, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \alpha^j \cdot \mathbf{e}_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (10.12)$$

причем $(\alpha^1, \dots, \alpha^n) \neq (0, \dots, 0)$. Осталось воспользоваться результатом леммы (10.29) и получить, что $y = \theta$. Следовательно,

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \theta, \quad (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \neq (0, \dots, 0).$$

Пришли к противоречию с тем, что $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис. Таким образом, $\det G_e \neq 0$. □

10.31. Лемма. Если $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x)+(y, x)+(x, y)+(y, y) = \|x\|^2+\|y\|^2.$$

□

10.32. Лемма. Если ненулевые векторы $x_1, \dots, x_m$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Пусть $(x_j, x_k) = 0$ при $j \neq k$ и $x_j \neq \theta$ для всех $j = \overline{1, m}$. Теперь рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m = \theta$$

Умножим обе части этого равенства на x_k при $k \in \overline{1, m}$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \dots + \alpha^m \cdot x_m, x_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^1(x_1, x_k) + \dots + \alpha^m(x_m, x_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^k(x_k, x_k) = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0.$$

Значит, это семейство векторов является линейно независимым. □

10.33. Поскольку и евклидово пространство $\mathcal{E}$ и унитарное пространство $\mathcal{U}$ являются линейными пространствами над числами из $\mathbb{R}$ и из $\mathbb{C}$, соответственно, то над этими линейными пространствами определены сопряженные пространства $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{U}^*$ соответственно. Однако, для евклидовых и унитарных линейных пространств справедливо следующая важная **теорема Рисса–Фреше**:

10.34. Теорема. *Всякая линейная форма $f \in \mathcal{E}^*(f \in \mathcal{U}^*)$ представима в следующем виде:*

$$\langle f, x\rangle = (x, y_f) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{10.13}$$

где вектор $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ определяется формой f однозначным образом.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — соответствующий взаимный базис в $\mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$. Тогда для векторов $x, y_f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$ справедливы следующие разложения:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{10.14}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\langle f, x\rangle = \langle f_j \cdot \mathbf{e}^j, x^i \mathbf{e}_i\rangle = f_j x^i \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = f_j x^i \delta_i^j = f_i x^i, \tag{10.15}$$

$$(x, y_f) = (x^i \cdot \mathbf{e}_i, \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^i \overline{\eta_f^k} G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k}. \tag{10.16}$$

Тогда искомое представление (10.13) в координатах при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ эквивалентно равенству

$$f_i x^i = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k} \Leftrightarrow (f_i - g_{ik} \overline{\eta_f^k}) x^i = 0. \tag{10.17}$$

Равенство (10.13) должно быть выполнено для любых векторов $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и поэтому эквивалентное ему равенство (10.17) (в заданном базисе) должно быть выполнено для всех $x^i \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ для всех $i = \overline{1, n}$. Пусть $X^T = (x^1, \ldots, x^n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 расположена на p–ом месте, тогда из (10.17) получим следующие равенства:

$$g_{pk} \overline{\eta_f^k} = f_p, \quad p = \overline{1, n}. \tag{10.18}$$

Это неоднородная, вообще говоря, квадратная линейная система уравнений. Рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$g_{pk} \overline{\eta_f^k} = 0, \quad p = \overline{1, n}, \tag{10.19}$$

которую несложно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 = g_{pk} \overline{\eta_f^k} = G(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_k) \overline{\eta_f^k} = G\left(\mathbf{e}_p, \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k\right) = \\ = G(\mathbf{e}_p, y_f) = (\mathbf{e}_p, y_f) \quad \text{для всех} \quad p = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{10.20}$$

В силу результата леммы 10.29 получаем, что $y_f = \theta$. Следовательно, $\eta_f^k = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$. Значит, однородная квадратная система линейных уравнений (10.19) имеет только тривиальное решение. Таким образом, в силу альтернатив Фредгольма неоднородная система линейных уравнений (10.19) имеет единственное решение $\{\eta_f^k\}_{k=1}^n$. «Прокручивая» в обратном порядке формулы (10.18)–(10.13) для вектора $y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k$ получим, что для каждой линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$ существует элемент $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{E})$ такой, что справедливо равенство (10.13), причем

$$y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

а числа η_f^k определяются из неоднородной системы уравнений (10.18).

Единственность найденного вектора y_f следует из следующих соображений. Пусть векторов два y_f и z_f. Тогда для всех $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\langle f, x\rangle = (x, y_f) = (x, z_f) \Leftrightarrow (x, y_f - z_f) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (y_f - z_f, y_f - z_f) = 0 \Rightarrow y_f - z_f = \theta \Rightarrow y_f = z_f.\end{aligned}$$

□

10.35. Лемма. Отображение $J:\ f \to y_f$ является линейным в случае евклидова пространства и антилинейным в случае унитарного пространства, т.е.

$$\begin{aligned}J(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) = y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2} = \\ = \overline{\alpha_1} \cdot y_{f^1} + \overline{\alpha_2} \cdot y_{f^2} = \overline{\alpha_1} \cdot J(f^1) + \overline{\alpha_2} \cdot J(f^2)\end{aligned} \tag{10.21}$$

для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ и всех $f^1, f^2 \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$.

Доказательство. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle \alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2, x\rangle = \left(x, y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2}\right), \tag{10.22}$$

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2, x\rangle = \alpha_1 \langle f^1, x\rangle + \alpha^2 \langle f^2, x\rangle = \\ = \alpha_1 (x, y_{f_1}) + \alpha_2 (x, y_{f_2}) = (x, \overline{\alpha_1} \cdot y_{f_1} + \overline{\alpha_2} \cdot y_{f_2}).\end{aligned} \tag{10.23}$$

Таким образом, из (10.22) и (10.23) вытекает следующее равенство:

$$(x, y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2} - \overline{\alpha_1} \cdot y_{f_1} - \overline{\alpha_2} \cdot y_{f_2}) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Следовательно,

$$y_{\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2} = \overline{\alpha_1} \cdot y_{f_1} + \overline{\alpha_2} \cdot y_{f_2}$$

или

$$J(\alpha_1 \cdot f^1 + \alpha_2 \cdot f^2) = \overline{\alpha_1} \cdot J(f_1) + \overline{\alpha_2} \cdot J(f_2).$$

□

10.36. Определение. Базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ или в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ называется ортонормированным, если справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

10.37. Теорема. *Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ или в унитарном пространстве $\mathcal{U}$, тогда имеют место следующие равенства*:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, \mathbf{e}_i)|^2 \text{ для всех } x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{10.24}$$

где второе равенство носит название равенства Парсеваля.

Доказательство. Представим произвольный вектор $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ в виде разложения по базису:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow (x, \mathbf{e}_j) = (x^k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \\ = x^k \delta_{kj} = x^j \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j,$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_k \right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \overline{(x, \mathbf{e}_k)} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \overline{(x, \mathbf{e}_k)} \delta_{kj} = \\ = \sum_{j=1}^{n} |(x, \mathbf{e}_j)|^2 .$$

□

5. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

10.38. Задача об ортогональной проекции. Пусть $\mathcal{L}$ — это либо евклидово пространство $\mathcal{E}$ либо унитарное пространство $\mathcal{U}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k\}$ — ортогональный базис в $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k) \subset \mathcal{L}$:

$$(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i) = 0, \quad i \neq j, \quad \mathbf{f}_j \neq \theta, \quad j = \overline{1, n}, \tag{10.25}$$

причем $\dim \mathcal{L} = n$ и $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Пусть $x \in \mathcal{L}$, но $x \notin L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$.

Задача об ортогональной проекции заключается в том, чтобы найти ортогональную проекцию вектора x на линейную оболочку $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$, т. е. представить x в следующем виде:

$$x = y + z, \quad y \in L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k), \quad z \perp L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k). \tag{10.26}$$

□ Действительно, для решения этой задачи заметим, что с одной стороны, $y \in L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$, то

$$y = \lambda^1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \lambda^k \cdot \mathbf{f}_k. \tag{10.27}$$

С другой стороны, $z \perp L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$ и поэтому

$$(z, \mathbf{f}_1) = \cdots = (z, \mathbf{f}_k) = 0. \tag{10.28}$$

Из (10.26)–(10.28) с учетом (10.25) получаем, что

$$(x, \mathbf{f}_1) = \lambda^1(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1), \quad (x, \mathbf{f}_k) = \lambda^k(\mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k). \tag{10.29}$$

Следовательно,

$$\lambda^j = \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)}, \quad j = \overline{1, k}. \tag{10.30}$$

Из (10.26), (10.27) и (10.30) получаем, что

$$y = \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j, \quad z = x - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j. \tag{10.31}$$

Непосредственно можно убедиться, что

$$y \in L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k), \quad z \perp L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k).$$

Проверим второе утверждение. Очевидно, что достаточно проверить свойства (10.28). Действительно, имеем

$$\begin{aligned}(z, \mathbf{f}_m) = (x, \mathbf{f}_m) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_m\right) = \\ = (x, \mathbf{f}_m) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} (\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_m) = \\ = (x, \mathbf{f}_m) - (x, \mathbf{f}_m) = 0, \quad m = \overline{1, k}.\end{aligned} \tag{10.32}$$

По своему смыслу вектор z, определенный равенством из (10.31) — это «перпендикуляр» к линейной оболочке $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$. Наконец, представление (10.26) можно записать так

$$x = \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j + \left(x - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j\right). \tag{10.33}$$

Решение задачи об ортогональной проекции завершено. ⊠

10.39. Возникает вопрос: а всегда ли существует ортонормированный базис в евклидовом и унитарном пространствах? Ответ на этот вопрос дает следующая **теорема Грама–Шмидта.**

10.40. Теорема. *В любом нетривиальном евклидовом* (*в унитарном*) *пространстве* $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ *существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. По нему будем строить ортонормированный базис.

Шаг 1. Первый вектор будущего базиса возьмем равным первому вектору исходного базиса

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow L(\mathbf{e}_1) = L(\mathbf{e}_{1'}). \tag{10.34}$$

Шаг 2. Предположим, что мы построили ортогональный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}\}$ в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В частности, имеем

$$L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k), \quad k' = k.$$

Теперь по вектору $\mathbf{e}_{k+1} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$ согласно разложению (10.33) построим перпендикуляр $\mathbf{e}_{k'+1}$ к линейной оболочке $L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'})$. Действительно, справедливо разложение

$$\mathbf{e}_{k+1} = \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})}\mathbf{e}_{j'} + \left(\mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})}\mathbf{e}_{j'}\right), \tag{10.35}$$

причем вектор

$$\mathbf{e}_{k'+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})}\mathbf{e}_{j'} \tag{10.36}$$

— есть перпендикуляр к линейно оболочке

$$L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k).$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}_{j'} \in L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}) \quad j' = \overline{1, k'},$$

а из вида (10.36) вытекает, что и вектор $\mathbf{e}_{k'+1} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$. Итак, семейство ненулевых векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$ попарно ортогональны. В силу результата леммы 10.32 это семейство линейно независимо, причем по построению принадлежат линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$, размерность которой, очевидно, равна $k+1$, т.е. совпадает с числом векторов семейства $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$. Значит это семейство образует базис в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$.

Таким образом, мы построили ортогональный базис

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$$

в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$.

В силу метода математической индукции мы приходим к выводу о существовании ортогонального базиса в евклидовом $\mathcal{E}$ (унитарном $\mathcal{U}$) пространстве. Осталось провести его нормировку:

$$\mathbf{e}_{1''} = \frac{\mathbf{e}_{1'}}{\|\mathbf{e}_{1'}\|}, \ldots, \mathbf{e}_{n''} = \frac{\mathbf{e}_{n'}}{\|\mathbf{e}_{n'}\|}, \quad n'' = n.$$

□

10.41. Многочлены Лежандра. В пространстве вещественных непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $\mathbb{C}[-1, 1]$ вводится скалярное умножение следующим образом:

$$(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt. \tag{10.37}$$

Соответственно

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-1}^{1} f^2(t)\, dt. \tag{10.38}$$

Возьмем линейно независимое семейство одночленов

$$1, t, t^2, t^3, \ldots, t^k, \ldots \tag{10.39}$$

и применим к нему процесс ортогонализации. В результате получим последовательность многочленов

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad f_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad \ldots. \tag{10.40}$$

После специальной подстановки вида

$$p_k(t) = \lambda_k f_k(t), \tag{10.41}$$

где λ_k выбираются из условия

$$p_k(1) = 1. \tag{10.42}$$

Можно доказать, что

$$p_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} \left\{(t^2 - 1)\right\}, \quad \|p_k(t)\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \tag{10.43}$$

Многочлены (10.43) носят название многочленов Лежандра.

6. Ортогональные проекторы

10.42. Определение. Ортогональной проекцией векторы x на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова $\mathcal{E}$ или унитарного пространства $\mathcal{U}$ называется такой вектор $y \in \mathcal{P}$, что разность $x - y$ ортогональна $\mathcal{P}$.

10.43. Лемма. Ортогональная проекция произвольного вектора x на любое заданное нетривиальное линейное подпространство $\mathcal{P}$ определяется единственным образом и является линейной функцией от вектора x.

Доказательство. Существование проекции. Для этого в евклидовом $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$) выберем какой–либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ таким образом, чтобы набор векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \mathcal{P}$, образовывал базис линейного подпространства $\mathcal{P}$ и построим вектор y по правилу

$$y = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{10.44}$$

Тогда с учетом результата теоремы 10.37 имеем

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \tag{10.45}$$

и поэтому

$$x - y = \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \perp \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \tag{10.46}$$

Единственность проекции. Пусть существует две ортогональные проекции $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$. Тогда, с одной стороны, имеем

$$y_1 - y_2 \in \mathcal{P}. \tag{10.47}$$

С другой стороны,

$$x - y_1 \quad \text{и} \quad x - y_2 \quad \perp \ \mathcal{P}.$$

Поэтому если $z \in \mathcal{P}$, то имеем

$$((x - y_1) - (x - y_2), z) = (x - y_1, z) - (x - y_2, z) = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{P}.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$y_1 - y_2 = (y_1 - x) - (y_2 - x) \perp \mathcal{P} \Rightarrow y_1 - y_2 \in \mathcal{P}^{\perp}. \tag{10.48}$$

Поскольку $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp} = \{\theta\}$, то $y_1 = y_2$.

Линейная зависимость от x. Из формулы (10.44) в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает линейная зависимость $y = y(x)$. $\square$

10.44. Определение. Оператор P, сопоставляющий всякому вектору x его ортогональную проекцию на линейное подпространство $\mathcal{P}$, называется ортогональным проектором на подпространство $\mathcal{P}$.

10.45. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ при $m = \dim \mathcal{P}$ — какой–либо ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$, то ортогональный проектор на $\mathcal{P}$ задается формулой

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j \tag{10.49}$$

и, в частности, является линейным оператором.

Доказательство. Достроим ортонормированный базис базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ во всем евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$). С этой целью сначала просто достраиваем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до базиса во всем линейной пространстве, а затем используем процедуру ортогонализации Штурма. После этого достаточно воспользоваться доказательством леммы 10.43. $\square$

10.46. Лемма. Оператор P удовлетворяет равенству $P^2 = P$ и поэтому является проектором.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — какой–то ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$. Тогда согласно результату леммы 10.45 ортогональный проектор имеет вид (10.49) и, в частности,

$$P\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{jk} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, m}.$$

Поэтому для любого $x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U})$ имеем

$$P^2 x = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = Px.$$

$\square$

7. Матрица перехода между ортонормированными базисами

10.47. Лемма. Если два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ унитарного пространства $\mathcal{U}$ связаны матрицей C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C, \tag{10.50}$$

то справедливо равенство

$$C^T \cdot \overline{C} = I. \tag{10.51}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}).$$

Тогда

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e = \mathbf{E}' \cdot Y_{e'},$$

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'} \tag{10.52}$$

и справедливы следующие равенства:

$$X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T \cdot G_{e'} \cdot \overline{Y_{e'}}. \tag{10.53}$$

Поскольку базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ являются ортонормированными, то $G_e = G_{e'} = I$. Поэтому имеет место равенство

$$X_e^T \cdot \overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T \cdot \overline{Y_{e'}}. \tag{10.54}$$

Из (10.52) и (10.54) вытекает равенство

$$X_{e'}^T \cdot C^T \cdot \overline{C} \cdot \overline{Y_{e'}} = X_{e'}^T \cdot \overline{Y_{e'}},$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_{e'}, Y_{e'} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Поэтому приходим к равенству

$$C^T \cdot \overline{C} = I.$$

□

10.48. Лемма. Если два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны матрицей C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C, \tag{10.55}$$

то справедливо равенство

$$C^T \cdot C = I. \tag{10.56}$$

Доказательство. Доказывается аналогично доказательству равенству (10.51) леммы 10.47. □

8. Примеры решений задач

10.49. Пример. Ортогональное проецирование 1. Найти ортогональную проекцию $x^{\|}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (2, -5, 4, -3)$ при проекции на подпространство

$$U = L(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}_4, \quad a_1 = (1, 2, 1, 0), \quad a_2 = (2, 1, 4, -5). \quad (10.57)$$

Решение. Вектор $x^{\|} \in U$. Поэтому для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$x^{\|} = \lambda a_1 + \mu a_2. \quad (10.58)$$

Тогда имеем

$$x^{\perp} = x - x^{\|} = (2 - \lambda - 2\mu, -5 - 2\lambda - \mu, 4 - \lambda - 4\mu, -3 + 5\mu). \quad (10.59)$$

Числа λ и μ находим из условия ортогональности вектора $x^{\perp}$ линейному подпространству $U = L(a_1, a_2)$. Заметим, что векторы a_1 и a_2 являются линейно независимыми в $\mathbb{R}_4$. Поэтому справедливы равенства

$$(x^{\perp}, a_1) = (x^{\perp}, a_2) = 0. \quad (10.60)$$

Из (10.57), (10.59) и (10.60) получаем следующую систему уравнений:

$$6\lambda + 8\mu + 4 = 0, \quad 8\lambda + 46\mu - 30 = 0, \quad (10.61)$$

которая имеет единственное решение $\lambda = -2$, $\mu = 1$. Отсюда и из (10.58) получаем

$$x^{\|} = -2a_1 + a_2 = (0, -3, 2, -5),$$

$$x^{\perp} = x - x^{\|} = (2, -2, 2, 2).$$

10.50. Пример. Ортогональное проецирование 2. В пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера 2×2 задано скалярное произведение

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^T \cdot B). \quad (10.62)$$

Найти ортогональную проекцию $X^{\|}$ и ортогональную составляющую $X^{\perp}$ матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (10.63)$$

при проекции на линейное подпространство U, заданное системой линейных уравнений

$$\mathrm{tr}\, A = O, \quad \mathrm{tr}(J \cdot A) = O, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.64)$$

Решение. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in U. \tag{10.65}$$
Тогда имеем
$$\operatorname{tr} A = 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 0, \tag{10.66}$$
$$\operatorname{tr}(J \cdot A) = 0 = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right] = \\ = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}\right] = a_{21} - a_{12} = 0. \tag{10.67}$$
Поэтому $A \in U$ тогда и только тогда, когда
$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{21} - a_{12} = 0. \tag{10.68}$$
Несложно найти ФСР этой системы уравнений:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = L(A_1, A_2). \tag{10.69}$$
Заметим, что
$$(A_1, A_2) = \operatorname{tr}(A_1^T \cdot A_2) = \\ = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0. \tag{10.70}$$
Отметим, что
$$X = X^{\parallel} + X^{\perp}, \quad X^{\parallel} \in U, \quad X^{\perp} \perp U. \tag{10.71}$$
Поэтому
$$X^{\parallel} = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad A_1 \perp A_2. \tag{10.72}$$
Из равенства (10.72) сразу же находим
$$\lambda = \frac{(X^{\parallel}, A_1)}{(A_1, A_1)} = \frac{(X, A_1)}{(A_1, A_1)}, \quad \mu = \frac{(X^{\parallel}, A_2)}{(A_2, A_2)} = \frac{(X, A_2)}{(A_2, A_2)}. \tag{10.73}$$
Следовательно,
$$X^{\parallel} = \frac{(X, A_1)}{(A_1, A_1)} A_1 + \frac{(X, A_2)}{(A_2, A_2)} A_2, \tag{10.74}$$
причем
$$(A_1, A_1) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2, \quad (10.75)$$

$$(X, A_1) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \\ = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\right] = -2, \quad (10.76)$$

$$(A_2, A_2) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2, \quad (10.77)$$

$$(X, A_2) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right] = 2. \quad (10.78)$$

Поэтому из (10.74) с учетом (10.75)–(10.78) имеем

$$X^{\parallel} = -A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.79)$$

$$X^{\perp} = X - X^{\parallel} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (10.80)$$

10.51. Пример. Экзаменационная задача. Пусть f — линейная форма в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, $\dim \mathcal{L} \geqslant 2$. Рассмотрим выражение

$$A(x, y) = \langle f, x\rangle\langle f, y\rangle \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}. \quad (10.81)$$

Является ли $A(x, y)$ билинейной формой? Если является, может ли эта билинейная форма задавать скалярное произведение в $\mathcal{L}$?

Решение.

Шаг 1. В силу свойств линейности линейной формы (ковектора) приходим к выводу о том, что форма (10.81) является билинейной.

Шаг 2. Но скалярное произведение билинейная форма (10.81) не задает. Вот почему. Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$Q(x) = A(x, x) = (\langle f, x\rangle)^2 \geqslant 0.$$

Однако, равенство $Q(x) = 0$ может быть выполнено не только при $x = \theta$, а вообще для любого $x \in \mathcal{L}$ такого, что $\langle f, x\rangle = 0$.

10.52. Пример. Вычислительная задача. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы

$$x_1(t) = 1 + t^2, \quad x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2, \quad (10.82)$$

$$x_3(t) = 2 + t + t^2, \quad x_4(t) = 4 + t + 3t^2. \tag{10.83}$$

Используя метод Гаусса, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространство $P_2(\mathbb{R})$.

Решение. Базис в $P_2(\mathbb{R})$ образуют следующие элементы:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = t^2. \tag{10.84}$$

Справедливы равенства для элементов (10.82), (10.83)

$$x_1(t) = \mathbf{E} \cdot X_1, \ x_2(t) = \mathbf{E} \cdot X_2, \ x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3, \ x_4(t) = \mathbf{E} \cdot X_4, \tag{10.85}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{10.86}$$

Составим матрицу

$$A = \left\| \begin{matrix} X_1^T \\ X_2^T \\ X_3^T \\ X_4^T \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{10.87}$$

Из второй строчки вычтем первую, умноженную на 3; из третьей строчки вычтем первую; из четвертой строчки вычтем первую, умноженную на три и получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного минора можно выбрать минор, расположенный на пересечении первой и третьей строчках, и первого и второго столбца. Поэтому базис в линейной оболочке $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образуют, например, элементы $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Теперь построим ортогональное дополнение

$$(L(X_1, X_2, X_3, X_4))^\perp = (L(X_1, X_3))^\perp$$

относительно стандартного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть

$$y(t) = \mathbf{E} \cdot Y, \quad Y^T = (\alpha, \beta, \gamma) \in (L(X_1, X_3))^\perp. \tag{10.88}$$

Поэтому для Y справедливы равенства

$$0 = (X_1, Y) = \alpha + \gamma = 0, \quad 0 = (X_3, Y) = 2\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = -\beta = -\gamma. \quad (10.89)$$

Значит, базис в $(L(X_1, X_3))^{\perp}$ образует, например, столбец

$$Y = (1, -1, -1)^T. \quad (10.90)$$

Поскольку

$$\mathbb{R}^3 = L(X_1, X_3) \oplus (L(X_1, X_3))^{\perp},$$

то столбцы X_1, X_3, Y линейно независимы. Тогда линейно независимы и элементы $x_1(t)$, $x_3(t)$, $y(t)$, причем элементы $x_1(t)$ и $x_3(t)$ образуют базис в $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а элемент $y(t)$ дополняет семейство $x_1(t)$, $x_3(t)$ до базиса в $P_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что $\dim L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

10.53. Пример. Вычислительная задача. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 = x^3y^3$) заданы элементы

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.91)$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама–Шмидта (без нормировки).

Решение. Запишем матрицу

$$A = \left\| \begin{matrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из первой строчки сумму второй и третьей. В результате получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3.$$

Следовательно, элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы.

Переходим к процессу ортогонализации Грама–Шмидта. Справедливы следующие равенства:

$$y_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10.92)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad (10.93)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \quad (10.94)$$

10.54. Пример. Вычислительная задача. В линейном пространстве $P_2[-1,1]$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1,1]$) скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t) y(t)\, dt.$$

В этом евклидовом пространстве заданы элементы

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = t^3. \quad (10.95)$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама–Шмидта (без нормировки).

Решение. Линейная независимость этого семейства была доказана ранее в лекциях. Приступим к процессу ортогонализации Грама–Шмидта. Справедливы равенства

$$y_1 = x_1 = 1, \quad (10.96)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 = t, \quad (x_2, y_1) = \int\limits_{-1}^{1} t\, dt = 0, \quad (10.97)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = t^2 - \frac{1}{3}, \quad (10.98)$$

поскольку

$$(x_3, y_1) = \frac{2}{3}, \quad (y_1, y_1) = 2, \quad (x_3, y_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^3\, dt = 0.$$

10.55. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в этом базисе

$$x_1 = E \cdot X_1, \quad x_2 = E \cdot X_2, \quad x = E \cdot X, \tag{10.99}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10.100}$$

Найти проекцию элемента x на $L(x_1, x_2)$ и перпендикуляр элемента x к $L(x_1, x_2)$.

Решение. Поскольку базис E в евклидовом пространстве ортонормированный, то можно все вычисления провести в координатном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ относительно стандартного скалярного произведения. Справедливы следующие равенства:

$$X = X_\parallel + X_\perp, \tag{10.101}$$

$$X_\parallel = \alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \tag{10.102}$$

$$X_\perp = X - X_\parallel = \begin{pmatrix} 1 - \alpha - \beta \\ -\beta \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \tag{10.103}$$

причем

$$(X_\perp, X_1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 1, \tag{10.104}$$

$$(X_\perp, X_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 1. \tag{10.105}$$

Из (10.104) и (10.105) получаем

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}.$$

Из (10.102) и (10.103) получаем, что

$$X_\parallel = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad X_\perp = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

10.56. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Линейное подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q.

Решение. Итак, согласно условию задачи (в силу ортонормированности рассматриваемого базиса) имеем

$$Q = \{x \in \mathcal{E} : (x, a) = 0\}, \quad a = e_1 - 2e_2 + 3e_3. \tag{10.106}$$

Значит, Q — плоскость, проходящая через нулевой элемент евклидова пространства $\mathcal{E}$. Справедливо разложение

$$\mathcal{E} = Q \oplus Q^\perp, \tag{10.107}$$

т.е. для любого $x \in \mathcal{E}$ найдутся единственные $y \in Q$ и $z \in Q^\perp$, что справедливо равенство

$$x = y + z, \quad y \in Q, \quad z \perp Q. \tag{10.108}$$

Это означает, что $Q^\perp$ — прямая, проходящая через нулевой вектор евклидова пространства $\mathcal{E}$ и перпендикулярная плоскости Q. Следовательно,

$$Q^\perp = \{x = at, \quad t \in \mathbb{R}\}. \tag{10.109}$$

Базис в $Q^\perp$ — это, например, вектор a.

10.57. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица билинейной формы B_λ в базисе $E = (e_1, e_2)$:

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}. \tag{10.110}$$

При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ рассматриваемую билинейную форму $B(x, y)$ можно принять за скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$? При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ рассматриваемую билинейную форму $B(x, y)$ можно принять за псевдоскалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$?

Решение. Шаг 1. Симметричность. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$. Тогда имеем

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2, \quad y = y^1 e_1 + y^2 e_2, \tag{10.111}$$

$$B(x, y) = (x^1, x^2) \cdot B_\lambda \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \\ = \lambda x^1 y^1 - 2\lambda x^1 y^2 - 2\lambda x^2 y^1 + 4x^2 y^2. \tag{10.112}$$

Из равенства (10.112) видно, что $B(x, y) = B(y, x)$.

Шаг 2. Невырожденность. Рассмотрим теперь квадратичную форму $Q(x) = B(x,x)$ и методом Лагранжа приведем ее к каноническому виду. Справедливы равенства

$$Q(x) = B(x,x) = \lambda(x^1)^2 - 4\lambda x^1 x^2 + 4(x^2)^2 = \\ = \lambda(x^1 - 2x^2)^2 + 4(1-\lambda)(x^2)^2. \quad (10.113)$$

Из явного вида (10.113) и в силу инвариантности положительного и отрицательного индексов инерции квадратичных форм приходим к выводу о том, что квадратичная форма $Q(x)$ вырожденная при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$.

Шаг 3. Скалярное и псевдоскалярное произведения. Из равенства (10.113) получаем, что при $\lambda \in (0,1)$ рассматриваемая билинейная форма $B(x,y)$ является скалярным произведением, а при $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ билинейная форма $B(x,y)$ является псевдоскалярным произведением.

10.58. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом e_1, e_2. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица квадратичной формы Q_λ в базисе $E = (e_1, e_2)$:

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}. \quad (10.114)$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ исследовать квадратичную форму Q на знакоопределенность и записать ее канонический вид.

Решение. С учетом (10.113) канонический вид квадратичной формы $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = \lambda(y^1)^2 + 4(1-\lambda)(y^2)^2, \quad (10.115)$$

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2, \quad \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (10.116)$$

Из (10.115) приходим к выводу о том, что при $\lambda \in (0,1)$ квадратичная форма $Q(x)$ является положительно определенной; при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$ квадратичная форма $Q(x)$ вырожденная; при $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1 + \infty)$ не является знакоопределенной.

10.59. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе E :

$$Q(x) = x^1 x^2 + x^1 x^3 + x^2 x^3. \quad (10.117)$$

Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе E. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе

$G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$; найти матрицу перехода от базиса E к базису G и наоборот.

Решение. Полярная билинейная форма $B(x, y)$ к квадратичной форме $Q(x) = B(x, x)$ имеет, очевидно, следующий вид:

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(x^1y^2 + x^2y^1) + \frac{1}{2}(x^1y^3 + x^3y^1) + \frac{1}{2}(x^2y^3 + x^3y^2) = \\ = (x^1, x^2, x^3, x^4)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}. \quad (10.118)$$

Поскольку матрица квадратичной формы и матрица соответствующей полярной билинейной формы совпадают, то

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.119)$$

В выражении (10.117) сделаем замену переменных

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.120)$$

При этом новый базис $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ связан со старым базисом $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ выражением

$$F = E \cdot C_1. \quad (10.121)$$

После преобразования (10.120) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^1 - y^2)y^3 + (y^1 + y^2)y^3 = \\ = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 2y^1y^3 = \\ = ((y^1)^2 + 2y^1y^3 + (y^3)^2) - (y^2)^2 - (y^3)^2 = \\ = (y^1 + y^3)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 = (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2, \quad (10.122)$$

где

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.123}$$

При этом канонический базис $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ связан с промежуточным базисом $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ соотношением

$$F = G \cdot C_2. \tag{10.124}$$

Из (10.121) и (10.124) получаем равенство

$$G = E \cdot C_3, \quad C_3 = C_1 \cdot C_2^{-1}. \tag{10.125}$$

Методом Гаусса вычисления обратной матрицы находим, что

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.126}$$

Поэтому из (10.126) получаем, что

$$C_3 = C_1 \cdot C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10.127}$$

Итак, имеем

$$g_1 = e_1 + e_2, \quad g_2 = -e_1 + e_2, \quad g_3 = -e_1 - e_2 + e_3, \quad g_4 = e_4.$$

В базисе $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ матрица Q_g квадратичной формы Q имеет следующий вид:

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 11

Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

1. Сопряженный оператор

11.1. Определение. Пусть A — линейный оператор из $L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($L(\mathcal{U};\mathcal{U})$). Оператор A^* называется сопряженным к оператору A, если для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{11.1}$$

11.2. Теорема. *Для любого* $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($L(\mathcal{U};\mathcal{U})$) *существует единственный сопряженный оператор* $A^* \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($L(\mathcal{U};\mathcal{U})$).

Доказательство. Рассмотрим случай $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$, поскольку из него вытекает и случай $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$.

Шаг 1. Пусть $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$. Пусть $x, y \in \mathcal{U}$. Рассмотрим следующую форму при фиксированном $y \in \mathcal{U}$:

$$l(x) := (Ax, y). \tag{11.2}$$

Из линейности оператора $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ и линейности скалярного произведения по первому аргументу получаем, что форма (11.2) линейная. Значит, для каждого $y \in \mathcal{U}$ найдется такой ковектор $l = l(y) \in \mathcal{U}^*$, что

$$\langle l, x\rangle = (Ax, y). \tag{11.3}$$

Нетрудно доказать, что $l = l(y) : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ — однозначное отображение. В силу теоремы 10.34 Рисса–Фреше для каждого $l \in \mathcal{U}^*$ существует единственное $z \in \mathcal{U}$ такое, что

$$(x, z) = \langle l, x\rangle. \tag{11.4}$$

Следовательно, в силу равенств (11.3) и (11.4) для любого $y \in \mathcal{U}$ существует единственное $z = z(y) \in \mathcal{U}$, что справедливо равенство

$$(Ax, y) = (x, z) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{U}. \tag{11.5}$$

Шаг 2. Пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ — строчка, составленная из векторов произвольного базиса в $\mathcal{U}$, и справедливы следующие разложения по базису:

$$x = \mathbf{E}\cdot X_e, \quad y = \mathbf{E}\cdot Y_e, \quad z = \mathbf{E}\cdot Z_e, \quad A\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot A_e, \tag{11.6}$$

где $X_e, Y_e, Z_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, $A_e \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Из (11.5) и (11.6) получаем равенство

$$X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Z_e} = (A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot A_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} \qquad (11.7)$$

для любых $X_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, где G_e — матрица Грама базиса $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$. Поэтому из (11.7) получаем равенство

$$\overline{Z_e} = B_e \cdot \overline{Y_e} \Leftrightarrow Z_e = \overline{B_e} \cdot Y_e, \quad B_e = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e. \qquad (11.8)$$

Введем следующее отображение:

$$A^*(y) := y^k \cdot A^*(\mathbf{e}_k), \quad (A^*(\mathbf{e}_1), \cdots, A^*(\mathbf{e}_n)) = \mathbf{E} \cdot \overline{B_e}, \qquad (11.9)$$

$$y = y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

В частности, из (11.9) имеем

$$A^*(\mathbf{e}_k) = \{\overline{B_e}\}_k^j \cdot \mathbf{e}_k = \overline{b_k^j} \cdot \mathbf{e}_j, \qquad (11.10)$$

$$A^*(y) = y^k \cdot A^*(\mathbf{e}_k) = y^k \overline{b_k^j} \cdot \mathbf{e}_j = y^k \{\overline{B_e}\}_j^k \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot \overline{B_e} \cdot Y_e. \qquad (11.11)$$

Теперь нам нужно доказать корректность определения (11.9) оператора A^*, а именно нам нужно доказать, что так определенный оператор не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{U}$.

□ Действительно, пусть $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \cdots, \mathbf{e}_{n'})$ — строчка, составленная из векторов нового базиса в $\mathcal{U}$, причем

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot R. \qquad (11.12)$$

Тогда имеем

$$Y_{e'} = R^{-1} \cdot Y_e, \quad G_{e'} = R^T \cdot G_e \cdot \overline{R}, \quad A_{e'} = R^{-1} \cdot A_e \cdot R, \qquad (11.13)$$

причем для квадратных матриц из $\mathbb{C}^{n\times n}$ имеем

$$(R^T)^{-1} = (R^{-1})^T \quad \text{при} \quad \det R \neq 0. \qquad (11.14)$$

Из (11.13) получаем

$$G_{e'}^{-1} = \overline{R}^{-1} \cdot G_e^{-1} \cdot (R^T)^{-1}, \quad \overline{G_{e'}}^{-1} = R^{-1} \cdot \overline{G_e}^{-1} \cdot (\overline{R}^T)^{-1}, \qquad (11.15)$$

$$\overline{A_{e'}}^T = \overline{R}^T \cdot \overline{A_e}^T \cdot (\overline{R}^{-1})^T. \qquad (11.16)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\overline{B'_e} = \overline{G'_e}^{-1} \cdot \overline{A_{e'}}^T \cdot \overline{G'_e} = \\ = R^{-1} \cdot \overline{G_e}^{-1} \cdot (\overline{R}^T)^{-1} \cdot \overline{R}^T \cdot \overline{A_e}^T \cdot (\overline{R}^{-1})^T \cdot \overline{R}^T \cdot \overline{G_e} \cdot R = \\ = R^{-1} \cdot \overline{G_e}^{-1} \cdot \overline{A_e}^T \cdot \overline{G_e} \cdot R. \qquad (11.17)\end{aligned}$$

Из (11.17) и (11.13) получаем

$$A^*(y) = \mathbf{E}' \cdot \overline{B_{e'}} \cdot Y_{e'} = \mathbf{E} \cdot \overline{B_e} \cdot Y_e = A^*(y). \quad \boxtimes \qquad (11.18)$$

Заметим, что отображение (11.9) является линейным.

☐ Действительно, это вытекает из того, что если $\{\mathbf{e}^1, \cdots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{U}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{U}$, то справедливы равенства

$$\langle \mathbf{e}^k, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle = \alpha^1 \langle \mathbf{e}^k, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle \mathbf{e}^k, x_2 \rangle, \tag{11.19}$$

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = (\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^k \cdot \mathbf{e}_k = \langle \mathbf{e}^k, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle \cdot \mathbf{e}_k, \tag{11.20}$$

$$x_1 = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k = \langle \mathbf{e}^k, x_1 \rangle \cdot \mathbf{e}_k, \quad x_2 = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k = \langle \mathbf{e}^k, x_2 \rangle \cdot \mathbf{e}_k. \tag{11.21}$$

Из (11.19)–(11.21) вытекает искомое равенство

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^k = \alpha^1 x_1^k + \alpha^2 x_2^k. \tag{11.22}$$

Из (11.9) и (11.22) вытекает $A^* \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$. ⊠

Из (11.8) с учетом (11.6) и (11.11) вытекает цепочка равенств

$$\mathbf{E} \cdot Z_e = \mathbf{E} \cdot \overline{B_e} \cdot Y_e \Leftrightarrow z = A^* y.$$

Тогда отсюда и из (11.5) получаем равенство

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U},$$

где оператор A^* определен равенством (11.9) и принадлежит $L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$. ☐

11.3. Короткое доказательство теоремы. Предложим более простое конструктивное доказательство. Пусть $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E}) (A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U}))$ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда для любого $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_k) A\mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (Ax, y) = \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_k)(A\mathbf{e}_k, y). \tag{11.23}$$

Рассмотрим линейный оператор

$$By = \sum_{k=1}^{n} (y, A\mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k \Rightarrow (x, By) = \sum_{k=1}^{n} \overline{(y, A\mathbf{e}_k)} (x, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (A\mathbf{e}_k, y)(x, \mathbf{e}_k) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U}). \tag{11.24}$$

Значит, $A^* = B$.

11.4. Теорема. *Сопряженный оператор A^* обладает следующим свойствами*:

1) A^* — *линейный оператор;*
2) $(A+B)^* = A^* + B^*$*;*
3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$*;*
4) $(AB)^* = B^* A^*$*;*
5) $(A^*)^* = A$.

Доказательство. Шаг 1. Докажем, что для любых $y, z \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ имеют место следующие равенства:

$$A^*(y+z) = A^*y + A^*z, \quad A^*(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot A^*y. \tag{11.25}$$

С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем

$$(Ax, y+z) = (x, A^*(y+z)). \tag{11.26}$$

С другой стороны, имеем

$$(Ax, y+z) = (Ax, y) + (Ax, z) = (x, A^*y) + (x, A^*z). \tag{11.27}$$

Из (11.26) и (11.27) вытекает следующее равенство:

$$\begin{gathered}(x, A^*(y+z)) = (x, A^*y) + (x, A^*z) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x, A^*(y+z) - A^*y - A^*z) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A^*(y+z) = A^*y + A^*z. \end{gathered} \tag{11.28}$$

Первое равенство из (11.25) доказано. Докажем второе равенство. С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$

$$(Ax, \alpha \cdot y) = (x, A^*(\alpha \cdot y)). \tag{11.29}$$

С другой стороны, имеем

$$(Ax, \alpha \cdot y) = \overline{\alpha}(Ax, y) = \overline{\alpha}(x, A^*y) = (x, \alpha \cdot A^*y). \tag{11.30}$$

Из равенств (11.29) и (11.30) получаем равенство

$$(x, A^*(\alpha \cdot y)) = (x, \alpha \cdot A^*y) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}). \tag{11.31}$$

Следовательно,

$$A^*(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot A^*y.$$

Второе равенство из (11.25) доказано.

Шаг 2. Докажем, что $(A+B)^* = A^* + B^*$. Действительно, с одной стороны, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедливо равенство

$$((A+B)x, y) = (x, (A+B)^*y). \tag{11.32}$$

С другой стороны, имеем

$$((A+B)x, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^*y) + (x, B^*y). \tag{11.33}$$

Из равенств (11.32) и (11.33) получаем

$$\begin{gathered}(x, (A+B)^*y) = (x, A^*y) + (x, B^*y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x, (A+B)^*y - A^*y - B^*y) = 0 \Leftrightarrow (A+B)^*y - A^*y - B^*y = \theta \Leftrightarrow\end{gathered}$$

$$\Leftrightarrow (A+B)^* = A^* + B^*. \quad (11.34)$$

Шаг 3. Докажем, что $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо следующее равенство:

$$((\alpha A)x, y) = (x, (\alpha A)^* y). \quad (11.35)$$

С другой стороны, имеем

$$((\alpha A)x, y) = \alpha(Ax, y) = \alpha(x, A^* y) = (x, \overline{\alpha} \cdot A^* y). \quad (11.36)$$

Из сравнения равенств (11.35) и (11.36) получим равенство

$$(x, (\alpha A)^* y) = (x, (\overline{\alpha} A^*) y) \Leftrightarrow (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*. \quad (11.37)$$

Шаг 4. Докажем равенство $(AB)^* = B^* A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо равенство

$$((AB)x, y) = (x, (AB)^* y). \quad (11.38)$$

С другой стороны, имеем

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y). \quad (11.39)$$

Из сравнения (11.38) с (11.39) получим искомое равенство.

Шаг 5. Докажем равенство $(A^*)^* = A$. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} = \overline{(y, (A^*)^* x)} = ((A^*)^* x, y). \quad (11.40)$$

Отсюда приходим к искомому равенству. □

2. Примеры сопряженных операторов

11.5. Пример. Сопряженные операторы к единичному и нулевому совпадают с ними. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ имеем

$$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy), \quad (Ox, y) = 0 = (\theta, y) = 0 = (x, \theta) = (x, Oy).$$

11.6. Пример. Сопряженным к оператору $Ax = [a, x]$ в трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов, где a — фиксированный вектор, является оператор $A^* = -A$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = ([a, x], y) = (y, [a, x]) = (y, a, x) =$$
$$= (x, y, a) = (x, [y, a]) = (x, -[a, y]) = (x, -Ay)$$

для всех x, y.

3. Матрица сопряженного оператора

11.7. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — произвольный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ (в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$), причем $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ ($A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$) и A_e — матрица этого оператора в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, G_e — матрица Грама базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Наша задача найти матрицу A_e^* сопряженного оператора A^* в том же базисе.

Пусть

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \tag{11.41}$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}(\mathbb{R}^{n\times 1}).$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \tag{11.42}$$

$$A^* y = A^*(\mathbf{E} \cdot Y_e) = A^*(y^k \cdot \mathbf{e}_k) = y^k \cdot A^*(\mathbf{e}_k) = \\ = (A^* \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e. \tag{11.43}$$

Напомним, что скалярное произведение элементов x, y выражается через координаты этих элементов следующим образом:

$$(x, y) = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e}, \tag{11.44}$$

где G_e — матрица Грама в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. С учетом (11.42)–(11.43) справедливы следующие равенства:

$$Ax = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \quad A^* y = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e.$$

Поэтому из определяющего соотношение для сопряженного оператора

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U} (\in \mathcal{E}) \tag{11.45}$$

вытекает следующее равенство:

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{A_e^* \cdot Y_e} \tag{11.46}$$

или эквивалентно

$$X_e^T \cdot A_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{A_e^*} \cdot \overline{Y_e}, \tag{11.47}$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ($\in \mathbb{R}^{n\times 1}$). Поэтому из (11.47) вытекает цепочка равенств

$$X_e^T \cdot \left[A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e^*}\right] \cdot \overline{Y_e} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e^*} = O \Leftrightarrow A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot \overline{A_e^*}. \tag{11.48}$$

Теперь из (11.48), пользуясь тем, что $\det G_e \neq 0$, получим выражение для матрицы A_e^* сопряженного оператора A^*:

$$\overline{A_e^*} = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e \Leftrightarrow \boxed{A_e^* = \overline{G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e}.} \tag{11.49}$$

Отдельно отметим, что в случае евклидова пространства выражение (11.49) примет следующий вид:

$$\boxed{A_e^* = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e.} \tag{11.50}$$

В случае ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица Грама является единичной и поэтому формулы (11.49) и (11.50) примут следующий вид:

$$\boxed{A_e^* = \overline{A_e^T} \quad \text{для унитарного пространства}}, \tag{11.51}$$

$$\boxed{A_e^* = A_e^T \quad \text{для евклидова пространства}}. \tag{11.52}$$

11.8. Определение. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющая условию $A = \overline{A^T}$, называется эрмитовой.

11.9. Лемма. Матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ и $G(x, y)$ — полуторалинейная форма, задающая скалярное произведение в этом унитарном пространстве. Поэтому справедливы равенства

$$g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \overline{G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)} = \overline{g_{ji}},$$

из которых вытекает искомое равенство $G_e = \overline{G_e^T}$. □

11.10. Лемма. Всякая полуторалинейная форма $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ определяет единственным образом некоторый линейный оператор $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ по формуле

$$\mathcal{A}(x, y) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \tag{11.53}$$

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{U}$. Построим оператор A, чья матрица в базисе $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ задается формулой

$$a_j^k = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Справедлива вспомогательная цепочка равенств:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ax = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^k x^j \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$(x, \mathbf{e}_j) = (x^k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k \delta_{kj} = x^j,$$

Следовательно, приходим к следующему равенству:

$$Ax = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \tag{11.54}$$

Прежде всего заметим, что в силу линейности скалярного произведения $(x, \mathbf{e}_j)$ по первому аргументу оператор A тоже линейный. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) x^j \overline{y^k} = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k x^j \overline{y^k} =$$
$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k, y) = \left(\sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k, y \right) = (Ax, y). \tag{11.55}$$

Существование оператора доказано.

Единственность. Пусть $\hat{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ такой линейный оператор, что

$$(\hat{A}x, y) = \mathcal{A}(x,y) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

Тогда имеем

$$(\hat{A}x - Ax, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{U} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{A}x = Ax \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A} = A.$$

Единственность доказана. $\square$

4. Самосопряженный оператор

11.11. Определение. Оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$), называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным

$$A = A^*, \tag{11.56}$$

или, иными словами, если для любых элементов $x, y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ выполняется соотношение

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Самосопряженные операторы в унитарном пространстве называются эрмитовыми, а самосопряженные операторы в евклидовом пространстве — симметричными.

11.12. Теорема. *Для того чтобы оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ удовлетворяла соотношению*

$$\boxed{A_e = \overline{G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e} \quad \textit{для унитарного пространства},} \tag{11.57}$$

$$\boxed{A_e = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e \quad \textit{для евклидова пространства}.} \tag{11.58}$$

Доказательство. Доказательство *необходимости* основано на том что $A^* = A$ и на выводе формул (11.49) и (11.50), а доказательство *достаточности* основано противоположном ходе от формул (11.57) и (11.57) к формуле (11.45), в которой будет $A^* = A$.

☐ Действительно, справедливы следующие равенства в случае унитарного пространства $\mathcal{U}$. Пусть

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}, \tag{11.59}$$

т.е. $A^* = A$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — произвольный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$. Тогда для любых $x, y \in \mathcal{U}$ имеем

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n \times 1}. \tag{11.60}$$

Кроме того, имеем

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \tag{11.61}$$

$$Ay = A(\mathbf{E} \cdot Y_e) = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot Y_e. \tag{11.62}$$

С учетом равенств (11.61), (11.62) и (11.59) мы приходим к следующему равенству:

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot (\overline{A_e \cdot Y_e}), \tag{11.63}$$

из которого получаем

$$X_e^T \cdot (A_e^T \cdot G_e) \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot (G_e \cdot \overline{A_e}) \cdot \overline{Y_e} \quad \text{для всех} \quad X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}. \tag{11.64}$$

Следовательно,

$$A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot \overline{A_e} \Leftrightarrow \overline{A_e} = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e \Leftrightarrow A_e = \overline{G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e}. \tag{11.65}$$

Таким образом, необходимость доказана. Достаточность следует из рассмотрения обратного хода от формулы (11.65) к формуле (11.59). ⊠

Случай евклидова пространства $\mathcal{E}$ является более простым и рассматривается как и случай унитарного пространства $\mathcal{U}$. □

11.13. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ был эрмитовым, необходимо и достаточно,чтобы в любом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица $G_e \cdot \overline{A_e}$ была эрмитовой.

Доказательство. Преобразуем равенство (11.57) с учетом результата $G_e = \overline{G_e^T}$ леммы 11.9. Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$A_e = \overline{G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e} \Leftrightarrow \overline{A_e} = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e \Leftrightarrow G_e \cdot \overline{A_e} = A_e^T \cdot G_e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G_e \cdot \overline{A_e} = A_e^T \cdot \overline{G_e^T} \Leftrightarrow G_e \cdot \overline{A_e} = \overline{\overline{A_e^T} \cdot G_e^T} = \overline{(G_e \cdot \overline{A_e})^T}. \tag{11.66}$$

Осталось воспользоваться результатом теоремы 11.12. Тогда прямым ходом цепочки равенств (11.66) докажем необходимость, а обратным ходом цепочки равенств (11.66), начиная с последнего равенства, докажем достаточность. □

11.14. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G_e \cdot A_e$ в любом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ была симметричной:

$$(G_e \cdot A_e)^T = G_e \cdot A_e. \tag{11.67}$$

11.15. Ортонормированный базис. Если базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ортонормированный, то приходим к следующим двум утверждениям:

11.16. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ был эрмитовым, необходимо и достаточно,чтобы в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица A_e была эрмитовой: $A_e = \overline{A_e^T}$.

Доказательство. Шаг 1. Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис. Тогда из равенства $A_e = \overline{A_e^T}$ вытекает следующая цепочка равенств:

$$a_k^j = \{A_e\}_k^j = \{\overline{A_e^T}\}_k^j = \{\overline{A_e}\}_j^k = \overline{a}_j^k.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \cdot \mathbf{e}_l, \quad (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a_j^k, \quad (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \overline{a}_k^j. \tag{11.68}$$

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_j^l \cdot \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k\right) = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \delta_{lk} = a_j^k,$$

$$(\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \left(\mathbf{e}_j, \sum_{l=1}^{n} a_k^l \cdot \mathbf{e}_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \overline{a_k^l}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) = \overline{a}_k^j. \quad \boxtimes$$

С учетом (11.68) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k a_j^k = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k \overline{a}_k^j =$$
$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть $A^* = A$. Тогда имеем

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \tag{11.69}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$. Справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad Ax = x^j \cdot A\mathbf{e}_j =$$
$$= (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \quad Ay = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot Y_e. \tag{11.70}$$

Из равенства (11.69) с учетом равенств из (11.70) получим равенство

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{(A_e \cdot Y_e)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_e^T \cdot \left[A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e}\right] \cdot \overline{Y_e} = 0 \tag{11.71}$$

для любых столбцов $X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Заметим теперь, что $G_e = I$ и поэтому из равенства (11.71) вытекает равенство

$$A_e^T = \overline{A_e} \Leftrightarrow A_e = \overline{A_e^T},$$

т.е. матрица $A_e \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является эрмитовой. ☐

11.17. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица A_e в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ была симметричной: $A_e = A_e^T$.

Доказательство. Доказательство повторяет в точности доказательство леммы 11.16. □

11.18. Лемма. Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ в некотором ортонормированном базисе является эрмитовой, то она эрмитова в любом другом ортонормированном базисе.

Доказательство. Пусть два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ связаны матрицей $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$(\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot C.$$

Как известно, из предыдущей лекции

$$C^T\cdot\overline{C} = I \Leftrightarrow C = (\overline{C}^T)^{-1},\quad \overline{C}^T = C^{-1},\quad (\overline{C}^{-1})^T = C. \tag{11.72}$$

Матрицы $A_{e'}$ и A_e связаны известным равенством

$$A_{e'} = C^{-1}\cdot A_e\cdot C, \tag{11.73}$$

причем $A_e = \overline{A_e}^T$. Из равенства (11.73) с учетом соотношений (11.72) вытекает цепочка равенств

$$\overline{A_{e'}} = \overline{C}^{-1}\cdot\overline{A_e}\cdot\overline{C} \Leftrightarrow \overline{A_{e'}}^T = \overline{C}^T\cdot\overline{A_e}^T\cdot(\overline{C}^{-1})^T =$$
$$= \overline{C}^T\cdot\overline{A_e}^T\cdot C = C^{-1}\cdot\overline{A_e}^T\cdot C = C^{-1}\cdot A_e\cdot C = A_{e'}.$$

Отсюда получаем искомое равенство $\overline{A_{e'}}^T = A_{e'}$. □

11.19. Лемма. Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ в некотором ортонормированном базисе является симметричной, то она симметрична в любом другом ортонормированном базисе.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения леммы 11.18. □

11.20. Лемма. Всякий ортогональный проектор P на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$) является самосопряженным.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m\}$, где $m = \dim\mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P}$. Тогда, как нами было доказано ранее, оператор P ортогонального проектирования на $\mathcal{P}$ имеет следующий явный вид:

$$Px = \sum_{j=1}^{m}(x,\mathbf{e}_j)\cdot\mathbf{e}_j. \tag{11.74}$$

Тогда для любых $x, y \in \mathcal{E}$ ($\in \mathcal{U}$) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Px, y) = \left(\sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)\cdot \mathbf{e}_j, y\right) = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j, y) =$$

$$= \left(x, \sum_{j=1}^{m}\overline{(\mathbf{e}_j, y)}\cdot \mathbf{e}_j\right) = \left(x, \sum_{j=1}^{m}(y, \mathbf{e}_j)\cdot \mathbf{e}_j\right) = (x, Py). \quad (11.75)$$

□

11.21. Определение. Оператор P называется идемпотентным, если $P^2 = P$.

11.22. Теорема. *Всякий линейный самосопряженный идемпотентный оператор P является ортогональным проектором на некоторое линейное подпространство.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Пусть $x \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такой $y \in \mathcal{E}$ ($\in \mathcal{U}$), что справедливо равенство

$$Py = x \Rightarrow x = P^2 y = Px,$$

где мы воспользовались тем, что $P^2 = P$. Итак, имеем

$$Px = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \quad (11.76)$$

Шаг 2. Пусть $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Тогда в силу самосопряженности линейного оператора P и равенства (11.76) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Py, x) = (y, Px) = (y, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \quad (11.77)$$

Значит, $Py \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp}$. Следовательно,

$$Py = \theta \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{P}^{\perp}. \quad (11.78)$$

Шаг 3. Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \operatorname{im} P = \dim \mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Дополним его до ортонормированного базиса во всем пространстве $\mathcal{E}$ ($\mathcal{U}$) Таким образом, $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис в $\mathcal{P}^{\perp}$ и справедливо разложение в прямую сумму

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} \quad \text{или} \quad \mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}.$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{E}$ ($\in \mathcal{U}$) справедливо разложение

$$x = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)\cdot \mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n}(x, \mathbf{e}_j)\cdot \mathbf{e}_j := x_{\mathcal{P}} + x_{\mathcal{P}^{\perp}}, \quad (11.79)$$

причем $x_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$, а $x_{\mathcal{P}^\perp} = x - x_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}^\perp$. Из (11.79) с учетом (11.76) и (11.78) получаем, что

$$Px = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n}(x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = x_{\mathcal{P}}. \tag{11.80}$$

Стало быть, P — ортогональный проектор на свой образ. $\square$

5. Теоремы Фредгольма в абстрактной форме

Пусть $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, где $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ или $\mathcal{L} = \mathcal{U}$. Наша задача выяснить необходимые и достаточные условия разрешимости следующего уравнения в $\mathcal{L}$:

$$Ax = y. \tag{11.81}$$

Эти результаты известны как теоремы *об альтернативах Фредгольма.* Для их доказательства нам нужны следующие вспомогательные результаты:

11.23. Лемма. Если $\mathcal{P}$ — линейное подпространство в $\mathcal{L}$, то

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp. \tag{11.82}$$

Кроме того, имеет место равенство множеств

$$\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}. \tag{11.83}$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что $\mathcal{P}^\perp$ — линейное подпространство.

$\square$ Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{P}^\perp$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$. Тогда имеем

$$(\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2, x) = \alpha^1(y_1, x) + \alpha^2(y_2, x) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{P}$, т.е. $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in \mathcal{P}^\perp$. $\boxtimes$

Шаг 2. Докажем теперь, что $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp = \mathcal{L}$. Приведем непосредственное доказательство этого факта. Итак, поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ — линейное подпространство, то можно выбрать базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$. Применим процесс ортогонализации Грамма–Шмидта так, как это изложено при доказательстве теоремы Грама–Шмидта. Тогда получим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ в $\mathcal{L}$, причем $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'})$. Введем обозначение

$$\mathcal{H} = L(\mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) \subset \mathcal{L}.$$

По построению $\mathcal{H} \perp \mathcal{P}$. Поэтому $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}^\perp$. Докажем, что на самом деле $\mathcal{H} = \mathcal{P}^\perp$.

$\square\square$ Действительно, пусть $\mathcal{H}$ строго вложено в $\mathcal{P}^{\perp}$. Тогда поскольку по построению

$$\mathcal{L} = L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}) \oplus L(\mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{H},$$

то существует вектор $x_0 \perp \mathcal{P}$, но $x_0 \notin \mathcal{H}$, т.е.

$$x_0 \perp \mathcal{P}, \quad x_0 \in \mathcal{P} \Rightarrow (x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \theta. \quad \boxtimes\boxtimes$$

Следовательно, $\mathcal{H} = \mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$.

Шаг 3. Поскольку по определению $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}^{\perp}$, то

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\perp\perp}. \tag{11.84}$$

Если вложение (11.84) строгое, то в силу (11.82) найдется $x_0 \in \mathcal{P}^{\perp\perp} \cap \mathcal{P}^{\perp}$, т.е.

$$(x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \theta.$$

Следовательно, $\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}$. $\square$

11.24. Лемма. Справедливо следующее равенство множеств:

$$\ker A^* = (\operatorname{im} A)^{\perp}. \tag{11.85}$$

Доказательство. Шаг 1. $\ker A^* \subset (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Пусть $y \in \ker A^*$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ имеют место равенства

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = 0, \quad Ax \in \operatorname{im} A \Rightarrow \\ \Rightarrow y \in (\operatorname{im} A)^{\perp} \Rightarrow \ker A^* \subset (\operatorname{im} A)^{\perp}. \tag{11.86}$$

Шаг 2. $(\operatorname{im} A)^{\perp} \subset \ker A^*$. Пусть $y \in (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие равенства:

$$0 = (Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow A^*y = \theta \Rightarrow y \in \ker A^*. \tag{11.87}$$

$\square$

11.25. Следствие. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\ker A = (\operatorname{im} A^*)^{\perp}. \tag{11.88}$$

Доказательство. Заметим, что всегда $A^{**} = A$. Поэтому в силу результата леммы 11.24 имеют место выражения

$$\ker A = \ker A^{**} = (\operatorname{im} A^*)^{\perp}.$$

$\square$

11.26. Следствие. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\operatorname{im} A = (\ker A^*)^{\perp}. \tag{11.89}$$

Доказательство. В силу (11.83) и (11.85) приходим к равенству (11.89). □

11.27. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$\dim\ker A^* + \dim\operatorname{im} A = \dim\ker A + \dim\operatorname{im} A^* = \dim\mathcal{L}. \tag{11.90}$$

Доказательство. В силу результата леммы 11.82 имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{im} A \oplus (\operatorname{im} A)^{\perp} = \mathcal{L}, \quad \operatorname{im} A^* \oplus (\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \mathcal{L}. \tag{11.91}$$

Поэтому в силу определения прямой суммы подпространств имеем

$$\dim\operatorname{im} A + \dim(\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim\mathcal{L}, \tag{11.92}$$

$$\dim\operatorname{im} A^* + \dim(\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \dim\mathcal{L}. \tag{11.93}$$

Теперь в силу результата леммы 11.24 и (11.92) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\dim\ker A^* = (\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim\mathcal{L} - \dim\operatorname{im} A \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim\ker A^* + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}. \tag{11.94}$$

Теперь в силу результата следствия 11.25 и равенства (11.93) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\dim\ker A = (\operatorname{im} A^*)^{\perp} = \dim\mathcal{L} - \dim\operatorname{im} A^* \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim\ker A + \dim\operatorname{im} A^* = \dim\mathcal{L}. \tag{11.95}$$

□

Теперь мы можем сформулировать и доказать *альтернативы Фредгольма.*

11.28. Теорема. Первая теорема Фредгольма. *Справедливо равенство*

$$\dim\ker A = \dim\ker A^*. \tag{11.96}$$

Доказательство. С одной стороны, ранее было доказано равенство

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}. \tag{11.97}$$

С другой стороны, в силу (11.90) имеет место равенство

$$\dim\ker A^* + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}. \tag{11.98}$$

Из сравнения (11.97) с (11.98) получаем (11.96). □

11.29. Теорема. Вторая теорема Фредгольма. *Для того чтобы уравнение* (11.81) *было однозначно разрешимо при любой правой части, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение $Ax = \theta$ имело только тривиальное решение $x = \theta$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (11.81) разрешимо для любого $y \in \mathcal{L}$. Тогда $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Поскольку

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L},$$

то $\dim \ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\theta\}$. Значит, уравнение $Ax = \theta$ имеет только тривиальное решение $x = \theta$.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = \theta$ имеет только тривиальное решение $x = \theta$, т. е. $\ker A = \{\theta\}$ и поэтому $\dim \ker A = 0$. Поскольку

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L},$$

то $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Значит, для всякого $y \in \mathcal{L}$ уравнение (11.81) имеет решение. Докажем, что это решение для каждого $y \in \mathcal{L}$ единственное.

□ Действительно, пусть для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ уравнение (11.81) имеет два решения

$$\begin{gathered} Ax_1 = Ax_2 = y_0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \Rightarrow x_1 - x_2 = \theta \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \boxtimes \end{gathered} \tag{11.99}$$

□

11.30. Теорема. Третья теорема Фредгольма. *Для того чтобы уравнение* (11.81) *было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы* $y \in (\ker A^*)^\perp$.

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (11.81) при заданном $y \in \mathcal{L}$ разрешимо, т.е. существует такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax \in \operatorname{im} A$. В силу результата (11.89) имеем $y \in \operatorname{im} A = (\ker A^*)^\perp$.

Шаг 2. Пусть $y \in (\ker A^*)^\perp$. В силу результата (11.89) имеем $y \in \operatorname{im} A$. Значит, найдется такой $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax$, т.е. уравнение (11.81) разрешимо.

□

6. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

11.31. Теорема. *Все характеристические числа самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Шаг 1. **Эрмитов оператор в унитарном пространстве.** Любое характеристическое число эрмитова оператора A

принадлежит полю $\mathbb{C}$, над которым рассматривается соответствующее унитарное пространство, так что является его собственным значением. Следовательно,

$$Ax_0 = \lambda \cdot x_0, \quad x_0 \neq \theta. \tag{11.100}$$

Умножим обе части равенства (11.100) на x_0 и получим равенство

$$(Ax_0, x_0) = (\lambda \cdot x_0, x_0) = \lambda(x_0, x_0),$$

из которого с учетом равенства $A^* = A$ получим цепочку равенств

$$\lambda(x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda \cdot x_0) = \overline{\lambda}(x_0, x_0),$$

а так как $(x_0, x_0) \neq 0$, то получим равенство $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. **Симметричный оператор в евклидовом пространстве** $\mathcal{E}$**.** Рассмотрим матрицу A_e данного симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ в каком-либо ортонормированном базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$; эта матрица симметрична, $A_e = A_e^T$. Рассмотрим оператор $\hat{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$, имеющий в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ этого унитарного пространства матрицу A_e :

$$\hat{A} \cdot \mathbf{F} = \left(\hat{A}\mathbf{f}_1, \ldots, \hat{A}\mathbf{f}_n\right) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot \hat{A}_f = \\ = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot A_e = \mathbf{F} \cdot A_e, \quad \overline{A_e} = A_e = A_e^T. \tag{11.101}$$

Докажем, что такой оператор $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ существует.

□□ Действительно, пусть $\mathcal{U}$ — произвольное унитарное пространство, причем $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{E}$. Фиксируем в этом унитарном пространстве некоторый ортонормированный базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, который существует в силу теоремы Грама–Шмидта. Искомый оператор определим следующим равенством в обозначениях Эйнштейна:

$$\hat{A}(x) := x^j a_j^k \cdot \mathbf{f}_k, \tag{11.102}$$

$$x = x^j \cdot \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n), \quad A_e = (a_j^k)_n^n, \quad n' = n \in \mathbb{N}.$$

Сделаем ряд наблюдений.

Наблюдение 1. Оператор $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, т.е. линейный. Действительно, прежде всего заметим, что для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ и произвольных $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^j = \left\langle \mathbf{f}^j, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \right\rangle = \\ = \alpha^1 \left\langle \mathbf{f}^j, x_1 \right\rangle + \alpha^2 \left\langle \mathbf{f}^j, x_2 \right\rangle = \alpha^1 x_1^j + \alpha^2 x_2^j, \tag{11.103}$$

где $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\} \subset \mathcal{U}^*$ — взаимный базис к $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\} \subset \mathcal{U}$. С учетом (11.103) и определения (11.102) приходим к равенству

$$\hat{A}(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot \hat{A}(x_1) + \alpha^2 \cdot \hat{A}(x_2),$$

т.е. оператор $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$.

Наблюдение 2. Матрица $\hat{A}_f$ в заданном ортонормированном базисе $\mathbf{F}$ совпадает с матрицей A_e. Действительно, заметим, что

$$\mathbf{f}_m = \delta_m^j \cdot \mathbf{f}_j, \tag{11.104}$$

$$\hat{A}(\mathbf{f}_m) = \delta_m^j a_j^k \cdot \mathbf{f}_k = a_m^k \cdot \mathbf{f}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Big(\hat{A}(\mathbf{f}_1), \ldots, \hat{A}(\mathbf{f}_n)\Big) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot A_e \Rightarrow \hat{A}_f = A_e. \tag{11.105}$$

Таким образом, приходим к выводу о существовании такого оператора $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$. ⊠⊠

В силу результата леммы 11.18 приходим к выводу о том, что оператор $\hat{A}$ эрмитов и поэтому все его характеристические числа вещественны. Осталось заметить, что характеристические многочлены операторов A и $\hat{A}$ совпадают. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$Ae = \lambda \cdot e \Rightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad e = \mathbf{E} \cdot X_e,$$
$$\hat{A}f = \lambda \cdot f \Rightarrow \hat{A}_f \cdot Y_f = \lambda Y_f, \quad f = \mathbf{F} \cdot Y_f.$$

При этом

$$\det(A_e - \lambda I) = 0, \quad \det(\hat{A}_f - \lambda I) = \det(A_e - \lambda I) = 0$$

Значит, совпадают их характеристические числа. Стало быть, в силу результата шага 1 вещественны. □

11.32. Следствие. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

11.33. Теорема. *Симметричный оператор в евклидовом пространстве имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Характеристический многочлен симметричного оператора A в n–мерном евклидовом пространстве является многочленом степени n и имеет, по основной теореме алгебры, хотя бы один корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Из предыдущей теоремы вытекает, что этот корень вещественен и, стало быть, является собственным значением оператора A. В таком случае оператор $A - \lambda_0 I$ имеет ненулевое ядро, которое представляет собой собственно подпространство $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{E}$, соответствующее собственному значению λ_0. □

11.34. Теорема. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения, x_1, x_2 — соответствующие собственные векторы самосопряженного оператора A. По условию, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем оба числа λ_1, λ_2 вещественны. Тогда имеем:

$$Ax_1 = \lambda_1 \cdot x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 \cdot x_2.$$

Умножим первое из этих равенств скалярно на x_2, а второе — на x_1 :

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 \cdot x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2), \tag{11.106}$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 \cdot x_2) = \overline{\lambda_2}(x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2), \tag{11.107}$$

причем

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2). \tag{11.108}$$

Из равенств (11.106)–(11.108) получаем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Отсюда, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем, что $(x_1, x_2) = 0$. □

11.35. Теорема. *Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^{\perp}$ любого инвариантного линейного подпространства $\mathcal{P}$ самосопряженного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ либо $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ также является инвариантным линейным подпространством, причем $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$, где $\mathcal{L}$ либо $\mathcal{E}$ либо $\mathcal{U}$.*

Доказательство.

Шаг 1. В силу результата леммы 11.23 получаем, что, во–первых, $\mathcal{P}^{\perp}$ — линейное подпространство, а во–вторых, имеет место равенство $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$, где либо $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ либо $\mathcal{L} = \mathcal{P}^{\perp}$.

Шаг 2. Докажем теперь, что $\mathcal{P}^{\perp}$ — инвариантное относительно A линейное подпространство. Действительно, пусть $\mathcal{P}$ — инвариантное линейное подпространство для линейного самосопряженного оператора A. Тогда для любых $x \in \mathcal{P}$ вытекает, что $Ax \in \mathcal{P}$. Предположим, что $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Докажем, что $Ay \in \mathcal{P}^{\perp}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = (Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P} \Rightarrow Ay \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

□

11.36. Теорема. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ $(\in L(\mathcal{U}; \mathcal{U}))$ был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A, соответствующих вещественным собственным значениям.*

Доказательство. Достаточность. Пусть в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица диагональна, причем на диагонали стоят вещественные числа — собственные значения данного оператора, и, стало быть, эта матрица симметрична и эрмитова. Но оператор, имеющий в ортонормированном базисе симметричную (эрмитову матрицу), является самосопряженным (см. леммы 11.16 и 11.17).

Необходимость. Выше было доказано, что у самосопряженного оператора A в n–мерном пространстве имеется по крайней мере один собственный вектор и, следовательно, одномерное собственное подпространство $\mathcal{P}$. Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^{\perp}$ этого собственного (инвариантного) подпространства, согласно теореме 11.35, само является инвариантным подпространством размерности $n-1$, поскольку выше в теореме 11.35 доказано, что $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$. Ограничение оператора A на инвариантное подпространство $\mathcal{P}^{\perp}$ представляет собой самосопряженный оператор в $\mathcal{P}^{\perp}$, поскольку в силу его инвариантности

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{P}^{\perp},$$

который обладает собственным вектором, лежащим в $\mathcal{P}^{\perp}$. Продолжая процесс, получим ортогональную систему из n собственных векторов оператора A. Нормируя их, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A. $\square$

7. Спектральное разложение самосопряженного оператора

11.37. Пусть $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(\in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ и является самосопряженным. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A(x) = A\left(x^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j. \tag{11.109}$$

Рассмотрим оператор P_j ортогональной проекции на линейное подпространство $\mathcal{P}_j := L(\mathbf{e}_j)$:

$$P_j(x) = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \tag{11.110}$$

где нет суммирования по j. Из равенств (11.109) и (11.110) вытекает следующая формула:

$$A(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\cdot P_j(x) \quad \text{для всех} \quad x\in\mathcal{E}(\in\mathcal{U}). \tag{11.111}$$

Следовательно,

$$\boxed{A=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j P_j.}$$

11.38. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\boxed{A^s=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^s P_j, \quad s\in\mathbb{N}.} \tag{11.112}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $P_j^2=P_j$ и $P_jP_k=O$ при $j\neq k$. Действительно, имеем

$$P_j^2x=P_j(x^j\cdot\mathbf{e}_j)=x^j\cdot P_j(\mathbf{e}_j)=x^j\cdot\mathbf{e}_j=P_jx \quad \text{для всех} \quad x\in\mathcal{E}(\in\mathcal{U}),$$

$$P_jP_k(x)=P_j(x^k\cdot\mathbf{e}_k)=x^k\cdot P_j(\mathbf{e}_k)=x^k0\cdot\mathbf{e}_j=\theta \quad \text{для всех} \quad x\in\mathcal{E}(\in\mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A^2=\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_j\lambda_kP_jP_k=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2P_j.$$

Далее по индукции доказываем утверждение этой леммы. □

11.39. Определение. Самосопряженный оператор $A\in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(\in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ называется неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны.

11.40. Определение. Определим не целую степень A^s, $s\in[0,+\infty)$ неотрицательного оператора A следующим образом:

$$\boxed{A^s\stackrel{def:}{=}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^sP_j, \quad s\in[0,+\infty).} \tag{11.113}$$

11.41. Лемма. Для линейного неотрицательного самосопряженного оператора A справедливы равенства

$$A^0 = I, \quad A^{s_1} A^{s_2} = A^{s_1+s_2} \quad \text{для всех} \quad s_1, s_2 \in [0, +\infty).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 11.38. $\square$

8. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием

11.42. Рассмотрим в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ квадратичную форму $Q(x)$, которая имеет следующий вид:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T \cdot A_e \cdot X_e, \quad X_e^T = (x^1, \ldots, x^n), \tag{11.114}$$

а $A_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица квадратичной формы в заданном базисе. Заметим, что $A_e^T = A_e$ и поэтому можно рассматривать матрицу A_e как матрицу некоторого симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$.

$\square$ Действительно, рассмотрим следующий оператор:

$$Ax := x^j a_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad A_e = (a_j^k)_n^n. \tag{11.115}$$

Можно проверить, что $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ и его матрица в ортонормированном базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ совпадает с матрицей A_e. $\boxtimes$

Но тогда существует ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица A_f оператора A имеет диагональный вид:

$$A_f = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}. \tag{11.116}$$

Пусть

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{F} \cdot Y_f, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \tag{11.117}$$

где $X_e^T = (x^1, \ldots, x^n)$, $Y_f^T = (y^1, \ldots, y^n)$,

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n).$$

Тогда имеем

$$X_e = C \cdot Y_f, \quad C^T = C^{-1}, \quad X_e, Y_f \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \tag{11.118}$$

$$A_f = C^{-1} \cdot A_e \cdot C = C^T \cdot A_e \cdot C. \tag{11.119}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T \cdot A_e \cdot X_e =$$
$$= Y_f^T \cdot C^T \cdot A_e \cdot C \cdot Y_f = Y_f^T \cdot A_f \cdot Y_f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2.$$

Действительно,

$$Y_f^T \cdot A_f \cdot Y_f = (y^1, \dots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =$$

$$= (y^1, \dots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y^1 \\ \vdots \\ \lambda_n y^n \end{pmatrix} = \lambda^1 (y^1)^2 + \dots + \lambda_n (y^n)^2.$$

11.43. Здесь мы существенно воспользовались тем, что матрица перехода C между двумя ортонормированными базисами $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ является ортогональной, т.е. $C^T = C^{-1}$. В противном случае при переходе от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{F}$

$$\boxed{C^T \cdot A_e \cdot C \neq C^{-1} \cdot A_e \cdot C \,!!!}$$

9. О паре квадратичных форм

11.44. Теорема. *Для любой пары квадратичных форм $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, одна из которых положительно определена, существует общий базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(x, x)$ — положительно определенная квадратичная форма и $\mathcal{B}(x, y)$ — билинейная форма, полярная к квадратичной форме $\mathcal{B}(x, x)$. Форма $\mathcal{B}(x, y)$ определяет скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$, относительно которого $\mathcal{L}$ является евклидовым пространством. Согласно результату пункта 11.42 существует такой ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, в котором квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид, причем

$$\mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \delta_{kj}$$

и поэтому

$$(x, x) = \mathcal{B}(x, x) = x^j x^k \mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2, \quad x = x^j \cdot \mathbf{f}_j = x^k \cdot \mathbf{f}_k.$$

причем

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^j)^2.$$

□

11.45. Один из способов нахождения общего базиса. Пусть $\mathcal{B}(x,x)$ — положительно определенная квадратичная форма и A_e и B_e — это матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{F}=\mathbf{E}\cdot C,\quad \mathbf{F}=(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n),\quad \mathbf{E}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \tag{11.120}$$

и при этом преобразование C таково, что

$$C^T\cdot A_e\cdot C=A_f=\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}, \tag{11.121}$$

$$C^T\cdot B_e\cdot C=B_f=I=\operatorname{diag}\{1,\ldots,1\}. \tag{11.122}$$

Тогда справедливы следующие цепочки равенства:

$$\begin{gathered}A_e=(C^T)^{-1}\cdot\Lambda\cdot C^{-1},\quad B_e=(C^T)^{-1}\cdot C^{-1}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow A_e=(C^T)^{-1}\cdot\Lambda\cdot C^{-1},\quad B_e^{-1}=C\cdot C^T\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow B_e^{-1}\cdot A_e=C\cdot C^T\cdot(C^T)^{-1}\cdot\Lambda\cdot C^{-1}=C\cdot\Lambda\cdot C^{-1}\Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow B_e^{-1}\cdot A_e\cdot C=C\cdot\Lambda.\end{gathered} \tag{11.123}$$

Рассмотрим отдельно равенство

$$D\cdot C=C\cdot\Lambda,\quad C=\|C_1,\ldots,C_n\|. \tag{11.124}$$

Тогда имеем

$$(D\cdot C)_j=D\cdot C_j,\quad (C\cdot\Lambda)_j=C\cdot\Lambda_j. \tag{11.125}$$

Заметим, что

$$C\cdot\Lambda_j=\|C_1,\ldots,C_{j-1},C_j,C_{j+1},\ldots,C_n\|\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_j\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_jC_j. \tag{11.126}$$

Таким образом, из (11.124)–(11.125) получаем, что

$$D\cdot C=C\cdot\Lambda\Rightarrow D\cdot C_j=\lambda_jC_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

Отсюда и из (11.123) получаем равенства

$$B_e^{-1}\cdot A_e\cdot C_j=\lambda_jC_j,\quad j=\overline{1,n}. \tag{11.127}$$

Последнее равенство означает, что столбцы C_j матрицы C, т.е. координаты элемента $\mathbf{f}_j$ нового базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ относительно старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ являются собственными векторами матрицы $B_e^{-1} \cdot A_e$, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, канонические коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями уравнения

$$\det(B_e^{-1} \cdot A_e - \lambda I) = 0 \quad \text{или} \quad \det(A_e - \lambda B_e) = 0, \qquad (11.128)$$

а координаты нового базиса относительно старого являются решениями следующей линейной однородной системы уравнений:

$$A_e \cdot Y = \lambda B_e \cdot Y.$$

Отметим, что теорема 11.44 обеспечивает существования полного набора вещественных корней уравнения (11.128) с учетом кратности. Кроме того, докажем, что матрица $B_e^{-1} \cdot A_e$ является симметричной.

☐ Действительно, имеем

$$B_e^{-1} \cdot A_e = C \cdot C^T \cdot (C^T)^{-1} \Lambda \cdot C^{-1} = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1},$$

$$\left(B_e^{-1} \cdot A_e\right)^T = (C^{-1})^T \cdot \Lambda^T \cdot C^T = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1} = B_e^{-1} \cdot A_e. \quad ⊠$$

10. Примеры решения задач

11.46. Пример. Сопряженный оператор. Пусть в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства $\mathcal{E}$ заданы векторы

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{e}_2 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (1, 0, 1). \qquad (11.129)$$

Пусть оператор A задан матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad (11.130)$$

в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в том же базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Решение. Пусть билинейная форма

$$G(x, y) : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1$$

задает скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Пусть, кроме того,

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \quad (11.131)$$

С одной стороны, с учетом (11.131) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x, y) = G(x, y) = x_e^j G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) y_e^k = X_e^T \cdot G_e \cdot Y_e. \tag{11.132}$$

С другой стороны, имеем

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \tag{11.133}$$

$$A^* y = A^*(\mathbf{E} \cdot Y_e) = (A^* \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e. \tag{11.134}$$

Поэтому из (11.132) с учетом (11.133) и (11.134) приходим к равенству, справедливому для любых $X_e, Y_e \in \mathbb{R}^{n \times 1}$:

$$\begin{gathered}(Ax, y) = (x, A^* y) \Rightarrow (A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot Y_e = X_e^T \cdot G_e \cdot A_e^* \cdot Y_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X_e^T \cdot \left(A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot A_e^*\right) \cdot Y_e = 0 \Leftrightarrow A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot A_e^* \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e^* = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e. \end{gathered} \tag{11.135}$$

Заметим, что

$$G_e = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11.136}$$

Поэтому из (11.135) и (11.136) вытекает равенство

$$\begin{aligned} A_e^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -53 & -20 & -83 \\ 40 & 19 & 57 \\ 31 & 11 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11.137}$$

Важный вопрос: где мы воспользовались тем, что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задан своими координатами в некотором ортонормированном базисе?

11.47. Пример. Самосопряженный оператор. Для линейного оператора A, имеющего в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11.138}$$

найти базис, состоящий из ортонормированных собственных векторов.

Решение. В силу результатов лемм 11.17 и 11.19 линейный оператор A является симметричным. Поэтому существует собственный базис этого оператора, состоящий из собственных векторов. Найдем теперь собственные векторы этого линейного оператора. С этой целью найдем корни характеристического многочлена:

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda). \quad (11.139)$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет три различных корня

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Алгебраическая кратность каждого корня равна 1. Очевидно, что геометрическая кратность каждого корня тоже равна 1. Осталось найти собственные векторы. Для $\lambda = 0$ имеем

$$A_e - 0I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.140)$$

Поэтому система линейных однородных уравнений

$$(A_e - 0I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР состоит, например, из столбца $X_1 = (-1, 1, 1)^T$. При этом собственный вектор линейного оператора равен

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \quad (11.141)$$

Для $\lambda = 1$ имеем

$$A_e - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.142)$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$(A_e - I)\cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T \tag{11.143}$$

эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.144}$$

ФСР состоит, например, из столбца

$$X_2 = (0, -1, 1)^T,$$

а соответствующий собственный вектор равен

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\cdot X_2 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{11.145}$$

Для $\lambda = 3$ справедливы соотношения

$$A_e - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{11.146}$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$(A_e - 3I)\cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.147}$$

ФСР состоит, например, из столбца

$$X_3 = (2, 1, 1)^T,$$

которому соответствует собственный вектор

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\cdot X_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{11.148}$$

Таким образом, собственный базис линейного оператора A состоит из векторов (11.141), (11.145) и (11.148), которые осталось нормировать на единицу:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \tag{11.149}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \tag{11.150}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \tag{11.151}$$

Найдем матрицу оператора в ортонормированном базисе $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$:

$$A \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, A\mathbf{u}_3) =$$

$$= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot A_u = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{11.152}$$

11.48. Пример. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \tag{11.153}$$

к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Поскольку для матрицы ортогонального преобразования выполнено равенство $C^T = C^{-1}$, то ортогональное преобразование одинаковым образом преобразует матрицы линейных операторов и квадратичных форм. Запишем матрицу квадратичной формы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{11.154}$$

Характеристический многочлен матрицы B равен

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(\lambda - 3)(\lambda - 6)(\lambda - 9). \tag{11.155}$$

Поэтому в базисе из собственных векторов матрицы B квадратичной формы ее матрица будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{B} = C^T \cdot B \cdot C = C^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \tag{11.156}$$

и соответствующая квадратичная форма примет вид

$$3(x^{1'})^2 + 6(x^{2'})^2 + 9(x^{3'})^2. \tag{11.157}$$

Однако, нам нужно найти и матрицу ортогонального преобразования C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C. \tag{11.158}$$

Заметим, что столбцы матрицы C составлены из координат разложения соответствующих векторов нового базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ по старому $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Для $\lambda = 3$ имеем

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.159}$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$(B - 3I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)$$

эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.160}$$

ФСР состоит, например, из следующего столбца

$$X_1 = (2, 2, -1)^T. \tag{11.161}$$

Для $\lambda = 6$ имеем

$$B - 6I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.162}$$

Тогда линейная однородная система уравнений

$$(B - 6I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

примет следующий эквивалентный вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.163}$$

ФСР состоит, например, из следующего столбца:

$$X_2 = (-1, 2, 2)^T. \tag{11.164}$$

Для $\lambda = 9$ имеем

$$B - 9I = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.165}$$

Тогда линейная однородная система уравнений

$$(B - 9I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.166}$$

ФСР состоит, например, из столбца

$$X_3 = (2, -1, 2)^T. \tag{11.167}$$

Нормируя столбцы (11.161), (11.164) и (11.167) получим разложение нового ортонормированного базиса по старому ортонормированному базису

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_1 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3, \tag{11.168}$$

$$\mathbf{e}_{2'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \tag{11.169}$$

$$\mathbf{e}_{3'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_3 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3. \tag{11.170}$$

Таким образом, матрица C определяется следующим образом:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C =$$

$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad (11.171)$$

а старые и новые координаты связаны равенством

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}. \quad (11.172)$$

11.49. Пример. Приведение пары квадратичных форм одним ортогональным преобразованием к каноническим формам. Проверить, что в паре квадратичных форм, которые имеют следующий вид:

$$\phi = 8(x^1)^2 - 28(x^2)^2 + 14(x^3)^2 + 16x^1x^2 + 14x^1x^3 + 32x^2x^3, \quad (11.173)$$

$$\psi = (x^1)^2 + 4(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 2x^1x^3 \quad (11.174)$$

по крайней мере одна форма является положительно определенной. Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному, а другую форму той же пары к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Квадратичной форме ϕ отвечает матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{pmatrix}, \quad (11.175)$$

а квадратичной форме ψ отвечает матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (11.176)$$

Как мы знаем из критерия Сильвестра вытекает, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры положительны. Проверим, что квадратичная форма ψ является положительно определенной. Действительно,

$$1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Найдем тогда собственные числа пары матриц Φ и Ψ, то есть корни многочлена

$$\det(\Phi - \lambda\Psi) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-4\lambda & 16 \\ 7-\lambda & 16 & 14-2\lambda \end{vmatrix} = \\ = -4(\lambda-9)^2(\lambda+9). \quad (11.177)$$

Таким образом, совместными собственными числами матриц Φ и Ψ являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

Теперь нам нужно найти базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, обладающий следующими свойствами:

1. Верно равенство $(\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = O$.
2. Векторы $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ.

Прежде всего заметим, что матрица Ψ определяет некоторое скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$

$$(X, Y) := X^T \cdot \Psi \cdot Y, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad Y = (y^1, y^2, y^3)^T. \quad (11.178)$$

При этом квадратичная форма ϕ можно записать в компактном виде

$$\phi = X^T \cdot \Phi \cdot X. \quad (11.179)$$

Линейное пространство $\mathbb{R}^3$ является евклидовым относительно скалярного произведения (11.178). Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — произвольный ортонормированный относительно скалярного произведения (11.178) базис в $\mathbb{R}^3$, а Φ — это матрица квадратичной формы (11.179) в этом базисе.

Заметим, что если $\lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}$, то соответствующие столбцы $\mathbf{e}_{i'}$ и $\mathbf{e}_{j'}$ являются ортогональными.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = O, \quad (\Phi - \lambda_{j'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{j'} = O, \quad (11.180)$$

$$\mathbf{e}_{j'}^T \cdot (\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{i'} = \lambda_{i'} \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Psi \cdot \mathbf{e}_{i'} = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{i'}), \quad (11.181)$$

$$\mathbf{e}_{i'}^T \cdot (\Phi - \lambda_{j'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{j'} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'} = \lambda_{j'} \mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Psi \cdot \mathbf{e}_{j'} = \lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}), \quad (11.182)$$

$$\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'} = (\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'})^T = \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Phi^T \cdot \mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_{j'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{i'}. \quad (11.183)$$

Из равенств (11.181)–(11.183) получаем, что

$$\lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{i'}), \quad (11.184)$$

из которого в силу симметричности скалярного произведения приходим к равенству

$$\lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}).$$

Следовательно,

$$(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}. \quad \boxtimes \tag{11.185}$$

Рассмотрим сначала корень $\lambda_3 = -9$ алгебраической кратности 1. Тогда собственный вектор относительно матриц Φ и Ψ определяется из следующей системы однородных линейных уравнений:

$$(\Phi + 9\Psi) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad O = (0, 0, 0)^T, \tag{11.186}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 16 \\ 8 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.187}$$

Несложно проверить, что ФСР этой системы, например, состоит из столбца

$$X_3 = c_3(0, -2, 1)^T, \quad c_3 \neq 0, \tag{11.188}$$

нормируя который на единицу относительно скалярного произведения (11.178), получим следующие соотношения:

$$c_3^2(0, -2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow c_3 = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}}. \tag{11.189}$$

Таким образом, первый собственный нормированный на единицу вектор можно выбрать, например, таким

$$\mathbf{e}_{3'} = \left(0, -\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right). \tag{11.190}$$

Рассмотрим теперь случай собственного числа $\lambda = 9$ алгебраической кратности 2. Имеем

$$(\Phi - 9\Psi) \cdot X = O, \tag{11.191}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 8 & -64 & 16 \\ -2 & 16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.192}$$

Система уравнений (11.192) эквивалентна следующему одному уравнению:

$$-x^1 + 8x^2 - 2x^3 = 0. \tag{11.193}$$

Выберем любое решение этого уравнения, например, $X_1 = (-2, 0, 1)^T$. Квадрат длины этого вектора относительно скалярного произведения (11.178) равен

$$(-2, 0, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2. \tag{11.194}$$

Поэтому получаем вектор длины 1

$$\mathbf{e}_{1'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{11.195}$$

Вектор $\mathbf{e}_{2'}$ должен удовлетворять уравнению (11.193) а также быть ортогональным к вектору $\mathbf{e}_{1'}$ относительно скалярного произведения (11.178). Стало быть, имеем

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (-\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0. \tag{11.196}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$-x^1 + 8x^2 - 2x^3 = 0, \quad x_1 = 0. \tag{11.197}$$

ФСР этой системы уравнений состоит, например, из следующего столбца:

$$X_2 = c_2(0, 1, 4)^T, \quad c_2 \neq 0. \tag{11.198}$$

Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения (11.178), примет следующий вид:

$$c_2^2(0, 1, 4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow c_2 = \pm\frac{2}{3}. \tag{11.199}$$

Из (11.198) и (11.199) вытекает следующее выражение для собственного вектора

$$\mathbf{e}_{2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \tag{11.200}$$

Матрица перехода C от старого ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, определенному равенствами (11.195), (11.200) и (11.195), имеет следующий вид:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -2/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}. \quad (11.201)$$

При этом в этом базисе арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичные формы имеют следующий вид:

$$\psi(x) = (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2,$$
$$\phi(x) = -9(x^{1'})^2 + 9(x^{2'})^2 + 9(x^{3'})^2,$$
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -2/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}.$$

11.50. Пример. Экзаменационная задача Рассматривается линейное евклидово пространство $\mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} \in \mathbb{N}$. Пусть: $P \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ — самосопряженный оператор, причем $P^2 = P$ (т. е. оператор P идемпотентный). Доказать, что оператор P является оператором ортогонального проектирования на линейное подпространство $\operatorname{im} P \subset \mathcal{E}$.

Решение. Справедливо разложение

$$x = Px + (x - Px) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathcal{E}. \quad (11.202)$$

Очевидно, что $Px \in \operatorname{im} P$. Докажем, что

$$(x - Px) \in (\operatorname{im} P)^{\perp} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \quad (11.203)$$

Пусть $z \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такое $y \in \mathcal{E}$, что $z = Py$. Справедливы равенства

$$(x - Px, z) = (x - Px, Py) = (P(x - Px), y) = (Px - P^2x, y) =$$
$$= (Px - Px, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E} \quad \text{и всех} \quad z \in \operatorname{im} P. \quad (11.204)$$

Следовательно, $x - Px \in (\operatorname{im} P)^{\perp}$. Следовательно, оператор P является оператором ортогонального проектирования на $\operatorname{im} P$.

11.51. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$. Пусть $A, B \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ — два самосопряженных оператора. Доказать, что оператор AB является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Решение. Необходимость. Пусть $(AB)^* = AB$. Для всех $x, y \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка равенств

$$(ABx, y) = (x, (AB)^*y) = (x, ABy) =$$
$$= (B^*A^*x, y) = (BAx, y) \Rightarrow AB = BA. \quad (11.205)$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $AB = BA$. Тогда для всех $x, y \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка равенств

$$(x, (AB)^* y) = (x, B^* A^* y) = (x, BAy) = (x, ABy).$$

Следовательно, $(AB)^* = AB$.

11.52. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается ориентированное евклидово пространство V_3 с правым ортонормированным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$. Пусть $a \in V_3$ и $Ax = [x, a]$ при $x \in V_3$ (здесь $[x, a]$ — векторное произведение векторов x и $a \neq \theta$). Доказать, что A — линейный оператор в пространстве V_3. Найти матрицу оператора A в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$; ядро, образ, собственные значения, собственные векторы оператора A.

Решение. Шаг 1. Линейность. Линейность оператора $Ax = [x, a]$ является следствием линейности векторного произведения $[x, a]$ по первому аргументу.

Шаг 2. Матрица оператора. Справедливы следующие равенства:

$$Ae_1 = [e_1, a] = -a_3 e_2 + a_2 e_3, \tag{11.206}$$

$$Ae_2 = [e_2, a] = a_3 e_1 - a_1 e_3, \tag{11.207}$$

$$Ae_3 = [e_3, a] = -a_2 e_1 + a_1 e_2, \tag{11.208}$$

где $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$. Таким образом, из (11.206)–(11.208) вытекает, что

$$(Ae_1, Ae_2, Ae_3) = (e_1, e_2, e_3) A_e, \tag{11.209}$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Ядро оператора. Имеем

$$\ker A = \{x \in V_3 : \ [x, a] = \theta\}. \tag{11.210}$$

Справедливы выражения

$$[x, a] = \theta \Leftrightarrow \alpha a + \beta x = \theta, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Если $\beta = 0$, то $\alpha \neq 0$ и тогда $a = \theta$, что противоречит условию задачи. Поэтому $\beta \neq 0$. Следовательно,

$$x = \frac{\alpha}{\beta} a.$$

Итак, отсюда и из (11.210) получаем

$$\ker A = \{x \in V_3 : \ x = at, \ t \in \mathbb{R}\}. \tag{11.211}$$

Шаг 4. Образ оператора. По определению имеем

$$\operatorname{im} A = \{y \in V_3 : \ y = [x, a], \quad \forall x \in V_3\}. \tag{11.212}$$

Докажем, что
$$\operatorname{im} A = \{y \in V_3 : \ (y, a) = 0\}. \tag{11.213}$$
$\square$ Действительно, пусть $y \in \operatorname{im} A$. Тогда найдется такое $x \in V_3$, что $y = [x, a]$. Согласно свойствам векторного произведения получаем $(y, a) = 0$. Обратно. Пусть $(y, a) = 0$. Введем следующий правый ортогональный базис $\{a, b, c\}$ в V_3. Тогда взаимный базис будет иметь следующий вид:
$$f_1 = \frac{[b, c]}{(a, b, c)}, \quad f_2 = \frac{[c, a]}{(a, b, c)}, \quad f_3 = \frac{[a, b]}{(a, b, c)}. \tag{11.214}$$
Справедливо разложение
$$y = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3, \tag{11.215}$$
причем из условия $(y, a) = 0$ сразу же получаем, что $\alpha = 0$. Итак,
$$y = \beta f_2 + \gamma f_3 = \frac{1}{(a, b, c)} \{\beta[c, a] + \gamma[a, b]\} = [d, a] = Ad, \tag{11.216}$$
где
$$d = \frac{\beta c - \gamma b}{(a, b, c)}.$$
Следовательно, $y \in \operatorname{im} A$.

Шаг 5. Собственные векторы. Рассмотрим уравнение
$$Ax = \lambda x, \quad x \neq \theta, \tag{11.217}$$
из которого получаем
$$[x, a] = \lambda x, \quad x \neq \theta, \tag{11.218}$$
Если $\lambda \neq 0$, то из равенства (11.218) получаем, что $(x, x) = 0$, т.е. $x = \theta$. Пришли к противоречию. Значит, $\lambda = 0$. В этом случае задача (11.217) имеет один линейно независимый собственный вектор, например, $x = a$. Собственное подпространство совпадает с $\ker A$.

11.53. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается унитарное пространство $\mathcal{U}$. Пусть $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$. Доказать, что $i(A - A^*)$ — самосопряженный оператор.

Решение. Справедлива цепочка равенств
$$\begin{aligned}(i(A - A^*)x, y) &= i(Ax, y) - i(A^*x, y) = \\ &= (x, -iA^*y) + (x, iA^{**}y) = (x, i(A - A^*)y)\end{aligned} \tag{11.219}$$
для всех $x, y \in \mathcal{U}$.

11.54. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы элементы этого евклидова пространства

$$x_1 = E \cdot X_1, \quad x_2 = E \cdot X_2, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11.220}$$

Найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на линейное подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Решение. Очевидно, что $\dim L(x_1, x_2) = 2$. Построим базис в $(L(x_1, x_2))^{\perp}$. Действительно, в силу ортонормированности базиса E имеем

$$y = E \cdot Y, \quad (Y, X_1) = (Y, X_2) = 0, \quad Y^T = (y^1, y^2, y^3, y^4), \tag{11.221}$$

где символом $(\cdot, \cdot)$ мы обозначили стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$. Из (11.221) получаем систему однородных уравнений

$$1 \cdot y^1 + 0 \cdot y^2 = 0 \cdot y^3 + (-1) \cdot y^4, \quad 1 \cdot y^1 + 1 \cdot y^2 = 0 \cdot y^3 + 0 \cdot y^4. \tag{11.222}$$

ФСР этой системы уравнений состоит, например, из следующих столбцов

$$Y_1^T = (0, 0, 1, 0), \quad Y_2^T = (-1, 1, 0, 1). \tag{11.223}$$

Но тогда с учетом (11.220) и (11.223) справедливо равенство

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11.224}$$

При этом согласно определению ортогонального проектирования имеем

$$Px_1 = x_1, \quad Px_2 = x_2, \quad Py_1 = \theta, \quad Py_2 = \theta. \tag{11.225}$$

Из (11.225) получаем

$$(Px_1, Px_2, Py_1, Py_2) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \cdot P_x, \tag{11.226}$$

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.227}$$

Если

$$(Pe_1, Pe_2, Pe_3, Pe_4) = (e_1, e_2, e_3, e_4) \cdot P_e, \qquad (11.228)$$

то

$$P_e = C \cdot P_x \cdot C^{-1}. \qquad (11.229)$$

Вычислите сами!

11.55. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $E = (e_1, e_2, e_3)$. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе E :

$$Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2. \qquad (11.230)$$

Найти: матрицу квадратичной формы Q в базисе E; ортонормированный базис $F = (f_1, f_2, f_3)$, в котором матрица квадратичной формы Q имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса E к базису F и наоборот; матрицу квадратичной формы в базисе F.

Решение. Полярная билинейная форма $B(x, y)$ к квадратичной форме $Q(x) = B(x, x)$ имеет следующий вид:

$$B(x, y) = 3x^1y^1 - 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + x^2y^2 + 3x^3y^3. \qquad (11.231)$$

Поэтому

$$Q_e = B_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (11.232)$$

Корни характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (11.233)$$

равны $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Случай 1. $\lambda_1 = 5$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (11.234)$$

Нормированный на единицу ФСР последней однородной СЛАУ имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{11.235}$$

причем собственные вектор самосопряженного оператора, порождающего данную симметричную билинейную форму, имеет следующий вид:

$$f_1 = E \cdot X_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_3. \tag{11.236}$$

Случай 2. $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. В этом случае имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim x^1 - x^3 = 0. \tag{11.237}$$

Нормированный на единицу ФСР этой системы уравнений состоит из двух столбцов

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{11.238}$$

а соответствующие собственные векторы имеют следующий вид:

$$f_2 = E \cdot X_2 = e_2, \quad f_3 = E \cdot X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_3. \tag{11.239}$$

Семейство векторов (11.236) и (11.239) образуют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}$, в котором матрица квадратичной формы диагональна. Именно,

$$F = E \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$Q_f = C^T \cdot Q_e \cdot C = C^{-1} \cdot Q_e \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 12

Приведение кривой второго порядка к каноническому виду

1. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости

12.1. Пусть $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это исходная декартова прямоугольная система координат на ориентированной плоскости, а $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ — это другая прямоугольная декартова система координат. Нужно получить формулы, связывающие координаты одной и той же точки в этих системах координат:

$$M(x, y) \quad \text{и} \quad M(x', y').$$

Сначала рассмотрим случай $O' = O$. Рассмотрим две системы полярных координат, связанных с системой координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и «повёрнутой» системой координат $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$: Пусть (ρ, ϕ) — это

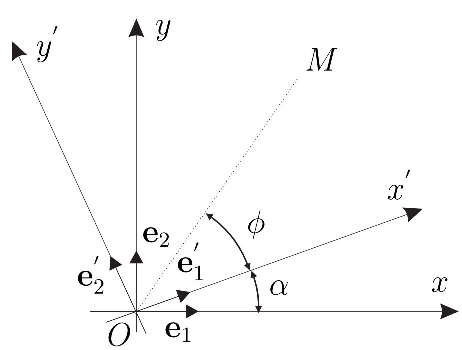

Рис. 12.1. Системы координат.

полярные координаты точки M относительно системы координат $\{O, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, т. е. с полярной осью Ox'.[1] Тогда $(\rho, \phi + \alpha)$ — это полярные координаты той же точки относительно системы координат

[1]Здесь имеется в виду, что $\phi \in [0, 2\pi)$ — угол, отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox' до радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$.

$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, т. е. с полярной осью Ox.[1] Тогда имеют место следующие формулы:

$$x = \rho\cos(\phi+\alpha), \quad y = \rho\sin(\phi+\alpha), \tag{12.1}$$

$$x^{'} = \rho\cos\phi, \quad y^{'} = \rho\sin\phi. \tag{12.2}$$

Справедливы следующие две цепочки равенств:

$$x = \rho\cos(\phi+\alpha) = \rho\cos\phi\cos\alpha - \rho\sin\phi\sin\alpha = \\ = x^{'}\cos\alpha - y^{'}\sin\alpha, \tag{12.3}$$

$$y = \rho\sin(\phi+\alpha) = \rho\sin\phi\cos\alpha + \rho\cos\phi\sin\alpha = \\ = y^{'}\cos\alpha + x^{'}\sin\alpha. \tag{12.4}$$

Итоговые формулы (12.3) и (12.4) можно записать в следующем компактном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}. \tag{12.5}$$

12.2. Теперь опять в случае $O^{'} = O$ нужно получить формулы, связывающие базисы $\{\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$:

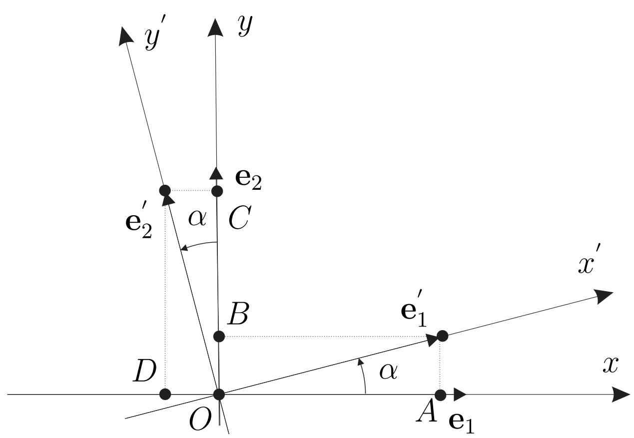

Рис. 12.2. Базисные векторы.

По правилу треугольника имеем

$$\mathbf{e}_1^{'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OA} = OA \cdot \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = OB \cdot \mathbf{e}_2. \tag{12.6}$$

---

[1]Угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ и отсчитывается от оси Ox до оси Ox' против часовой стрелки.

Справедливы следующие равенства:

$$OA = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_1^{'}||\mathbf{e}_1| \cos\alpha = \cos\alpha, \tag{12.7}$$

$$OB = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1^{'}||\mathbf{e}_2| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \tag{12.8}$$

где угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ — угол между осью Ox и осью Ox', отсчитываемый против часовой стрелки от оси Ox. Следовательно, из равенств (12.6)–(12.8) получаем равенство

$$\mathbf{e}_1' = \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{12.9}$$

Для вектора $\mathbf{e}_2^{'}$ справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{e}_2^{'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}. \tag{12.10}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OC} = OC \cdot \mathbf{e}_2, \quad \overrightarrow{OD} = OD \cdot \mathbf{e}_1, \tag{12.11}$$

$$OC = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_2| \cos\alpha, \tag{12.12}$$

$$OD = (\mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_1) = |\mathbf{e}_2^{'}||\mathbf{e}_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right). \tag{12.13}$$

Итак, из равенств (12.10)–(12.13) вытекает искомое выражение

$$\mathbf{e}_2^{'} = -\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_2. \tag{12.14}$$

Равенства (12.9) и (12.14) можно переписать в компактной форме с учётом правила умножения строчки на матрицу:

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{12.15}$$

☐ Действительно, согласно правилу «строчка на столбец» получим следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha), \tag{12.16}$$

а из равенства строчек

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1 \cdot \cos\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \sin\alpha, -\mathbf{e}_1 \cdot \sin\alpha + \mathbf{e}_2 \cdot \cos\alpha)$$

мы получим равенства (12.9) и (12.14). ⊠

12.3. Теперь мы рассмотрим общую ситуацию: $O^{'} \neq O$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}. \tag{12.17}$$

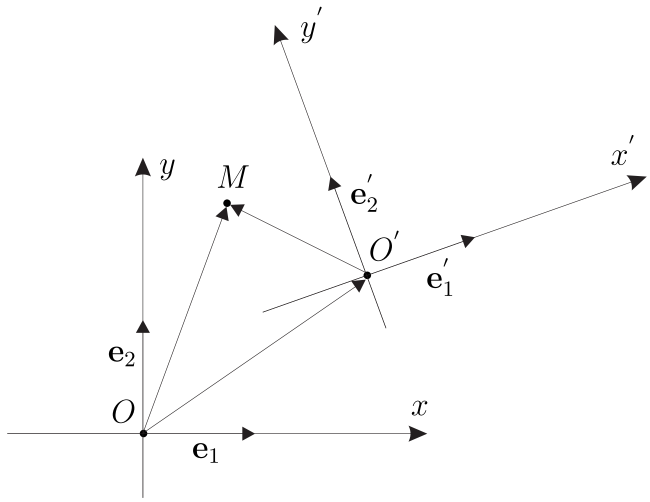

Рис. 12.3. Поворот и сдвиг системы координат.

Пусть

$$\overrightarrow{OO'} = x_0 \cdot \mathbf{e}_1 + y_0 \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{12.18}$$

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{12.19}$$

$$\overrightarrow{O'M} = x' \cdot \mathbf{e}_1' + y' \cdot \mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{12.20}$$

Из равенств (12.17)–(12.20) и из выражения (12.15) вытекает следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \\ + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \tag{12.21}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \right]. \tag{12.22}$$

□ Действительно, имеет место следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \mathbf{e}_1 + c_2 \cdot \mathbf{e}_2 + d_1 \cdot \mathbf{e}_1 + d_2 \cdot \mathbf{e}_2 =$$

$$= (c_1 + d_1) \cdot \mathbf{e}_1 + (c_2 + d_2) \cdot \mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}\right]. \quad \boxtimes$$

Произведение

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

— это некоторый столбец. Поэтому из равенства (12.21) в силу свойства (12.22) приходим к следующему равенству:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \qquad (12.23)$$

где

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \qquad (12.24)$$

Заметим, что согласно правилу умножения «строчка на столбец» имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2,$$

а в силу (12.23) мы приходим к следующему равенству:

$$z_1 \cdot \mathbf{e}_1 + z_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \qquad (12.25)$$

которое в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ эквивалентно равенствам

$$z_1 = z_2 = 0.$$

Отсюда и из (12.24) получаем искомое равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad (12.26)$$

или в развёрнутой форме

$$x = x_0 + \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y',$$

$$y = y_0 + \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'.$$

2. Матричная форма записи преобразований на плоскости в однородных координатах

12.4. Введём следующие обозначения:

$$R := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \tag{12.27}$$

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' := \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{12.28}$$

Тогда матричное уравнение (12.26) с учётом обозначений (12.27), (12.28) можно переписать в следующей компактной матричной форме записи:

$$X = X_0 + R \cdot X'. \tag{12.29}$$

Отметим, что справедливо следующее утверждение:

12.5. Лемма. *Имеет место равенства* $|R| = 1$ *и* $R^T = R^{-1}$.

Доказательство. Первое утверждение тривиально. Для доказательства второго нужно заметить, что преобразование R — преобразование поворота на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, а обратное преобразование — поворот на угол $-\alpha$. Следовательно,

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R^T.$$

Хотя, можно проверить и непосредственно. Справедливы следующие равенства:

$$R^T \cdot R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R \cdot R^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

12.6. С учётом результата этой леммы справедливы следующие формулы:

$$\begin{gathered} X - X_0 = R \cdot X' \Leftrightarrow X' = R^{-1} \cdot (X - X_0) = R^T \cdot (X - X_0) = \\ = -R^T \cdot X_0 + R^T \cdot X \Leftrightarrow X' = X'_0 + R^T \cdot X, \\ X'_0 = -R^T \cdot X_0. \end{gathered} \tag{12.30}$$

12.7. Выпишем следующие столбцы:

$$Z=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\left\|\frac{X}{1}\right\|,\quad Z'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}=\left\|\frac{X'}{1}\right\|. \tag{12.31}$$

Введём теперь расширенную матрицу преобразования

$$P=\left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|. \tag{12.32}$$

Справедливо следующее утверждение:

12.8. Лемма. *Матрица P обратима и обратная имеет следующий вид*:

$$P^{-1}=\left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=\left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T\cdot X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|. \tag{12.33}$$

Доказательство. Используя правило перемножения блочных матриц, получим следующую цепочку равенств:

$$P^{-1}\cdot P=\left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T\cdot X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|\cdot\left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{c|c} R^T\cdot R & R^T\cdot X_0-R^T\cdot X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P\cdot P^{-1}=\left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|\cdot\left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T\cdot X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|\cdot=$$

$$=\left\|\begin{array}{c|c} R\cdot R^T & -R\cdot R^T\cdot X_0+X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

12.9. Лемма. *Справедливы следующие равенства*:

$$Z=P\cdot Z',\quad Z'=P^{-1}\cdot Z.$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$P\cdot Z'=\left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|\cdot\left\|\frac{X'}{1}\right\|=\left\|\frac{R\cdot X'+X_0}{1}\right\|=\left\|\frac{X}{1}\right\|=Z,$$

$$P^{-1}\cdot Z = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T\cdot X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} R^T\cdot X - R^T\cdot X_0 \\ \hline 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} R^T\cdot (X - X_0) \\ \hline 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\| = Z'.$$

□

12.10. Справедливо равенство

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T\cdot X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0^{'} \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0^{'} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

где

$$X_0^{'} = -R^T\cdot X_0,$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x_0^{'} = -x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \\ y_0^{'} = x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha. \end{cases}$$

3. Уравнения кривой второго порядка на плоскости

12.11. Пусть на ориентированной плоскости задана декартова прямоугольная система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

12.12. Определение. Линия на плоскости, координаты точек $M(x, y)$ которой и только они являются решениями уравнения

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \qquad (12.34)$$

причём коэффициенты этого уравнения вещественные числа и

$$(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0),$$

называется уравнением линии второго порядка.

12.13. Введём следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{21} = a_{12}, \quad B = (b_1, b_2), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Уравнение (12.34) можно записать в следующем виде:

$$X^T\cdot A\cdot X + 2B\cdot X + c = 0. \qquad (12.35)$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$X^T\cdot A\cdot X = (x, y)\begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{12}x + a_{22}y \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{12}yx + a_{22}y^2. \quad \boxtimes \qquad (12.36)$$

12.14. Уравнение линии второго порядка в однородных координатах. Рассмотрим следующие блочные матрицы:

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|. \tag{12.37}$$

Тогда уравнение линии второго порядка (12.35) можно записать в следующем виде:

$$Z^T \cdot D \cdot Z = 0. \tag{12.38}$$

☐ Действительно,

$$\left\| X^T \middle| 1 \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| X^T \cdot A + B \middle| X^T \cdot B^T + c \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\| =$$

$$= X^T \cdot A \cdot X + B \cdot X + X^T \cdot B^T + c = X^T \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + c,$$

где мы воспользовались равенством

$$B \cdot X = (B \cdot X)^T = X^T \cdot B^T,$$

которое справедливо, поскольку произведение $B \cdot X \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. ☒

4. Ортогональные преобразования уравнения кривой второго порядка

12.15. Рассмотрим на плоскости помимо $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ещё одну декартову прямоугольную систему координат $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$, полученную из $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ параллельным переносом и поворотом. Напомним, что однородные координаты в этих системах координат связаны соотношением

$$Z = P \cdot Z', \quad P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \tag{12.39}$$

где

$$Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array} \right\|, \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array} \right\|.$$

После подстановки в уравнение (12.38) преобразования (12.39) получим следующую цепочку равенств:

$$0 = Z^T \cdot D \cdot Z = Z'^T \cdot P^T \cdot D \cdot P \cdot Z' = Z'^T \cdot D' \cdot Z',$$

где

$$D^{'} = P^T \cdot D \cdot P, \quad D^{'} = \left\| \begin{array}{c|c} A^{'} & B^{'T} \\ \hline B^{'} & c^{'} \end{array} \right\|. \tag{12.40}$$

Справедливы следующие равенства:

$$P^T \cdot D = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A & R^T \cdot B^T \\ \hline X_0^T \cdot A + B & X_0^T \cdot B^T + c \end{array} \right\|,$$

$$\begin{aligned} \left(P^T \cdot D\right) \cdot P &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A & R^T \cdot B^T \\ \hline X_0^T \cdot A + B & X_0^T \cdot B^T + c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A \cdot R & R^T \cdot A \cdot X_0 + R^T \cdot B^T \\ \hline X_0^T \cdot A \cdot R + B \cdot R & X_0^T \cdot A \cdot X_0 + B \cdot X_0 + X_0^T \cdot B^T + c \end{array} \right\| = \\ &= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A \cdot R & R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T \cdot A + B) \cdot R & X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c \end{array} \right\|, \end{aligned} \tag{12.41}$$

где мы воспользовались равенством $X_0^T \cdot B^T = B \cdot X_0$, поскольку это матрица размера 1×1, а также тем, что $A^T = A$. Сравнивая формулы (12.40) и (12.41) мы получим равенства

$$A^{'} = R^T \cdot A \cdot R, \quad B^{'} = (X_0^T \cdot A + B) \cdot R, \tag{12.42}$$

$$c^{'} = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c, \tag{12.43}$$

а уравнение линии второго порядка в новой системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}\}$ примет следующий вид:

$$X^{'T} \cdot A^{'} \cdot X^{'} + 2B^{'} \cdot X^{'} + c^{'} = 0. \tag{12.44}$$

12.16. Наблюдение 1. Матрица A меняется только при повороте.

12.17. Наблюдение 2. Матрица B меняется и при повороте и при параллельном переносе.

12.18. Наблюдение 3. Свободный член c меняется только при параллельном переносе.

12.19. Теорема. *При ортогональных преобразованиях декартовой прямоугольной системы координат величины*

$$S := \operatorname{tr} A, \quad \delta := \det A, \quad \triangle := \det D \tag{12.45}$$

не изменяются.

Доказательство.

$$\operatorname{tr} A^{'} = \operatorname{tr}(R^T \cdot A \cdot R) = \operatorname{tr}(A \cdot R \cdot R^T) = \operatorname{tr}(A \cdot R \cdot R^{-1}) = \operatorname{tr} A,$$

$$\det A^{'} = \det(R^T \cdot A \cdot R) = \det R^T \det A \det R = \det A, \quad \det R = 1,$$

$$\det D^{'} = \det(P^T \cdot D \cdot P) = \det P^T \det D \det P = \det D, \quad \det P = 1.$$

□

12.20. Определение. Величины S, δ и D называются ортогональными инвариантами.

5. Уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота на угол α

12.21. Наша задача заключается в том, чтобы найти поворот на такой угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, при котором справедливо равенство

$$A^{'} = R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{12.46}$$

12.22. Лемма. При наличии в уравнении линии второго порядка (12.34) слагаемого $2a_{12}xy$ необходимо выполняется условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$[1].

Доказательство. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2$. Тогда

$$A = (R^T)^{-1} \cdot A^{'} \cdot R^{-1} = R \cdot A^{'} \cdot R^{-1} = R \cdot (\lambda I_2) \cdot R^{-1} = \lambda R \cdot R^{-1} = \lambda I_2.$$

□

12.23. Поскольку матрица квадратичной формы в исходной прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

является симметричной $A^T = A$, то существует такой новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}\}$, что

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot R, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad R^T = R^{-1}, \tag{12.47}$$

причем

$$A' = R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{12.48}$$

[1]Отметим, что это утверждение имеет место только в прямоугольных декартовых системах координат.

где вещественные числа λ_1 и λ_2 являются решениями *характеристического уравнения*

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - S\lambda + \delta = 0. \qquad (12.49)$$

12.24. Боле детально рассмотрим матрицу перехода[1] R. Как мы доказали ранее, матрица R является ортогональной, т. е.

$$R^T = R^{-1} \Rightarrow \det R = \det R^T = \det R^{-1} = \frac{1}{\det R} \Rightarrow \det R = \pm 1.$$

С точки зрения геометрической случай $\det R = -1$ — это есть «поворот»+«отражение». Нас же интересует только ортогональное преобразование «чистого поворота». Поэтому $\det R = 1$. Тогда

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{pmatrix}, \quad R^T = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = 1, \quad r_{11} = r_{22}, \quad r_{21} = -r_{12}.$$

Положим $r_{11} = r_{22} = a$, $r_{21} = -r_{12} = b$ и получим равенство

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Стало быть, найдется такой угол $\alpha \in [0, 2\pi)$, что

$$a = \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При этом справедливо равенство

$$R^T \cdot A \cdot R = A' \Leftrightarrow R^{-1} \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad (12.50)$$

из которого получаем

$$A \cdot R = R \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad (12.51)$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

В частности, из второго равенства имеем

$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha = a_{12}\sin^2\alpha - a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \Leftrightarrow$$

[1]Поворота с точки зрения геометрии.

$$\Leftrightarrow a_{12}\cos(2\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}\sin(2\alpha), \quad \cot 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \quad (12.52)$$

Именно на такой угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ нужно повернуть исходную декартову систему координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, чтобы избавиться от слагаемого $a_{12}xy$.

6. Уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$

Из полученных ранее формул (12.42) вытекает, что при общем ортогональном преобразовании матрица–строка $B = (b_1, b_2)$ преобразуется по следующему закону:

$$B^{'} = (X_0^T \cdot A + B) \cdot R. \quad (12.53)$$

Для уничтожения в уравнении линии второго порядка (12.35) линейного слагаемого

$$2B \cdot X$$

необходимо и достаточно потребовать, чтобы $B^{'} = O \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$B^{'} = O \Leftrightarrow (X_0^T \cdot A + B) \cdot R = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_0^T \cdot A + B = O \Leftrightarrow A^T \cdot X_0 = -B^T. \quad (12.54)$$

Поскольку $A^T = A$, то мы приходим к искомому уравнению

$$A \cdot X_0 = -B^T, \quad B \neq O. \quad (12.55)$$

Ясно, что эта квадратная неоднородная система линейных уравнений однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $\delta = \det A \neq 0$.

12.25. Случай центральных кривых второго порядка. Рассмотрим сначала случай $\delta \neq 0$. В этом случае имеет место равенство

$$X_0 = -A^{-1} \cdot B^T,$$

из которого вытекает явный вид искомого преобразования

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1} \cdot B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

В новых координатах $X^{'} = (x^{'}, y^{'})$ после этого преобразования уравнение линии второго порядка примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + c^{'} = 0, \quad c^{'} = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c. \quad (12.56)$$

Матрица $D^{'}$ при этом имеет следующий вид:

$$D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c^{'} \end{array} \right), \tag{12.57}$$

где выражение для $c^{'}$ можно упростить. Действительно,

$$c^{'} = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c = -X_0^T \cdot B^T + 2B \cdot X_0 + c = B \cdot X_0 + c.$$

Кроме того, из выражения (12.57) имеют место следующие равенства:

$$\triangle = \det D^{'} = \lambda_1 \lambda_2 c^{'} = \delta c^{'} \Rightarrow c^{'} = \frac{\triangle}{\delta}. \tag{12.58}$$

Следовательно, уравнение (12.56) с учётом (12.58) можно переписать в следующем виде:

$$\lambda_1 x^{'2} + \lambda_2 y^{'2} + \frac{\triangle}{\delta} = 0. \tag{12.59}$$

12.26. Определение. Алгебраическая линия второго порядка называется центральной, если $\det A \neq 0$.

7. Уравнения эллиптического типа

12.27. Рассмотрим случай $\delta = \det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. В этом случае, очевидно, числа λ_1 и λ_2 одного знака.

12.28. Вещественный эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ имеют разные знаки. Тогда уравнение (12.59) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = 1,} \tag{12.60}$$

$$a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta \lambda_1} > 0, \quad b^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_2} = -\frac{\triangle}{\delta \lambda_2} > 0.$$

12.29. Мнимый эллипс. Пусть $c^{'}$ и $\lambda_{1,2}$ одного знака. Тогда уравнение (12.59) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = -1,} \tag{12.61}$$

$$a^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_1} = \frac{\triangle}{\delta \lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_2} = \frac{\triangle}{\delta \lambda_2} > 0.$$

12.30. Пара мнимых прямых. Пусть $c^{'} = 0$ и уравнение (12.59) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{x^{'2}}{a^2} + \frac{y^{'2}}{b^2} = 0,} \quad a = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}. \tag{12.62}$$

8. Уравнения гиперболического типа

12.31. Рассмотрим теперь случай $\delta = \det A = \lambda_1\lambda_2 < 0$. Это случай, когда числа λ_1 и λ_2 разных знаков.

12.32. Гипербола. Предположим, что $\triangle = c^{'}\delta \neq 0$. Тогда $c^{'} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что знаки чисел $c^{'}$ и λ_1 разные, а знаки чисел $c^{'}$ и λ_2 одинаковые. Поэтому уравнение (12.59) можно переписать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{x^{'2}}{a^2} - \frac{y^{'2}}{b^2} = 1,} \tag{12.63}$$

$$a^2 = -\frac{c^{'}}{\lambda_1} = -\frac{\triangle}{\delta\lambda_1} > 0, \quad b^2 = \frac{c^{'}}{\lambda_2} = \frac{\triangle}{\delta\lambda_2} > 0.$$

12.33. Пара пересекающихся прямых. Предположим, что

$$\triangle = c^{'}\delta = 0 \Rightarrow c^{'} = 0.$$

Это вырожденный случай. Тогда уравнение (12.59) можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^{'2}}{a^2} - \frac{y^{'2}}{b^2} = 0,} \quad a = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}. \tag{12.64}$$

9. Уравнения параболического типа

12.34. Рассмотрим теперь вырожденный случай $\delta = \det A = \lambda_1\lambda_2 = 0$. Поскольку мы рассматриваем алгебраические уравнения второго порядка, то это означает, что <u>только одно</u> из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Пусть, например, $\lambda_1 = 0$. Тогда

$$S = \operatorname{tr} A = \lambda_2, \quad D^{'} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right), \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S. \tag{12.65}$$

Поскольку рассматривается случай $\det A = 0$, то система уравнений $A \cdot X_0 = -B^T$ может либо быть несовместной, либо иметь бесконечное множество решений. Это случай *нецентральных кривых на плоскости*. Справедливо следующее важное утверждение:

12.35. Лемма. Абсолютная величина $|b_1'|$, где коэффициент $b_1^{'}$ выражается формулой

$$b_1^{'} = \pm\sqrt{-\frac{\triangle}{S}}, \tag{12.66}$$

является инвариантом относительно сдвигов.

Доказательство. Если мы используем только преобразование параллельного переноса системы координат, то при этом матрица $D^{'}$ после преобразования вида (формально при $\alpha = 0$)

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

преобразуется только к матрице аналогичного вида:

$$D^{''} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{''} \\ 0 & S & b_2^{''} \\ \hline b_1^{''} & b_2^{''} & c^{''} \end{array}\right).$$

При этом имеем

$$\triangle = \det D^{''} = -\left(b_1^{''}\right)^2 S, \quad \triangle = \det D^{'} = -\left(b_1^{'}\right)^2 S \Rightarrow |b_1^{''}| = |b_1^{'}|.$$

$\square$

12.36. Параболический тип. Предположим, что $\triangle \neq 0$. Поэтому согласно лемме 12.35, какой–бы мы в дальнейшем не делали бы параллельный перенос системы координат, коэффициент $b_1^{'} \neq 0$ преобразуется в коэффициент $b_1^{''} = \pm b_1^{'} \neq 0$. Пусть мы сделали уже поворот на найденный угол α и уничтожили слагаемое $2a_{12}xy$. В однородных координатах чистый поворот имеет следующий вид:

$$D^{'} = P_1^T \cdot D \cdot P_1, \quad P_1 = \left\|\begin{array}{c|c} R & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При этом в однородных координатах мы пришли к матрице

$$D^{'}=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1^{'} \\ 0 & S & b_2^{'} \\ \hline b_1^{'} & b_2^{'} & c^{'} \end{array}\right),\quad A^{'}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix},\quad B^{'}=(b_1^{'},b_2^{'}),\quad b_1^{'}\neq 0.$$

Тогда уравнение для центра примет следующий вид:

$$A^{'}\cdot X_0=-B^{'T}=-\begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \end{pmatrix},$$

где

$$\operatorname{rk}A^{'}=\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}<\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -b_1^{'} \\ 0 & S & -b_2^{'} \end{pmatrix},\quad \text{если}\quad b_1^{'}\neq 0.$$

Итак, в силу теоремы Кронекера–Капелли *уравнение цента не имеет решений*. После поворота R (пока без сдвига) уравнение линии второго порядка примет следующий вид:

$$Sy^{'2}+2b_1^{'}x^{'}+2b_2^{'}y^{'}+c=0,\quad b_1^{'}\neq 0. \tag{12.67}$$

Это уравнение после выделения полного квадрата примет следующий вид:

$$S\left(y^{'}+\frac{b_2^{'}}{S}\right)^2+2b_1^{'}\left(x^{'}+\frac{c}{2b_1^{'}}-\frac{b_2^{'2}}{2b_1^{'}S}\right)=0.$$

Вводя новые переменные

$$\begin{cases} x^{''}=\pm\left(x^{'}+\dfrac{c}{2b_1^{'}}-\dfrac{b_2^{'2}}{2b_1^{'}S}\right), \\ y^{''}=y^{'}+\dfrac{b_2^{'}}{S}, \end{cases} \tag{12.68}$$

получим уравнение

$$Sy^{''2}+2b_1^{'}x^{''}=0, \tag{12.69}$$

а затем выбираем знак $\pm$ так, чтобы получилось каноническое уравнение параболы

$$\boxed{y^{''2}=2px^{''},}\quad p=\left|\frac{b_1^{'}}{S}\right|. \tag{12.70}$$

12.37. Заметим, что после преобразования (12.68) матрица линии второго порядка в системе координат $Ox''y''$ примет следующий вид:

$$D'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1' \\ 0 & S & 0 \\ \hline b_1' & 0 & 0 \end{array}\right).$$

12.38. Вырожденный параболический тип. Пусть $\triangle = \det D = 0$. Следовательно, система уравнений центра

$$A \cdot X_0 = -B^T \tag{12.71}$$

имеет бесконечно много решений. Выберем какое–либо из них X_0. Поэтому после поворота и сдвига, определяемого матрицей

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|, \quad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D' = P^T \cdot D \cdot P.$$

получим уравнение кривой второго порядка следующего вида:

$$Sy'^2 + c' = 0, \tag{12.72}$$

с матрицей D' в однородных координатах следующего вида:

$$D' = P^T \cdot D \cdot P = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right). \tag{12.73}$$

Отметим, что

$$c' = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c. \tag{12.74}$$

Отсюда с учётом уравнения (12.71) получим равенство

$$c' = -X_0^T \cdot B^T + 2B \cdot X_0 + c = B \cdot X_0 + c, \tag{12.75}$$

где $X_0^T \cdot B^T = (B \cdot X_0)^T = B \cdot X_0$, поскольку произведение $B \cdot X_0 \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Из вида выражения (12.75) может сложиться впечатление, что c' зависит от выбора X_0. Однако, это не так. Пусть X_1 — другое решение уравнения (12.71):

$$A \cdot X_1 = -B^T \Rightarrow c'' = B \cdot X_1 + c. \tag{12.76}$$

Из уравнений (12.71) и (12.75) вытекают соотношения:

$$A \cdot X_0 = -B^T, \quad A \cdot X_1 = -B^T, \quad A^T = A,$$

$$X_1^T \cdot A \cdot X_0 = -X_1^T \cdot B^T, \quad X_1^T \cdot A^T = -B,$$

$$-B \cdot X_0 = -X_1^T \cdot B^T \Leftrightarrow B \cdot X_0 = B \cdot X_1,$$

из которых и в силу (12.75) и (12.76) получаем, что $c'' = c'$.

12.39. Вырожденный тип. Две параллельные прямые. Числа S и c' имеют разные знаки, тогда уравнение (12.72) примет следующий вид:

$$\boxed{y'^2 - a^2 = 0,} \quad a^2 = \left|\frac{c'}{S}\right|. \tag{12.77}$$

12.40. Вырожденный тип. Две мнимые параллельные прямые. Числа S и c' имеют одинаковые знаки, тогда уравнение (12.72) примет следующий вид:

$$\boxed{y'^2 + a^2 = 0,} \quad a^2 = \frac{c'}{S}. \tag{12.78}$$

12.41. Вырожденный тип. Две совпадающие прямые. Если $c' = 0$, тогда уравнение (12.72) примет следующий вид:

$$\boxed{y'^2 = 0.} \tag{12.79}$$

Всего девять различных канонических уравнений.

ГЛАВА 13

Поверхности второго порядка и их классификация

1. Преобразование координат в пространстве

13.1. Пусть в пространстве заданы две прямоугольные декартовы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O, \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

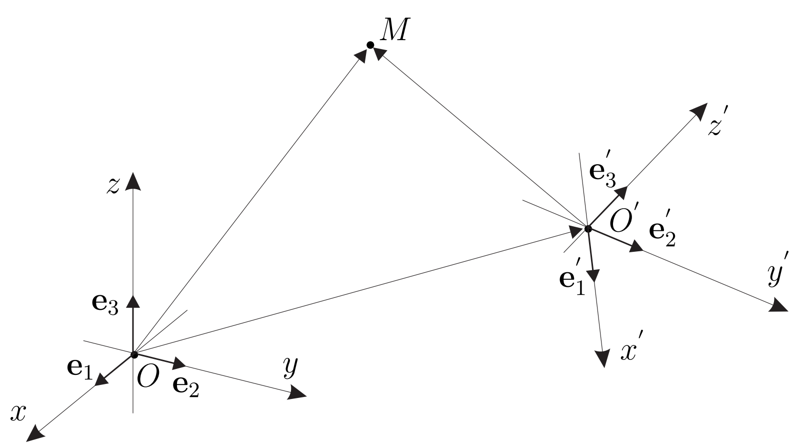

Рис. 13.1. К задаче 5.

13.2. Разложим базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i \tag{13.1}$$

или в развернутой форме

$$\mathbf{e}_{1'} = c^1_{1'}\mathbf{e}_1 + c^2_{1'}\mathbf{e}_2 + c^3_{1'}\mathbf{e}_3, \tag{13.2}$$

$$\mathbf{e}_{2'} = c^1_{2'}\mathbf{e}_1 + c^2_{2'}\mathbf{e}_2 + c^3_{2'}\mathbf{e}_3, \tag{13.3}$$

$$\mathbf{e}_{3'} = c^1_{3'}\mathbf{e}_1 + c^2_{3'}\mathbf{e}_2 + c^3_{3'}\mathbf{e}_3. \tag{13.4}$$

Введем следующие углы между векторами старого базиса и нового базиса:

$$c^1_{1'} = \cos\alpha_1 = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_1), \quad c^2_{1'} = \cos\beta_1 = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_2), \tag{13.5}$$

$$c^3_{1'} = \cos\gamma_1 = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_3), \tag{13.6}$$

$$c^1_{2'} = \cos\alpha_2 = (\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_1), \quad c^2_{2'} = \cos\beta_2 = (\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_2), \tag{13.7}$$

$$c^3_{2'} = \cos\gamma_2 = (\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_3), \tag{13.8}$$

$$c^1_{3'} = \cos\alpha_3 = (\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_1), \quad c^2_{3'} = \cos\beta_3 = (\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_2), \tag{13.9}$$

$$c^3_{3'} = \cos\gamma_3 = (\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_3). \tag{13.10}$$

Тогда (13.2)–(13.4) с учетом и (13.5)–(13.10) мы приходим к следующей формуле:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot R, \tag{13.11}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{13.12}$$

13.3. Поскольку матрица R является матрицей преобразования ортонормированных базисов, то справедливо равенство $R^T = R^{-1}$.

13.4. Теперь наша задача найти формулы связывающие, координаты радиуса–вектора некоторой точки в репере $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ с радиус–вектором той же точки в репере $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

☐ Действительно, пусть $\mathbf{r}$ — радиус–вектор точки в старой системе координат, а $\mathbf{r}'$ — радиус–вектор той же точки в новой системе координат, а $\overrightarrow{OO'}$ — направленный отрезок с началом в точке O и с концом в точке O'. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X, \quad \mathbf{r}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) \cdot X', \tag{13.13}$$

$$\overrightarrow{OO'} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_0, \tag{13.14}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

причем справедливо равенство

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OO'} + \mathbf{r}' \tag{13.15}$$

или с учетом (13.13) и (13.14) получим следующее выражение:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_0 + (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) \cdot X' =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_0 + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot R \cdot X' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \left[X - X_0 - R \cdot X'\right] = \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X = X_0 + R \cdot X'. \quad \boxtimes \quad (13.16)$$

Введем столбцы из $\mathbb{R}^{4\times 1}$:

$$Z = \left\| \begin{matrix} X \\ 1 \end{matrix} \right\|, \quad Z' = \left\| \begin{matrix} X' \\ 1 \end{matrix} \right\|. \quad (13.17)$$

Рассмотрим блочную матрицу

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \quad (13.18)$$

Справедлива следующая лемма:

13.5. Лемма. Матричное равенство

$$X = X_0 + R \cdot X' \quad (13.19)$$

эквивалентно следующему матричному равенству:

$$Z = P \cdot Z'. \quad (13.20)$$

Доказательство. Справедливо следующее равенство:

$$P \cdot Z' = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} X' \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} X_0 + R \cdot X' \\ 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} X \\ 1 \end{matrix} \right\| = Z.$$

$\square$

2. Различные формы записи уравнения поверхности второго порядка

13.6. Определение. Уравнение второй степени, записанное в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ следующим образом:

$$a_{11}x^1 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + \\ + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (13.21)$$

называется *уравнением поверхности второго порядка*, если все коэффициенты и свободное слагаемое — вещественные числа, причем хотя бы один коэффициент при слагаемом второй степени отличен от нуля.

13.7. Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad a_{jk} = a_{kj}. \quad (13.22)$$

С учетом (13.22) уравнение (13.21) можно переписать в сжатой матричной форме

$$X^T \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + c = 0. \tag{13.23}$$

13.8. Лемма. Уравнение (13.23) равносильно следующему матричному уравнению:

$$Z^T \cdot D \cdot Z = 0, \quad D = \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\|, \quad Z = \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{13.24}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$Z^T \cdot D \cdot Z = \|X^T, 1\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ 1 \end{array} \right\| = \|X^T, 1\| \cdot \left\| \begin{array}{c} A \cdot X + B^T \\ B \cdot X + c \end{array} \right\| =$$
$$= X^T \cdot A \cdot X + X^T \cdot B^T + B \cdot X + c =$$
$$= X^T \cdot A \cdot X + 2B \cdot X + c = 0, \tag{13.25}$$

поскольку $B \cdot X$ — это число и, следовательно,

$$B \cdot X = (B \cdot X)^T = X^T \cdot B^T.$$

□

13.9. Теперь наша задача получить уравнение поверхности (13.23) и (13.24) в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$. С этой целью воспользуемся формулой (13.20) и после подстановки в равенство (13.24) мы получим равенство

$$Z'^T \cdot P^T \cdot D \cdot P \cdot Z' = 0 \Leftrightarrow Z'^T \cdot D' \cdot Z' = 0, \quad D' = P^T \cdot D \cdot P. \tag{13.26}$$

Осталось вычислить D'. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$D' = P^T \cdot D \cdot P = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T & O \\ \hline X_0^T & 1 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c|c} A \cdot R & A \cdot X_0 + B^T \\ \hline B \cdot R & B \cdot X_0 + c \end{array} \right\| =$$
$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A \cdot R & R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T \cdot A + B) \cdot R & X_0^T \cdot A \cdot X_0 + X_0^T \cdot B^T + B \cdot X_0 + c \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} R^T \cdot A \cdot R & R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T \cdot A + B) \cdot R & X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} A' & B'^T \\ \hline B' & c' \end{array} \right\|, \qquad (13.27)$$

из которых получаем следующие равенства:

$$A' = R^T \cdot A \cdot R, \quad B' = (X_0^T \cdot A + B) \cdot R, \qquad (13.28)$$

$$c' = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c \qquad (13.29)$$

и уравнение (13.23) в новой прямоугольной системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ примет следующий вид:

$$X'^T \cdot A' \cdot X' + 2B' \cdot X' + c' = 0, \qquad (13.30)$$

где соответствующие матрицы и свободное слагаемое c' связаны с соответствующими матрицами в старой системе координат уравнениями (13.28) и (13.29).

3. Ортогональные инварианты

Справедлива следующая теорема:

13.10. Теорема. *Следующие функции являются ортогональными инвариантами поверхности второго порядка:*

$$K_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (13.31)$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}. \qquad (13.32)$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$\det D' = \det(P^T \cdot D \cdot P) = \det D (\det P)^2 = \det D, \qquad (13.33)$$

где мы воспользовались равенством (13.26) и тем , что

$$(\det P)^2 = (\det R)^2 = 1, \qquad (13.34)$$

поскольку

$$R^T = R^{-1}, \quad \det R = \frac{1}{\det R}, \quad (\det R)^2 = 1.$$

Из равенства (13.34) и равенства (13.28) получаем равенство

$$\det A' = \det(R^T \cdot A \cdot R) = (\det R)^2 \det A = \det A. \qquad (13.35)$$

Наконец, имеет место равенство

$$\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr}(R^T \cdot A \cdot R) = \operatorname{tr}(A \cdot R \cdot R^T) = \operatorname{tr} A, \quad R^T = R^{-1}. \quad (13.36)$$

□

Справедлива следующая важная теорема:

13.11. Теорема. *Следующая функция является ортогональным инвариантом поверхности второго порядка:*

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (13.37)$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму следующего вида:

$$X^T \cdot \widehat{A} \cdot X + 2B \cdot X + c = 0, \quad \widehat{A} = A - \lambda I. \quad (13.38)$$

После ортогонального преобразования уравнение (13.38) примет следующий вид:

$$X'^T \cdot \widehat{A}' \cdot X' + 2B' \cdot X' + c' = 0, \quad \widehat{A}' = R^T \cdot (A - \lambda I) \cdot R = \\ = R^T \cdot A \cdot R - \lambda R^T \cdot R = A' - \lambda I. \quad (13.39)$$

В силу результата теоремы 13.10 имеем

$$\det \widehat{A} = \det \widehat{A}' \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det(A' - \lambda I). \quad (13.40)$$

Последнее равенство должно быть выполненным для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Его можно переписать в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} - \lambda & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} - \lambda \end{vmatrix}. \quad (13.41)$$

Значит, коэффициенты в разных частях при λ^0, λ^1, λ^2 и λ^3 совпадают. Пользуясь элементарными свойствами определителей находим коэффициент при λ^0:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (13.42)$$

коэффициент при λ^1 имеет следующий вид:

$$-\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad (13.43)$$

коэффициент при λ^2 равен

$$a_{11} + a_{22} + a_{33}; \tag{13.44}$$

Очевидно, что коэффициент при λ^3 равен числу -1. Из (13.43) вытекает утверждение теоремы. □

13.12. Теорема. *Следующие функции являются инвариантами только относительно поворота прямоугольной декартовой системы уравнений:*

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{31} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}, \tag{13.45}$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & b_3 \\ b_3 & c \end{vmatrix}. \tag{13.46}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$X^T \cdot (A - \lambda I) \cdot X + 2B \cdot X + c = 0. \tag{13.47}$$

Заметим, что при повороте с матрицей поворота R получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^T \cdot X = X'^T \cdot R^T \cdot R \cdot X' = \\ = X'^T \cdot X' = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2, \tag{13.48}$$

В силу теоремы 13.10 функция K_4 является ортогональным инвариантом. Поэтому при однородном преобразовании и в силу сказанного выше мы приходим к выводу о том, что в результате однородного ортогонального преобразования получаем равенство

$$X'^T \cdot (A' - \lambda I) \cdot X' + 2B' \cdot X' + c = 0, \quad A' = R^T \cdot A \cdot R, \tag{13.49}$$

причем строчка B' от параметра λ не зависит. Из инвариантности K_4 получаем равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12} & a'_{13} & b'_1 \\ a'_{21} & a'_{22}-\lambda & a'_{23} & b'_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33}-\lambda & b'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & c \end{vmatrix}.$$

Поскольку это равенство должно быть выполнено для всех $\lambda \in \mathbb{R}^3$, то коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ. Приравнивая коэффициенты при λ и λ^2 приходим к утверждению теоремы. □

13.13. Прежде всего заметим, что матрица A квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

является симметричной $a_{ij} = a_{ji}$. Поэтому в линейном пространстве $\mathbb{V}_3$ существует собственный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором матрица имеет следующий вид:

$$A' = R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{13.50}$$

Ниже мы рассмотрим пять групп поверхностей второго порядка в канонических прямоугольных декартовых системах координат.

4. Первая группа: центральные поверхности

13.14. Определение. Поверхность второго порядка называется центральной, если найдется такая точка M, такая, что для любой точки M_1, принадлежащей поверхности, симметричная точка M_2 относительно точки M, тоже принадлежит данной поверхности.

13.15. Условие $I_3 \neq 0$. Это условие означает, что уравнение

$$A \cdot X_0 = -B^T, \quad I_3 = \det A \neq 0 \tag{13.51}$$

имеет единственное решение $X_0 \in \mathbb{R}^{4\times 1}$. Поэтому в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором матрица A' имеет вид (13.50), а столбец $B'^T \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ с учетом (13.51) имеет вид

$$B'^T = R^T \cdot (A \cdot X_0 + B^T) = O \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

мы приходим к следующему виду матрицы D':

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c' \end{pmatrix}, \quad c' = X_0^T \cdot A \cdot X_0 + 2B \cdot X_0 + c. \tag{13.52}$$

Поскольку по условию

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c' \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_4 = c' I_3, \quad I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0. \quad (13.53)$$

Таким образом, в новой прямоугольной системе координат $\{O', \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ уравнение поверхности второго порядка (13.30) примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{K_4}{I_3} = 0. \quad (13.54)$$

Для сокращения формы записи мы используем в новой системе координат не координаты x', y', z', а x, y, z.

13.16. Эллипсоид. Если уравнение (13.54) — *эллипсоид*, то числа λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака, а число K_4/I_3 имеет знак им противоположный, но так как $I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, то $K_4 < 0$.

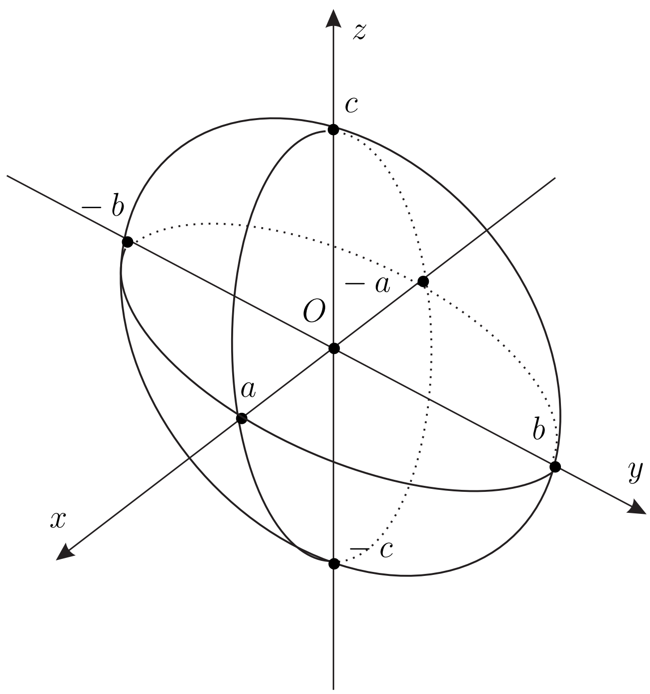

Рис. 13.2. Эллипсоид.

□ Действительно, пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$. Тогда $I_3 < 0$. Но тогда

$$\frac{K_4}{I_3} > 0 \Rightarrow K_4 < 0.$$

Пусть теперь $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. Тогда $I_3 > 0$ и

$$\frac{K_4}{I_3} < 0 \Rightarrow K_4 < 0.$$

Кроме того, имеют место неравенства

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 > 0, \quad I_1 I_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0. \tag{13.55}$$

Следовательно, эллипсоид определяется следующим набором ортогональных инвариантов:

$$\boxed{\textbf{Эллипсоид:} \quad I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \quad K_4 < 0.} \tag{13.56}$$

И уравнение эллипсоида можно привести к следующему каноническому виду:[1]

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.} \tag{13.57}$$

13.17. Мнимый эллипсоид. Если уравнение (13.54) — мнимый эллипсоид, то это означает, что все числа λ_1, λ_2, λ_3 и K_4/I_3 одного знака. Точно также как и в случае эллипсоида приходим к выводу о том, что $K_4 > 0$. Кроме того, имеют место неравенства (13.55). Следовательно, мнимый эллипсоид определяется следующим набором на ортогональные инварианты:

$$\boxed{\textbf{Мнимый эллипсоид:} \quad I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \quad K_4 > 0.} \tag{13.58}$$

И уравнение эллипсоида можно привести к следующему каноническому виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.} \tag{13.59}$$

13.18. Мнимый конус. Если уравнение (13.54) — мнимый конус, то это означает, что $K_4 = 0$ и все числа λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака. При этом точно также как и ранее имеем неравенства (13.55). Следовательно,

$$\boxed{\textbf{Мнимый конус:} \quad I_2 > 0, \quad I_1 I_3 > 0, \quad K_4 = 0.} \tag{13.60}$$

[1] К сожаленью, мы используем букву c еще в уравнении поверхности второго порядка.

И уравнение мнимого конуса можно привести к следующему каноническому виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.} \tag{13.61}$$

13.19. Однополостный гиперболоид. Если уравнение (13.54) опи-

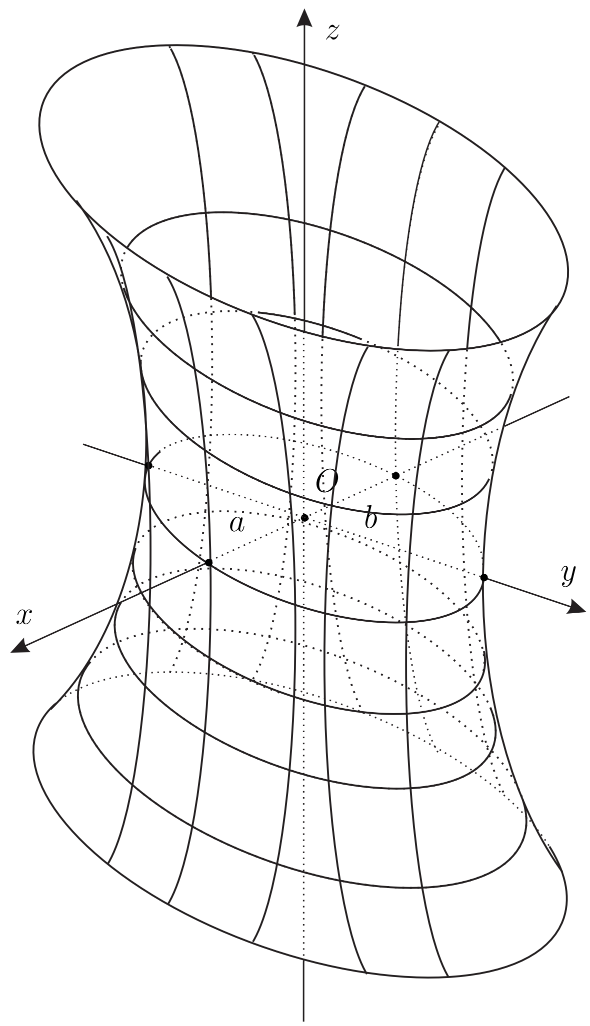

Рис. 13.3. Однополостный гиперболоид.

сывает однополостный гиперболоид, то из четырех чисел

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3 \quad \text{и} \quad \frac{K_4}{I_3} \tag{13.62}$$

два числа положительны, а два отрицательны. Без ограничения общности нужно рассмотреть два случая:

$$\boxed{\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 < 0, \quad K_4/I_3 < 0,}$$

$$\boxed{\lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad K_4/I_3 > 0.}$$

Случай 1. В этом случае имеем $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$ и поэтому $K_4 > 0$. Теперь мы имеем на выбор два подслучая:

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \leqslant 0, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{13.63}$$

Пусть выполнено второе неравенство в (13.63). Докажем, что тогда

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0. \tag{13.64}$$

☐ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \tag{13.65}$$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{13.66}$$

По предположению имеем

$$\lambda_1\lambda_3 < 0. \tag{13.67}$$

Из (13.66) и (13.67) получаем, что

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 < 0, \tag{13.68}$$

что противоречит второму неравенству из (13.63). Следовательно, справедливо неравенство (13.64). ☒

Итак,

$$I_2 > 0 \Rightarrow I_1 I_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \leqslant 0. \tag{13.69}$$

Случай 2. Пусть

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0, \quad \lambda_3 > 0, \quad \frac{K_4}{I_3} > 0. \tag{13.70}$$

Из (13.70) вытекает

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0 \Rightarrow K_4 > 0. \tag{13.71}$$

Пусть либо $I_2 \leqslant 0$ либо $I_2 > 0$ (см. определение (13.63)). Рассмотрим второй подслучай:

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0 \tag{13.72}$$

Докажем, что
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0. \tag{13.73}$$
□ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \tag{13.74}$$
Умножим обе части неравенства (13.74) на $\lambda_1 < 0$ и, с одной стороны, получим такое неравенство
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0, \tag{13.75}$$
а с другой стороны из (13.70) вытекает неравенство
$$\lambda_2\lambda_3 < 0. \tag{13.76}$$
Итак, из неравенств (13.75) и (13.76) получаем неравенство
$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 < 0, \tag{13.77}$$
что противоречит неравенству (13.72). Значит,
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0 \Rightarrow I_3 I_1 \leqslant 0. \quad \boxtimes \tag{13.78}$$
Итак,
$$I_2 > 0 \Rightarrow I_3 I_1 \leqslant 0.$$
Таким образом, приходим к двум наборам условий на инварианты, при которых поверхность (13.54) описывает однополостный гиперболоид.

$$\boxed{\textbf{Однополостный гиперболоид}: \quad I_3 \neq 0, \quad K_4 > 0, \quad I_2 \leqslant 0,}$$

$$\boxed{\textbf{Однополостный гиперболоид}: \quad I_3 \neq 0, \quad K_4 > 0, \quad I_1 I_3 \leqslant 0.}$$

Уравнение однополостного гиперболоида в канонической системе координат имеет следующий вид:
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.} \tag{13.79}$$

13.20. Двуполостный гиперболоид. Если уравнение (13.54) описывает двуполостный гиперболоид, то два корня из $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют одинаковый знак с K_4/I_3, а третий противоположный. Рассмотрим два случая

Случай 1. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $K_4/I_3 > 0$ и $\lambda_3 < 0$. Тогда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$ и поэтому $K_4 < 0$. Теперь либо
$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \leqslant 0 \tag{13.80}$$
либо

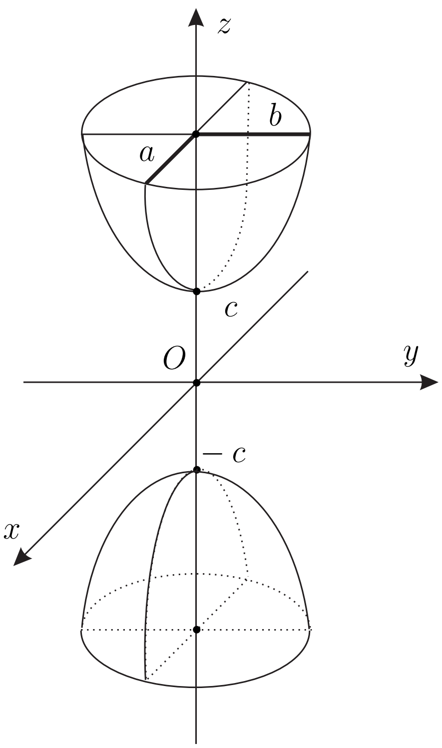

Рис. 13.4. Двуполостный гиперболоид.

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{13.81}$$

Предположим, что $I_2 > 0$. Докажем, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0 \tag{13.82}$$

и тогда $I_1 I_3 \leqslant 0$.

□ Действительно, пусть выполнено противное условие

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \tag{13.83}$$

Умножим это неравенство на $\lambda_1 > 0$ и получим неравенства

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{13.84}$$

По предположению $\lambda_1\lambda_3 < 0$. Поэтому приходим с учетом (13.84) приходим к неравенству

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{13.85}$$

которое противоречит неравенству (13.81). Следовательно, выполнено неравенство (13.82). ⊠

Итак, если $I_2 > 0$, то $I_3 I_1 \leqslant 0$.

Случай 2. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $K_4/I_3 < 0$ и $\lambda_3 > 0$. Тогда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ и поэтому $K_4 < 0$. Теперь либо $I_2 > 0$ либо $I_2 \leqslant 0$. Предположим, что

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \tag{13.86}$$

Докажем, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0. \tag{13.87}$$

□ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \tag{13.88}$$

Умножим обе части неравенства (13.88) на $\lambda_1 < 0$ и получим неравенства

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{13.89}$$

Согласно исходному предположению $\lambda_2\lambda_3 < 0$ и поэтому с учетом (13.89) приходим к неравенству

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 < 0, \tag{13.90}$$

которое противоречит неравенству (13.86). Итак, имеет место неравенство (13.87). ⊠

Следовательно, если $I_2 > 0$, то $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Таким образом, приходим к двум наборам условий на инварианты, при которых поверхность (13.54) описывает двуполостный гиперболоид.

$$\boxed{\textbf{Двуполостный гиперболоид}: \quad I_3 \neq 0, \quad K_4 < 0, \quad I_2 \leqslant 0,}$$

$$\boxed{\textbf{Двуполостный гиперболоид}: \quad I_3 \neq 0, \quad K_4 < 0, \quad I_1 I_3 \leqslant 0.}$$

Уравнение двуполостного гиперболоида в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.} \tag{13.91}$$

13.21. Конус. Если уравнение (13.54) описывает конус, то $K_4/I_3 = 0$. Поэтому $K_4 = 0$ и $I_3 \neq 0$. Причем два корня из трех λ_1, λ_2 и λ_3 одного знака, а третий противоположного. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 < 0$. Тогда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. Причем либо

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \leqslant 0 \tag{13.92}$$

либо

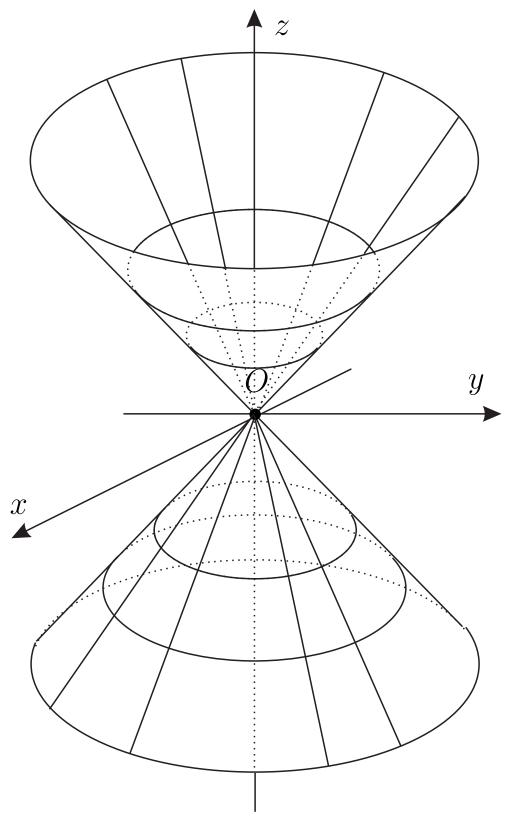

Рис. 13.5. Конус.

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 > 0. \qquad (13.93)$$

Пусть выполнено (13.93). Докажем, что тогда

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 0. \qquad (13.94)$$

☐ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0. \qquad (13.95)$$

Умножим обе части неравенства (13.95) на $\lambda_1 > 0$ и получим неравенства

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \qquad (13.96)$$

Согласно условию $\lambda_2\lambda_3 < 0$. Отсюда и с учетом (13.96) получим неравенство

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0, \qquad (13.97)$$

которое противоречит неравенству (13.93). Следовательно, имеет место (13.94), т.е. $I_1 I_3 \leqslant 0$. ⊠

Итак, если $I_2 > 0$, то $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Случай 2. Пусть $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 > 0$. Тогда $I_3 > 0$. Причем либо $I_2 \leqslant 0$ либо $I_2 > 0$. Пусть выполнено последнее неравенство. Докажем, что

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leqslant 0. \tag{13.98}$$

☐ Действительно, пусть выполнено противоположное неравенство

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \tag{13.99}$$

Умножим обе части этого неравенства на $\lambda_1 < 0$ и получим неравенства

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 < -\lambda_1^2 < 0. \tag{13.100}$$

По условию $\lambda_2\lambda_3 < 0$. Отсюда и из (13.100) мы приходим к неравенству

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 < 0, \tag{13.101}$$

которое противоречит неравенству $I_2 > 0$. Итак, неравенство (13.98) доказано. ☒

Следовательно, если $I_2 > 0$, то $I_1 I_3 \leqslant 0$.

Таким образом, приходим к двум наборам условий на инварианты, при которых поверхность (13.54) описывает конус.

$$\boxed{\textbf{Конус}: \quad I_3 \neq 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 \leqslant 0,}$$

$$\boxed{\textbf{Конус}: \quad I_3 \neq 0, \quad K_4 = 0, \quad I_1 I_3 \leqslant 0.}$$

Уравнение конуса в канонической системе координат имеет следующий вид:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.} \tag{13.102}$$

5. Вторая группа: параболоиды

13.22. Первоначальные соображения. К параболоидам относятся поверхности второго порядка, у которых инвариант

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0, \quad \text{но} \quad K_4 \neq 0,$$

причем только один корень из трех λ_1, λ_2 и λ_3 равен нулю. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_3 = 0$. Рассмотрим поверхность (13.24) второго порядка, записанную в исходной прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Сначала сделаем только поворот и получим в новой прямоугольной декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ уравнение

$$Z'^T \cdot D' \cdot Z' = 0, \tag{13.103}$$

$$D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & b_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' & c \end{pmatrix}. \tag{13.104}$$

Теперь сделаем сдвиг в точку $O' = (x_0, y_0, 0)$, которая определяется как решение следующей системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0 = -\frac{b_1'}{\lambda_1}, \quad y_0 = -\frac{b_2'}{\lambda_2}. \tag{13.105}$$

В результате этого сдвига получим новое уравнение

$$Z''^T \cdot D'' \cdot Z'' = 0, \tag{13.106}$$

$$D'' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3'' \\ 0 & 0 & b_3'' & c'' \end{pmatrix} \Rightarrow K_4 = -(b_3'')^2 \lambda_1 \lambda_2. \tag{13.107}$$

Поскольку K_4 является инвариантом и $K_4 \neq 0$, то $b_3'' \neq 0$. В силу этого вывода параболоиды не являются центральными поверхностями, поскольку уравнение центра имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3'' \end{pmatrix}, \quad b_3'' \neq 0. \tag{13.108}$$

Вывод из этих предварительных рассуждений, что без ограничения общности при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ ($I_3 = 0$) и $K_4 \neq 0$ мы получаем ровно две поверхности при $K_4 > 0$ и при $K_4 < 0$.

13.23. Эллиптический параболоид. Если уравнение (13.54) описывает эллиптический параболоид, то

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = I_2 \lambda_3 = 0, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2 > 0,$$

причем в силу (13.107) справедливо неравенство $K_4 < 0$. При этом имеем

$$|b_3''| = \sqrt{-\frac{K_4}{I_2}} \tag{13.109}$$

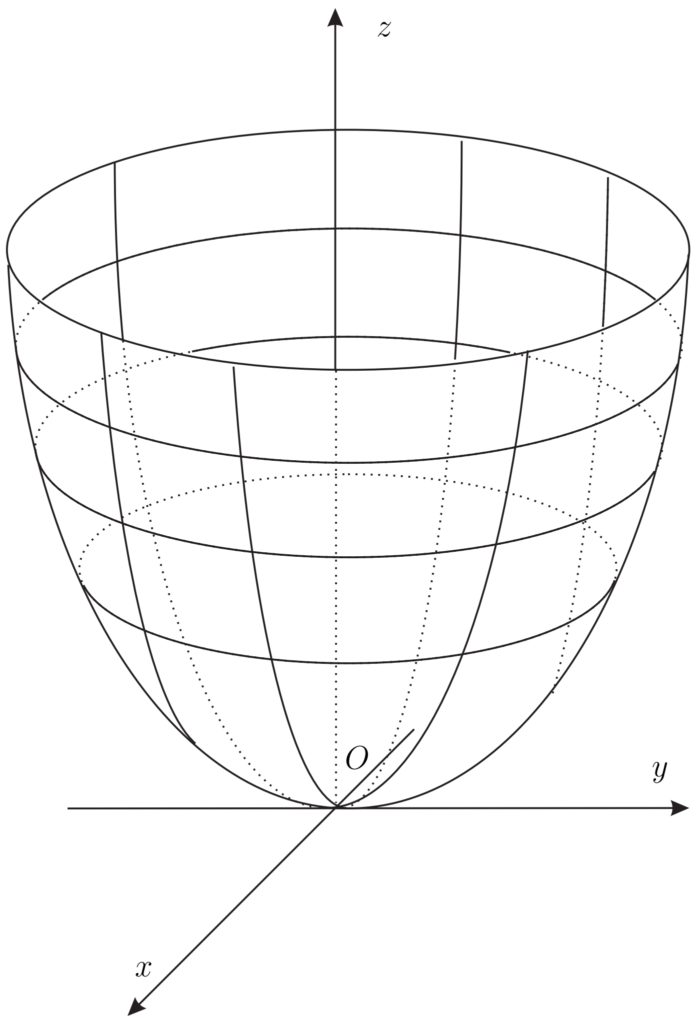

Рис. 13.6. Эллиптический параболоид.

и очевидно величина $|b_3''|$ является полуинвариантом относительно сдвигов. Осталось сделать сдвиг

$$z''' = z'' + \frac{c''}{2b_3''}.$$

Таким образом, приходим к выводу , что

$$\boxed{\textbf{Эллиптический параболоид}: \quad I_3 = 0, \quad I_2 > 0, \quad K_4 < 0.}$$

Уравнение эллиптического параболоида можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.} \tag{13.110}$$

13.24. Гиперболический параболоид. Если уравнение (13.54) описывает гиперболический параболоид, то

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = I_2\lambda_3 = 0, \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0,$$

причем в силу (13.107) имеем $K_4 > 0$. Таким образом, приходим к выводу , что

$$\boxed{\textbf{Гиперболический параболоид}: \quad I_3 = 0, \quad I_2 < 0, \quad K_4 > 0.}$$

Уравнение гиперболического параболоида можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.} \tag{13.111}$$

6. Третья группа: эллиптические и гиперболические цилиндры

13.25. Эллиптический цилиндр.

Если уравнение (13.54) описывает эллиптический цилиндр, то $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, причем два корня одного знака, а третий корень равен нулю. Например, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 = 0$. При этом после поворота мы получим для ортогонального инварианта K_4 выражение

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & b_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' & c \end{vmatrix}. \tag{13.112}$$

Поскольку $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$, то можно сделать сдвиг в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}, \quad z_0 = 0. \tag{13.113}$$

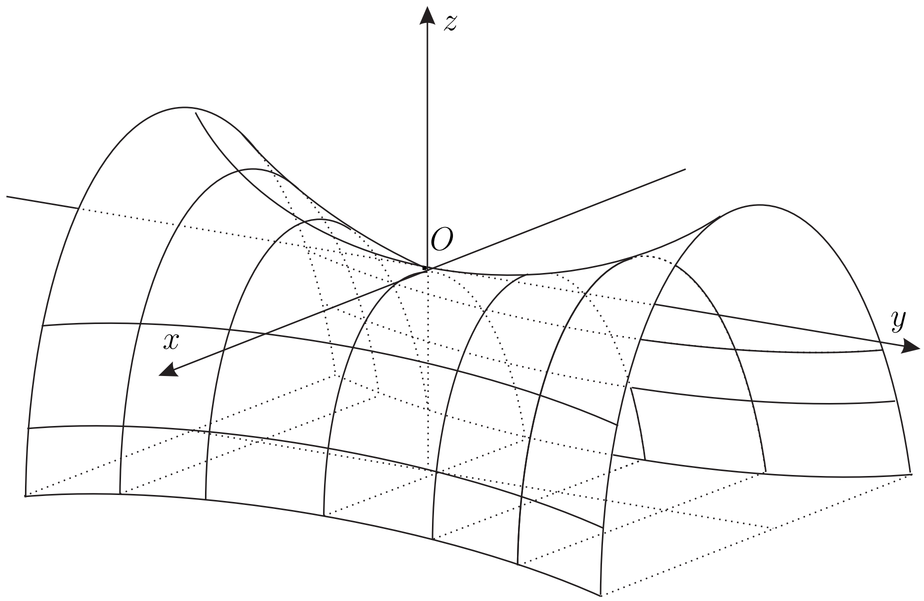

Рис. 13.7. Гиперболический параболоид.

В результате которого ортогональный инвариант K_4 примет вид

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3'' \\ 0 & 0 & b_3'' & c' \end{vmatrix}. \tag{13.114}$$

Эллиптический цилиндр определяется условием, что $K_4 = 0$. Из (13.114) тогда получаем

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c' \end{vmatrix}. \tag{13.115}$$

Тогда получаем, что

$$K_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 c' = I_2 c' \Rightarrow c' = \frac{K_3}{I_2}. \tag{13.116}$$

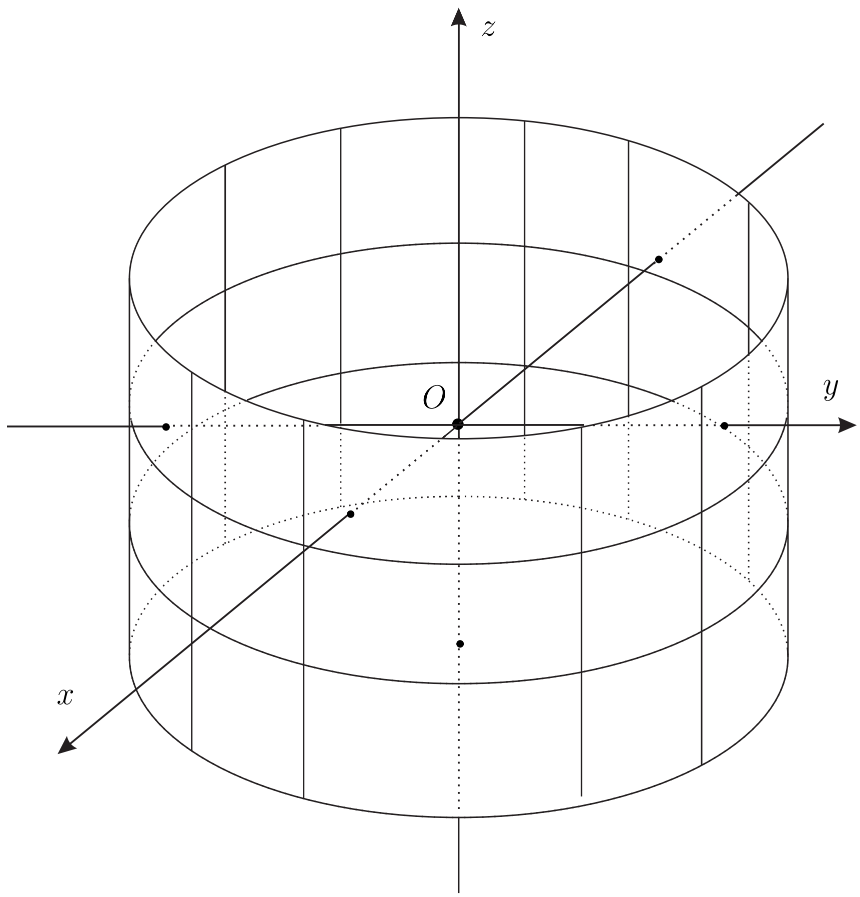

Рис. 13.8. Эллиптический цилиндр.

Тогда уравнение поверхности второго порядка примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0. \tag{13.117}$$

Эллиптический цилиндр характеризуется тем, что знаки λ_1, λ_2 противоположны знаку K_3/I_2. Поскольку $I_2 = \lambda_1\lambda_2 > 0$, то знак K_3 противоположен знаку $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Таким образом, имеем

$$K_3 I_1 < 0. \tag{13.118}$$

$$\boxed{\textbf{Эллиптический цилиндр}: I_3 = 0,\ K_4 = 0,\ I_2 > 0,\ I_1 K_3 < 0.}$$

Уравнение эллиптического цилиндра можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{13.119}$$

13.26. Мнимый эллиптический цилиндр. Отличается от вещественного эллиптического цилиндра тем, что знак K_3 совпадает со знаком I_1. Поэтому из уравнения (13.117) имеем

$$\boxed{\textbf{Мнимый эллиптический цилиндр}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 > 0, \quad I_1 K_3 > 0.}$$

Уравнение эллиптического цилиндра можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.} \tag{13.120}$$

13.27. Две мнимые пересекающиеся плоскости. Эта поверхность получается из уравнения (13.117) при $K_3 = 0$. Поэтому из уравнения (13.117) имеем

$$\boxed{\textbf{Две мнимые пересекающиеся плоскости}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 > 0, \quad K_3 = 0.}$$

Уравнение пары мнимых пересекающихся плоскостей можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.} \tag{13.121}$$

13.28. Гиперболический цилиндр.

Эта поверхность отличается от эллиптического цилиндра тем, что два корня разных знаков. Третий корень равен нулю. Рассуждая как и в случае эллиптического цилиндра получим уравнение

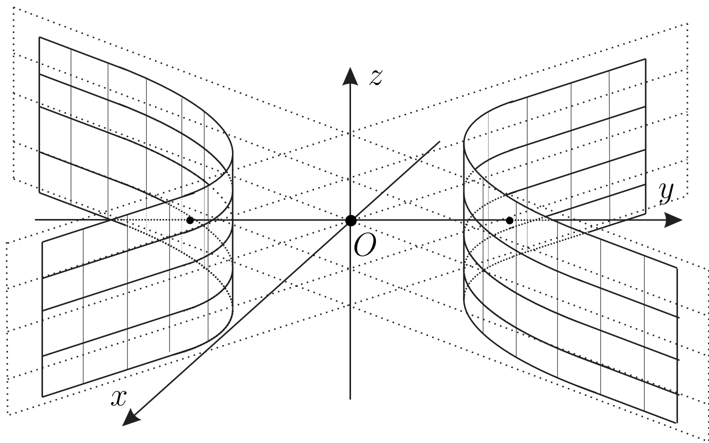

Рис. 13.9. Гиперболический цилиндр.

(13.117), в котором $I_2 = \lambda_1\lambda_2 < 0$ и $K_3 \neq 0$. Поэтому из уравнения (13.117) имеем

$$\boxed{\textbf{Гиперболический цилиндр}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 < 0, \quad K_3 \neq 0.}$$

Уравнение гиперболического цилиндра можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.} \tag{13.122}$$

13.29. Пара пересекающихся плоскостей. Отличие от гиперболического цилиндра в том, что в уравнении (13.117) $K_3 = 0$. Поэтому из уравнения (13.117) имеем

$$\boxed{\textbf{Пара пересекающихся плоскостей}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 < 0, \quad K_3 = 0.}$$

Уравнение пары пересекающихся плоскостей можно привести к следующему виду:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.} \tag{13.123}$$

7. Четвертая группа: параболический цилиндр

13.30. Параболический цилиндр. Это случай, когда $I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$, $I_2 = \lambda_1\lambda_2 = 0$.

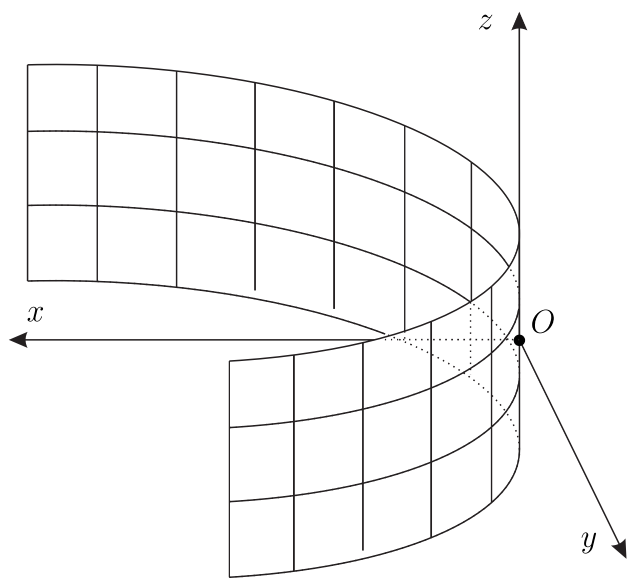

Рис. 13.10. Параболический цилиндр.

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а $\lambda_1 \neq 0$. После поворота мы получим следующее уравнение:

$$\lambda_1 x^2 + 2b_1' x + 2b_2' y + 2b_3' z + c = 0 \tag{13.124}$$

Заметим, что тогда

$$K_4 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & 0 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & b_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' & c' \end{vmatrix} = 0. \tag{13.125}$$

Поскольку $\lambda_1 \neq 0$, то мы можем сделать сдвиг, чтобы избавится от слагаемого $2b_1' x$. В результате получим уравнение

$$\lambda_1 (x')^2 + 2b_2' y' + 2b_3' z' + c' = 0. \tag{13.126}$$

Теперь осталось сделать поворот вокруг оси Ox и получить уравнение следующего вида:

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2b_2'' y'' + c' = 0. \tag{13.127}$$

Далее имеем

$$K_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2'' \\ 0 & b_2'' & c' \end{vmatrix} = -\lambda_1 (b_2'')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |b_2''| = \sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}}, \quad K_3 \neq 0. \tag{13.128}$$

Таким образом, уравнение (13.127) можно при помощи еще одного сдвига, чтобы исчезло слагаемое c', привести к следующему уравнению:

$$(x''')^2 = 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1^3}} y'''. \tag{13.129}$$

Поэтому из уравнения (13.117) имеем

Параболический цилиндр :

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 \neq 0, \quad I_1 \neq 0.}$$

Уравнение параболического цилиндра можно привести к следующему виду:

$$\boxed{x^2 = 2py.} \tag{13.130}$$

8. Пятая группа: вырожденные параболические цилиндры

13.31. Две параллельные плоскости. Этот случай, который характеризуется теми же условиями, что и параболический цилиндр, только $b_2'' = 0$, т.е. в силу (13.128) имеем $K_3 = 0$. Тогда уравнение (13.127) примет следующий вид:

$$\lambda_1 x^2 + c' = 0. \tag{13.131}$$

Тогда

$$K_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix} = \lambda_1 c' = I_1 c' \Rightarrow c' = \frac{K_2}{I_1}. \qquad (13.132)$$

Таким образом, из (13.133) и (13.134) мы приходим к уравнению

$$x^2 + \frac{K_2}{I_1^2} = 0. \qquad (13.133)$$

Условие того, чтобы уравнение (13.133) описывало две параллельные плоскости — это $K_2 < 0$. Поэтому из уравнения (13.133) имеем

$$\boxed{\textbf{Две параллельные плоскости}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 < 0, \quad I_1 \neq 0.}$$

Уравнение двух параллельных плоскостей можно привести к следующему виду:

$$\boxed{x^2 - a^2 = 0.} \qquad (13.134)$$

13.32. Две мнимые параллельные плоскости. Из уравнения (13.133) имеем:

$$\boxed{\textbf{Две мнимые параллельные плоскости}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 > 0, \quad I_1 \neq 0.}$$

Уравнение двух параллельных плоскостей можно привести к следующему виду:

$$\boxed{x^2 + a^2 = 0.} \qquad (13.135)$$

13.33. Две совпадающие плоскости. Из уравнения (13.133) имеем:

$$\boxed{\textbf{Две совпадающие плоскости}:}$$

$$\boxed{I_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad I_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_2 = 0, \quad I_1 \neq 0.}$$

Уравнение двух совпадающих плоскостей можно привести к следующему виду:

$$\boxed{x^2 = 0.} \tag{13.136}$$

9. Линейчатые поверхности

13.34. Определение. Поверхность S называется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через эту точку и параллельная оси Oz, целиком лежит на S.

13.35. Лемма. Всякое алгебраическое уравнение линии второго порядка вида $F(x, y) = 0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz.

Доказательство. Всякая точка $M_0(x_0, y_0, z)$, для которой имеет место равенство $F(x_0, y_0) = 0$, лежит на поверхности $F(x, y) = 0$. Согласно определению 13.34 — это поверхность цилиндра. □

13.36. Определение. Поверхность S называется конической или конусом с вершиной в начале координат O, если она обладает следующим свойством: какова бы ни была лежащая на этой поверхности и отличная от начала координат точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, прямая линия, проходящая через точку M_0 и начало координат O, целиком лежит на поверхности S.

Пусть $F(x, y, z) = 0$ — это уравнение поверхности второго порядка, причём $F(0, 0, 0) = 0$.

13.37. Лемма. Если $F(tx, ty, tz) = t^2 F(x, y, z)$, то уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{13.137}$$

описывает конус.

Доказательство. Действительно, пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — это точка на поверхности S, определяемой уравнением (13.137), и отличная от точки $O(0, 0, 0)$. Тогда прямая

$$x = x_0 t, \quad y = y_0 t, \quad z = z_0 t \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}$$

целиком лежит на этой поверхности S и, очевидно, проходит через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $O(0, 0, 0)$. □

13.38. Определение. Поверхность S называется l–кратно линейчатой, если через каждую её точку проходит ровно $l \in \mathbb{N}$ различных прямых, лежащих на этой поверхности, называемых прямолинейными образующими.

13.39. Пример. Все цилиндры (эллиптический, гиперболический и параболический) являются 1–линейчатыми поверхностями. Конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

не является 1–линейчатой поверхностью, поскольку через точку $(0,0,0)$ проходит не одна прямая, а бесконечно много прямых.

13.40. Пример. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

является дважды линейчатой поверхностью.

Доказательство. Действительно, запишем уравнение однополостного гиперболоида в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\Leftrightarrow\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Пусть точка (x_0,y_0,z_0) лежит на гиперболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений

$$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}\right)=\beta\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right),\\[2ex] \beta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\right)=\alpha\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right),\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}\gamma\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}\right)=\delta\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right),\\[2ex] \delta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\right)=\gamma\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right),\end{cases}$$

Заметим, что эти две системы относительно неизвестных (α,β) и (γ,δ) имеют нетривиальные решения $(\alpha_0,\beta_0)\neq(0,0)$ и $(\gamma_0,\delta_0)\neq(0,0)$, поскольку определители систем равны нулю. Например, для первой системы

$$\begin{vmatrix}\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c} & -\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right)\\[2ex] -\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right) & \dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\end{vmatrix}=\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{z_0^2}{c^2}\right)-\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=0.$$

Теперь рассмотрим следующие две системы уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \beta_0 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right); \\ \\ \beta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \alpha_0 \left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \end{cases} \tag{13.138}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \delta_0 \left(1 + \dfrac{y}{b}\right); \\ \\ \delta_0 \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \gamma_0 \left(1 - \dfrac{y}{b}\right). \end{cases} \tag{13.139}$$

Это и есть уравнения двух прямых, лежащих на поверхности однополостного гиперболоида и проходящих через точку (x_0, y_0, z_0). Однако, осталось доказать, что любые две прямые из семейства (13.138) не пересекаются и любые две прямые из семейства (13.139) не пересекаются. Докажем это, например, для семейства (13.138). Заметим, что каждой точке $M_0(x_0, y_0 z_0)$ однополостного гиперболоида однозначно соответствует число

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}}{1 - \dfrac{y_0}{b}}, \quad \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{1 + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}},$$

поскольку

$$\frac{\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{z_0}{c}}{1 - \dfrac{y_0}{b}} = \frac{1 + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{z_0}{c}}.$$

Поэтому если предположить, что две прямые семейства (13.138) пересекаются в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то эти прямые просто совпадают, поскольку этим двум прямым соответствует одно и тоже соотношение

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

а, значит, их уравнения совпадают. □

13.41. Пример. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

является дважды линейчатой поверхностью.

Доказательство.

Действительно, запишем уравнение гиперболического параболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z.$$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на гиперболическом параболоиде. Рассмотрим две системы однородных линейных уравнений относительно неизвестных (α, β) и (γ, δ):

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)=\beta, \\[2ex] \beta\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=2\alpha z_0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \gamma\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{y_0}{b}\right)=\delta, \\[2ex] \delta\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{y_0}{b}\right)=2\gamma z_0, \end{cases}$$

Определители этих систем равны нулю! Поэтому существуют нетривиальные их решения (α_0, β_0) и (γ_0, δ_0). Тогда следующие системы уравнений описывают искомые прямые:

$$\begin{cases} \alpha_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=\beta_0, \\[2ex] \beta_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2\alpha_0 z, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \gamma_0\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=\delta_0, \\[2ex] \delta_0\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2\gamma_0 z. \end{cases}$$

□

10. Примеры решения задач

13.42. Пример. Написать уравнение круглого цилиндра радиуса r, осью которого является прямая

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}. \tag{13.140}$$

Решение. Уравнение прямой (13.140) перепишем в следующем виде:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{n}t, \tag{13.141}$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\mathbf{n} = \{a, b, c\}$. Теперь напишем уравнение плоскости, проходящую через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$, перпендикулярную указанной прямой:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = 0. \tag{13.142}$$

Найдём радиус–вектор $\mathbf{r}_2$ ортогональной проекции точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ на указанную прямую — это точка пересечения плоскости и прямой:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_0 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{13.143}$$

Искомый цилиндр — это такое геометрическое место точек $M_1(\mathbf{r}_1)$, расстояние которых до оси цилиндра равно r :

$$r^2 = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = \left|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}\right|^2 = \frac{|[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0]]|^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})^2} = \\ = \frac{|[\mathbf{n}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0]|^2}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}. \tag{13.144}$$

Итак, в координатах имеет место следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} b & c \\ y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ x - x_0 & z - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x - x_0 & y - y_0 \end{vmatrix}^2 = \\ = r^2(a^2 + b^2 + c^2). \tag{13.145}$$

ГЛАВА 14

Тензоры

1. Правило умножения «строчка на столбец»

14.1. Пример. В этом параграфе мы детально применим наше правило умножения матриц «строчка на столбец» для того, чтобы переходить от тензорной формы записи умножения матриц к матричной форме. Причем это будем делать на примерах. Мы пользуемся обозначениями Эйнштейна. Начнем со следующего простейшего случая:

$$\boxed{a^i b_i.} \tag{14.1}$$

Заметим, что в случае одного индекса у буквы верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. В таком случае рассмотрим следующие матрицу–столбец и матрицу–строчку:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{14.2}$$

Наше правило «строчка на столбец» в данном случае означает, что мы можем умножить строчку B на столбец A и поэтому справедливы равенства

$$a^i b_i = b_i a^i = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B \cdot A. \tag{14.3}$$

Заметим, что при этом нам пришлось поменять местами сомножители в сумме произведений (14.1).

14.2. Пример. Теперь рассмотрим следующий пример. Как записать в матричной форме следующую сумму произведений

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.} \tag{14.4}$$

Поскольку у обоих букв индекс нижний, то эти индексы нумеруют столбцы следующих матриц–строчек:

$$A = (a_1, \ldots, a_n), \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{14.5}$$

Но умножить строчку на строчку мы не можем. Найдем транспонированные матрицы к матрицам–строчкам (14.5). Они имеют следующий вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{14.6}$$

Но теперь у нас справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \cdot B^T, \tag{14.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B \cdot A^T. \tag{14.8}$$

Заметим, что сумма произведений (14.4) — это число, произведения $A \cdot B^T$ и $B \cdot A^T$ — матрицы размера 1×1 и поэтому справедливы следующие равенства:

$$A \cdot B^T = (A \cdot B^T)^T = (B^T)^T \cdot A^T = B \cdot A^T. \tag{14.9}$$

Таким образом, мы пришли к выводу о том, что если в сумме произведений индекс суммирования у обоих элементов матриц находится внизу, нужно при записи в матричной форме переходить к транспонированной матрице.

14.3. Пример. Теперь рассмотрим следующую сумму произведений:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a^i b^i.} \tag{14.10}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то мы введем следующие матрицы–столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \tag{14.11}$$

Умножить столбец на столбец мы не можем. Поэтому как в предыдущем случае рассмотрим соответствующие транспонированные матрицы:

$$A^T = (a^1, \ldots, a^n), \quad B^T = (b^1, \ldots, b^n). \tag{14.12}$$

Но тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = (a^1, \ldots, a^n) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = A^T \cdot B, \tag{14.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = \sum_{i=1}^{n} b^i a^i = (b^1, \ldots, b^n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B^T \cdot A. \tag{14.14}$$

Заметим, как и в предыдущем примере, что $A^T \cdot B = B^T \cdot A \in \mathbb{K}^{1\times 1}$.

Теперь наша задача рассмотреть разнообразные суммы произведений элементов квадратных матриц $n \times n$.

14.4. Пример. Начнем со следующего примера:

$$\boxed{a^j_s b^s_k,} \tag{14.15}$$

здесь мы используем обозначения Эйнштейна. В данном случае мы используем один верхний и один нижний индексы для задания элемента матрицы. Верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. Итак, введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|, \quad A^j = (a^j_1, \ldots, a^j_n), \quad j = \overline{1, n}, \tag{14.16}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n_1 & \cdots & b^n_n \end{pmatrix} = \|B_1, \ldots, B_n\|, \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{14.17}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$a^j_s b^s_k = (a^j_1, \ldots, a^j_n) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix} = A^j \cdot B_k = \{A \cdot B\}^j_k. \tag{14.18}$$

Напомним, что символом $\{C\}^j_k$ мы обозначаем операцию извлечения из матрицы C ее элемент, расположенный на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

14.5. Определение. Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Введем операции извлечения j–ой строчки из матрицы A и операцию извлечения k–го столбца из матрицы A следующим образом:

$$\{A\}^j = A^j, \quad \{A\}_k = A_k, \quad A = \|A_1, \ldots, A_n\| = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}.$$

14.6. Пример. Теперь рассмотрим вот такой пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^j_s b^k_s.} \tag{14.19}$$

Поскольку нижний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b^k_1, \ldots, b^k_n), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b^k_1 \\ \vdots \\ b^k_n \end{pmatrix}. \tag{14.20}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(B^k)^T = \{B^T\}_k, \tag{14.21}$$

причем индекс в правой и в левой частях носят разный характер. В левой части индекс k совпадает с верхним индексом, которым мы обозначаем элементы матрицы $B = (b^k_s)$, а в правой части индексом k мы обозначаем k–ый столбец матрицы B^T.

Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^j_s b^k_s = (a^j_1, \ldots, a^j_n) \begin{pmatrix} b^k_1 \\ \vdots \\ b^k_n \end{pmatrix} = A^j \cdot (B^k)^T =$$

$$= \{A\}^j \{B^T\}_k = \{A \cdot B^T\}^j_k = \{A \cdot B^T\}^{jk}, \tag{14.22}$$

где символом $\{C\}^{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы C, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Туже операцию мы обозначаем символом $\{C\}^j_k$.

14.7. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^s_k.} \tag{14.23}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то

$$A_j = \begin{pmatrix} a^1_j \\ \vdots \\ a^n_j \end{pmatrix}, \quad (A_j)^T = (a^1_j, \ldots, a^n_j), \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix}. \tag{14.24}$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} a^s_j b^s_k = (a^1_j, \ldots, a^n_j) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix} = (A_j)^T \cdot B_k = \\ = \{A^T\}^j \{B\}_k = \{A^T \cdot B\}^j_k = \{A^T \cdot B\}_{jk}, \end{aligned} \tag{14.25}$$

где символом $\{C\}_{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента матрицы C, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

14.8. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk}.} \tag{14.26}$$

Итак, в этом примере оба индекса верхние. Тогда первый индекс нумерует строчки матрицы,а второй индекс нумерует столбцы матрицы. Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}, \quad A^j = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}), \quad j = \overline{1, n}, \tag{14.27}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^{11} & \dots & b^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n1} & \dots & b^{nn} \end{pmatrix} = \|B^1, \dots, B^n\|, \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{14.28}$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk} = (a^{j1}, \dots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \cdot \{B\}_k = \{A \cdot B\}^{jk}. \tag{14.29}$$

14.9. Пример. Рассмотрим такой пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks}.} \tag{14.30}$$

Заметим, что поскольку второй верхний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b^{k1}, \dots, b^{kn}), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix}. \tag{14.31}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks} = (a^{j1}, \dots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix} =$$
$$= A^j \cdot (B^k)^T = \{A\}^j \cdot \{B^T\}_k = \{A \cdot B^T\}^j_k = \{A \cdot B^T\}^{jk}. \tag{14.32}$$

14.10. Пример. Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk}.} \tag{14.33}$$

В обозначениях предыдущих двух примеров получаем следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk} = (a^{1j}, \ldots, a^{nj}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} =$$
$$= (A^j)^T \cdot B^k = \{A^T\}_j \cdot B^k = \{A^T \cdot B\}^{jk},$$

где

$$A^j = \begin{pmatrix} a^{1j} \\ \vdots \\ a^{nj} \end{pmatrix}, \quad (A^j)^T = (a^{1j}, \cdots, a^{nj}), \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}.$$

14.11. Пример. Следующий пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^j_s b^{sk}.} \tag{14.34}$$

В этой сумме произведений во множителе a^j_s индекс j нумерует строчки, а индекс s нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^j_s b^{sk} = (a^j_1, \ldots, a^j_n) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \cdot \{B\}_k = \{A \cdot B\}^{jk}. \tag{14.35}$$

14.12. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^{sk}.} \tag{14.36}$$

Здесь, во множителе a^s_j индекс s нумерует строчки, а индекс j нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^{sk} = (a^1_j, \ldots, a^n_j) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} =$$
$$= (A_j)^T \cdot B_k = \{A^T\}^j \cdot \{B\}_k = \{A^T \cdot B\}^j_k = \{A^T \cdot B\}^{jk}, \tag{14.37}$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^n \end{pmatrix}, \quad (A_j)^T = (a_j^1, \cdots, a_j^n).$$

2. Первое определение тензора: «мистическое»

14.13. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим два базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ в этом линейном пространстве, которые связаны линейным преобразованием

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}_{i'}, \quad c^i_{i'} c^{i'}_j = \delta^i_j, \quad c^{i'}_i c^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}. \qquad (14.38)$$

Дадим первое определение тензора.

14.14. Определение. Тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется объект, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ задается n^{p+q} координатами $A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \in \mathbb{K}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A^{k_{1'} \ldots k_{q'}}_{j_{1'} \ldots j_{p'}} = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}, \qquad (14.39)$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование. Соответствующий своим координатам $A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$ тензор будем называть тензором A. Соответствие

$$\boxed{\text{тензор}} \leftrightarrow \boxed{\text{координаты}}$$

взаимно однозначно.

14.15. Иногда, допуская грубую ошибку, тензором называют его координаты $A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$.

14.16. Пример. Пусть A имеет одну и туже координату во всех базисах — это тензор скаляр типа $(0, 0)$.

14.17. Пример. Контравариантный тензор типа $(0, 1)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A^{k'} = c^{k'}_k A^k. \qquad (14.40)$$

Это набор координат вектора.

14.18. Пример. Ковариантный тензор типа $(1,0)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A_{k'} = c^k_{k'} A_k. \tag{14.41}$$

Это набор координат линейной формы (ковектора).

14.19. Пример. Градиент функции. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ связаны преобразованием

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \mathbf{e}_k, \quad x^k = c^k_{k'} x^{k'}. \tag{14.42}$$

Градиентом функции f называется «вектор»

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \mathbf{e}_k.$$

Однако, при переходе к новому базису (14.42) справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} c^k_{k'},$$

т.е. преобразуется как тензор ранга $(1,0)$. Следовательно, градиент функции — не вектор, а ковектор.

14.20. Лемма. Матрица линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ в каждом базисе линейного пространства $\mathcal{L}$ состоит из координат некоторого тензора ранга $(1,1)$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — два базиса линейного пространства $\mathcal{L}$, связанные равенством (14.42). Заметим, что матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, имеет следующий вид:

$$a^j_k = \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle, \tag{14.43}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в сопряженном к $\mathcal{L}$ линейном пространстве $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a^{j'}_{k'} = \langle \mathbf{e}^{j'}, A\mathbf{e}_{k'} \rangle = \left\langle c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j, A\left(c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k\right) \right\rangle = \\ = c^{j'}_j c^k_{k'} \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle = c^{j'}_j c^k_{k'} a^j_k. \tag{14.44}$$

$\square$

14.21. Лемма. Матрица билинейной формы на линейном пространстве $\mathcal{L}$ в каждом базисе состоит из координат некоторого тензора ранга $(2,0)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей леммы справедлива следующая цепочка равенств:

$$b_{j'k'} = B(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = B\left(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j, c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k\right) = \\ = c^j_{j'} c^k_{k'} B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = c^j_{j'} c^k_{k'} b_{jk}. \quad (14.45)$$

□

14.22. Дадим определение суммы тензоров и умножения тензора на число. Пусть $A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}$ и $B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}$ — координаты двух тензоров A и B одного типа (p, q), а $\alpha \in \mathbb{K}$ — произвольное число.

14.23. Определение. Суммой двух тензоров $A + B$ типа (p, q) называется объект D, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$D^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} := A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} + B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}. \quad (14.46)$$

Произведением тензора A типа (p, q) на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется объект $F := \alpha A$, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$F^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} := \alpha A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}. \quad (14.47)$$

14.24. Теорема. *Сумма двух тензоров типа (p, q) и произведение тензора типа (p, q) на число $\alpha \in \mathbb{K}$ являются тензорами типа (p, q).*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Поэтому докажем только первое утверждение. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$D^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} = A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} + B^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} + c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} \left(A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} + B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\right) = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} D^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}.$$

□

14.25. Дадим определение произведения двух тензоров A и B типов (p, q) и (r, s), которые в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеют координаты

$$A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} \quad \text{и} \quad B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} \quad (14.48)$$

соответственно.

14.26. Определение. Произведением тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) называется объект D, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$D^{k_1\ldots k_q i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_r} = A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r}. \tag{14.49}$$

14.27. Теорема. *Произведение двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) является тензором типа $(p+r,q+s)$.*

Доказательство. В стандартных обозначениях справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
D^{k_{1'}\ldots k_{q'} i_{1'}\ldots i_{s'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'} l_{1'}\ldots l_{r'}} &= A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} B^{i_{1'}\ldots i_{s'}}_{l_{1'}\ldots l_{r'}} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} D^{k_1\ldots k_q i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_r}.
\end{aligned}$$

□

14.28. Для произведения тензоров A и B используется обозначение

$$\boxed{A\otimes B.}$$

14.29. Лемма. В общем случае $A\otimes B \neq B\otimes A$ для тензоров A и B.

Доказательство. Приведем пример. Пусть A и B — тензоры типа $(0,1)$, координаты которых в одном и том же базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ следующие: A^j и B^k. Рассмотрим тензоры $D = A\otimes B$ и $F = B\otimes A$, координаты которых в том же базисе имеют следующий вид:

$$D^{jk} = A^j B^k \quad \text{и} \quad F^{kj} = B^k A^j.$$

Запишем эти координаты в виде следующих матриц:

$$\|D^{jk}\| = \begin{pmatrix} A^1B^1 & \cdots & A^1B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^nB^1 & \cdots & A^nB^n \end{pmatrix},$$

$$\|F^{kj}\| = \begin{pmatrix} B^1A^1 & \cdots & B^1A^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^nA^1 & \cdots & B^nA^n \end{pmatrix}.$$

Это две взаимно транспонированные матрицы. Следовательно, $D = A \otimes B \neq F = B \otimes A$. $\square$

14.30. Свертка тензора. Пусть A — тензор типа (p, q), причем $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$. Пусть в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ он имеет координаты

$$A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}.$$

Выберем у этих координат один верхний и один нижний индекс. Например, пусть это будут индексы k_1 и j_1 и рассмотрим сумму компонент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha k_2 \ldots k_q}_{\alpha j_2 \ldots j_p} = B^{k_2 \ldots k_q}_{j_2 \ldots j_p}. \tag{14.50}$$

14.31. Определение. Объект B, который в любом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты $B^{k_2 \ldots k_q}_{j_2 \ldots j_p}$, определенные равенством (14.50), называется сверткой тензора A по паре индексов.

14.32. Теорема. *Свертка тензора типа (p, q) по паре индексов представляет собой тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая тензора A типа $(2, 1)$, координаты которого в произвольном базисе обозначим символом A^l_{jk}. Рассмотрим свертку

$$B_j = A^k_{jk}$$

и получим закон преобразования для координат B_j. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} B_{j'} = A^{k'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} A^{l'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} c^{l'}_{l} c^{j}_{j'} c^{k}_{k'} A^{l}_{jk} = \\ = c^{j}_{j'} c^{k}_{k'} c^{k'}_{l} A^{l}_{jk} = c^{j}_{j'} \delta^{k}_{l} A^{l}_{jk} = c^{j}_{j'} A^{k}_{jk} = c^{j}_{j'} B_j. \end{aligned}$$

$\square$

14.33. Пример. Рассмотрим тензор A типа $(1, 1)$. Его сверткой является тензор типа $(0, 0)$, т.е. скаляр, имеющий в любой системе координат $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ одну координату

$$B = A^1_1 + \cdots + A^n_n. \tag{14.51}$$

С целью приобретения навыков в тензорных вычислениях давайте проверим, что тензор B является инвариантом, т.е. скаляром. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B = A^{j'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} A^{k'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} c^{k'}_{k} c^{j}_{j'} A^{k}_{j} = c^{k'}_{k} c^{j}_{k'} A^{k}_{j} =$$

$$= c_{k'}^{j} c_k^{k'} A_j^k = \delta_k^j A_j^k = A_j^j. \quad (14.52)$$

14.34. Довольно часто объект, который в каждом базисе задается совокупностью координат, при переходе от одного базиса к другому преобразуется другим образом, нежели закон (14.39). Однако, для специального класса преобразований базиса все же справедлив закон (14.39). Поэтому вводится еще один класс тензоров — *ортогональные тензоры.* Дадим определение.

14.35. Определение. Ортогональным тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется объект, который в каждом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ задается n^{p+q} координатами $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} \in \mathbb{K}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A_{j_{1'} \ldots j_{p'}}^{k_{1'} \ldots k_{q'}} = c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{p'}}^{j_p} c_{k_1}^{k_{1'}} \cdots c_{k_q}^{k_{q'}} A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}, \quad (14.53)$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование.

14.36. Для ортогональных тензоров можно, как и для тензоров, ввести операции сложения тензоров, умножения на число, произведения.

14.37. Пример. Рассмотрим тензор A типа $(2, 0)$. Докажем, что число

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jj}$$

не является инвариантом. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{j'=1}^{n'} A_{j'j'} = \sum_{j'=1}^{n'} \delta_{j'}^{k'} A_{j'k'} = \sum_{j'=1}^{n'} \delta_{j'}^{k'} c_{j'}^{j} c_{k'}^{k} A_{jk} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{n'} c_{j'}^{j} c_{j'}^{k} A_{jk} = \{CC^T\}^{jk} A_{jk}.$$

В общем случае

$$\{CC^T\}^{jk} \neq \delta^{jk} \Leftrightarrow CC^T \neq I.$$

Однако, если рассматривать ортогональные преобразования, т.е. матрицы перехода C между ортонормированными базисами в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, то будет выполнено равенство $C^T C = I$.

И тогда число A_{jj} будет инвариантом. Поэтому для ортогональных преобразований можно вести операцию свертки по двум нижним индексам, которая является *тензорной*, т.е. результатом свертки ортогональных тензоров тоже является ортогональным тензором. Ниже после рассмотрения метрического тензора мы поймем в чем здесь причина.

3. Второе определение тензора: полилинейная форма

14.38. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство, а $\mathcal{L}^*$ — соответствующее сопряженное пространство, а символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Для удобства элементы линейного пространства $\mathcal{L}$ будем обозначать латинскими буквами $x, y, z, \ldots$, а элементы сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$ будем обозначать греческими буквами $\xi, \eta, \chi, \ldots$. Дадим определение полилинейной формы.

14.39. Определение. Числовая функция $f = f(x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \chi, \ldots)$ от p векторных аргументов $x, y, z, \ldots$ и q ковекторных аргументов $\xi, \eta, \chi, \ldots$ называется полилинейной, если эта функция линейна по каждому аргументу из $p+q$ аргументов при оставшихся фиксированных $p+q-1$ аргументах. Говорят, что полилинейная форма f имеет тип (p,q).

14.40. Пример. Например, вот такая функция

$$f(x, y; \xi, \eta) = \langle\xi, x\rangle\langle\eta, y\rangle. \tag{14.54}$$

является полилинейной. Действительно, в силу линейности скобок двойственности по обоим аргументам справедливы следующие равенства:

$$\langle\alpha_1\cdot\xi^1+\alpha_2\cdot\xi^2, x\rangle\langle\eta, y\rangle = \alpha_1\langle\xi^1, x\rangle\langle\eta, y\rangle+\alpha_2\langle\xi^2, x\rangle\langle\eta, y\rangle,$$

$$\langle\xi, x\rangle\langle\alpha_1\cdot\eta^1+\alpha_2\cdot\eta^2, y\rangle = \alpha_1\langle\xi, x\rangle\langle\eta^1, y\rangle+\alpha_2\langle\xi, x\rangle\langle\eta^2, y\rangle,$$

$$\langle\xi, \beta^1\cdot x_1+\beta^2\cdot x_2\rangle\langle\eta, y\rangle = \beta^1\langle\xi, x_1\rangle\langle\eta, y\rangle+\beta^2\langle\xi, x_2\rangle\langle\eta, y\rangle,$$

$$\langle\xi, x\rangle\langle\eta, \beta^1\cdot y_1+\beta^2\cdot y_2\rangle = \beta^1\langle\xi, x\rangle\langle\eta, y_1\rangle+\beta^2\langle\xi, x\rangle\langle\eta, y_2\rangle.$$

Теперь заметим, что если, например, зафиксировать ковекторные аргументы $\xi, \eta\in\mathcal{L}^*$, то функция (14.54) будет билинейной функцией от векторных аргументов $x, y\in\mathcal{L}$. Конечно, можно зафиксировать векторный аргумент $x\in\mathcal{L}$ и ковекторный аргумент $\eta\in\mathcal{L}^*$ и мы получим билинейную функцию от аргументов $y\in\mathcal{L}$ и $\xi\in\mathcal{L}^*$.

14.41. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — два базиса в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис к $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в сопряженном пространстве ковекторов $\mathcal{L}^*$, причем

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\cdot\mathbf{e}_i. \tag{14.55}$$

Тогда

$$\mathbf{e}^{i'} = c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}^i \tag{14.56}$$

— взаимный базис к $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$.

Доказательство. Действительно, пусть $x \in \mathcal{L}$, тогда имеют место равенства

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i = x^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}, \tag{14.57}$$

$$\langle \mathbf{e}^{i'}, x\rangle = x^{i'} = c_i^{i'} x^i = c_i^{i'} \langle \mathbf{e}^i, x\rangle = \langle c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}^i, x\rangle \Rightarrow c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^{i'}. \tag{14.58}$$

□

Справедлива следующая:

14.42. Теорема. *Если числовая функция*

$$f = f(x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \chi, \ldots)$$

от p векторных аргументов $x, y, z, \ldots$ и q ковекторных аргументов $\xi, \eta, \chi, \ldots$ является полилинейной, то наборы чисел

$$F_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} := f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}), \tag{14.59}$$

$$F_{j_{1'} \ldots j_{p'}}^{k_{1'} \ldots k_{q'}} := f(\mathbf{e}_{j_{1'}}, \ldots, \mathbf{e}_{j_{p'}}; \mathbf{e}^{k_{1'}}, \ldots, \mathbf{e}^{k_{q'}}) \tag{14.60}$$

связаны равенствами

$$F_{j_{1'} \ldots j_{p'}}^{k_{1'} \ldots k_{q'}} = c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{p'}}^{j_p} c_{k_1}^{k_{1'}} \cdots c_{k_q}^{k_{q'}} F_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}, \tag{14.61}$$

где старый базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ в $\mathcal{L}$ связаны равенствами

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^i \cdot \mathbf{e}_i,$$

а соответствующие взаимные старый и новый базисы $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{e}^{1'}, \ldots, \mathbf{e}^{n'}\}$ в $\mathcal{L}^*$ связаны равенствами

$$\mathbf{e}^{i'} = c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}^i.$$

Доказательство. В обозначениях формулировки теоремы справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} F_{j_{1'} \ldots j_{p'}}^{k_{1'} \ldots k_{q'}} &= f(c_{j_{1'}}^{j_1} \cdot \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, c_{j_{p'}}^{j_p} \cdot \mathbf{e}_{j_p}; c_{k_1}^{k_{1'}} \cdot \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, c_{k_q}^{k_{q'}} \cdot \mathbf{e}^{k_q}) = \\ &= c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{p'}}^{j_p} c_{k_1}^{k_{1'}} \cdots c_{k_q}^{k_{q'}} f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}) = \\ &= c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{p'}}^{j_p} c_{k_1}^{k_{1'}} \cdots c_{k_q}^{k_{q'}} F_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}. \end{aligned} \tag{14.62}$$

□

14.43. Заметим, что при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, который однозначно определяет взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$, для полилинейной формы $f = f(x_1, \ldots, x_p, \ldots; \xi^1, \ldots, \xi^q)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} f = f(x_1, \ldots, x_p, \ldots; \xi^1, \ldots, \xi^q) &= \\ = f(x_1^{j_1} \cdot \mathbf{e}_{j_1}, \ldots, x_p^{j_p} \cdot \mathbf{e}_{j_p}; \xi^1_{k_1} \cdot \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \xi^q_{k_q} \cdot \mathbf{e}^{k_q}) &= \\ = f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}) x_1^{j_1} \cdots x_p^{j_p} \xi^1_{k_1} \cdots \xi^q_{k_q}&. \end{aligned} \tag{14.63}$$

Отметим, что согласно определению взаимного базиса справедливы следующие равенства:

$$x_s^{j_s} = \langle \mathbf{e}^{j_s}, x_s \rangle \quad \text{для всех} \quad s = \overline{1, p}, \tag{14.64}$$

$$\xi^l_{k_l} = \langle \hat{\mathbf{e}}_{k_l}, \xi^l \rangle_* \quad \text{для всех} \quad l = \overline{1, q}, \tag{14.65}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ — это скобки двойственности между $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{L}^{**}$, а $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ — это взаимный базис в $\mathcal{L}^{**}$ к базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$. Как мы установили ранее, справедливо равенство

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_j, \xi \rangle_* = \langle \xi, \mathbf{e}_j \rangle \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathcal{L}^*, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда и из (14.65) получаем равенство

$$\xi^l_{k_l} = \langle \xi^l, \mathbf{e}_{k_l} \rangle \quad \text{для всех} \quad l = \overline{1, q}. \tag{14.66}$$

С учетом равенств (14.64) и (14.66) продолжим равенства (14.63):

$$\begin{aligned} f = f(x_1, \ldots, x_p, \ldots; \xi^1, \ldots, \xi^q) &= \\ = f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}) &\times \\ \times \langle \mathbf{e}^{j_1}, x_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{e}^{j_p}, x_p \rangle \langle \xi^1, \mathbf{e}_{k_1} \rangle \cdots \langle \xi^q, \mathbf{e}_{k_q} \rangle&. \end{aligned} \tag{14.67}$$

Для дальнейшего нам нужно ввести операцию тензорного произведения векторов и ковекторов. Действительно, определим следующее отображение:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} : (x_1, \ldots, x_p, \xi^1, \ldots, \xi^q) &\to \\ \to \langle \mathbf{e}^{j_1}, x_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{e}^{j_p}, x_p \rangle \langle \xi^1, \mathbf{e}_{k_1} \rangle \cdots \langle \xi^q, \mathbf{e}_{k_q} \rangle&. \end{aligned} \tag{14.68}$$

С учетом этого обозначения мы можем записать полилинейную форму $f = f(x_1, \ldots, x_p, \ldots; \xi^1, \ldots, \xi^q)$ как отображение следующим образом:

$$\begin{aligned} f = F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} : (x_1, \ldots, x_p, \xi^1, \ldots, \xi^q) &\to \\ \to F^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} x_1^{j_1} \cdots x_p^{j_p} \xi^1_{k_1} \cdots \xi^q_{k_q}&. \end{aligned} \tag{14.69}$$

Справедливы следующие утверждения:

14.44. Теорема. *Отображение* (14.68) *линейно по каждому из тензорных сомножителей.*

Доказательство. Доказательство основано на линейности скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по обеим аргументам. $\square$

14.45. Теорема. *Всякую полилинейную форму однозначно можно записать в виде*

$$\boxed{f = F^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_p}\otimes\mathbf{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_q}} \tag{14.70}$$

и отображение (14.70) *является полилинейной формой.*

Доказательство. Прямое утверждение фактически нами доказано. А обратное утверждение вытекает из (14.69) с учетом (14.64) и (14.66), а также линейности скобок двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ по обоим аргументам. $\square$

14.46. Для полилинейных форм, у которых одинаковые количества векторных аргументов и ковекторных аргументов, можно ввести сумму полилинейных форм. Также можно ввести произведение полилинейной формы на число. Эти операции делают из полилинейных форм типа (p,q) линейное пространство, которое мы обозначим символом T^q_p.

14.47. Теорема. *Набор из n^{p+q} всевозможных отображений*

$$\left\{\mathbf{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_p}\otimes\mathbf{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_q}\right\}, \tag{14.71}$$

где индексы $j_1,\ldots,j_p,k_1,\ldots,k_q$ независимо побегают множество первых n натуральных чисел, образуют базис линейного пространства T^q_p полилинейных форм типа (p,q).

Доказательство. Полнота вытекает из теоремы 14.45. Докажем линейную независимость. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_p}\otimes\mathbf{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_q} \tag{14.72}$$

и приравняем ее нулевой полилинейной форме. Тогда получим равенство

$$\alpha^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_p}\otimes\mathbf{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_q} = \theta \in T^q_p. \tag{14.73}$$

Применим обе части равенства (14.73) к следующему упорядоченному набору векторов и ковекторов $(\mathbf{e}_{l_1},\ldots,\mathbf{e}_{l_p};\mathbf{e}^{s_1},\ldots,\mathbf{e}^{s_q})$. Тогда получим равенство

$$\alpha^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\delta^{j_1}_{l_1}\cdots\delta^{j_p}_{l_p}\delta^{s_1}_{k_1}\cdots\delta^{s_q}_{k_q}=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\alpha^{s_1\ldots s_q}_{l_1\ldots l_p}=0\quad\text{для всех индексов}\quad l_1,\ldots,l_p,s_1,\ldots,s_q\in\overline{1,n}.$$

Линейная независимость доказана. □

14.48. Теперь мы в состоянии дать второе определение тензора.

14.49. Определение. Тензором типа (p,q) называется полилинейная форма типа (p,q). Координатами тензора в заданном базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называются коэффициенты разложения полилинейной формы по базису (14.71) линейного пространства T^q_p.

14.50. Теорема. *Определения тензора* 14.49 *эквивалентно определению тензора* 14.14.

Доказательство. Шаг 1. Доказательство того, что из определения 14.49 вытекает утверждение из определения 14.14 основано на результатах теорем 14.42 и (14.45).

Шаг 2. Доказательство в обратную сторону основано на том что по коэффициентам

$$A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}$$

можно составить следующую полилинейную форму:

$$A=A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_p}\otimes\mathbf{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_q}.\tag{14.74}$$

И нам осталось доказать инвариантность объекта A, т.е. независимость его от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$ — другой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, причем

$$\mathbf{e}_{i'}=c^i_{i'}\cdot\mathbf{e}_i.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}A'&=A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}}\mathbf{e}^{j_{1'}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_{p'}}\otimes\mathbf{e}_{k_{1'}}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_{q'}}=\\&=c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}}c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q}A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\times\\&\times c^{j_{1'}}_{l_1}\cdots c^{j_{p'}}_{l_p}c^{s_1}_{k_{1'}}\cdots c^{s_q}_{k_{q'}}\mathbf{e}^{l_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{l_p}\otimes\mathbf{e}_{s_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{s_q}=\\&=\delta^{j_1}_{l_1}\cdots\delta^{j_p}_{l_p}\delta^{s_1}_{k_1}\cdots\delta^{s_q}_{k_q}A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}^{l_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{l_p}\otimes\mathbf{e}_{s_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{s_q}=\\&=A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_p}\otimes\mathbf{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{k_q}=A.\end{aligned}\tag{14.75}$$

□

14.51. Сумма тензоров и произведение тензора на число. Поскольку T_p^q — линейное пространство тензоров типа (p, q) (согласно определению 14.49) с базисом (14.71), то при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейной комбинации тензоров одного типа однозначно соответствует линейная комбинация координат тензора.

14.52. Произведение тензоров. Если у нас имеются два тензора=полилинейные формы $f = f(x_1, \dots, x_{p_1}; \xi^1, \dots, \xi^{q_1})$ и $g = g(y_1, \dots, y_{p_2}; \eta^1, \dots, \eta^{q_2})$ типов (p_1, q_1) и (p_2, q_2) от различных аргументов, то мы можем формально рассмотреть их произведение

$$\begin{aligned} h = h(x_1, \dots, x_{p_1}, y_1, \dots, y_{p_2}; \xi^1, \dots, \xi^{q_1}, \eta^1, \dots, \eta^{q_2}) = \\ = f(x_1, \dots, x_{p_1}; \xi^1, \dots, \xi^{q_1}) g(y_1, \dots, y_{p_2}; \eta^1, \dots, \eta^{q_2}), \end{aligned} \tag{14.76}$$

Поскольку аргументы у скалярной функции h различны, то функция будет полилинейной формой, т.е. тензором типа $(p_1 + p_2, q_1 + q_2)$, координаты которого будут равны произведению соответствующих координат, записанных в той последовательности, что и произведение тензоров f и g.

14.53. Свертка тензоров. Рассмотрим тензор

$$f = f(x_1, \dots, x_p; \xi^1, \dots, \xi^q).$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим, например, свертку тензора f по первому векторному и первому ковекторному аргументам:

$$f(\mathbf{e}_j, \dots, x_p; \mathbf{e}^j, \dots, \xi^q).$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора базиса и, значит, является полилинейной функцией=тензор типа $(p-1, q-1)$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} A' = f(\mathbf{e}_{j'}, \dots, x_p; \mathbf{e}^{j'}, \dots, \xi^q) = f(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j, \dots, x_p; c^{j'}_i \cdot \mathbf{e}^i, \dots, \xi^q) = \\ = c^j_{j'} c^{j'}_i f(\mathbf{e}_j, \dots, x_p; \mathbf{e}^i, \dots, \xi^q) = \delta^j_i f(\mathbf{e}_j, \dots, x_p; \mathbf{e}^i, \dots, \xi^q) = \\ = f(\mathbf{e}_j, \dots, x_p; \mathbf{e}^j, \dots, \xi^q) = A \end{aligned}$$

14.54. Пример. Вектор как тензор типа $(0,1)$. Почему вектор — тензор? Пусть $x \in \mathcal{L}$ — фиксированный вектор. Тогда вектор является линейной формой над сопряженным линейным пространством $\mathcal{L}^*$ в следующем смысле:

$$x : \xi \in \mathcal{L}^* \to \langle \xi, x \rangle$$

для любого ковектора $\xi \in \mathcal{L}^*$. И мы пришли к выводу о том, что вектор породил линейную функцию одного аргумента от ковектора.

Мы можем теперь записать равенство:

$$\boxed{x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x\rangle \cdot \mathbf{e}_j.}$$

Итак, вектор x — это тензор типа $(0,1)$, а его координаты x^j и есть те самые координаты тензора–вектора, которые преобразуются контравариантным образом

$$x^{j'} = c^{j'}_j x^j.$$

14.55. Пример. Ковектор как тензор типа $(1,0)$**.** Пусть $\xi \in \mathcal{L}^*$ — фиксированный ковектор. Тогда ξ порождает линейную форму над линейным пространством $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\xi : x \in \mathcal{L} \to \langle \xi, x\rangle$$

для любого $x \in \mathcal{L}$. Равенство (14.70) примет следующий вид:

$$\boxed{\xi = \xi_j \cdot \mathbf{e}^j = \langle \xi, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j.}$$

Отсюда вытекает, что ковектор — это тензор ранга $(1,0)$, а его координаты как тензора — это координаты $\{\xi_j\}$ его разложения по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, которые преобразуются ковариантным образом

$$\xi_{i'} = c^i_{i'} \xi_i.$$

14.56. Пример. Оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ **как тензор типа** $(1,1)$**.** Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad Ax = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = x^j a^k_j \cdot \mathbf{e}_k = a^k_j \langle \mathbf{e}^j, x\rangle \cdot \mathbf{e}_k,$$

но тогда мы приходим к виду тензора (14.70):

$$\boxed{A = a^k_j \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k, \quad a^k_j = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_j\rangle,}$$

где $\|a^k_j\|$ — матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Причем

$$A(x,\xi) = a^k_j x^j \xi_k = x^j \xi_k \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_j\rangle = \langle \xi_k \cdot \mathbf{e}^k, A(x^j \cdot \mathbf{e}_j)\rangle = \langle \xi, Ax\rangle.$$

Таким образом, матрица $\|a^k_j\|$ оператора A — есть координаты оператора A как тензора в его разложении по базису $\{\mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k\}$ линейного пространства T^1_1 тензоров типа $(1,1)$, которая преобразуется согласно закону

$$a^{k'}_{j'} = c^{k'}_k c^j_{j'} a^k_j.$$

4. Метрический тензор

14.57. Пусть $\mathcal{L}$ — n–мерное вещественное пространство с заданной симметричной билинейной формой $G(x,y)$, причем соответствующая квадратичная форма $G(x,x)$ является положительно определенной формой. Тогда $\mathcal{L}$ становится евклидовым пространством, а билинейная форма $G(x,y)$ называется *метрическим тензором*. В частности, $G(x,y)$ является тензором ранга $(2,0)$. Для скалярного произведения $(x,y)=G(x,y)$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(x,y)=g_{ik}x^iy^k, \quad g_{ik}=G(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k). \tag{14.77}$$

☐ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x,y)=G(x,y)=G(x^i\mathbf{e}_i,y^k\mathbf{e}_k)=x^iy^kG(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k)=g_{ik}x^iy^k. \quad \boxtimes$$

Матрицу метрического тензора в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ обозначим

$$\boxed{G=\|g_{ik}\|.}$$

В силу положительной определенности квадратичной формы $G(x,x)$ матрица этой квадратичной формы является обратимой ($\det G>0$). Поэтому определена обратная матрица G^{-1}, элементы которой по соглашению обозначаются следующим образом:

$$\boxed{G^{-1}=\left\|g^{ik}\right\|.}$$

Согласно нашему правилу умножения «строчка на столбец» приходим к следующим равенствам:

$$\left\{G^{-1}\cdot G\right\}_j^i=g^{ik}g_{kj}=\delta_j^i, \quad \left\{G\cdot G^{-1}\right\}_j^i=g_{jk}g^{ki}=\delta_j^i.$$

14.58. Теорема. *Набор n^2 чисел g^{ik} определяет некоторый тензор ранга* $(0,2)$.

Доказательство. Шаг 0. Нам нужно доказать, что при переходе от старого базиса $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$, задаваемому равенствами

$$\mathbf{e}_{i'}=c_{i'}^i\cdot\mathbf{e}_i \tag{14.78}$$

справедливо равенство

$$g^{i'k'}=c_i^{i'}c_k^{k'}g^{ik}, \tag{14.79}$$

где $g^{i'k'}$ — это элементы матрицы, обратной к матрице $\|g_{i'k'}\|$ метрического тензора, записанного в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$. Понятно, что равенство (14.79) нужно доказать как следствие уже доказанного равенства

$$g_{i'k'} = c^i_{i'} c^k_{k'} g_{ik}. \tag{14.80}$$

Шаг 1. Пусть $\mathcal{L}^*$ — сопряженное пространство к линейному пространству $\mathcal{L}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это базис в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, т.е., в частности,

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = \delta^j_k.$$

Построим линейное преобразование

$$g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^*, \quad u = g(x),$$

которое каждому $x = x^k \cdot \mathbf{e}_k \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие $u = u_i \cdot \mathbf{e}^i \in \mathcal{L}^*$ по формуле

$$u_i = g_{ik} x^k. \tag{14.81}$$

Докажем, что это отображение инвариантно, т.е. не зависит от выбора базиса. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$u_i = c^{i'}_i u_{i'}, \quad g_{ik} = c^{j'}_i c^{l'}_k g_{j'l'}, \quad x^k = c^k_{k'} x^{k'}. \tag{14.82}$$

Подставим равенства (14.82) в выражение (14.81) и получим равенство

$$c^{i'}_i u_{i'} = c^{j'}_i c^{l'}_k c^k_{k'} g_{j'l'} x^{k'} \Leftrightarrow u_{i'} = c^i_{i'} c^{j'}_i c^{l'}_k c^k_{k'} g_{j'l'} x^{k'}. \tag{14.83}$$

Заметим, что

$$c^i_{i'} c^{j'}_i = c^{j'}_i c^i_{i'} = \delta^{j'}_{i'}, \quad c^{l'}_k c^k_{k'} = \delta^{l'}_{k'}. \tag{14.84}$$

Из (14.83) с учетом (14.84) получаем искомое равенство

$$u_{i'} = g_{i'k'} x^{k'},$$

которое и доказывает не зависимость от базиса отображения g.

Шаг 2. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений (14.81), которую с учетом нашего правила умножения «строчка на столбец» можно записать в следующей матричной форме:

$$G \cdot X = U, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad U = (u_1, \ldots, u_n)^T, \tag{14.85}$$

из которой поскольку $\det G \neq 0$ вытекает матричное равенство

$$X = G^{-1} U \quad \text{или} \quad x^i = g^{ik} u_k. \tag{14.86}$$

Очевидно, что в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ будет выполнено аналогичное равенство

$$x^{i'} = g^{i'k'} u_{k'}. \tag{14.87}$$

Осталось доказать, что числа $g^{i'k'}$ и g^{ik} связаны соотношением (14.79). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x^i = c^i_{i'} x^{i'}, \quad u_k = c^{k'}_k u_{k'}. \tag{14.88}$$

Из (14.86) с учетом (14.88) вытекает равенство

$$c^i_{i'} x^{i'} = g^{ik} c^{k'}_k u_{k'}. \tag{14.89}$$

Теперь из (14.87) и (14.89) получаем равенство

$$c^i_{i'} g^{i'k'} u_{k'} = g^{ik} c^{k'}_k u_{k'} \quad \text{для всех} \quad u' = (u_{1'}, \ldots, u_{n'}) \in \mathbb{R}_n. \tag{14.90}$$

Поэтому из (14.90) приходим к равенству

$$c^i_{i'} g^{i'k'} = g^{ik} c^{k'}_k \quad \text{или} \quad g^{i'k'} = c^{i'}_i c^{k'}_k g^{ik}.$$

Теорема доказана полностью. □

14.59. Определение. Тензор, определяемый числами g_{ik} называется ковариантным метрическим тензором, а тензор, определяемый числами g^{ik} называется контравариантным метрическим тензором.

14.60. Определение. Базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в одном и том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называются взаимными, если $(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k$.

14.61. Лемма. Взаимный базис в смысле определения 14.60 единствен.

Доказательство. Пусть к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве имеются два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k = (\mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^k(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j$ для всех $j = \overline{1, n}$. □

14.62. Замечание. Не путайте взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису из $\mathcal{L}$ со взаимным базисом в одном и том же пространстве. Напомним, что мы уже знакомы со взаимным базисом из курса «Аналитическая геометрия». Однако, в случае евклидова пространства $\mathcal{E}$, взаимный базис в $\mathcal{E}^*$ можно отождествить с взаимным базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, справедлива следующая лемма:

14.63. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ в смысл определения 14.60, а $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{E}^*$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^j, x\rangle = (\mathbf{e}^j, x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{14.91}$$

Доказательство. Согласно определению взаимного базиса $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}^n\}$ в $\mathcal{E}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{E}$ справедливо равенство

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^j, x\rangle = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \tag{14.92}$$

а в силу определения 14.60 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}^j, x) = (\mathbf{e}^j, x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \\ = x^k \delta^j_k = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}.\end{aligned} \tag{14.93}$$

Из сравнения равенств (14.92) и (14.93) вытекает равенство (14.91). $\square$

14.64. Теорема. *Для произвольного базиса* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *в* $\mathcal{E}$ *существует и единствен.*

Доказательство. Шаг 1. Существование. Пусть задан базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда взаимный базис будем искать в виде разложения по этому базису:

$$\mathbf{e}^k = A^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad A^{k\alpha} \in \mathbb{R}. \tag{14.94}$$

Заметим, что для взаимного базиса должно быть выполнено следующее равенство:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = \delta^k_i, \tag{14.95}$$

и, кроме того,

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g_{\alpha i}. \tag{14.96}$$

Тогда умножая скалярно обе части равенства (14.94) на вектор $\mathbf{e}_i$, с учетом (14.95), (14.96) получим равенство

$$\delta^k_i = A^{k\alpha} g_{\alpha i} \quad \text{или} \quad A \cdot G = I \Leftrightarrow A = G^{-1}. \tag{14.97}$$

Итак, из (14.94) получаем равенства

$$\mathbf{e}^k = g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \tag{14.98}$$

Шаг 2. Линейная независимость. Докажем, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (14.98), является линейно независимым, т.е. является базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, пусть

$\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}^1, \dots \mathbf{e}^n)$ и $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тогда равенство (14.98) можно переписать в матричной форме

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cdot G^{-1}, \quad G^{-1} = \|g^{k\alpha}\|. \tag{14.99}$$

Предположим, что элементы $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ линейно зависимы. Тогда найдется ненулевой столбец $X_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot X_0 = \theta. \tag{14.100}$$

Умножим обе части равенства (14.99) слева на этот столбец X_0 и с учетом (14.100) получим равенство

$$\mathbf{E} \cdot G^{-1} \cdot X_0 = \theta \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot X_1 = \theta, \quad X_1 = G^{-1} \cdot X_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{14.101}$$

Поскольку набор $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимым, то $X_1 = O$. Следовательно,

$$G^{-1} \cdot X_0 = O \Leftrightarrow G \cdot (G^{-1} \cdot X_0) = G \cdot O = O \Leftrightarrow X_0 = O. \tag{14.102}$$

Пришли к противоречию. Значит, семейство $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ линейно независимо.

Шаг 3. Взаимный базис. Осталось доказать, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (14.98), является взаимным базисом к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = (g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g^{k\alpha} g_{\alpha i} = \delta^k_i.$$

Осталось воспользоваться результатом леммы 14.61. □

14.65. Из формулы (14.98) вытекают полезные формулы. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$g_{jk} \cdot \mathbf{e}^k = g_{jk} g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \delta^\alpha_j \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_j \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_j = g_{jk} \cdot \mathbf{e}^k,} \tag{14.103}$$

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = \Big(g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i\Big) = g^{k\alpha}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i) = \\ = g^{k\alpha}\delta^i_\alpha = g^{ki} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = g^{ki}.} \tag{14.104}$$

Разложим элементы $x, y \in \mathcal{E}$ по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x_i \cdot \mathbf{e}^i, \quad y = y_j \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow (x, y) = (x_i \cdot \mathbf{e}^i, y_j \cdot \mathbf{e}^j) = \\ = x_i y_j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij} x_i y_j. \tag{14.105}$$

Итак, в координатах скалярное произведение евклидова пространства может быть записано двойственным образом

$$\boxed{(x, y) = g_{ij} x^i y^j} \quad \text{и} \quad \boxed{(x, y) = g^{ij} x_i y_j.}$$

14.66. Определение. Координаты x^j элемента $x \in \mathcal{E}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ называются контравариантными, а координаты x_i того же элемента в взаимном базисе $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ называются ковариантными.

14.67. Координатная запись скалярного произведения. Пусть $x, u \in \mathcal{E}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{E}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие цепочки соотношений:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad u = u_i \cdot \mathbf{e}^i \Rightarrow (u, x) = (u_i \cdot \mathbf{e}^i, x^j \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = u_i x^j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = u_i x^j \delta^i_j = u_i x^i.$$

Таким образом,

$$\boxed{(u, x) = u_i x^i.}$$

14.68. Лемма. Элементы взаимного базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ преобразуются контравариантным образом:

$$\boxed{\mathbf{e}^{k'} = c^{k'}_k \cdot \mathbf{e}^k,} \tag{14.106}$$

если

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k.$$

Доказательство. В стандартных обозначениях справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}^{k'} = g^{k'\alpha'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha'} = g^{k'\alpha'} c^\alpha_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \\ = g^{k'\alpha'} c^\alpha_{\alpha'} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j_1 j_2} c^{k'}_{j_1} c^{\alpha'}_{j_2} c^\alpha_{\alpha'} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j_1\alpha} c^{k'}_{j_1} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = \\ = \delta^{j_1}_\beta c^{k'}_{j_1} \cdot \mathbf{e}^\beta = c^{k'}_\beta \cdot \mathbf{e}^\beta. \tag{14.107}$$

поскольку

$$c^{\alpha'}_{j_2} c^\alpha_{\alpha'} = c^\alpha_{\alpha'} c^{\alpha'}_{j_2} = \delta^\alpha_{j_2}, \quad g^{j_1\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^{j_1}_\beta. \tag{14.108}$$

□

14.69. Лемма. Контравариантные и ковариантные координаты одного и того же элемента x евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны следующими двойственными формулами:

$$\boxed{x_j = g_{jk}x^k} \quad \text{и} \quad \boxed{x^j = x_k g^{kj}.} \tag{14.109}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$x = x_i \cdot \mathbf{e}^i = x^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{14.110}$$

Умножим равенства (14.110) скалярно на $\mathbf{e}_j$ и получим равенство

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j), \tag{14.111}$$

из которого вытекает равенство

$$x_j = g_{jk}x^k. \tag{14.112}$$

Теперь умножим равенство (14.110) скалярно на $\mathbf{e}^j$ и получим равенство

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j), \tag{14.113}$$

из которого получаем равенство

$$x^j = x_i g^{ij}.$$

□

14.70. Определение. Числа g^{jk} называются контравариантными координатами метрического тензора, а числа g_{jk} называются ковариантными координатами метрического тензора.

14.71. Заметим, что при помощи метрического тензора с контравариантными и ковариантными координатами можно поднимать или опускать индексы у координат тензора. Например, рассмотрим тензор ранга $(0, 2)$:

$$a = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k. \tag{14.114}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} a = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes (g_{k\alpha}\mathbf{e}^\alpha) = a^{ik}g_{k\alpha}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^\alpha = \\ = a^{i\beta}g_{\beta k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k = a^i_k\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k, \quad a^i_k = a^{i\beta}g_{\beta k}. \end{aligned} \tag{14.115}$$

В результате мы получили другую запись того же самого тензора, но теперь ранга $(1, 1)$. Поэтому, используя жаргон, говорят, что при помощи метрического тензора (в евклидовом пространстве!!!) можно поднимать и опускать индексы.

5. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с нижними индексами

14.72. Символ Кронекера. Символ Кронекера δ^j_k в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ определяется следующим образом:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{14.116}$$

Справедливо следующее утверждение:

14.73. Лемма. Числа δ^j_k являются координатами тензора ранга $(1,1)$. Числа δ_{jk} и δ^{jk}, формально совпадающие с определением (14.116), являются координатами ортогональных тензоров рангов $(2,0)$ и $(0,2)$ соответственно. Однако, числа δ_{jk} и δ^{jk} не являются координатами тензоров.

Доказательство. С одной стороны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\delta^j_k c^{j'}_j c^k_{k'} = c^{j'}_k c^k_{k'} = \delta^{j'}_{k'}.$$

С другой стороны, имеем

$$\delta_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} = c^k_{j'} c^k_{k'} = \{C^T \cdot C\}_{j'k'}, \tag{14.117}$$

$$\delta^{jk} c^{j'}_j c^{k'}_k = c^{j'}_k c^{k'}_k = \{C^{-1} \cdot (C^{-1})^T\}^{j'k'}. \tag{14.118}$$

Совершенно понятно, что в случае ортогональных преобразований

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$$

матрица C такова, что, $C^T = C^{-1}$ и поэтому

$$C^T \cdot C = I \quad \text{и} \quad C^{-1} \cdot (C^{-1})^T = C^{-1} \cdot C^{TT} = C^{-1} \cdot C = I. \tag{14.119}$$

Из (14.117)–(14.119) вытекают равенства

$$\delta_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} = \delta_{j'k'} \quad \text{и} \quad \delta^{jk} c^{j'}_j c^{k'}_k = \delta^{j'k'}. \tag{14.120}$$

Осталось доказать, что числа δ_{jk} и δ^{jk} не являются координатами тензоров. Рассмотрим например, числа δ_{jk}. Рассмотрим два базиса

$$\mathbf{e}_{1'} = 2 \cdot \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n'} = \mathbf{e}_n$$

или

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому
$$C^T \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \neq I. \qquad (14.121)$$
Таким образом, из (14.117) и (14.121) вытекает, в частности, равенство
$$\delta_{jk} c^j_{1'} c^k_{1'} = 4 \neq \delta_{1'1'} = 1.$$
Отсюда получаем, что числа δ_{jk} не являются координатами тензора. Аналогичным образом рассматривается набор чисел δ^{jk}. □

14.74. Пример. Пусть каждому базису в $\mathbb{R}^3$ сопоставлен следующий набор чисел:
$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = 0, \quad \text{если среди индексов есть повторения,} \qquad (14.122)$$
а в случае если все индексы i_1, i_2, i_3 различны, то
$$\varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}. \qquad (14.123)$$
Докажем, что числа $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$ не являются координатами тензора.

□ Действительно, пусть два базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ связаны равенствами
$$\mathbf{e}_{1'} = 2 \cdot \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3 \qquad (14.124)$$
или
$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (14.125)$$
Но тогда справедлива следующая цепочкам равенств:
$$1 = \varepsilon_{1'2'3'} = c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} = c^1_{1'} c^2_{2'} c^3_{3'} \varepsilon_{123} = 2. \qquad (14.126)$$
Пришли к противоречию. ⊠

14.75. Определение. Объект $\varepsilon_{i_1 i_2 i_3}$ называется абсолютно антисимметричным символом Леви–Чивиты.

14.76. Из символов Кронекера δ_{ik} и δ_{pq} можно соорудить объект четвертого порядка $\delta_{ik}\delta_{pq}$. Поскольку объекты δ_{ik} и δ_{pq} являются координатами ортогональных тензоров рангов $(2,0)$ и $(2,0)$, то их произведение $\delta_{ik}\delta_{pq}$ является ортогональным тензором ранга $(4,0)$. Действительно, справедливы следующая цепочка равенств:
$$\delta_{ik}\delta_{pq} c^i_{i'} c^k_{k'} c^p_{p'} c^q_{q'} = c^k_{i'} c^k_{k'} c^p_{p'} c^p_{q'} = \{C^T \cdot C\}_{i'k'} \{C^T \cdot C\}_{p'q'} = \delta_{i'k'} \delta_{p'k'}.$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств

$$\delta_{is}\delta_{sq} = \{I \cdot I\}_{iq} = \{I\}_{iq} = \delta_{iq}. \tag{14.127}$$

14.77. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{lr} \end{vmatrix}. \tag{14.128}$$

Доказательство. Случай 1. Пусть два или три индекса из какой–нибудь тройки индексов $\{i,k,l\}$ или $\{p,q,r\}$ совпадают. Тогда равенство (14.128) выполнено, потому что слева либо $\varepsilon_{ikl} = 0$ либо $\varepsilon_{pqr} = 0$, а справа две или три строчки или два или три столбца совпадают и в этих случаях определитель равен нулю.

Случай 2. Теперь простым вычислением получим, что справедливо равенство

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}, \tag{14.129}$$

поскольку $\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = 1$ и

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Кроме того, выражения справа и слева в равенстве (14.128) могут отличаться только знаком. Рассмотрим следующую перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}. \tag{14.130}$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде конечной последовательности транспозиций соседних индексов. При транспозиции индексов во втором сомножителе в левой части равенства (14.129) знак меняется на противоположный, а слева в равенстве (14.129) при этой же транспозиции соседние строчки будут переставляться и, следовательно, знак определителя тоже будет меняться на противоположный. Таким образом, в результате последовательности транспозиций, образующих перестановку (14.130) мы придем к равенству

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}. \tag{14.131}$$

Теперь рассмотрим перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & k & l \end{pmatrix}. \tag{14.132}$$

Сделаем соответствующую последовательность транспозиций в обеих частях равенства (14.131). Справа в равенстве (14.131) каждой транспозиции будет соответствовать перестановка строк. В результате перестановки (14.131) мы получим искомое равенство (14.128). □

14.78. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}. \tag{14.133}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kl} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{ll} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{lp}\begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{il} \\ \delta_{kq} & \delta_{kl} \end{vmatrix} - \delta_{lq}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kl} \end{vmatrix} + \delta_{ll}\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ip} \\ \delta_{kq} & \delta_{kp} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}.$$

□

14.79. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pkl} = 2\delta_{ip}, \quad \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6. \tag{14.134}$$

Доказательство. Из равенства (14.133) получаем

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pkl} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ik} \\ \delta_{kp} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{kk}\delta_{ip} - \delta_{ik}\delta_{kp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}. \tag{14.135}$$

В свою очередь из (14.135) вытекает равенство

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 2\delta_{ii} = 6.$$

□

14.80. Определение. Объекты

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14.136}$$

называются дуальными.

14.81. Лемма. Дуальные объекты связаны равенствами

$$a_{ik} = \varepsilon_{ikl} a_l, \quad a_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} a_{ik}, \tag{14.137}$$

$$\|a_{ik}\| := \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем первое равенство из (14.137). Непосредственно проверяем это равенство:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{13} = -a_2,$$

$$a_{21} = -a_3, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -a_1,$$

$$a_{31} = a_2, \quad a_{32} = -a_1, \quad a_{33} = 0.$$

Шаг 2. докажем второе равенство из (14.137). С этой целью воспользуемся доказанным первым равенством из (14.137), а также первым равенством из (14.134). Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} a_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ikm} a_m = \frac{1}{2} 2\delta_{lm} a_m = a_l.$$

□

14.82. Определение. Внешним произведением объектов

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad (b_1, b_2, b_3)$$

называется объект (S_1, S_2, S_3), определенный равенствами

$$S_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l. \tag{14.138}$$

14.83. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$(S_1, S_2, S_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \tag{14.139}$$

$$S_i = b_{ik} a_k, \quad S_i = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \tag{14.140}$$

$$\|b_{ik}\| := \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем сначала равенства (14.139). Действительно, имеем

$$S_1 = \varepsilon_{1kl} a_k b_l = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$
$$S_2 = \varepsilon_{2kl} a_k b_l = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$
$$S_3 = \varepsilon_{3kl} a_k b_l = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Шаг 2. Докажем первое равенство из (14.140). Справедливы следующие равенства:

$$S_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l = (\varepsilon_{ikl} b_l) a_k = b_{ik} a_k, \tag{14.141}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Докажем второе равенство из (14.140). Непосредственной проверкой убеждаемся, что справедливы следующие равенства:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

□

14.84. Тождество Эйлера–Лагранжа. Докажем следующее тождество:

$$\begin{aligned}(a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2.\end{aligned} \tag{14.142}$$

Действительно, с учетом (14.133) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}S_l S_l = \varepsilon_{lik} a_i b_k \varepsilon_{lpq} a_p b_q = \varepsilon_{lik} \varepsilon_{lpq} a_i b_k a_p b_q = \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{pql} a_i b_k a_p b_q = \\ = (\delta_{ip} \delta_{kq} - \delta_{kp} \delta_{iq}) a_i b_k a_p b_q = \delta_{ip} \delta_{kq} a_i b_k a_p b_q - \delta_{kp} \delta_{iq} a_i b_k a_p b_q = \\ = a_p a_p b_k b_k - (a_q b_q)(a_p b_p).\end{aligned} \tag{14.143}$$

Таким образом, тождество (14.142) Эйлера–Лагранжа доказано.

Теперь воспользуемся итоговым равенством (14.143). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$S_l S_l = a_p^2 b_k^2 - (a_i b_i)(a_k b_k) = a_p^2 \delta_{ik} b_i b_k - (a_i a_k)(b_i b_k) =$$
$$= (a_p^2 \delta_{ik} - a_i a_k) b_i b_k = (b_p^2 \delta_{ik} - b_i b_k) a_i a_k. \quad (14.144)$$

Теперь воспользуемся дуальным представлением с тем, чтобы доказать следующее равенство:

$$a_p^2 \delta_{ik} - a_i a_k = a_{is} a_{ks}. \quad (14.145)$$

Действительно, согласно (14.137) имеем

$$a_{is} = \varepsilon_{isp} a_p, \quad a_{ks} = \varepsilon_{ksq} a_q. \quad (14.146)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a_{is} a_{ks} = \varepsilon_{isp} a_p \varepsilon_{ksq} a_q = \varepsilon_{ips} \varepsilon_{kqs} a_p a_q = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{iq} \\ \delta_{pk} & \delta_{pq} \end{vmatrix} a_p a_q =$$
$$= (\delta_{ik} \delta_{pq} - \delta_{iq} \delta_{pk}) a_p a_q = a_p^2 \delta_{ik} - a_i a_k, \quad (14.147)$$

где мы воспользовались равенством (14.133). Осталось воспользоваться равенствами (14.140).

14.85. Вычисление определителей. Рассмотрим следующий определитель:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ikl} a_{i1} a_{k2} a_{l3}. \quad (14.148)$$

Рассмотрим перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}. \quad (14.149)$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде транспозиции соседних чисел. Применим эту последовательностей к правой части равенства (14.148), которое для удобства перепишем в виде

$$a = \varepsilon_{ikl} a_{i1} a_{k2} a_{l3}. \quad (14.150)$$

При каждой транспозиции правая часть равенства (14.150) меняет знак, поскольку транспозиция соседних чисел равносильна перестановке столбцов. Если перестановка (14.149) четная, то мы снова получим равенство

$$a = \varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr}. \quad (14.151)$$

Если же перестановка (14.149) нечетная, то мы получим равенство

$$a = -\varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr}. \quad (14.152)$$

Введем следующий объект:

$$A_{pqr} \overset{def:}{=} \varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr}. \tag{14.153}$$

Заметим, что если в равенстве (14.153) хотя бы два индекса из тройки $\{p, q, r\}$ совпадают, то $A_{pqr} = 0$, поскольку тогда у определителя $\varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr}$ по крайней мере два столбца одинаковые. Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$A_{pqr} = a\varepsilon_{pqr}. \tag{14.154}$$

Следовательно, из (14.153) и (14.154) вытекает равенство

$$\boxed{\varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr} = a\varepsilon_{pqr}.} \tag{14.155}$$

Аналогичным образом можно доказать следующее равенство:

$$\boxed{\varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{kq} a_{lr} = a\varepsilon_{ikl}.} \tag{14.156}$$

14.86. Теорема. Бине–Коши. *Определитель произведения квадратных матриц одного размера равен произведению определителей матриц.*

Доказательство. Пусть $c_{ik} = a_{is} b_{sk}$. Докажем равенство

$$|c_{ik}| = |a_{rj}||b_{pq}|. \tag{14.157}$$

Пусть

$$a = |a_{rj}|, \quad b = |b_{pq}|, \quad c = |c_{ik}|. \tag{14.158}$$

Тогда имеем

$$b = \varepsilon_{pqr} b_{p1} b_{q2} b_{r3}, \quad a\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr}, \tag{14.159}$$

$$\begin{aligned} ab = a\varepsilon_{pqr} b_{p1} b_{q2} b_{r3} = \varepsilon_{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr} b_{p1} b_{q2} b_{r3} = \\ = \varepsilon_{ikl} (a_{ip} b_{p1})(a_{kq} b_{q2})(a_{lr} b_{r3}) = \varepsilon_{ikl} c_{i1} c_{k2} c_{l3} = c. \end{aligned} \tag{14.160}$$

□

14.87. Лемма. Справедливо равенство

$$|a_l^2 \delta_{ik} - a_i a_k| = 0. \tag{14.161}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (14.145) и результатом теоремы 14.86. Тогда справедливо равенство

$$|a_l^2 \delta_{ik} - a_i a_k| = |a_{is}||a_{ks}|. \tag{14.162}$$

Заметим, что

$$|a_{is}| = \begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_3a_1a_2 - a_2a_3a_1 = 0. \tag{14.163}$$

Из равенств (14.162) и (14.163) вытекает утверждение леммы. □

14.88. Алгебраические дополнения. Справедливы следующие равенства:

$$a\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqt} = \varepsilon_{pqt}a\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{pqt}\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}, \tag{14.164}$$

где мы воспользовались равенством (14.155). Воспользуемся равенством (14.134) и получим равенство

$$\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqt} = 2\delta_{rt}. \tag{14.165}$$

Из равенств (14.164) и (14.165) получаем равенство

$$\delta_{rt}a = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqt}a_{ip}a_{kq}\right). \tag{14.166}$$

Введем обозначение

$$A_{lt} \stackrel{def:}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqt}a_{ip}a_{kq}. \tag{14.167}$$

Тогда с учетом этого обозначения мы получим из (14.166) равенство

$$\boxed{\delta_{rt}a = a_{lr}A_{lt}.} \tag{14.168}$$

14.89. Определение. Числа A_{lt} называются алгебраическими дополнениями элемента a_{lt}.

14.90. Разложение определителя по столбцу. Положим в равенстве (14.168) $r = t = a$, где a относится к так называемым фиксирующим индексам, т.е. по нему не производится суммирование. В результате получим следующую формулу разложения определителя по a–му столбцу:

$$\boxed{a = a_{la}A_{la}.} \tag{14.169}$$

Теперь положим $r = a$ и $t = b$, причем $a \neq b$ и это фиксирующие индексы. Тогда получим формулу фальшивого разложения определителя:

$$\boxed{0 = a_{la}A_{lb}.} \tag{14.170}$$

14.91. Разложение определителя по строчке. Умножим обе части равенства (14.156) на ε_{ikm}. С учетом (14.134) получим следующее равенство:

$$a\delta_{lm} = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}\right). \tag{14.171}$$

Введем обозначение

$$A_{mr} :\overset{def:}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}. \tag{14.172}$$

С учетом этого обозначения из (14.171) вытекает равенство

$$a\delta_{lm} = a_{lr}A_{mr}. \tag{14.173}$$

Сначала положим в равенстве (14.173) $l = m = a$, где a — фиксирующий индекс. Тогда из (14.173) получим равенство

$$\boxed{a = a_{ar}A_{ar}.} \tag{14.174}$$

Формула (14.173) — есть формула разложения определителя по a–ой строчке. Теперь положим в равенстве (14.173) $l = a$ и $m = b$, $a \neq b$, то получим соответствующее фальшивое разложение по a–ой строчке:

$$\boxed{0 = a_{ar}A_{br}.} \tag{14.175}$$

14.92. Формулы Крамера. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$a_{ik}x_k = b_i, \quad a = |a_{ik}| \neq 0. \tag{14.176}$$

Умножим обе части этого уравнения на алгебраические дополнение A_{ip} и получим равенство

$$A_{ip}a_{ik}x_k = A_{ip}b_i. \tag{14.177}$$

Воспользуемся равенством (14.168) и получим равенство

$$a\delta_{pk}x_k = A_{ip}b_i \Leftrightarrow ax_p = A_{ip}b_i \Leftrightarrow \boxed{x_p = \frac{1}{a}A_{ip}b_i.} \tag{14.178}$$

Последнее равенство в (14.178) можно записать в несколько другом виде. Пусть $p = 1$. Тогда сумма произведений $A_{i1}b_i$ — есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \varepsilon_{pqr}b_p a_{q2}a_{r3} \tag{14.179}$$

по первому столбцу и, следовательно,

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{a}\Delta_1.} \tag{14.180}$$

Пусть $p = 2$. Тогда сумма произведений $A_{i2}b_i$ — есть разложение определителя

$$\Delta_2 = \varepsilon_{pqr} a_{p1} b_q a_{r3} \tag{14.181}$$

по второму столбцу и, следовательно,

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{a}\Delta_2.} \tag{14.182}$$

Пусть $p = 3$. Тогда сумма произведений $A_{i3}b_i$ — есть разложение определителя

$$\Delta_3 = \varepsilon_{pqr} a_{p1} a_{q2} b_r \tag{14.183}$$

по третьему столбцу и, следовательно,

$$\boxed{x_3 = \frac{1}{a}\Delta_3.} \tag{14.184}$$

6. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с верхними и нижними индексами

14.93. Точно также как и в предыдущем параграфе можно ввести символ Леви–Чивиты ε^{ikl}.

14.94. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \\ \delta^l_p & \delta^l_q & \delta^l_r \end{vmatrix}, \tag{14.185}$$

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^k_p & \delta^k_q \end{vmatrix}, \tag{14.186}$$

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pkl} = 2\delta^i_p, \quad \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6. \tag{14.187}$$

Доказательство. Указанные равенства доказываются в точности точно также, как и равенства лемм 14.77, 14.78 и 14.79. □

14.95. Определение. Обобщенными символами Кронекера называются следующие величины:

$$\delta^{ikl}_{pqr} \overset{def:}{=} \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pqr}, \tag{14.188}$$

$$\delta^{ik}_{pq} \overset{def:}{=} \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pql} = \delta^i_p\delta^k_q - \delta^k_p\delta^i_q. \tag{14.189}$$

14.96. Заметим, что символ Кронекера δ^i_p в силу первого равенства из (14.187) можно представить в следующем виде:

$$\delta^i_p = \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pkl}. \tag{14.190}$$

Поэтому логично отнести символ Кронекера δ^i_p к группе обобщенных символов Кронекера (14.188) и (14.189). С помощью обобщенных символов Кронекера можно проводить ряд тензорных операций.

14.97. Замена индексов. Справедливы равенства

$$\delta^i_k a^k = a^i, \quad \delta^i_k a_i = a_k.$$

14.98. Альтернирование. Справедливы равенства

$$\delta^{ik}_{pq} b_{ik} = (\delta^i_p\delta^k_q - \delta^k_p\delta^i_q) b_{ik} = b_{pq} - b_{qp}.$$

14.99. Вычисление определителей. Полученные ранее формулы (14.155) и (14.156) могут быть переписаны следующим образом:

$$\boxed{\varepsilon^{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr} = a\varepsilon_{pqr},} \quad \boxed{\varepsilon^{pqr} a_{ip} a_{kq} a_{lr} = a\varepsilon_{ikl},} \tag{14.191}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ikl} a^{ip} a^{kq} a^{lr} = a\varepsilon^{pqr},} \quad \boxed{\varepsilon_{pqr} a^{ip} a^{kq} a^{lr} = a\varepsilon^{ikl},} \tag{14.192}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ikl} a^i_p a^k_q a^l_r = a\varepsilon_{pqr},} \quad \boxed{\varepsilon^{pqr} a^i_p a^k_q a^l_r = a\varepsilon^{ikl}.} \tag{14.193}$$

Из формул (14.193) вытекает следующее утверждение:

14.100. Лемма. Закон преобразования символов ε_{ikl} и ε^{ikl} Леви-Чивиты следующий:

$$\varepsilon_{i'k'l'} = \frac{1}{c} c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \varepsilon_{ikl}, \quad \varepsilon^{i'k'l'} = \frac{1}{c} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \varepsilon^{ikl}, \tag{14.194}$$

где $c = \det C$ — определитель матрицы перехода C от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

14.101. Иначе говоря, символы Леви–Чивиты ε_{ikl} и ε^{ikl} являются так называемыми псевдотензорами.

14.102. Алгебраические дополнения. Умножим первое равенство из (14.191) на ε^{pqt}. В силу равенства (14.190) получим выражение

$$a\delta_r^t = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{pqt}a_{ip}a_{kq}\right) = a_{lr}A^{lt}, \tag{14.195}$$

$$A^{lt} := \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon^{pqt}a_{ip}a_{kq}. \tag{14.196}$$

14.103. Определение. Символы A^{lt}, определенные равенствами (14.196), называются алгебраическими дополнениями.

14.104. Разложение определителя по элементам столбца. Если в равенстве (14.195) положить $t = r = a$, где a — фиксирующий индекс, то получим разложение определителя по элементам a–го столбца:

$$\boxed{a = a_{la}A^{la}.} \tag{14.197}$$

14.105. Разложение определителя по элементам строчки. Умножим второе равенство из (14.191) на ε^{ikm} и с учетом (14.190) получим равенство

$$a\delta_m^l = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}\right) = a_{lr}A^{mr}, \tag{14.198}$$

$$A^{mr} := \frac{1}{2}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}. \tag{14.199}$$

В равенстве (14.198) положим $l = m = a$, где a — фиксирующий индекс. Тогда получим формулу разложения определителя по элементам a–ой строчки:

$$\boxed{a = a_{ar}A^{ar}.} \tag{14.200}$$

7. Формула для векторного произведения векторов

14.106. Введем следующие объекты третьего порядка:

$$\boxed{E_{ikl} := \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{ikl}, \quad E^{ikl} := \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ikl},} \tag{14.201}$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \|g_{jk}\| - \text{метрический тензор}, \tag{14.202}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если базис правый;} \\ -1, & \text{если базис левый.} \end{cases} \tag{14.203}$$

Введем следующие объекты:

$$\boxed{S_i := E_{ikl}a^k b^l,} \quad \boxed{S^i = E^{ikl}a_k b_l.} \tag{14.204}$$

14.107. Лемма. Объекты S_i и S^i связаны следующими равенствами:

$$\boxed{S_p = g_{ip}S^i.} \tag{14.205}$$

Доказательство. Действительно,

$$a_k = g_{kq}a^q, \quad a_l = g_{lr}a^r, \quad \varepsilon^{ikl}g_{ip}g_{kq}g_{lr} = g\varepsilon^{pqr},$$

и справедлива следующая цепочка равенств:

$$g_{ip}S^i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}g_{ip}\varepsilon^{ikl}a_k b_l = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}g_{ip}\varepsilon^{ikl}g_{kq}a^q g_{lr}b^r = \\ = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ikl}g_{ip}g_{kq}g_{lr}a^q b^r = \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{pqr}a^q b^r = S_p. \tag{14.206}$$

□

14.108. Лемма. Справедливо равенство

$$\boxed{S^p = \frac{g^{ip}}{g^2}S_i.} \tag{14.207}$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$g^{ip}S_i = g^{ip}E_{ikl}a^k b^l = \varepsilon\sqrt{g}g^{ip}\varepsilon_{ikl}g^{kq}a_q g^{lr}b_r = \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{ikl}g^{ip}g^{kq}g^{lr}a_q b_r = \\ = \varepsilon\sqrt{g}g\varepsilon^{pqr}a_q b_r = g^2E^{pqr}a_q b_r = g^2S^p.$$

□

14.109. Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}. \tag{14.208}$$

Докажем, что $\mathbf{S} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{S} \perp \mathbf{b}$. Действительно, с учетом равенства (14.205) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{S}, \mathbf{a}) = g_{ij} S^i a^j = S_i a^i = E_{ikl} a^i a^k b^l = \varepsilon \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} a^i a^k b^l = 0, \quad (14.209)$$

поскольку в определителе $\varepsilon_{ikl} a^i a^k b^l$ две одинаковые строчки. Аналогичным образом устанавливаем, что

$$(\mathbf{S}, \mathbf{b}) = g_{ij} S^i b^j = S_i b^i = E_{ikl} b^i a^k b^l = \varepsilon \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} b^i a^k b^l = 0. \quad (14.210)$$

Теперь вычислим длину вектора $\mathbf{S}$. Действительно, с учетом равенства (14.205) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}|^2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}) = g_{ij} S^i S^j = S_i S^i = E^{ikl} E_{ipq} a_k b_l a^p b^q = \\ = \varepsilon^2 \varepsilon^{ikl} \varepsilon_{ipq} a_k b_l a^p b^q = (\delta^k_p \delta^l_q - \delta^l_p \delta^k_q) a_k b_l a^p b^q = \\ = (a_p a^p)(b_q b^q) - (a_k b^k)(b_l a^l) = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \\ = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \phi = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \phi. \quad (14.211) \end{aligned}$$

14.110. Лемма. Если C — матрица перехода между старым $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и новым базисами $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i, \quad (14.212)$$

то справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{sign}(\det C) = \varepsilon' \varepsilon, \quad (14.213)$$

где

$$\varepsilon' = \begin{cases} +1, & \text{если штрихованный базис правый;} \\ -1, & \text{если штрихованный базис левый,} \end{cases} \quad (14.214)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если не штрихованный базис правый;} \\ -1, & \text{если не штрихованный базис левый.} \end{cases} \quad (14.215)$$

Доказательство. Для доказательства равенства (14.213) нужно воспользоваться тем, что из (14.212) вытекает следующее равенство с участием смешанных произведений:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} (\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = \\ = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det C (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad (14.216) \end{aligned}$$

причем по свойству смешанного произведения справедливы равенства

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\}, \quad \varepsilon' = \operatorname{sign}\{(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})\}. \quad (14.217)$$

Итак, из (14.216) и (14.217) вытекает следующее равенство:

$$\varepsilon' = \operatorname{sign}(\det C)\varepsilon \Rightarrow 1 = (\varepsilon')^2 = \operatorname{sign}(\det C)\varepsilon\varepsilon' \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varepsilon' = \operatorname{sign}(\det C).$$

□

14.111. Лемма. Числа E_{ikl}, определенные первым равенством из (14.201), является координатами тензора, а числа E^{ikl}, определенные вторым равенством из (14.201), являются координатами ортогонального тензора.

Доказательство. Воспользуемся результатом леммы 14.100.

Шаг 1. Докажем сначала первое утверждение леммы. Действительно, пусть два базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ связаны соотношением

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Тогда, в частности, метрический тензор преобразуется следующим образом:

$$g_{i'k'} = c^i_{i'} c^k_{k'} g_{ik} \Rightarrow |g_{i'k'}| = |c^i_{i'}||c^k_{k'}||g_{ik}| \Rightarrow g' = c^2 g, \tag{14.218}$$

где $g' = |g_{i'k'}|$, $g = |g_{ik}|$, $c = |c^i_{i'}| = |c^k_{k'}|$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} E_{i'k'l'} &= \varepsilon' \sqrt{g'} \varepsilon_{i'k'l'} = \varepsilon' |c| \sqrt{g} \frac{1}{c} c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \varepsilon_{ikl} = \\ &= \varepsilon' \operatorname{sign}(c) c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} = \varepsilon' \varepsilon \varepsilon' c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} = \\ &= \varepsilon c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} = c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} E_{ikl}. \end{aligned} \tag{14.219}$$

Следовательно, E_{ikl} — координаты тензора.

Шаг 2. Докажем второе утверждение леммы. Действительно, в случае ортогональных базисов для матрицы перехода C справедливо равенство $C^T = C^{-1}$ и поэтому $(\det C)^2 = 1$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} E^{i'k'l'} &= \frac{\varepsilon'}{\sqrt{g'}} \varepsilon^{i'k'l'} = \frac{\varepsilon'}{|c|\sqrt{g}} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{\varepsilon^{ikl}}{c} = \\ &= \frac{\varepsilon' \operatorname{sign}(c)}{c^2} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{e^{ikl}}{\sqrt{g}} = \frac{\varepsilon'\varepsilon'\varepsilon}{c^2} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{e^{ikl}}{\sqrt{g}} = \\ &= \frac{1}{c^2} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l E^{ikl} = c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l E^{ikl}, \end{aligned} \tag{14.220}$$

поскольку $c^2 = (\det C)^2 = 1$. □

14.112. Лемма. Векторное произведение векторов можно представить в следующем виде:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a^k_{ij} a^i b^j \mathbf{e}_k, \quad a^k_{ij} = g^{kl} E_{lij}, \tag{14.221}$$

где тензор Леви–Чивиты E_{ijl} определен равенством (14.201).

Доказательство. Доказательство основано на результатах параграфа 14.109. □

8. Пример ортогонального тензора — тензор инерции

14.113. Тензор инерции возникает при изучении движения твердого тела. Рассмотрим движение твердого тела G относительно прямоугольной системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки $M \in G$ представима в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega, \mathbf{r}], \tag{14.222}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость центра инерции тела, $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции тела, $\mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}$ — радиус–вектор точки M.

Кинетическая энергия T тела G определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_G \rho(M) |\mathbf{v}|^2 \, dx, \tag{14.223}$$

где $\rho = \rho(M)$ — плотность тела в точке M. Из (14.222) вытекает следующая цепочка равенств:

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{V}|^2 + 2(\mathbf{V}, [\Omega, \mathbf{r}]) + |[\Omega, \mathbf{r}]|^2 = \\ = |\mathbf{V}|^2 + 2([\mathbf{V}, \Omega], \mathbf{r}) + |\Omega|^2 |\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2. \tag{14.224}$$

Поскольку векторы $\mathbf{V}$ и Ω — одни и те же для всех точек тела G, то справедливо равенство

$$\int\limits_G \rho(M)([\mathbf{V}, \Omega], \mathbf{r}) \, dx = \left([\mathbf{V}, \Omega], \int\limits_G \rho(M) \mathbf{r} \, dx \right) = 0, \tag{14.225}$$

поскольку точка O — точка центра инерции тела G. Таким образом, из (14.223)–(14.225) вытекает следующее выражение для кинетической энергии тела:

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_G \rho(M) |\mathbf{V}|^2 \, dx + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_G \rho(M)(|\Omega|^2 |\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2) \, dx := T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}}, \tag{14.226}$$

где $T_{\text{пост}}$ есть кинетическая энергия поступательного движения твердого тела, $T_{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения тела. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$|\Omega|^2|\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2 = \Omega_i\Omega_j\delta^{ij}|\mathbf{r}|^2 - (\Omega_i x^i)(\Omega_j x^j) = \\ = \Omega_i\Omega_j\left((\mathbf{r},\mathbf{r})\delta^{ij} - x^i x^j\right). \quad (14.227)$$

С учетом (14.227) выражение для $T_{\text{вр}}$ можно записать в виде следующей квадратичной формы:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}I^{ij}\Omega_i\Omega_j, \quad (14.228)$$

где

$$I^{ij} = \int\limits_G \rho(M)\left[(\mathbf{r},\mathbf{r})\delta^{ij} - x^i x^j\right]\,dx. \quad (14.229)$$

Справедливо следующее утверждение:

14.114. Лемма. Числа I^{ij} являются координатами некоторого ортогонального тензора типа $(0,2)$.

Доказательство. В целях практики тензорных вычислений сделаем все вычисления подробно. Пусть $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ — новый ортонормированный базис, связанный с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ равенствами

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad C = \|c^i_{i'}\|, \quad C^T = C^{-1}.$$

Справедливы следующие цепочки равенств:

$$c^{i'}_i c^{j'}_j \delta^{ij} = c^{i'}_i c^{j'}_i = \{C\cdot C^T\}^{i'j'} = \delta^{i'j'}, \quad (14.230)$$

$$(\mathbf{r},\mathbf{r}) = x_{k'}x^{k'} = c^k_{k'}x_k c^{k'}_j x^j = c^k_{k'}c^{k'}_j x_k x^j = \delta^k_j x_k x^j = x_k x^k, \quad (14.231)$$

$$x^{i'}x^{j'} = c^{i'}_i c^{j'}_j x^i x^j. \quad (14.232)$$

Таким образом, из (14.230)–(14.232) для координат (14.229) вытекает равенство

$$I^{i'j'} = c^{i'}_i c^{j'}_j I^{ij}.$$

□

14.115. Отметим, что, как мы знаем, символ Кронекера δ^{ij} не является тензором, а только ортогональным тензором.

9. Примеры решения задач

14.116. Пример. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ — векторы, а $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$ — ковекторы. Пусть полилинейная форма f определена равенством

$$f(x, y; \xi, \eta) = \begin{vmatrix} \langle \xi, x \rangle & \langle \eta, x \rangle \\ \langle \xi, y \rangle & \langle \eta, y \rangle \end{vmatrix}. \tag{14.233}$$

Найти разложение тензора f по базису $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\}$ в пространстве тензоров T_2^2, где $\{\mathbf{e}^k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{L}^*$ — базис, взаимный к базису $\{\mathbf{e}_m\}_{m=1}^n \subset \mathcal{L}$.

Решение. Полилинейную форму f можно записать следующим образом:

$$f = f_{ij}^{kl} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \tag{14.234}$$

$$f_{ij}^{kl} = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j; \mathbf{e}^k, \mathbf{e}^l) = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i \rangle & \langle \mathbf{e}^l, \mathbf{e}_i \rangle \\ \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j \rangle & \langle \mathbf{e}^l, \mathbf{e}_j \rangle \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \delta_i^k & \delta_i^l \\ \delta_j^k & \delta_j^l \end{vmatrix} = \delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l. \tag{14.235}$$

Таким образом, из (14.234) и (14.235) получаем

$$f = \left(\delta_i^k \delta_j^l - \delta_j^k \delta_i^l\right) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \\ = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i, \tag{14.236}$$

где, напомним, по индексам $i, j \in \overline{1, n}$ производится суммирование.

14.117. Пример. Тензорное произведение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}$ — взаимный ему базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим тензор

$$T = \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_2 \tag{14.237}$$

и определим трилинейное отображение F равенством

$$F(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{v}_k = v_k^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad k = 1, 2, 3. \tag{14.238}$$

Найти $(T \otimes F)_{3212}^1$ и $(F \otimes T)_{3212}^1$.

Решение. Согласно определению тензорного произведения тензоров имеем

$$(T \otimes F)_{3212}^1 = T(\mathbf{e}_3; \mathbf{e}^1) F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \tag{14.239}$$

причем, с одной стороны,

$$T(\mathbf{e}_3;\mathbf{e}^1) = 0,$$

поскольку в разложении тензора (14.237) отсутствует слагаемое $\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_1$, для которого

$$(\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}^1) = \langle \mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3 \rangle \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1.$$

С другой стороны, имеем

$$F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Согласно определению тензорного произведения тензоров имеем

$$(F \otimes T)^1_{3212} = F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) T(\mathbf{e}_2; \mathbf{e}^1) = 2, \tag{14.240}$$

поскольку

$$F(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$T(\mathbf{e}_2;\mathbf{e}^1) = \left(\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}_2\right)(\mathbf{e}_2;\mathbf{e}^1) = \\ = -2\langle \mathbf{e}^2, \mathbf{e}_2 \rangle \langle \mathbf{e}^1, \mathbf{e}_1 \rangle = -2.$$

14.118. Пример. Пусть линейные операторы A и B из $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ заданы матрицами

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_e = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \tag{14.241}$$

в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Найти матрицу оператора $A \otimes B$ в базисе $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$, где оператор $A \otimes B$ определяется на элементах базиса следующим образом:

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = A(\mathbf{e}_j) \otimes B(\mathbf{e}_k), \quad j,k = \overline{1,2}.$$

Решение. Из условия задачи имеем

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A_e, \quad (B(\mathbf{e}_1), B(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)B_e, \tag{14.242}$$

$$A(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \quad A(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \tag{14.243}$$

$$B(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2, \quad B(\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2. \tag{14.244}$$

Таким образом, из (14.243) и (14.244) имеем

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = A(\mathbf{e}_1) \otimes B(\mathbf{e}_1) = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = \\ = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 15\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \tag{14.245}$$

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = A(\mathbf{e}_1) \otimes B(\mathbf{e}_2) = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = \\ = 8\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 12\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (14.246)$$

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = A(\mathbf{e}_2) \otimes B(\mathbf{e}_1) = (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = \\ = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (14.247)$$

$$(A \otimes B)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = A(\mathbf{e}_2) \otimes B(\mathbf{e}_2) = (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \otimes (4\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2) = \\ = -4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad (14.248)$$

Теперь мы можем найти матрицу оператора $A \otimes B$ в базисе

$$\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\}:$$

$$(A \otimes B)_e = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 & -4 \\ 10 & -4 & -5 & 2 \\ 3 & 12 & 1 & 4 \\ 15 & -6 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

14.119. Пример. Вычислительная задача. В линейном пространстве $P_1[-1,1]$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 1) задано скалярное произведение

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt. \quad (14.249)$$

В этом евклидовом пространстве заданы элементы

$$e_1(t) = 1, \quad e_2(t) = t. \quad (14.250)$$

Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис в $P_1[-1,1]$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе $E = (e_1, e_2)$.

Решение. Ранее было доказано, что семейство $E = (e_1, e_2)$ образуют базис в линейном пространстве $P_1[-1,1]$. Ковариантный метрический тензор имеет следующий вид:

$$G_e = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad (14.251)$$

$$g_{11} = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2, \quad g_{12} = g_{21} = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0, \quad g_{22} = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$G_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 15

Жорданова форма матрицы линейного оператора

1. Корневые векторы

15.1. Определение. Вектор $e \in \mathcal{L}$ называется корневым вектором линейного оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, отвечающим числу $\lambda \in \mathbb{K}$, если

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^m e = \theta \Leftrightarrow e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m \tag{15.1}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Наименьшее из таких m называется высотой корневого вектора e.

15.2. Собственные векторы — это корневые векторы высоты 1. Будем считать, что нулевой вектор является корневым вектором высоты 0.

15.3. Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования

$$D_x : \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}). \tag{15.2}$$

Собственными векторами линейного оператора D_x являются функции $\exp(\lambda x)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Действительно,

$$D_x e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}.$$

Докажем, что корневыми векторами высоты $m = n + 1$ являются следующие функции:

$$p(x)e^{\lambda x}, \quad p(x) \in P^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(D_x - \lambda I)\left(p(x)e^{\lambda x}\right) = \lambda p(x)e^{\lambda x} - \lambda p(x)e^{\lambda x} + p^{(1)}(x)e^{\lambda x} = p^{(1)}(x)e^{\lambda x}.$$

Поэтому

$$(D_x - \lambda I)^m \left(p(x)e^{\lambda x}\right) = p^{(m)}(x)e^{\lambda x} = 0, \quad \text{если} \quad m = n + 1.$$

15.4. Лемма. Если e — корневой вектор высоты $m \geqslant 2$, то вектор

$$f = (\mathcal{A} - \lambda I)^{m-1} e \tag{15.3}$$

собственный вектор с собственным значением λ, т.е. λ — корень характеристического многочлена.

Доказательство. Действительно, справедлива цепочка равенств

$$(\mathcal{A}-\lambda I)f=(\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}e=(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e=\theta. \qquad (15.4)$$

□

15.5. Лемма. Корневые векторы, отвечающие корню λ, образуют линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство. Действительно, пусть e_1 и e_2 — корневые векторы высоты m_1 и m_2 соответственно. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{m_1}e_1=\theta, \quad (\mathcal{A}-\lambda I)^{m_2}e_2=\theta. \qquad (15.5)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}(\alpha^1\cdot e_1+\alpha^2\cdot e_2)=\\ &\qquad=(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}(\alpha^1\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)e_1+\alpha^2\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)e_2)=\\ &=\alpha^1\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e_1+\alpha^2\cdot(\mathcal{A}-\lambda I)^{m}e_2=\alpha^1\cdot\theta+\alpha^2\cdot\theta=\theta, \qquad (15.6)\end{aligned}$$

где $m=\max\{m_1,m_2\}$ и $\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{K}$ — произвольные числа. Из (15.6) вытекает, что $\alpha^1\cdot e_1+\alpha^2\cdot e_2$ тоже корневой вектор. □

15.6. Определение. Линейное подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из всех корневых векторов, соответствующих числу $\lambda\in\mathbb{K}$, называется корневым подпространством.

15.7. Обозначение. Для корневого подпространства используется обозначение $V^{\lambda}(A)$. Напомним, что символом $V_{\lambda}(A)$ мы ранее обозначили линейную оболочку из собственных векторов, соответствующих собственному значению λ.

15.8. Лемма. Справедливо вложение $V_{\lambda}(A)\subset V^{\lambda}(A)$.

Доказательство. С одной стороны, линейное подпространство $V_{\lambda}(A)$ состоит из корневых векторов высоты 1 и одного вектора θ высоты 0. С другой стороны, линейное подпространство $V^{\lambda}(A)$ состоит из всех корневых векторов, соответствующих числу λ. Поэтому имеет место указанное вложение. □

15.9. Лемма. Корневое подпространство $V^{\lambda}(A)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{A}\theta = \theta$. Пусть $e \in V^\lambda(A)$ — корневой вектор высоты $m \geqslant 1$, тогда $(\mathcal{A}-\lambda I)e$ — корневой вектор высоты $m-1$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}(\mathcal{A}-\lambda I)e = (\mathcal{A}-\lambda I)^m e = \theta.$$

Таким образом, $(\mathcal{A}-\lambda I)e \in V^\lambda(A)$, если $e \in V^\lambda(A)$. Следовательно, линейное подпространство $V^\lambda(A)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}-\lambda I$. Заметим, что любое линейное подпространство инвариантно относительно единичного оператора I. Поэтому для любого $e \in V^\lambda(A)$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}e = (\mathcal{A}-\lambda I)e + (\lambda I)e = (\mathcal{A}-\lambda I)e + \lambda \cdot e \subset \\ \subset V^\lambda(A) + V^\lambda(A) = V^\lambda(A) \Rightarrow \mathcal{A}V^\lambda(A) \subset V^\lambda(A).\end{aligned}$$

□

15.10. Лемма. Множество всех корневых векторов высоты не большей m совпадает с линейным подпространством $\ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m$.

Доказательство. Пусть $e \in \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m$. Тогда имеет место равенство

$$(\mathcal{A}-\lambda I)^m e = \theta,$$

из которого вытекает, что e — корневой вектор высоты не большей m. Обратно, пусть e — корневой вектор высоты $m_1 \leqslant m$, т.е

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}-\lambda I)^{m_1} e = \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda I)^{m-m_1}(\mathcal{A}-\lambda I)^{m_1} e = (\mathcal{A}-\lambda I)^{m-m_1}\theta = \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda I)^m e = \theta \Rightarrow e \in \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m.\end{aligned}$$

□

15.11. Лемма. Справедливы следующие соотношения:

$$\ker(\mathcal{A}-\lambda I) \subset \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^2 \subset \cdots \subset \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m \subset \cdots, \tag{15.7}$$

$$V^\lambda(A) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m. \tag{15.8}$$

Доказательство. Пусть $e \in \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1}$ при $m \geqslant 1$, тогда

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1} e = \theta \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda I)(\mathcal{A}-\lambda I)^{m-1} e = \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda I)^m e = \theta \Rightarrow e \in \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^m.\end{aligned} \tag{15.9}$$

Равенство (15.8) вытекает из вложений (15.7). □

15.12. Лемма. Если $\dim \mathcal{L} < +\infty$, то найдется такое минимальное $m \in \mathbb{N}$, что

$$V^{\lambda}(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m. \tag{15.10}$$

Доказательство. Из цепочки вложений (15.7) леммы 15.11 получаем, что если все вложения строгие, то из (15.8) вытекает $\dim V^{\lambda}(A) = +\infty$ и при этом $V^{\lambda}(A) \subset \mathcal{L}$. Следовательно, $\dim \mathcal{L} = \infty$, что противоречит нашему предположению $\dim \mathcal{L} < +\infty$. Итак, найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m+1} = \cdots .$$

□

15.13. Определение. Скажем, что базис в $V^{\lambda}(A)$ согласован с цепочкой вложений (15.7) если он составлен таким образом, что если в линейном подпространстве $\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^s$ он выбран, то следующие элементы базиса являются дополнительными в линейном подпространстве $\ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{s+1}$.

15.14. Лемма. В базисе линейного подпространства $V^{\lambda}(A) \subset \mathcal{L}$, согласованного с цепочкой вложений (15.7), сужение оператора A на $V^{\lambda}(A)$ имеет треугольную матрицу с числами λ на диагонали.

Доказательство. Рассмотрим частный случай $V^{\lambda}(A) = \ker(\mathcal{A}-\lambda I)^2$, на котором будет понятно, что будет в общей ситуации. Итак, пусть

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k_2}\} \tag{15.11}$$

базис в $V^{\lambda}(A)$, согласованный с цепочкой вложений

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I) \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^2,$$

т.е

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}\} - \text{базис в} \quad \ker(\mathcal{A} - \lambda I), \tag{15.12}$$

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k_2}\} - \text{базис в} \quad \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^2. \tag{15.13}$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathcal{B} := \mathcal{A} - \lambda I. \tag{15.14}$$

Тогда имеем

$$\mathcal{B}\mathbf{e}_1 = \theta, \ldots, \mathcal{B}\mathbf{e}_{k_1} = \theta, \tag{15.15}$$

$$\{\mathcal{B}\mathbf{f}_1, \ldots, \mathcal{B}\mathbf{f}_{k_2}\} \subset \ker \mathcal{B} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}). \tag{15.16}$$

Отсюда приходим к выводу о том, что матрица оператора B в согласованном базисе имеет следующий вид:

$$(\mathcal{B}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{B}\mathbf{e}_{k_1}, \mathcal{B}\mathbf{f}_1, \ldots, \mathcal{B}\mathbf{f}_{k_2}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{k_2}) \cdot B, \tag{15.17}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^1_{k_1+1} & \cdots & b^1_{k_1+k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b^{k_1}_{k_1+1} & \cdots & b^{k_1}_{k_1+k_2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.18}$$

Поскольку $\mathcal{A} = \mathcal{B} + \lambda I$, то матрица оператора A в согласованном базисе примет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & b^1_{k_1+1} & \cdots & b^1_{k_1+k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & b^{k_1}_{k_1+1} & \cdots & b^{k_1}_{k_1+k_2} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}. \tag{15.19}$$

□

15.15. Лемма. Характеристический многочлен ограничения оператора $\mathcal{A}$ на $V^\lambda(A)$ равен

$$(\lambda - t)^k, \quad k = \dim V^\lambda(A), \tag{15.20}$$

а при $\mu \neq \lambda$ оператор $\mathcal{A} - \mu I$ невырожден на $V^\lambda(A)$.

Доказательство. Для доказательства (15.20) заметим, что размер матрицы сужения оператора A на $V^\lambda(A)$ равен $k \times k$, где $k = \dim V^\lambda(A)$, причем в базисе, согласованном с цепочкой вложений (15.7) матрица оператора $A - tI$ согласно результату леммы 15.14 имеет треугольный вид, причем на диагонали расположены числа $\lambda - t$. Действительно, в силу леммы 15.5 множество $V^\lambda(A)$ является линейным пространством. Рассмотрим сужение оператора A на это линейное пространство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $V^\lambda(A)$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = A_e(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k), \quad A_e \in \mathbb{K}^{k\times k}.$$

Следовательно,

$$\det(\mathcal{A}|_{V^\lambda} - tI) = (\lambda - t)^k,$$

где символом $\mathcal{A}|_{V^\lambda}$ мы обозначили сужение оператора $\mathcal{A}$ на линейное подпространство $V^\lambda(A)$.

Второе утверждение докажем от противного. Пусть $\mu \neq \lambda$ и при этом

$$(A|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda})e = \theta \quad \text{для всех} \quad e \in V^\lambda(A).$$

Значит,

$$A|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda} = O|_{V^\lambda} \Rightarrow 0 = \det(A|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda}) = \\ = \det(\lambda I|_{V^\lambda} - \mu I|_{V^\lambda}) = (\lambda - \mu)^k \neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение. Значит, сужение оператора $\mathcal{A} - \mu I$ на $V^\lambda(A)$ — невырожденный оператор при $\mu \neq \lambda$. □

15.16. Лемма. Высота любого корневого вектора $e \in V^\lambda(A)$ не превосходит размерность $\dim V^\lambda(A)$ корневого подпространства $V^\lambda(A)$, если $\dim \mathcal{L} < +\infty$.

Доказательство. Пусть корневой вектор $e_0 \in V^\lambda(A)$ имеет высоту $m_0 \in \mathbb{N}$, т.е.

$$(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_0} e_0 = \theta, \quad (\mathcal{A} - \lambda I)^{m_0 - 1} e_0 \neq \theta. \tag{15.21}$$

Заметим, что поскольку $\dim \mathcal{L} < +\infty$, то в силу результата (15.11) леммы 15.12 найдется такое минимальное $m_1 \in \mathbb{N}$, что

$$V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1}. \tag{15.22}$$

С одной стороны, поскольку $e_0 \in V^\lambda(A)$, то из (15.21) и (15.22) получаем, что $m_0 \leqslant m_1$. С другой стороны, из (15.22) и результата леммы 15.12 имеют место следующие строгие вложения:

$$\ker(\mathcal{A} - \lambda I) \subset \ker(A - \lambda I)^2 \subset \cdots \\ \cdots \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1 - 1} \subset \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1}. \tag{15.23}$$

Строгие вложения означает, что существуют m_1 линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{m_1}\}$, которые принадлежат следующим множествам:

$$\mathbf{e}_1 \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I), \quad \mathbf{e}_2 \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^2 \setminus \ker(\mathcal{A} - \lambda I), \ldots, \\ \ldots, \mathbf{e}_{m_1} \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1} \setminus \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m_1 - 1}.$$

Это означает, что $\dim V^\lambda(A) \geqslant m_1 \geqslant m_0$. Лемма доказана. □

15.17. Теорема. *Размерность $\dim V^\lambda(A)$ корневого подпространства $V^\lambda(A)$ равна кратности соответствующего корня λ характеристического многочлена.*

Доказательство. Выберем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы $V^\lambda(A) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. В силу результата леммы 15.9 линейное подпространство $V_\lambda(A)$ инвариантно относительно оператора A. Как ранее мы установили, тогда

$$(\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_k, \mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) = \\ = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A, \quad (15.24)$$

где матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k & a_{k+1}^k & \cdots & a_n^k \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad (15.25)$$

которую перепишем в блочном виде

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline O & C \end{array}\right), \quad (15.26)$$

$$B = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}, \quad (15.27)$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^k & \cdots & a_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times(n-k)}, \quad (15.28)$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{k+1}^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(n-k)\times(n-k)}, \quad O \in \mathbb{K}^{(n-k)\times k}. \quad (15.29)$$

Отметим, что B — матрица сужения оператора $\mathcal{A}$ на инвариантное корневое подпространство $V^\lambda(A) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$. Из вида матрицы (15.26) справедливо следующее равенство для характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$:

$$f_A(t) = f_B(t)\det(C - tI) = (t-\lambda)^k \det(C - tI). \quad (15.30)$$

Пусть $\mathcal{C}$ — линейный оператор в подпространстве $\mathcal{W} = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$, который в базисе $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\}$ имеет матрицу C. Докажем, что число $\lambda \in \mathbb{K}$ не является корнем многочлена $\det(C - tI)$, т.е. собственным значением оператора $\mathcal{C}$.

Предположим, что λ — собственное значение оператора $\mathcal{C}$, т.е. найдется такой вектор $e \in \mathcal{W}$, что выполнено равенство

$$\mathcal{C}e = \lambda \cdot e, \quad e \neq \theta. \tag{15.31}$$

Из равенства (15.29) получаем, что

$$(\mathcal{C}\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathcal{C}\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C \tag{15.32}$$

или в развернутой форме

$$\mathcal{C}\mathbf{e}_{k+1} = a_{k+1}^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_{k+1}^{n} \cdot \mathbf{e}_n, \tag{15.33}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{C}\mathbf{e}_n = a_n^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_n^n \cdot \mathbf{e}_n. \tag{15.34}$$

Из равенства (15.25) с учетом (15.33)–(15.34) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1} = a_{k+1}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_{k+1}^k \cdot \mathbf{e}_k + a_{k+1}^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_{k+1}^n \cdot \mathbf{e}_n = \\ = a_{k+1}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_{k+1}^k \cdot \mathbf{e}_k + \mathcal{C}\mathbf{e}_{k+1},\end{aligned} \tag{15.35}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{e}_n = a_n^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n^k \cdot \mathbf{e}_k + a_n^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + a_n^n \cdot \mathbf{e}_n = \\ = a_n^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n^k \cdot \mathbf{e}_k + \mathcal{C}\mathbf{e}_n.\end{aligned} \tag{15.36}$$

Поскольку $e \in \mathcal{W} = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то справедливо следующее равенство:

$$e = c^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + c^n \cdot \mathbf{e}_n. \tag{15.37}$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{A}e = c^{k+1} \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + c^n \cdot \mathcal{A}\mathbf{e}_n. \tag{15.38}$$

Из (15.35)–(15.36) и из (15.37) с учетом (15.38) вытекает равенство

$$\mathcal{A}e = u + \mathcal{C}e = u + \lambda \cdot e, \tag{15.39}$$

где

$$\begin{aligned}u = c^{k+1} \cdot (a_{k+1}^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_{k+1}^k \cdot \mathbf{e}_k) + \cdots \\ \cdots + c^n \cdot (a_n^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n^k \cdot \mathbf{e}_k) \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) = V^\lambda(A).\end{aligned} \tag{15.40}$$

Но тогда

$$u \in V^\lambda(A) \Rightarrow u \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m, \quad m \in \mathbb{N},$$
$$(\mathcal{A} - \lambda I)e = u \in V^\lambda(A) \Rightarrow e \in \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^{m+1}.$$

Значит, e — корневой вектор и поэтому $e \in V^\lambda(A) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ и $e \in \mathcal{W} = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Но тогда $e = \theta$. Пришли к противоречие с тем, что e — собственный вектор оператора $\mathcal{C}$. Значит, λ не является корнем характеристического многочлена $\det(C - tI)$. $\square$

15.18. Лемма. Корневые подпространства, отвечающие различным корням $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Предположим, что для $(k-1)$–го корневые подпространства, отвечающие различным корням, линейно независимы. Докажем, что k корневых подпространств тоже линейно независимы. Отметим, что одно корневое подпространство содержит ненулевой вектор и поэтому линейно независимо.

Пусть $\mathbf{e}_1 \in V^{\lambda_1}(A)$, ... $\mathbf{e}_k \in V^{\lambda_k}(A)$ — произвольные ненулевые векторы. Рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{k-1} \cdot \mathbf{e}_{k-1} + \alpha^k \cdot \mathbf{e}_k = \theta. \tag{15.41}$$

Пусть корневой вектор $\mathbf{e}_k$ имеет высоту $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_k = \theta, \quad (\mathcal{A} - \lambda_k I)^{m-1} \mathbf{e}_k \neq \theta. \tag{15.42}$$

В силу результата леммы 15.15 имеем

$$\mathbf{e}_1 \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m, \ldots, \mathbf{e}_{k-1} \notin \ker(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m. \tag{15.43}$$

И поэтому, с одной стороны,

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_1 \neq \theta, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_{k-1} \neq \theta. \tag{15.44}$$

По предположению индукции ненулевые векторы

$$(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_1 \in V^{\lambda_1}(A), \ldots, (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_{k-1} \in V^{\lambda_{k-1}}(A)$$

линейно независимы. Применим линейный оператор $(\mathcal{A} - \lambda_k I)^m$ к обеим частям равенства (15.41) и с учетом (15.42) получим равенство

$$\alpha^1 \cdot (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^{k-1} \cdot (\mathcal{A} - \lambda_k I)^m \mathbf{e}_{k-1} = \theta. \tag{15.45}$$

По предположению индукции отсюда получаем, что

$$\alpha^1 = \cdots = \alpha^{k-1} = 0.$$

Отсюда и из (15.41) получаем, что

$$\alpha^k \cdot \mathbf{e}_k = \theta \Rightarrow \alpha^k = 0,$$

поскольку $\mathbf{e}_k \neq \theta$. Таким образом, ненулевые векторы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, произвольным образом выбранные из соответствующих корневых подпространств, являются линейно независимыми. Значит, линейно независимы и все корневые подпространства. $\square$

15.19. Теорема. *Если характеристический многочлен*

$$f_A(t) = \det(\mathcal{A} - tI)$$

разлагается на линейные множители, то

$$\mathcal{L} = V^{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}(A), \tag{15.46}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные корни многочлена $f_A(t)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные корни кратности $k_1, \ldots, k_s$ характеристического многочлена $f_A(t)$. Поскольку многочлен представим в виде (разлагается на линейные множители)

$$f_A(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdots (t - \lambda_s)^{k_s},$$

то $k_1 + \cdots + k_s = n$, где $n = \dim \mathcal{L}$. Но тогда в силу результата теоремы 15.17 имеем

$$k_1 = \dim V^{\lambda_1}(A), \ldots, k_s = \dim V^{\lambda_s}(A), \tag{15.47}$$

а в силу результата леммы 15.18 корневые подпространства

$$V^{\lambda_1}(A), \ldots, V^{\lambda_s}(A)$$

линейно независимы. Тогда

$$\dim V = k_1 + \cdots + k_s = n, \quad V := V^{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}(A) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathcal{L} = V^{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus V^{\lambda_s}(A). \tag{15.48}$$

□

15.20. В силу результата леммы 15.9 оператор $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ инвариантен на каждом из корневых подпространств $V^{\lambda_1}(A), \ldots, V^{\lambda_s}(A)$. Поэтому нам теперь достаточно изучить сужение оператора $\mathcal{A}$ на корневом подпространстве.

2. Нильпотентные операторы

15.21. Определение. Линейный оператор $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ называется нильпотентным, если существует такое $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $\mathcal{N}^m = O$. Наименьшее из таких m называется высотой нильпотентного оператора $\mathcal{N}$.

15.22. Пример. Оператор дифференцирования в пространстве полиномов. Выберем в пространстве многочленов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ базис следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}.$$

Заметим, что

$$D_t \mathbf{e}_1 = \theta \in P^n, \quad D_t \mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k, \quad k = \overline{1, n+1},$$

и поэтому справедливо равенство

$$(D_t\mathbf{e}_1, D_t\mathbf{e}_2, \ldots, D_t\mathbf{e}_{n+1}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})D,$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что

$$D_t^{n+1}p(t) = 0 \quad \text{для любого} \quad p(t) \in P^n,$$

причем

$$D_t^n\mathbf{e}_{n+1} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, оператор дифференцирования D_t является нильпотентным оператором на P^n высоты $n+1$.

15.23. Заметим, что $V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$ для некоторого минимального $m \in \mathbb{N}$. Поэтому оператор

$$\mathcal{N} = \mathcal{A} - \lambda I$$

является нильпотентным оператором степени m на линейном пространстве $V^\lambda(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$. Поэтому наша задача заключается в изучении нильпотентных операторов, действующих в конечномерных линейных пространствах.

Итак, пусть $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ — нильпотентный оператор.

15.24. Определение. Высотой вектора $e \in \mathcal{L}$ относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ называется наименьшее $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которого

$$\mathcal{N}^m e = \theta, \tag{15.49}$$

т.е. высота вектора e как корневого вектора оператора $\mathcal{N}$, отвечающего корню $\lambda = 0$.

15.25. Лемма. Высота вектора, как корневого вектора оператора $\mathcal{N}$, соответствующего корню 0, не превосходит высоты самого оператора $\mathcal{N}$, причем существуют векторы, высота которых равна высоте оператора $\mathcal{N}$.

Доказательство. Прямое следствие определения 15.24. □

15.26. Обозначение. Будем высоту вектора $e \in \mathcal{L}$ относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ обозначать $\operatorname{ht} e$.

15.27. Лемма. Если $e \in \mathcal{L}$ — вектор высоты m относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, то векторы

$$e,\ \mathcal{N}e,\ \mathcal{N}^2e,\ \ldots,\ \mathcal{N}^{m-1}e \tag{15.50}$$

линейно независимы. Кроме того, если

$$u = \lambda_0 \cdot e + \lambda_1 \cdot \mathcal{N}e + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1}e, \tag{15.51}$$

причем в правой части этого равенства находится нетривиальная линейная комбинация, то u ненулевой вектор высоты $m-k$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ — номер первого ненулевого коэффициента.

Доказательство. Шаг 1. Действительно, рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot e + \alpha^2 \cdot \mathcal{N}e + \cdots + \alpha^m \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \theta. \tag{15.52}$$

Сначала применим к обеим частям равенства (15.52) линейный оператор $\mathcal{N}^{m-1}$. Поскольку

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \theta, \quad \mathcal{N}^m e = \theta, \tag{15.53}$$

то получим равенство

$$\alpha^1 \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \theta \Rightarrow \alpha^1 = 0. \tag{15.54}$$

Из (15.52) с учетом (15.54) получим равенство

$$\alpha^2 \cdot \mathcal{N}e + \cdots + \alpha^m \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \theta. \tag{15.55}$$

Теперь применим к обеим частям равенства (15.55) линейный оператор $\mathcal{N}^{m-2}$ и с учетом (15.53) получим равенство

$$\alpha^2 \cdot \mathcal{N}^{m-1}e = \theta \Rightarrow \alpha^2 = 0. \tag{15.56}$$

Продолжая таким образом, мы получим равенства

$$\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^m = 0.$$

Первая часть утверждения леммы доказана.

Шаг 2. Для доказательства второго утверждения заметим, что если $\lambda_k \neq 0$ — первый ненулевой коэффициент в правой части (15.51), то справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{N}^{m-k-1}u = \lambda_k \cdot \mathcal{N}^{m-1}e \neq \theta, \quad \mathcal{N}^{m-k}u = \lambda_k \cdot \mathcal{N}^m e = \theta,$$

где мы воспользовались соотношениями (15.53). Таким образом, вектор u имеет высоту $m-k$. $\square$

15.28. Определение. Подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e) \subset \mathcal{L}$, где $m = \operatorname{ht} e$, называется циклическим подпространством нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ в $\mathcal{L}$, порожденным вектором e.

15.29. Лемма. Циклическое подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{N}$ и ограничение оператора $\mathcal{N}$ на это подпространство имеет высоту m.

Доказательство. Заметим, что поскольку m — высота вектора e относительно нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, то справедливы следующие соотношения:

$$\mathcal{N}e \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e), \tag{15.57}$$

$$\mathcal{N}\mathcal{N}e = \mathcal{N}^2 e \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e), \tag{15.58}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{N}\mathcal{N}^{m-2}e = \mathcal{N}^{m-1}e \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e), \tag{15.59}$$

$$\mathcal{N}\mathcal{N}^{m-1}e = \mathcal{N}^{m}e = \theta \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e). \tag{15.60}$$

Из соотношений (15.57)–(15.60) вытекает первое утверждение. Заметим, что

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \theta, \quad \mathcal{N}^{m}e = \theta.$$

Пусть $u \in L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$. Тогда

$$u = \alpha_0 \cdot e + \alpha_1 \cdot \mathcal{N}e + \alpha_2 \cdot \mathcal{N}^2 e + \cdots + \alpha_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1}e.$$

Поскольку $\operatorname{ht} e = m$, то

$$\mathcal{N}^{m}u = \theta, \quad \mathcal{N}^{m-1}e \neq \theta.$$

Значит, оператор $\mathcal{N}$ является нильпотентным на $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ высоты $m \in \mathbb{N}$. $\square$

15.30. Лемма. В базисе

$$\mathbf{e}_1 = \mathcal{N}^{m-1}e,\ \mathbf{e}_2 = \mathcal{N}^{m-2}e,\ \ldots,\ \mathbf{e}_{m-1} = \mathcal{N}e,\ \mathbf{e}_m = e, \tag{15.61}$$

где $m = \operatorname{ht} e$, ограничение оператора $\mathcal{N}$ на циклическое подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ имеет следующую матрицу размера $m \times m$:

$$J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.62}$$

Доказательство. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{N}\mathbf{e}_1 = \theta,\ \ldots,\ \mathcal{N}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad k = \overline{2, m-1}. \tag{15.63}$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$(\mathcal{N}\mathbf{e}_1, \mathcal{N}\mathbf{e}_2, \mathcal{N}\mathbf{e}_3 \ldots, \mathcal{N}\mathbf{e}_{m-1}, \mathcal{N}\mathbf{e}_m) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m) \cdot J(0).$$

□

15.31. Определение. Матрица $J(0)$ называется жордановой клеткой.

15.32. Лемма. Справедливы следующие равенства: $(J(0))^{m-1} \neq O$, $(J(0))^m = O$.

Доказательство. Следует из того, что ограничение нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ порядка $m \in \mathbb{N}$ на циклическое подпространство $L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e)$ в базисе (15.61) имеет матрицу $J(0)$. Поэтому

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}^m\mathbf{e}_1, \mathcal{N}^m\mathbf{e}_2, \mathcal{N}^m\mathbf{e}_3 \ldots, \mathcal{N}^m\mathbf{e}_{m-1}, \mathcal{N}^m\mathbf{e}_m) &= \\ = (O\mathbf{e}_1, O\mathbf{e}_2, O\mathbf{e}_3 \ldots, O\mathbf{e}_{m-1}, O\mathbf{e}_m) = (\theta, \ldots, \theta) &= \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m) \cdot (J(0))^m&,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\theta, \theta, \ldots, \theta, \mathcal{N}^{m-1}e) &= \\ = (\mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_1, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_2, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_3 \ldots, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_{m-1}, \mathcal{N}^{m-1}\mathbf{e}_m) &= \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \ldots, \mathbf{e}_{m-1}, \mathbf{e}_m) \cdot (J(0))^{m-1}&.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались следующими равенствами, справедливыми для произвольного линейного оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ с базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{A}\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{A}\,(\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) = \mathcal{A}\,(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e &= \\ = (\mathcal{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathcal{A}\mathbf{e}_n) \cdot A_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e^2&.\end{aligned}$$

□

15.33. Теорема. *Пусть $e \in \mathcal{L}$ — вектор максимальной высоты m (равной высоте нильпотентного оператора $\mathcal{N}$) и*

$$\mathcal{U} = L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e) \tag{15.64}$$

— порожденное им циклическое подпространство. Тогда существует инвариантное относительно $\mathcal{N}$ подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$, дополнительное к $\mathcal{U}$, т.е. такое, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}. \tag{15.65}$$

Доказательство. Шаг 1. Нам нужно доказать существование такого инвариантного подпространства $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$, что $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\theta\}$ и $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}$. Заведомо существуют такие линейные подпространства $\mathcal{W}$, удовлетворяющие первому свойству, например, $\mathcal{W} = \{\theta\}$. Выберем из них максимальное, т.е. такое, которое нельзя увеличить с сохранением указанного свойства. Обозначим его через $\mathcal{W}$ и докажем, что

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}.$$

Шаг 2. Предположим, что это не так и существует такой вектор, что

$$v \notin \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{15.66}$$

Поскольку $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор степени $m \in \mathbb{N}$, то имеем

$$\mathcal{N}^m v = \theta \in \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{15.67}$$

Из (15.66) и (15.67) вытекает существование такого $k \in \overline{1, m}$, что

$$\mathcal{N}^{k-1} v \notin \mathcal{U} + \mathcal{W}, \quad \mathcal{N}^k v \in \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{15.68}$$

Сделаем замену

$$\mathcal{N}^{k-1} v \to v. \tag{15.69}$$

Тогда с учетом (15.68) получим, что

$$\mathcal{N} v \in \mathcal{U} + \mathcal{W}. \tag{15.70}$$

Из (15.70) вытекает, что

$$\mathcal{N} v = u + w, \quad u \in \mathcal{U}, \quad w \in \mathcal{W}. \tag{15.71}$$

Применим к обеим частям равенства (15.71) оператор $\mathcal{N}^{m-1}$ и получим равенство

$$\theta = \mathcal{N}^{m-1} u + \mathcal{N}^{m-1} w, \tag{15.72}$$

поскольку $\mathcal{N}^m = O$. По построению линейные подпространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ инвариантны относительно оператора $\mathcal{N}$. Поэтому

$$u \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{N}^{m-1} u \in \mathcal{U}, \tag{15.73}$$

$$w \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{N}^{m-1} w \in \mathcal{W} \tag{15.74}$$

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\theta\}. \tag{15.75}$$

Из (15.72) с учетом (15.73)–(15.75) получаем, в частности, равенство

$$\mathcal{N}^{m-1} u = \theta. \tag{15.76}$$

Значит, высота вектора $\operatorname{ht} u < m$. В силу результата леммы 15.27 справедливо равенство

$$u = \lambda_0 \cdot e + \lambda_1 \cdot \mathcal{N} e + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1} e. \tag{15.77}$$

Применим к обеим частям равенства (15.77) оператор $\mathcal{N}^{m-1}$ и с учетом (15.76), а также того, что $\mathcal{N}^m = O$, получим равенство

$$\lambda_0 \cdot \mathcal{N}^{m-1} e = \theta \Rightarrow \lambda_0 = 0, \tag{15.78}$$

поскольку вектор e имеет высоту m. Из (15.77) и (15.78) вытекает

$$u = \lambda_1 \cdot \mathcal{N} e + \cdots + \lambda_{m-1} \cdot \mathcal{N}^{m-1} e \in L(\mathcal{N} e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1} e) = \mathcal{N}\mathcal{U}. \tag{15.79}$$

Последнее вложение означает, что найдется такой вектор $u' \in \mathcal{U}$, что

$$u = \mathcal{N} u', \quad u' \in \mathcal{U}. \tag{15.80}$$

Из равенств (15.71) и (15.80) получаем, что

$$\mathcal{N}(v - u') = w \in \mathcal{W}. \tag{15.81}$$

Заменим v на $v - u'$. Тогда из (15.81) получаем

$$\mathcal{N}(v) \in \mathcal{W}. \tag{15.82}$$

Шаг 3. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{W}' := \mathcal{W} + L(v). \tag{15.83}$$

Заметим, что $\mathcal{W}'$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{N}$. Действительно, пусть $z' \in \mathcal{W}'$. Тогда найдутся такие $y \in \mathcal{W}$ и $x = \lambda v \in L(v)$, что справедливо равенство

$$z' = y + \lambda \cdot v \Rightarrow \mathcal{N} z' = \mathcal{N} y + \lambda \cdot \mathcal{N} v \in \mathcal{W} + \mathcal{W} \subset \mathcal{W}, \tag{15.84}$$

где мы воспользовались вложением (15.82).

Докажем теперь, что

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W}' = \{\theta\}.$$

Предположим противное:

$$y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}', \quad y \neq \theta. \tag{15.85}$$

Тогда вектор y имеет следующий вид:

$$y = z + \lambda \cdot v, \quad z \in \mathcal{W}. \tag{15.86}$$

Заметим, что $\lambda \neq 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то из (15.86) получаем $y \in \mathcal{W}$, а в силу (15.85) получаем, что $y \in \mathcal{U}$. Итак,

$$y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\theta\}.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\lambda \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 1$. Тогда из (15.86) получаем выражение

$$v = y - z \in \mathcal{U} + \mathcal{W},$$

что противоречит соотношению (15.66). Теорема доказана полностью. $\square$

15.34. Теорема. *Линейное пространство $\mathcal{L}$, на котором определен нильпотентный оператор $\mathcal{N}$, может быть разложено в прямую сумму циклических подпространств оператора $\mathcal{N}$. Количество слагаемых в таком разложении равно* $\dim\ker\mathcal{N}$.

Доказательство. Шаг 1. Будем доказывать первое утверждение теоремы индукцией по $n = \dim\mathcal{L}$. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что при $\dim\mathcal{L} = n-1$ первое утверждение теоремы выполнено. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}$ — циклическое подпространство, порожденное каким–либо вектором максимальной высоты. Согласно теореме 15.33 существует такое инвариантное относительно $\mathcal{N}$ подпространство $\mathcal{W} \subset \mathcal{L}$, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} \Rightarrow \dim\mathcal{W} \leqslant n-1.$$

По предположению индукции подпространство $\mathcal{W}$ можно разложить в прямую сумму циклических подпространств. Вместе с циклическим подпространством $\mathcal{U}$ все линейное пространство $\mathcal{L}$ можно представить в виде прямой суммы циклических подпространств.

Шаг 2. Пусть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_k \tag{15.87}$$

— разложение пространства $\mathcal{L}$ в прямую сумму циклических подпространств нильпотентного оператора $\mathcal{N}$. Очевидно, что

$$\ker\mathcal{N} = \ker\mathcal{N}|_{\mathcal{L}_1} \oplus \cdots \oplus \ker\mathcal{N}|_{\mathcal{L}_k}. \tag{15.88}$$

Докажем, что

$$\ker\mathcal{N}|_{\mathcal{L}_j} = 1 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,k}. \tag{15.89}$$

Действительно, базис в любом циклическом подпространстве $\mathcal{U}$ относительно оператора $\mathcal{N}$ образуют векторы

$$\{e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e\}, \tag{15.90}$$

где m — высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$, а $e \in \mathcal{U}$ — вектор высоты m, т.е.

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \theta, \quad \mathcal{N}^m e = \theta. \tag{15.91}$$

Поэтому только крайний вектор

$$\mathcal{N}^{m-1}e \in \ker\mathcal{N}|_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U},$$

а остальные векторы из семейства (15.90) не принадлежат ядру $\ker\mathcal{N}|_{\mathcal{U}}$. Стало быть,

$$\dim\ker\mathcal{N}|_{\mathcal{U}} = 1. \tag{15.92}$$

Итак, (15.89) доказано. Поэтому из (15.88) и (15.89) вытекает равенство

$$\dim\ker\mathcal{N} = k. \tag{15.93}$$

Сравнивая (15.87) с (15.93), приходим ко второму утверждению теоремы. □

15.35. Теорема. *Для нильпотентности линейного оператора* $\mathcal{N} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, $\dim \mathcal{L} = n \in \mathbb{N}$ *необходимо и достаточно, чтобы он имел нулевое собственное значение кратности* n.

Доказательство. Шаг 1. Необходимость. Пусть $\mathcal{N}^k = O$ и $Ax = \lambda \cdot x$, $x \neq \theta$. Тогда имеем

$$\theta = O^k x = A^k x = \lambda^k \cdot x \Rightarrow \lambda = 0.$$

Шаг 2. Достаточность. Доказательство достаточности основано на теореме Гамильтона–Кэли, что выходит за рамки настоящего курса.

□

3. Жорданова форма

15.36. Возвращаясь к линейному оператору $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, заметим, что корневое подпространство

$$V^{\lambda}(A) = \ker(\mathcal{A} - \lambda I)^m$$

является циклическим для оператора $\mathcal{N} := (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda}}$. Действительно, оператор $\mathcal{N}$ обладает свойствами

$$\mathcal{N}^m = O, \quad \mathcal{N}^{m-1} \neq O \quad \text{на} \quad V^{\lambda}(A).$$

Поэтому в $V^{\lambda}(A)$ существует вектор e максимальной высоты m. Поэтому, с одной стороны, в силу результата леммы 15.27 следующее семейство векторов является линейно независимым:

$$\big\{e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e\big\} \subset V^{\lambda}(A), \tag{15.94}$$

где последнее вложение выполнено, поскольку оператор $\mathcal{N}$ инвариантен на $V^{\lambda}(A)$ в силу результата леммы 15.9. Отметим, что на каждом циклическом подпространстве

$$\mathcal{U} = L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e) \subset V^{\lambda}(A).$$

оператор $\mathcal{A} = \mathcal{N} + \lambda I$ имеет матрицу следующего вида:

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{15.95}$$

15.37. Определение. Квадратная матрица $J(\lambda)$ вида (15.95) называется жордановой клеткой с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K}$. Жордановым блоком, соответствующим собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, называется клеточно–диагональная квадратная матрица

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda) & & & \mathrm{O} \\ & J_{i_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & J_{i_s}(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{15.96}$$

15.38. Заметим, что $J_{i_1}, J_{i_2}, \ldots, J_{i_s}$ — какие-то жордановы клетки, причем порядок жордановой клетки J_{i_k} равен i_k и ниже в лемме 15.44 будет доказано, что s — геометрическая кратность собственного значения λ, а в силу леммы 15.43 $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = m_\lambda$, где m_λ — алгебраическая кратность собственного значения λ.

15.39. Определение. Блочно–диагональная матрица A, составленная из жордановых блоков

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda_1) & & & \mathrm{O} \\ & A(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & A_p(\lambda_p) \end{pmatrix}, \quad \lambda_j \neq \lambda_k, \quad j \neq k$$

называется жордановой формой.

15.40. Теорема. *Если характеристический многочлен*

$$f_A(t) = \det(\mathcal{A} - tI)$$

разлагается на линейные множители в поле $\mathbb{K}$, то существует базис, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ жорданова.

Доказательство. Прямое следствие теорем 15.19 и 15.34. □

15.41. Следствие. *Матрица любого линейного оператора*

$$\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L}),$$

где $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем комплексных чисел, может быть приведена к жордановой форме.

15.42. Определение. Базис, в котором матрица линейного оператора имеет жорданову форму, называется жордановым.

15.43. Лемма. В жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$ сумма порядков жордановых клеток с собственным значением λ равна $\dim V^\lambda(A)$, т.е. кратности λ как корня характеристического многочлена $f_A(t) = \det(\mathcal{A} - tI)$.

Доказательство. В силу теоремы 15.34 линейное подпространство $V^{\lambda}(A)$ может быть разложена в прямую сумму циклических подпространств нильпотентного оператора

$$\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda}}.$$

Поэтому объединение базисов соответствующих базисов циклических подпространств образует базис всего корневого подпространства $V^{\lambda}(A)$. Но это и означает, что сумма порядков жордановых клеток, соответствующих собственному значению λ равна размерности $V^{\lambda}(A)$. $\square$

15.44. Лемма. Число жордановых клеток с собственным значением λ равно $\dim V_{\lambda}(A)$.

Доказательство. Для доказательства утверждения леммы нужно воспользоваться вторым утверждением теоремы 15.34, в которой

$$\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda(A)}}.$$

$\square$

15.45. Лемма. Максимальный порядок жордановых клеток с собственным значением λ в жордановой форме матрицы оператора $\mathcal{A}$ равен высоте нильпотентного оператора $\mathcal{N} = (\mathcal{A} - \lambda I)|_{V^{\lambda}(A)}$.

Доказательство. Существование. Пусть высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ из условия леммы равна $m \in \mathbb{N}$, что означает, что существует вектор $e \in V^{\lambda}(A)$ такой, что

$$\mathcal{N}^{m-1}e \neq \theta, \quad \mathcal{N}^{m}e = \theta.$$

Поэтому существует циклическое подпространство

$$L(e, \mathcal{N}e, \ldots, \mathcal{N}^{m-1}e),$$

размерность которого равна m и соответствующая жорданова клетка имеет размер $m \times m$.

Максимальность. Предположим, что жорданова клетка имеет размер $p \times p$ при $p > m$. Это означает что существует циклическое подпространство

$$L(f, \mathcal{N}f, \ldots, \mathcal{N}^{p-1}f).$$

Но отсюда вытекает, что

$$\mathcal{N}^{p-1}f \neq \theta, \quad p \geqslant m + 1.$$

Это противоречит тому, что высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ равна m. $\square$

15.46. Лемма. Справедливо равенство

$$\ker(\mathcal{A}-\lambda I)^{m_\lambda}=V^\lambda(A), \tag{15.97}$$

где m_λ — алгебраическая кратность корня λ характеристического многочлена $\det(A-\lambda I)$.

Доказательство.

Шаг 1. Введем привычные обозначения. Пусть $\mathcal{N}:=\mathcal{A}-\lambda I$. Предположим, что высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}$ равна $n\in\mathbb{N}$, а алгебраическая кратность m_λ корня $\lambda\in\mathbb{K}$ меньше n. Тогда найдется такой вектор $e\in V^\lambda(A)$, высота которого равна n. Но тогда размерность циклического подпространства $L(e,\mathcal{N}e,\ldots,\mathcal{N}^{n-1}e)$ равна

$$n>m_\lambda=\dim V^\lambda(A)\geqslant\dim L(e,\mathcal{N}e,\ldots,\mathcal{N}^{n-1}e)=n.$$

Полученное противоречие доказывает, что высота n ограничения оператора $\mathcal{A}-\lambda I$ на корневое пространство $V^\lambda(A)$ не превосходит алгебраической кратности m_λ корня λ характеристического многочлена.

Шаг 2. С одной стороны, с учетом обозначений первого шага имеем

$$\ker(A-\lambda I)^n=V^\lambda(A),\quad n\leqslant m_\lambda,$$

а, с другой стороны, для ограничения оператора $\mathcal{A}-\lambda I$ на линейное подпространство $V^\lambda(A)$ справедливо равенство

$$\ker(A-\lambda I)^n=\ker(A-\lambda I)^p\quad\text{для всех}\quad p\geqslant n.$$

Таким образом, приходим к равенству (15.97).

$\square$

4. Жорданова лестница

Пусть высота нильпотентного оператора $\mathcal{N}\in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ $(0<\dim\mathcal{L}<+\infty)$ равна $k\in\mathbb{N}$. Сначала выберем какую–либо максимальную систему векторов

$$\{\mathbf{e}_1^{(k)},\mathbf{e}_2^{(k)},\ldots,\mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\}\subset\ker\mathcal{N}^k=\mathcal{L},$$

которая является линейно независимой над $\ker\mathcal{N}^{k-1}$ и, в частности,

$$\{\mathbf{e}_1^{(k)},\mathbf{e}_2^{(k)},\ldots,\mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\}\not\subset\ker\mathcal{N}^{k-1}.$$

Заметим, что

$$\ker\mathcal{N}\subset\cdots\subset\ker\mathcal{N}^{k-1}\subset\mathcal{N}^k=\mathcal{L},$$

причем все вложения строгие. Векторы из набора $\{\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \ldots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\}$ являются старшими корневыми векторами и им соответствуют жордановы клетки размера k.

Теперь применим к семейству векторов $\{\mathbf{e}_1^{(k)}, \mathbf{e}_2^{(k)}, \ldots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k)}\}$ оператор $\mathcal{N}$ и получим следующий набор векторов

$$\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \mathbf{e}_2^{(k-1)}, \ldots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}\}, \quad \mathbf{e}_j^{(k-1)} = \mathcal{N}\mathbf{e}_j^{(k)}, \quad j = \overline{1, r_k}. \tag{15.98}$$

Таким образом, из (15.98) получаем, что

$$\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \mathbf{e}_2^{(k-1)}, \ldots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}\} \subset \ker \mathcal{N}^{k-1}. \tag{15.99}$$

Дополним семейство векторов $\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \mathbf{e}_2^{(k-1)}, \ldots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}\}$ векторами $\{\mathbf{e}_{r_k+1}^{k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{s_k-1}^{(k-1)}\}$ так, чтобы семейство векторов

$$\{\mathbf{e}_1^{(k-1)}, \ldots, \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)}, \mathbf{e}_{r_k+1}^{k-1}, \ldots, \mathbf{e}_{s_k-1}^{(k-1)}\} \subset \ker \mathcal{N}^{k-1}$$

было линейно независимо над $\ker \mathcal{N}^{k-2}$. Итак далее. В результате получим следующую лестницу Жордана:

$$\begin{array}{|c||ccccccccc}
\ker \mathcal{N}^k & \mathbf{e}_1^{(k)} & \cdots & \mathbf{e}_{r_k}^{(k)} & & & & & & \\
 & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & & & & & & \\
\ker \mathcal{N}^{k-1} & \mathbf{e}_1^{(k-1)} & \cdots & \mathbf{e}_{r_k}^{(k-1)} & \mathbf{e}_{r_k+1}^{(k-1)} & \cdots & \mathbf{e}_{s_{k-1}}^{(k-1)} & & & \\
 & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
 & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & \downarrow \mathcal{N} & & \downarrow \mathcal{N} & & & \\
\ker \mathcal{N} & \mathbf{e}_1^{(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{r_k}^{(1)} & \mathbf{e}_{r_k+1}^{(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{s_{k-1}}^{(1)} & \mathbf{e}_{s_2+1}^{(1)} & \cdots & \mathbf{e}_{s_1}^{(1)}
\end{array}$$

На некоторой ступеньке жордановой лестницы мы получим максимальное ($= \dim \mathcal{L}$) число линейно независимых собственных и присоединенных векторов.

5. Примеры решения задач

15.47. Пример. Корневые подпространства. Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора $\mathcal{A} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, заданного в некотором базисе линейного пространства $\mathcal{L}$, матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{15.100}$$

Решение. Шаг 1. Найдем характеристический многочлен заданного линейного оператора $\mathcal{A}$ матрицей A в некотором базисе линейного пространства $\mathcal{L}$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{вычитаем из первого столбца второй}\}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{прибавляем ко второй строчке первую}\}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{прибавляем к четвертой строчке третью}\}=$$

$$=\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{вычитаем из второго столбца третий}\}=$$

$$=-\lambda\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -1 \\ -4 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda(2-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2(2-\lambda)^2. \quad (15.101)$$

Шаг 2. В силу итогового равенства (15.101) видим, что характеристический многочлен разлагается на линейные множители с алгебраической кратностью, равной двум. Тогда из теоремы 15.19 получаем, что линейное пространство $\mathcal{L}$ разлагается в прямую сумму

$$\mathcal{L} = V^0(A) \oplus V^2(A), \tag{15.102}$$

причем в силу теоремы 15.17

$$\dim V^0(A) = 2, \quad \dim V^2(A) = 2. \tag{15.103}$$

Кроме того, в силу леммы 15.97 справедливы равенства

$$V^0(A) = \ker(A - 0I)^2, \quad V^2(A) = \ker(A - 2I)^2. \tag{15.104}$$

Поэтому нам нужно базис в линейных подпространствах $\ker(A - 0I)^2$ и $\ker(A - 2I)^2$.

Шаг 3. Базис в $\ker(A - 0I)^2$. Нетрудно вычислить, что

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.105}$$

Пользуясь элементарными преобразованиями справедливы следующие соотношения:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & -8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.106}$$

Рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$A^2 \cdot X = O, \quad X^T = (x^1, x^2, x^3, x^4), \tag{15.107}$$

которая в силу (15.106) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15.108}$$

ФСР системы уравнений (15.108) состоят из двух столбцов

$$F_1 = (1, 0, -2, 2)^T, \quad F_2 = (0, 1, -2, 2)^T. \tag{15.109}$$

Если исходный базис линейного пространства $\mathcal{L}$ обозначить $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4\}$, то базис в $V^0(A)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{15.110}$$

Шаг 4. Базис в $V^2(A)$. Справедливы следующие равенства:

$$(A - 2I)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 0 & -8 \\ -8 & -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.111}$$

Поэтому однородная линейная система уравнений

$$(A - 2I)^2 \cdot X = O, \quad X^T = (x^1, x^2, x^3, x^4)$$

в силу (15.111) эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР этой системы уравнений состоит из двух столбцов

$$F_3 = (0, 0, 1, 0)^T, \quad F_4 = (1, 0, 0, 1)^T.$$

Если исходный базис линейного пространства $\mathcal{L}$ обозначить $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4\}$, то базис в $V^2(A)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_4 = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15.112}$$

15.48. Примеры. Примеры жордановых блоков. В силу результата теоремы 15.19 нам достаточно рассмотреть простой случай, когда характеристический многочлен матрицы A имеет вид

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^m, \tag{15.113}$$

где m — алгебраическая кратность корня λ_0. Пусть $s \in \mathbb{N}$ — его геометрическая кратность. Ранее доказано, что $s \leqslant m$. В силу лемм 15.43 и 15.44, справедливы утверждения из замечания 15.38.

15.49. Пример. Пусть $m = 3$ и $s = 1$. Тогда жорданов блок состоит из одной жордановой клетки порядка 3 :

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}. \tag{15.114}$$

15.50. Пример. Пусть $m = 3$ и $s = 2$. Тогда жорданов блок состоит из двух жордановых клеток порядков 1 и 2 :

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

15.51. Пример. Пусть $m = 4$ и $s = 3$. Тогда жорданов блок состоит из трех жордановых клеток суммарной размерности 4, т.е. один блок порядка 2 и два блока порядка 1:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

15.52. Примеры. Жорданова форма.

15.53. Пример. Найти жорданов базис в котором матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{15.115}$$

имеет жорданову форму.

Решение. Шаг 1. Собственные векторы. Прежде всего найдем корни характеристического многочлена

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3. \tag{15.116}$$

Итак, матрица A имеет собственное значение $\lambda = 3$ алгебраической кратности $m = 3$. Найдем геометрическую кратность n собственного значения $\lambda = 2$. Рассмотрим матрицу

$$\mathcal{N} := A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.117}$$

Заметим, что $\operatorname{rk}\mathcal{N} = 1$. Тогда размерность $V_2(A) = \ker(\mathcal{N})$ равна 2, т.е. геометрическая кратность $n = 2$. Следовательно, жорданова форма матрицы A состоит из двух жордановых клеток размеров 2 и 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим однородную систему уравнений

$$\mathcal{N} \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad O = (0,0,0)^T. \tag{15.118}$$

С учетом (15.117) система уравнений (15.118) эквивалентна следующему одному уравнению:

$$x^2 = 2x^1. \tag{15.119}$$

Таким образом, базис в $\ker \mathcal{N} = \ker(A - 2I)$ образуют два столбца

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15.120}$$

Однако базис в $\mathbb{R}^3$ должен состоять из трех столбцов, поэтому приходим к выводу о том, что нам нужно найти еще один присоединенный столбец.

Шаг 2. Присоединенный столбец. Справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \cdot \mathcal{N} = \\ = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.121}$$

Следовательно,

$$\ker \mathcal{N}^2 = \mathbb{R}^3.$$

Заметим, что столбец

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = \ker \mathcal{N}^2, \quad F_1 \notin \ker \mathcal{N}, \tag{15.122}$$

поскольку столбцы X_1, X_2, F_1 линейно независимы. Иначе говоря,

$$\mathcal{N}^2 \cdot F_1 = O, \quad \mathcal{N} \cdot F_1 \neq O, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15.123}$$

Стало быть,

$$\mathcal{N} \cdot F_1 \in \ker \mathcal{N}, \quad \mathcal{N} \cdot F_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker \mathcal{N}. \tag{15.124}$$

Поскольку в силу шага 1 $\dim \ker \mathcal{N} = 2$, то дополним столбец $\mathcal{N} \cdot F_1$ до базиса в $\ker \mathcal{N}$, например, столбцом $X_2 \in \ker \mathcal{N}$ из формулы

(15.120). Итак, мы построили следующее линейно независимое семейство, состоящее из трех столбцов:

$$E_1 = \mathcal{N} \cdot F_1, \quad E_2 = F_1, \quad E_3 = X_2. \tag{15.125}$$

Но тогда справедливы равенства

$$\mathcal{N} \cdot E_1 = O, \quad \mathcal{N} \cdot E_2 = E_1, \quad \mathcal{N} \cdot E_3 = O, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15.126}$$

В базисе $\{E_1, E_2, E_3\}$ линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрица A некоторого оператора примет следующую жорданову форму:

$$(A \cdot E_1, A \cdot E_2, A \cdot E_3) = (E_1, E_2, E_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

15.54. Пример. Найти жорданов базис и жорданову форму линейного оператора d^3/dx^3 в линейном пространстве $P^3(x)$ полиномов степени не выше 3.

Решение. Сначала выберем базис в $P^3(x)$ следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = x, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{x^2}{2!}, \quad \mathbf{e}_4 = \frac{x^3}{3!}. \tag{15.127}$$

Отметим, что оператор d^3/dx^3 является нильпотентным высоты, равной 2. Поэтому единственным собственным вектором этого оператора является число $\lambda = 0$, причем алгебраической кратности $m = 4$. Найдем его геометрическую кратность. Несложно заметить, что

$$\ker\{d^3/dx^3\} = \{u = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3, \ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3\}. \tag{15.128}$$

Отсюда получаем, что $\dim\ker\{d^3/dx^3\} = 3$, т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна 3. Значит жорданова форма состоит из трех жордановых клеток суммарной размерности 4, т.е. состоит из клетки размера 2 и двух клеток размерности 1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\ker\{(d^3/dx^3)^2\} = \ker\{d^6/dx^6\} = P^3(x),$$

$$\mathbf{e}_4 \in \ker\{(d^3/dx^3)^2\}, \quad \mathbf{e}_4 \notin \ker\{d^3/dx^3\} \Rightarrow d^3/dx^3\mathbf{e}_4 \in \ker\{d^3/dx^3\}.$$

Дополним вектор
$$d^3/dx^3\mathbf{e}_4$$
до базиса в $\ker\{d^3/dx^3\}$, например, векторами $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_2$. Итак, предъявим базис
$$\mathbf{f}_1 = d^3/dx^3\mathbf{e}_4, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{f}_4 = \mathbf{e}_2. \tag{15.129}$$
Заметим, что справедливы следующие равенства:
$$d^3/dx^3\mathbf{f}_1 = \theta, \quad d^3/dx^3\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1, \tag{15.130}$$
$$d^3/dx^3\mathbf{f}_3 = \theta, \quad d^3/dx^3\mathbf{f}_4 = \theta. \tag{15.131}$$
Поэтому из (15.130) и (15.131) вытекает равенство
$$(d^3/dx^3\mathbf{f}_1, d^3/dx^3\mathbf{f}_2, d^3/dx^3\mathbf{f}_3, d^3/dx^3\mathbf{f}_4) =$$
$$= (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15.132}$$
из которого вытекает, что $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4\}$ — это жорданов базис для линейного оператора d^3/dx^3, в котором этот оператор имеет жорданову форму.