МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Конспект лекций по курсу «Линейная алгебра», соответствующий списку экзаменационных вопросов и задач

Оглавление

ГЛАВА 1

Линейные пространства

1. Аксиомы линейного пространства

1.1. Определение. Множество векторов $\mathcal{L}$ с определенными на нём операциями сложения векторов и умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, не выводящие сумму векторов и произведение вектора на число из множества $\mathcal{L}$, называется линейным пространством, если справедливы следующие свойства:

ВП1. коммутативность сложения: для любых векторов x и y

$$x + y = y + x;$$

ВП2. ассоциативность сложения: для любых векторов x, y и z

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

ВП3. свойство нулевого вектора: существует нулевой вектор θ такой, что для любого вектора x

$$x + \theta = x;$$

ВП4. существование противоположного вектора: для любого вектора x существует такой вектор $-x$, что

$$x + (-x) = \theta;$$

ВП5. свойство единицы: для любого вектора x

$$1 \cdot x = x;$$

ВП6. ассоциативность умножения на число: для любого вектора x и любых чисел α и β

$$(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x);$$

ВП7. дистрибутивность относительно сложения векторов: для любых векторов x и y и любого числа α

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y;$$

ВП8. дистрибутивность относительно сложения чисел: для любого вектора x и любых чисел α и β

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$$

1.2. Аксиомы **ВП1–ВП4** относятся к внутреннему закону композиции «$+$»; аксиомы **ВП5**, **ВП6** относятся к внешнему закону композиции «$\cdot$» умножения векторов на числа из поля $\mathbb{K}$, а аксиомы **ВП7**, **ВП8** связывают свойства внутреннего закона композиции «$+$» и умножения векторов на числа «$\cdot$» из поля $\mathbb{K}$.

1.3. Предложение. *Нулевой вектор линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть существуют два вектора $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{L}$ такие, что
$$\theta_1 + a = a \quad \text{и} \quad \theta_2 + a = a \quad \text{для всех} \quad a \in \mathcal{L}.$$
Тогда с учетом аксиомы **ВП1** коммутативности сложения и аксиомы нулевого вектора **ВП3** справедлива следующая цепочка равенств:
$$\theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1.$$
□

1.4. Предложение. *Противоположный вектор к вектору линейного пространства единственный.*

Доказательство. Пусть
$$a + b = \theta \quad \text{и} \quad a + c = \theta.$$
Тогда с учетом аксиом коммутативности **ВП1**, ассоциативности **ВП2** и нулевого вектора **ВП3** справедлива следующая цепочка равенств:
$$b = b + \theta = \theta + b = (a + c) + b = (c + a) + b = c + (a + b) = c + \theta = c.$$
□

1.5. Предложение. *Уравнение*
$$a + x = b \tag{1.1}$$
для любых $a, b \in \mathcal{L}$ имеет единственное решение
$$x = b + (-a). \tag{1.2}$$

Доказательство. Действительно, из (1.1), а также аксиом коммутативности **ВП1** и ассоциативности **ВП2** вытекают равенства
$$x = x + \theta = x + (a + (-a)) = \\ = (x + a) + (-a) = (a + x) + (-a) = b + (-a). \tag{1.3}$$
Поэтому если решение уравнения (1.1) существует, то оно имеет вид (1.2). Обратно справедливы следующие равенства:
$$a+(b+(-a)) = a+((-a)+b) = (a+(-a))+b = \theta+b = b+\theta = b, \tag{1.4}$$
где мы воспользовались аксиомами **ВП1–ВП4**. □

1.6. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*

$$0 \cdot a = \theta \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{1.5}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8** имеем

$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a,$$

из которого в силу Предложения 1.5 и **ВП4** вытекает равенство

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + (-0 \cdot a) = \theta.$$

□

1.7. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*

$$k \cdot \theta = \theta \quad \textit{для всех} \quad k \in \mathbb{K}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП8** и **ВП3** справедливы следующие равенства:

$$k \cdot \theta = k \cdot (\theta + \theta) = k \cdot \theta + k \cdot \theta.$$

Отсюда получаем

$$k \cdot \theta + k \cdot \theta = k \cdot \theta.$$

Из Предложения 1.5 и **ВП4** имеем

$$k \cdot \theta = k \cdot \theta + (-k \cdot \theta) = \theta.$$

□

1.8. Предложение. *Справедливо следующее равенство:*

$$-a = (-1) \cdot a \quad \textit{для любого} \quad a \in \mathcal{L}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Действительно, с учетом **ВП5**, **ВП8** и Предложения 1.6 справедлива следующая цепочка равенств:

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = \theta \Rightarrow -a = (-1) \cdot a.$$

□

2. Линейная комбинация. Линейная зависимость

1.9. Определение. Пусть дано конечное число векторов линейного пространства $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ и числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa \in \mathbb{K}$, которых столько же сколько и векторов. Всякий вектор $x \in \mathcal{L}$, представимый в виде

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q,$$

называется линейной комбинацией элементов $a, b, c, \ldots, q$. Говорят также, что x линейно выражается через $a, b, c, \ldots, q$.

1.10. Определение. Линейная комбинация векторов $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ называется тривиальной, если

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \kappa = 0,$$

и называется нетривиальной, если среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

1.11. Определение. Система векторов $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация векторов $a, b, c, \ldots, q$, равная нулевому вектору; иначе говоря, если справедливо равенство

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta,$$

где среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ хотя бы одно отлично от нуля.

1.12. Определение. Система векторов $a, b, c, \ldots, q \in \mathcal{L}$ называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta$$

возможно только в том случае, когда

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \kappa = 0.$$

1.13. Лемма. Система векторов, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Доказательство. Действительно, рассмотрим равенство $\alpha \cdot x = \theta$. Если $x \neq \theta$, то это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Обратно, равенство $\alpha \cdot \theta = \theta$ имеет место, например, при $\alpha = 1$. □

1.14. Лемма. Если часть системы векторов линейно зависима, то и вся система векторов линейно зависима.

Доказательство. Пусть известно, что в системе векторов $a, b, c, \ldots, q$ часть, состоящая, например, из векторов $c, \ldots, q$ линейно зависима. Тогда найдется такая их линейная комбинация, что

$$\gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta$$

и числа $\gamma, \ldots, \kappa$ одновременно в ноль не обращаются. Но тогда справедливо следующее равенство:

$$0 \cdot a + 0 \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta,$$

причем это нетривиальная линейная комбинация векторов. Значит, вся система векторов $a, b, c, \ldots, q$ линейно зависима. $\square$

1.15. Лемма. Если вся система векторов линейно независима, то ее любая часть векторов тоже линейно независима.

Доказательство. Действительно, пусть некоторая часть системы векторов $a, b, c, \ldots, q$ является линейно зависимой, но тогда в силу леммы 1.14 и вся система векторов является линейно зависимой. Следовательно, любая часть этой системы векторов линейно независима. $\square$

1.16. Лемма. Для того чтобы система векторов, состоящая не менее чем из двух векторов, была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы существовал какой-то вектор этой системы, линейно выражающийся через остальные векторы системы.

Доказательство. Необходимость. Пусть система векторов $a, b, c, \ldots, q$ является линейно зависимой. Тогда существует такая линейная их комбинация

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta,$$

в которой числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa$ одновременно в ноль не обращаются. Например, пусть $\alpha \neq 0$. Тогда имеет место равенство

$$a = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot b - \frac{\gamma}{\alpha} \cdot c - \cdots - \frac{\kappa}{\alpha} \cdot q,$$

т.е. вектор a линейно выражается через оставшиеся векторы рассматриваемой системы.

Достаточность. Пусть, например, вектор a линейно выражается через оставшиеся векторы системы:

$$a = \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$(-1) \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c + \cdots + \kappa \cdot q = \theta.$$

Это нетривиальная линейная комбинация векторов рассматриваемой системы. Значит, семейство векторов $a, b, c, \ldots, q$ линейно зависимо. $\square$

1.17. Лемма. Пусть $a_1, \dots, a_k$ какие–нибудь векторы линейного пространства $\mathcal{L}$. Пусть каждый из векторов $c_1, c_2, \dots, c_n$ того же линейного пространства $\mathcal{L}$ линейно выражаются через $a_1, \dots, a_k$:

$$c_1 = \alpha_{11} \cdot a_1 + \dots + \alpha_{k1} \cdot a_k, \tag{1.8}$$

$$c_2 = \alpha_{12} \cdot a_1 + \dots + \alpha_{k2} \cdot a_k, \tag{1.9}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{1.10}$$

$$c_n = \alpha_{1n} \cdot a_1 + \dots + \alpha_{kn} \cdot a_k. \tag{1.11}$$

Пусть, далее, $b \in \mathcal{L}$ линейно выражается через семейство векторов $a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_n$:

$$b = \lambda_1 \cdot a_1 + \dots + \lambda_k \cdot a_k + \mu_1 \cdot c_1 + \dots + \mu_n \cdot c_n. \tag{1.12}$$

Тогда вектор $b \in \mathcal{L}$ линейно выражается через векторы $a_1, \dots, a_k$.

Доказательство. Действительно, из (1.8)–(1.12) вытекает следующее равенство:

$$\begin{multline} b = (\lambda_1 + \mu_1\alpha_{11} + \dots + \mu_n\alpha_{1n}) \cdot a_1 + \dots + \\ + (\lambda_k + \mu_1\alpha_{k1} + \dots + \mu_n\alpha_{kn}) \cdot a_k. \end{multline} \tag{1.13}$$

□

3. Теорема о базисном миноре

1.18. Определение. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Рассмотрим произвольные $k \in [1, \min\{m, n\}]$ строк матрицы A и произвольные $k \in [1, \min\{m, n\}]$ столбцов матрицы A. Определитель матрицы $B \in \mathbb{K}^{k \times k}$, образованной из элементов на пересечении выделенных k строк и k столбцов и записанный в том же порядке, что и в матрице A, называется минором порядка k данной матрицы.

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{m} & \cdots & a_{i_1}^{m} & \cdots & a_{i_2}^{m} & \cdots & a_{i_k}^{m} & \cdots & a_n^{m}
\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\ a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix}.$$

1.19. Определение. Минор матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ порядка $k \in [1, \min\{m,n\}]$ называется базисным, если он не равен нулю, а все миноры порядка $k+1$, если они существуют, равны нулю.

1.20. Лемма. Если у матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ существуют базисный минор порядка $k \in \mathbb{N}$, а также существуют миноры порядков $k+2, \ldots, k+p$ при $p \geqslant 2$, то они все равны нулю.

Доказательство. Доказательство основано на методе математической индукции. Заметим, что минор порядка $k{+}2$ можно разложить, например, по первой строчке. Это разложение будет состоять из суммы определителей порядка $k+1$ с какими-то коэффициентами. Осталось заметить, что согласно определению базисного минора все миноры порядка $k+1$ равны нулю. Аналогично и в общем случае вытекает утверждение леммы. □

1.21. Определение. Столбцы и строки матрицы, пересекающие базисный минор, называются базисными столбцами и базисными строками.

1.22. Теорема. Теорема о базисном миноре. *Базисные столбцы матрицы линейно независимы. Всякий столбец матрицы через них линейно выражается.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор расположен на пересечении первых r строк и первых r столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Первое утверждение. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \cdots, A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Второе утверждение. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r+1$, полученный «окаймлением» базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1,r}$ и $s \in \overline{r+1,m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора. Таким образом, во всех случаях определитель (1.14) $r+1$ порядка равен нулю.

Теперь мы можем разложить этот определитель (1.14) по s–й строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1, m}, \tag{1.15}$$

где $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_r, \mathcal{M}$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки, причем

$$\mathcal{M} = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку это базисный минор рассматриваемой матрицы.

Отметим, что по своему построению алгебраические дополнения к элементам s–ой строчки не зависят от элементов этой строчки. Итак, из (1.15) вытекает, что

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1, m}.$$

Отсюда получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.$$

$\square$

1.23. Аналогичное утверждение имеет место для базисных строк матрицы A.

4. Линейные оболочки и подпространства линейного пространства

1.24. Определение. Пусть дано семейство векторов $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathcal{L}$ и числа $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$. Линейной оболочкой семейства векторов $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathcal{L}$ называется следующее множество:

$$L(b_1, b_2, \ldots, b_r) := \\ = \left\{\alpha^1 \cdot b_1 + \alpha^2 \cdot b_2 + \cdots + \alpha^r \cdot b_r : \forall\, \alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}\right\}. \quad (1.16)$$

1.25. Лемма. Пусть семейство векторов $a_1, \ldots, a_p$ принадлежат линейной оболочке семейства векторов $b_1, \ldots, b_r$. Тогда

$$L(a_1, \ldots, a_p) \subset L(b_1, \ldots, b_r).$$

Доказательство. По условию $a_j \in L(b_1, \ldots, b_r)$ для любого $j = \overline{1, p}$. Поэтому найдутся такие числа

$$\alpha_j^k \in \mathbb{K}, \quad k = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, p},$$

что справедливо следующее равенство:

$$a_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^k \cdot b_k. \quad (1.17)$$

Пусть $c \in L(a_1, \ldots, a_p)$. Тогда найдутся такие числа $\beta^j \in \mathbb{K}$ при $j = \overline{1, p}$, что в силу (1.17) справедливы следующие равенства:

$$c = \sum_{j=1}^{p} \beta^j \cdot a_j = \sum_{j=1}^{p} \beta^j \cdot \sum_{k=1}^{r} \alpha_j^k \cdot b_k = \sum_{k=1}^{r} \gamma^k \cdot a_k \in L(a_1, \ldots, a_r), \quad (1.18)$$

где

$$\gamma^k := \sum_{j=1}^{p} \beta^j \alpha_j^k.$$

$\square$

1.26. Определение. Подмножество $P \subset \mathcal{L}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейным подпространством, если

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in P$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и для всех векторов $a, b \in P$.

1.27. Лемма. Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_r)$ семейства векторов $\{a_1, \ldots, a_r\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ является его подпространством.

Доказательство. Действительно, пусть векторы $b, c \in L(a_1, \ldots, a_r)$, тогда

$$b = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \cdot a_k, \quad c = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \cdot a_k.$$

$$\alpha \cdot b + \beta \cdot c = \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha\alpha^k + \beta\beta^k\right) \cdot a_k = \sum_{k=1}^{r} \delta^k \cdot a_k \in L(a_1, \ldots, a_r),$$

где $\delta^k = \alpha\alpha^k + \beta\beta^k$. $\square$

1.28. Лемма. Линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ само является линейным пространством над тем же полем.

Доказательство. Несложное доказательство предлагаем провести читателю. $\square$

1.29. Следствие. *Линейная оболочка $L(a_1, \ldots, a_k)$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{K}$ само является линейным пространством над тем же полем.*

5. Теорема о двух системах векторов одного линейного пространства

1.30. Теорема. *Если семейство векторов*

$$c_1, \ldots, c_s, b_1, \ldots, b_r \in \mathcal{L},$$

причем

$$c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r), \quad s > r,$$

то векторы $c_1, \ldots, c_s$ линейно зависимы.

Доказательство. Введём обозначения.

$$\mathbf{X} = (b_1, \ldots, b_r), \quad \mathbf{Y} = (c_1, \ldots, c_s). \tag{1.19}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию найдутся такие числа a_k^j при $j = \overline{1, r}$ и $k = \overline{1, s}$, что

$$\begin{gathered} c_1 = a_1^1 \cdot b_1 + a_1^2 \cdot b_2 + \cdots + a_1^r \cdot b_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_s = a_s^1 \cdot b_1 + a_s^2 \cdot b_2 + \cdots + a_s^r \cdot b_r \end{gathered} \tag{1.20}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{1.21}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (1.19) и (1.21) выражение (1.20) можно переписать в следующем виде:

$$(c_1, \ldots, c_s) = (b_1, \ldots, b_r) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

или в компактной форме записи

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{1.23}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix}, \quad z^1, z^2, \ldots, z^s \in \mathbb{K} \tag{1.24}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \cdots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \cdots + a_s^2 z^s = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \cdots + a_s^r z^s = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Эту систему уравнений можно переписать в следующем виде:

$$z^1 \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^r \end{pmatrix} + z^2 \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^r \end{pmatrix} + \cdots + z^s \begin{pmatrix} a_s^1 \\ a_s^2 \\ \vdots \\ a_s^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{r \times 1}.$$

Заметим, что любые $s > r \geqslant 1$ столбцов из $\mathbb{K}^{r\times 1}$ линейно зависимы. Поэтому существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{s\times 1}. \tag{1.26}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $c_1, \dots, c_s$:

$$z_0^1 \cdot c_1 + \dots + z_0^s \cdot c_s = \mathbf{Y} \cdot Z_0 = \mathbf{X} \cdot AZ_0 = \mathbf{X} \cdot O = \theta \in \mathcal{L}. \tag{1.27}$$

Следовательно, векторы $c_1, \dots, c_s$ линейно зависимы. □

1.31. Следствие. *Если векторы $c_1, \dots, c_s \in L(b_1, \dots, b_r)$ и линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

6. Размерность и базис линейного пространства

1.32. Определение. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathcal{L}$ называется *бесконечномерным*.

1.33. Определение. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *конечномерным*, если выполнены следующие два условия:

1. в $\mathcal{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;
2. любое семейство векторов из $\mathcal{L}$, состоящее из $n + 1$ векторов линейно зависимо.

Число n называется размерностью линейного пространства $\mathcal{L}$ и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Линейное пространство $\{\theta\}$ называется нульмерным.

1.34. Примеры. Линейное пространство $\{\theta\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.
P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.
P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

1.35. Определение. *Базисом* конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимое семейство векторов

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Столбец коэффициентов X называется столбцом координат вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

1.36. Определение. Семейство векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \in \mathcal{L}$ называется *полным*, если любой вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{L}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этого семейства.

1.37. Лемма. Если семейство векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис линейного пространства $\mathcal{L}$, то линейная оболочка $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.

Доказательство. Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L},$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

□

1.38. Лемма. Разложение по базису линейного пространства единственно.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — это строчка, состоящая из векторов базиса в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1) \cdot \mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2) \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + (x^n - y^n) \cdot \mathbf{e}_n = \theta.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем

$$x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n.$$

□

1.39. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении индекс встречается ровно два раза один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot \mathbf{e}_i = x^i \cdot \mathbf{e}_i.$$
2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,
$$a_k b^k c^k,$$
хотя
$$(a_k + b_k)c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c^k.$$

Введем важный *символ Кронекера*:
$$\delta_k^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$
Заметим, что
$$a_j \delta_k^j = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_k^j = a_k.$$

1.40. Теорема. *Все базисы конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности $\dim \mathcal{L}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда
$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathcal{L}, \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$
Следовательно, в силу следствия 1.31 из теоремы 1.30 имеют место два неравенства
$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$
С другой стороны, любое семейство из $n+1$ векторов
$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$
поэтому в силу теоремы 1.30 семейство $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,
$$n = \dim \mathcal{L}.$$
□

1.41. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} (x^k + y^k) \cdot \mathbf{e}_k, \quad \alpha \cdot \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x^k) \cdot \mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

7. Ранг системы векторов

1.42. Определение. Рангом системы векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называется $\dim L(a_1, \ldots, a_k)$ — размерность линейной оболочки этой системы векторов как линейного пространства. Будем использовать следующее обозначение

$$\mathrm{rk}\{a_1, \ldots, a_k\}.$$

1.43. Следствие. *Если векторы $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$ одного и того же линейного пространства $\mathcal{L}$, то ранг системы векторов $c_1, \ldots, c_s$ не выше ранга системы векторов $b_1, \ldots, b_r$.*

Доказательство. Пусть $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ — это базис в $L(c_1, \ldots, c_s)$. В частности, имеем

$$k_p = \mathrm{rk}\{c_1, \ldots, c_s\}.$$

Пусть $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ — это базис в $L(b_1, \ldots, b_r)$. В частности,

$$j_d = \mathrm{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

Заметим, что

$$L(b_1, \ldots, b_r) = L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}).$$

Поскольку $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, то имеем

$$c_{k_1}, \ldots, c_{k_p} \in L(b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}),$$

причем семейства векторов $\{c_{k_1}, \ldots, c_{k_p}\}$ и $\{b_{j_1}, \ldots, b_{j_d}\}$ по построению являются линейно независимыми. Поэтому в силу следствия 1.31 получаем неравенство

$$k_p \leqslant j_d \Rightarrow \mathrm{rk}\{c_1, \ldots, c_s\} \leqslant \mathrm{rk}\{b_1, \ldots, b_r\}.$$

□

1.44. Следствие. *Если векторы $c_1, \ldots, c_s \in L(b_1, \ldots, b_r)$, а векторы $b_1, \ldots, b_r \in L(c_1, \ldots, c_s)$, то ранги систем векторов $b_1, \ldots, b_r$ и $c_1, \ldots, c_s$ совпадают.*

Доказательство. Действительно, дважды применяя результат следствия 1.43, получим два неравенства

$$\operatorname{rk}\{c_1,\ldots,c_s\} \leqslant \operatorname{rk}\{b_1,\ldots,b_r\} \quad \text{и} \quad \operatorname{rk}\{b_1,\ldots,b_r\} \leqslant \operatorname{rk}\{c_1,\ldots,c_s\},$$

из которых вытекает равенство

$$\operatorname{rk}\{c_1,\ldots,c_s\} = \operatorname{rk}\{b_1,\ldots,b_r\}.$$

□

8. Ранг матрицы

1.45. Определение. Рангом матрицы $A = \|A_1,\ldots,A_n\|$ называется $\dim L(A_1,\ldots,A_n)$. **Обозначение**. $\operatorname{rk} A$.

1.46. Теорема. Теорема о ранге матрицы. *Ранг произвольной матрицы равен порядку ее базисного минора.*

Доказательство. Случай $\operatorname{rk} A = 0$. В этом случае $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — нулевая матрица и поэтому у нее нет отличных от нуля миноров. Поэтому порядок базисного минора этой матрицы считается равным нулю.

Случай $\operatorname{rk} A > 0$. В этом случае матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ненулевая. Для определенности пусть

$$A = \|A_1,\ldots,A_n\|,$$

а $A_1,\ldots,A_r$ — базисные столбцы матрицы A, где $r \in [1,n]$ — это порядок базисного минора матрицы A. Тогда, с одной стороны, базисные столбцы $A_1,\ldots,A_r$ этой матрицы в силу теоремы о базисном миноре являются линейно независимыми. С другой стороны, любой столбец A_k матрицы A по той же теореме о базисном миноре линейно выражается через r базисных столбцов:

$$A_k \in L(A_1,\ldots,A_r),\ k=\overline{1,n} \Rightarrow \\ \Rightarrow L(A_1,\ldots,A_r,A_{r+1},\ldots,A_n) = L(A_1,\ldots,A_r).$$

Значит, имеем $\operatorname{rk} A = r$. □

1.47. Следствие. *Ранг семейства строк матрицы A равен порядку базисного минора этой матрицы.*

Доказательство. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ нулевая, то утверждение очевидно. Пусть матрица $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ не нулевая. Рассмотрим транспонированную матрицу $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Тогда строчки матрицы A перейдут в столбцы матрицы A^T. В силу результата теоремы 1.46 имеем $\operatorname{rk} A^T = r$, где r — порядок базисного минора матрицы A^T. С другой стороны, при транспонировании, очевидно, что базисные столбцы переходят в базисные строки, а базисные строки

— в базисные столбцы. Таким образом, порядок базисного минора не меняется. Поэтому порядок базисного минора матрицы A^T совпадает с порядком базисного минора матрицы A. Таким образом, $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A$. Осталось воспользоваться результатом теоремы 1.46. □

1.48. Следствие. *Если* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, *то* $\operatorname{rk} A$ *не превосходит* $\min\{m,n\}$.

Доказательство. Действительно, порядок базисного минора не превосходит числа строк и числа столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Стало быть, приходим к выводу о том, что $\operatorname{rk} A = r \leqslant \min\{m,n\}$. □

Справедливо следующее важное для дальнейшего утверждение:

1.49. Лемма. Если $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$, то для произведения этих матриц $C = A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ справедливо неравенство

$$\operatorname{rk} C \leqslant \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}. \tag{1.28}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$C = \|C_1,\ldots,C_n\| = \begin{Vmatrix} C^1 \\ \vdots \\ C^m \end{Vmatrix}$$

тогда имеем

$$C_k = A\cdot B_k = \sum_{j=1}^{p} b_k^j A_j \Rightarrow L(C_1,\ldots,C_n) \subset L(A_1,\ldots,A_p), \tag{1.29}$$

$$C^j = A^j\cdot B = \sum_{k=1}^{p} a_k^j B^k \Rightarrow L(C^1,\ldots,C^m) \subset L(B^1,\ldots,B^p). \tag{1.30}$$

Из вложений (1.29) и (1.30) и следствия 1.43 вытекает утверждение леммы. □

9. Геометрия подпространств. Прямая сумма подпространств

1.50. Лемма. Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это два подпространства в линейном пространстве $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда

1. $\dim \mathcal{Q} \leqslant \dim \mathcal{P}$;
2. если $\dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P}$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство. Шаг 1. Действительно, пусть $a_1,\ldots,a_r$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $b_1,\ldots,b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому

$$b_1,\ldots,b_s \in L(a_1,\ldots,a_r).$$

В силу следствия 1.31 из теоремы 1.30 имеем $\dim \mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim \mathcal{P}$.

Шаг 2. Действительно, пусть $b_1, \ldots, b_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т. е. $s = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $c \in \mathcal{P}$, что $c \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $b_1, \ldots, b_s$. Следовательно, семейство

$$b_1, \ldots, b_s, c$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. □

1.51. Определение. Пусть L_1 и L_2 — произвольные линейные подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. Совокупность

$$L = \{a = a_1 + a_2 : \ a_1 \in L_1, \ a_2 \in L_2\}$$

называется суммой подпространств. **Обозначение.** $L_1 + L_2$.

1.52. Лемма. Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in L = L_1 + L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда найдутся такие $a_1, b_1 \in L_1$ и $a_2, b_2 \in L_2$, что справедливы равенства

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2,$$

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b = (\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1) + (\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2) \in L_1 + L_2,$$

поскольку $\alpha \cdot a_1 + \beta \cdot b_1 \in L_1$, $\alpha \cdot a_2 + \beta \cdot b_2 \in L_2$. □

1.53. Определение. Совокупность $N = \{a : \ a \in L_1, \ a \in L_2\}$ называется пересечением подпространств L_1 и L_2. **Обозначение.** $L_1 \cap L_2$.

1.54. Лемма. $L_1 \cap L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a, b \in L_1 \cap L_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Тогда $a, b \in L_1$ и $a, b \in L_2$ и поэтому

$$\alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_1, \quad \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_2 \Rightarrow \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_1 \cap L_2.$$

□

1.55. Лемма. Объединение $L_1 \cup L_2$ подпространств а в общем случае не является подпространством в линейном пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $a \in L_1$, $a \notin L_2$ и $b \in L_2$, $b \notin L_1$. Тогда, вообще говоря, $a + b \notin L_1 \cup L_2$. Действительно, рассмотрим на плоскости две различные прямые, проходящие через начало некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Тогда сумма двух любых ненулевых векторов таких, что один вектор лежит на одной прямой, а другой вектор лежит на другой прямой. Тогда их сумма не будет лежать на этих прямых. □

1.56. Теорема. *Справедливо следующее равенство*:
$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2). \qquad (1.31)$$

Доказательство. Введем следующие обозначения:
$$\dim(L_1 \cap L_2) \equiv k, \quad \dim L_1 \equiv k + l_1, \quad \dim L_2 \equiv k + l_2.$$
В этих обозначениях нам нужно доказать, что
$$\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2, \qquad (1.32)$$
поскольку
$$\dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = k + l_1 + k + l_2 - k = k + l_1 + l_2.$$
Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$. Дополним этот базис до базисов подпространств L_1 и L_2 :
$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1} - \text{базис в} \quad L_1, \qquad (1.33)$$
$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2} - \text{базис в} \quad L_2. \qquad (1.34)$$
Докажем, что набор векторов
$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2} \qquad (1.35)$$
образуют базис в $L_1 + L_2$, откуда и будет следовать, что $\dim(L_1 + L_2) = k + l_1 + l_2$.

Полнота. Прежде всего заметим, что любой вектор $x \in L_1 + L_2$ можно представить в виде линейной комбинации семейства векторов (1.35), поскольку $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ и в силу (1.33), (1.34) векторы x_1 и x_2 раскладываются по базисам (1.33), (1.34).

Линейная независимость. Пусть существует нетривиальный набор чисел
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{l_1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{l_2} \in \mathbb{K},$$
такой, что
$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} + \gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 + \cdots + \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2} = \theta. \qquad (1.36)$$
Равенство (1.36) можно переписать в следующем виде:
$$a := \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} = \\ = -\gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \cdots - \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2}. \qquad (1.37)$$
Из (1.37) с учетом (1.33) и (1.34) вытекает, что $a \in L_1$ и $a \in L_2$, т.е. $a \in L_1 \cap L_2$. А поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в $L_1 \cap L_2$, то найдутся такие числа $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \mathbb{K}$, что справедливо равенство
$$a = \delta_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \delta_k \cdot \mathbf{e}_k. \qquad (1.38)$$
Из равенств (1.37) и (1.38) вытекает, что
$$\delta_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \delta_k \cdot \mathbf{e}_k = -\gamma_1 \cdot \mathbf{g}_1 - \cdots - \gamma_{l_2} \cdot \mathbf{g}_{l_2}. \qquad (1.39)$$

По построению (см. (1.34)) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{l_2}$ является линейно независимым семейством в линейном пространстве L_2. Поэтому равенство (1.39) возможно тогда и только тогда, когда

$$\delta_1 = \cdots = \delta_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{l_2} = 0. \tag{1.40}$$

Из (1.36) и (1.40) вытекает равенство

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_k \cdot \mathbf{e}_k + \beta_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_{l_1} \cdot \mathbf{f}_{l_1} = \theta. \tag{1.41}$$

В силу (1.33) семейство векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{l_1}$ линейно независимо в L_1. Тогда равенство (1.41) возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{l_1} = 0. \tag{1.42}$$

Из (1.40) и (1.42) вытекает, что равенство (1.36) возможно тогда и только тогда, когда

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_{l_1} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{l_2} = 0, \tag{1.43}$$

т.е. семейство векторов (1.35) линейно независимо. Стало быть, семейство (1.35) образует базис в $L_1 + L_2$. Поэтому справедливо равенство (1.32). □

1.57. Определение. Подпространства L_1 и L_2 называются дизъюнктными, если их пересечение состоит из нулевого вектора θ, т.е. если $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

1.58. Определение. Сумма $L = L_1 + L_2$ подпространств L_1 и L_2 называется прямой, если представление любого вектора $x \in L$ в виде $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ единственно. **Обозначение**. $L = L_1 \oplus L_2$.

1.59. Теорема. *Для того чтобы сумма подпространств L_1 и L_2 была прямой, необходимо и достаточно, чтобы $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $L = L_1 \oplus L_2$ и $z_0 \in L_1 \cap L_2$. Для произвольного $x \in L$ справедливо следующее разложение:

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2. \tag{1.44}$$

Но тогда справедливо следующее разложение:

$$x = (x_1 + z_0) + (x_2 - z_0), \quad x_1 + z_0 \in L_1, \quad x_2 - z_0 \in L_2. \tag{1.45}$$

Поскольку разложение (1.44) должно быть единственным, то с учетом (1.45) получаем равенства

$$x_1 = x_1 + z_0, \quad x_2 = x_2 - z_0 \Rightarrow z_0 = \theta. \tag{1.46}$$

Следовательно, $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Достаточность. Пусть $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$. Предположим, что для $x \in L = L_1 + L_2$ справедливы следующие два разложения:

$$x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L_1, \quad x_2, y_2 \in L_2. \tag{1.47}$$

Но тогда

$$x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in L_1 \cap L_2 = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \tag{1.48}$$

т.е. разложение любого $x \in L = L_1 + L_2$ единственно и поэтому $L = L_1 \oplus L_2$. □

1.60. Теорема. *Для того чтобы линейное пространство $\mathcal{L}$ разлагалось в прямую сумму подпространств L_1 и L_2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия*: a) $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}$, b) $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.

Доказательство. Необходимость. Если $\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2$, то согласно результату теоремы 1.59 вытекает, что $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ и $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Поэтому с учетом теоремы 1.56 имеем $\dim \mathcal{L} = \dim L_1 + \dim L_2$.

Достаточность. Поскольку $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, то нам достаточно доказать, что $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. Очевидно, что $L_1 + L_2$ является подпространством в $\mathcal{L}$, причем в силу 1.56

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2) = \\ = \dim L_1 + \dim L_2 = \dim \mathcal{L}. \tag{1.49}$$

Поэтому в силу леммы 1.50 о монотонности размерности имеем $\mathcal{L} = L_1 + L_2$. И, следовательно,

$$\mathcal{L} = L_1 \oplus L_2.$$

□

10. Изоморфизм линейных пространств

1.61. Определение. Взаимно однозначное отображение

$$\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2,$$

линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ называется изоморфизмом, если для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_1$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство

$$\phi(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot \phi(x_1) + \alpha^2 \cdot \phi(x_2).$$

1.62. Лемма. Изоморфизм $\phi : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ линейных пространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ над одним и тем же полем $\mathbb{K}$ удовлетворяет свойству

$$\phi(\theta_1) = \theta_2,$$

где $\theta_1 \in \mathcal{L}_1$ и $\theta_2 \in \mathcal{L}_2$ — соответствующие нулевые векторы.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\phi(\theta_1) = \phi(0 \cdot \theta_1) = 0 \cdot \phi(\theta_1) = \theta_2.$$

□

1.63. Теорема. *Все линейные пространства одной и той же размерности изоморфны между собой.*

Доказательство. Шаг 1. Построение изоморфизма. Сначала докажем, что любое линейное пространство $\mathcal{L}$ размерности $n = \dim \mathcal{L}$ изоморфно линейному пространству столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Пусть $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ — строчка, составленная из векторов некоторого базиса в $\mathcal{L}$. Для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ справедливо разложение

$$\mathbf{x} = x^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{1.50}$$

В силу единственности разложения вектора по базису и того, что любой набор чисел $Y = (y^1, \ldots, y^n)^T$ по формуле

$$\mathbf{y} = y^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{1.51}$$

порождает некоторый вектор $\mathbf{y} \in \mathcal{L}$, то определено взаимно однозначное отображение

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = X, \quad X = (x^1, \ldots, x^n)^T, \quad \mathbf{x} = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \tag{1.52}$$

$$\phi_{\mathbf{E}} : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

$\square$ Действительно, с однородной стороны, проверим однозначность отображения (1.52). Имеем

$$\mathbf{x} = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow (x_1^k - x_2^k) \cdot \mathbf{e}_k = \theta \Leftrightarrow x_1^k = x_2^k \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, докажем однозначность обратного к (1.52) отображения. Имеем

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) = \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2) = X \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = x^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = x^k \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2. \quad \boxtimes$$

Теперь докажем, что отображение (1.52) линейное. Пусть

$$\mathbf{x}_1 = x_1^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x}_2 = x_2^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} = x^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = (x_1^1 + x_1^2, \ldots, x_1^n + x_2^n)^T =$$
$$= (x_1^1, \ldots, x_1^n)^T + (x_2^1, \ldots, x_2^n)^T = \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_1) + \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_2),$$

$$\phi_{\mathbf{E}}(\alpha \cdot \mathbf{x}) = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n)^T = \alpha (x^1, \ldots, x^n)^T = \alpha \phi_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}).$$

Итак, $\phi_{\mathbf{E}}$ — изоморфизм.

Шаг 2. Изоморфность двух линейных пространств одной размерности. Итак, пусть у нас имеются два изоморфизма

$$\phi_{1\mathbf{E}_1} : \mathcal{L}_1 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \phi_{2\mathbf{E}_2} : \mathcal{L}_2 \to \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad n = \dim \mathcal{L}_1 = \dim \mathcal{L}_2.$$

Тогда определено взаимно однозначное отображение

$$\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1} : \mathbb{K}^{1\times n} \to \mathcal{L}_2, \quad \phi_{2\mathbf{E}_2}(\mathbf{x}) = X \Leftrightarrow \mathbf{x} = \phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}(X),$$

$$\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}(X_1+X_2)=\mathbf{E}_2\cdot(X_1+X_2)=\mathbf{E}_2\cdot X_1+\mathbf{E}_2\cdot X_2=\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2=$$
$$=\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}(X_1)+\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}(X_2),$$
$$\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}(\alpha X)=\mathbf{E}_2\cdot(\alpha X)=\alpha\cdot\mathbf{E}_2\cdot X=\alpha\cdot\mathbf{x}=\alpha\cdot\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}(X).$$

Итак, $\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}$ тоже изоморфизм. Тогда имеем

$$\phi=\phi_{1\mathbf{E}_1}\circ\phi_{2\mathbf{E}_2}^{-1}:\mathcal{L}_1\to\mathcal{L}_2.$$

Предлагаем студентам доказать несложное утверждение о том, что композиция изоморфизмов является изоморфизмом. Тогда взаимно однозначное отображение ϕ является искомым изоморфизмом. $\square$

1.64. Теорема. *Между двумя конечномерными линейными пространствами различных размерностей не существует изоморфизма.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{L}_m$ — это два линейных пространства размерностей $n=\dim\mathcal{L}_n$ и $m=\dim\mathcal{L}_m$, причем $m<n$ и существует тем не менее изоморфизм

$$\phi:\mathcal{L}_n\to\mathcal{L}_m.$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}_n$, а $\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_m\}$ — базис в $\mathcal{L}_m$ и, кроме того, $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}\subset\mathcal{L}_m$, где $\phi_j=\phi(\mathbf{e}_j)$. Таким образом, имеем

$$\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}\subset\mathcal{L}_m=L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_m).$$

Значит, семейство векторов $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ линейно зависимо в $\mathcal{L}_m$ в силу доказанной ранее теоремы 1.30 о системе двух векторов, поскольку $n>m$. Таким образом, существует следующая нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору

$$c^k\cdot\phi_k=\theta_2\Leftrightarrow c^k\cdot\phi(\mathbf{e}_k)=\phi(\theta_1)\Rightarrow\phi(c^k\cdot\mathbf{e}_k-\theta_1)=\theta_2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow c^k\cdot\mathbf{e}_k-\theta_1=\phi^{-1}(\theta_2)=\theta_1\Rightarrow c^k\cdot\mathbf{e}_k=\theta_1,$$

что противоречит линейной независимости базиса $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}\subset\mathcal{L}_n$. Здесь мы воспользовались результатом леммы 1.62, а также тем, что ϕ^{-1} изоморфизм, поскольку ϕ изоморфизм. $\square$

11. Примеры решения задач

1.65. Пример. Линейное пространство. Является ли линейным пространством множество $X=\{a+b\sqrt{2}:\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ над полем $\mathbb{Q}$, если операции сложения и умножения на числа стандартные?

Решение. Легко видеть, что множество X замкнуто относительно операций сложения и относительно умножения на рациональное число. Поскольку это множество является подмножеством множества действительных чисел, а введенные на нем операции — стандартные, свойства ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности выполнены автоматически. Тривиальным элементом по сложению является $0+0\cdot\sqrt{2}$, а обратным к элементу $a+b\sqrt{2}$ является элемент $-a-b\sqrt{2}$. Следовательно, X — линейное пространство.

1.66. Пример. Линейная зависимость. Каким условиям должен удовлетворять скаляр x, чтобы столбцы

$$(0,x,-1)^T, \quad (x,0,1)^T, \quad (1,-1,x)^T \tag{1.53}$$

из $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимы? Каким будет ответ на этот же вопрос при замене $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{Q}^3$?

Решение. Образуем следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}. \tag{1.54}$$

Вычислим определитель этой матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x(2-x^2). \tag{1.55}$$

Таким образом, столбцы (1.53) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x=0$ или $x=\pm\sqrt{2}$.

В том случае если рассматривается линейное пространство $\mathbb{Q}^3$, то эти столбцы линейно зависимы тогда и только тогда, когда $x=0$, поскольку числа $\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

1.67. Пример. Базис и координаты. Доказать, что многочлены

$$1, \quad t-1, \quad (t-1)^2, \quad (t-1)^3 \tag{1.56}$$

образуют базис в P^3 — вещественных многочленов степени не выше 3, и найти координаты многочлена

$$p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1 \tag{1.57}$$

в этом базисе.

Решение. Шаг 1. Докажем, что (1.56) — базис в P^3. Сначала докажем, что многочлены (1.56) линейно независимы. Рассмотрим их линейную комбинацию

$$a_0 + a_1(t-1) + a_2(t-1)^2 + a_3(t-1)^3 = 0 \quad \text{для всех} \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.58}$$

в которой сделаем замену $s=t-1$ и получим равенство

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 = 0 \quad \text{для всех} \quad s\in\mathbb{R}. \tag{1.59}$$

Из равенства (1.59) при $s = 0$ получаем, что $a_0 = 0$. Теперь продифференцируем по s обе части равенства (1.59) и в точке $s = 0$ получим равенство $a_1 = 0$ и так далее. В итоге получим, что равенство (1.59), а с ним и равенство (1.58) возможно только при $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, т.е. многочлены (1.56) линейно независимы.

Докажем теперь полноту семейства многочленов (1.56) в P^3. Действительно, для этого нужно воспользоваться формулой Тейлора в точке $t = 1$:

$$p(t) = p(1) + p'(1)(t-1) + \frac{p''(1)}{2}(t-1)^2 + \frac{p'''(1)}{6}(t-1)^3 \qquad (1.60)$$

для любого $p(t) \in P^3$, поскольку

$$p^{(k)}(t) = 0 \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 4.$$

Формула Тейлора (1.60) и есть разложение произвольного $p(t) \in P^3$ по линейно независимой системе многочленов (1.56). Таким образом, эта система полна и, значит, образует базис в P^3.

Шаг 2. Найдем теперь координаты многочлена (1.57) в базисе (1.56). Действительно, воспользуемся формулой (1.60). Справедливы равенства

$$p(1) = 3, \quad p'(1) = 4, \quad p''(1) = 2, \quad p'''(1) = 6. \qquad (1.61)$$

Из (1.60) и (1.61) получаем формулу

$$p(t) = 3 + 4(t-1) + (t-1)^2 + (t-1)^3. \qquad (1.62)$$

Значит, координаты многочлена (1.57) в базисе (1.56) следующие:

$$X = (3, 4, 1, 1)^T.$$

1.68. Пример. Линейные подпространства. В линейном пространстве P^n вещественных многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ задано подмножество $p(2) = 0$. Требуется доказать, что это множество является линейным подпространством и найти в нем базис.

Решение. Очевидно, что если

$$p_1(2) = p_2(2) = 0, \quad p_1(t), p_2(t) \in P^n,$$

то и

$$\alpha p_1(2) + \beta p_2(2) = 0.$$

Таким образом, указанное множество является линейным подпространством.

Пусть $p(t) \in P^n$ — фиксированный многочлен. Разложим его в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 2$ и получим следующее равенство:

$$p(t) = p'(2)(t-2) + \frac{p''(2)}{2!}(t-2)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(2)}{n!}(t-2)^n, \qquad (1.63)$$

поскольку $p(2) = 0$. Следовательно, полиномы

$$t-2, \quad (t-2)^2, \cdots, (t-2)^n \tag{1.64}$$

образуют полное семейство в рассматриваемом линейном подпространстве. Как и в предыдущем примере, несложно показать, что семейство полиномов (1.64) является линейно независимым. Поэтому семейство (1.64) образует базис в линейном подпространстве

$$\{p(t) \in P^n : \; p(2) = 0\}.$$

1.69. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1^T = A_1$ и $A_2^T = A_2$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2)^T = \alpha^1 A_1^T + \alpha^2 A_2^T = \alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2.$$

Шаг 2. Размерность всего пространства $\mathbb{R}^{N\times N}$ равна N^2. Если $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $A^T = A$, то имеем

$$\{A\}_k^j = \{A\}_j^k \quad \text{при} \quad j,k = \overline{1,N},$$

т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{jj} E_{jj} + \sum_{j<k} a_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj}\right), \tag{1.65}$$

где E_{jk} — матрица, состоящая из нулей за исключением j–ой строчки и k–го столбца, где располагается число 1. Докажем, что семейство матриц, состоящих из наборов $\{E_{jj}\}$ и $\{E_{jk} + E_{kj}\}$ (последнее семейство при $j < k$), образует базис в данном линейном подпространстве.

□ Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^{N} b_{jj} E_{jj} + \sum_{j<k} b_{jk} \left(E_{jk} + E_{kj}\right) = O \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Это равенство можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j,k=1,1}^{N,N} c_{jk}E_{jk} = O, \quad c_{kj} = c_{jk} = b_{jk}$$

Поскольку семейство матриц $\{E_{jk}\}$, очевидно, линейно независимо, то приходим к выводу о том, что $c_{jk} = 0$. Следовательно, все коэффициенты $b_{jk} = 0$. Значит, семейство линейно независимо. Полнота этого семейства следует из (1.65). ⊠

Тогда базис этого линейного подпространства симметричных матриц прежде всего состоит из следующих N матриц:

$$E_{11}, \cdots, E_{NN}. \tag{1.66}$$

В силу симметричности матриц следующие матрицы дополняют матрицы (1.66) до базиса во всем пространстве:

$$F_{jk} = E_{jk} + E_{kj} \quad \text{при} \quad j < k. \tag{1.67}$$

Вычислим число этих матриц. С этой целью заметим, что базис во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ состоит из семейства матриц

$$\{E_{jk}\}, \quad j, k = \overline{1, N}. \tag{1.68}$$

Этот базис можно записать как состоящий из матриц (1.66) и из матриц

$$\{E_{jk}\} \quad \text{при} \quad j > k, \tag{1.69}$$

$$\{E_{jk}\} \quad \text{при} \quad j < k. \tag{1.70}$$

Число матриц (1.69) и (1.70) одинаково и равно M, которое можно вычислить

$$2M + N = N^2 \Leftrightarrow M = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{1.71}$$

Нетрудно понять, что число матриц (1.67) тоже равно M. Следовательно, базисных матриц (1.66) и (1.67) в линейном подпространстве симметричных матриц равно

$$M + N = \frac{N(N-1)}{2} + N = \frac{N(N+1)}{2}. \tag{1.72}$$

1.70. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N \times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_1^T = -A_1$ и $A_2^T = -A_2$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2)^T = \alpha^1 A_1^T + \alpha^2 A_2^T = -(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2).$$

Шаг 2. Поскольку для матриц этого линейного подпространства

$$\{A\}_k^j = -\{A\}_j^k \quad \text{при} \quad j, k = \overline{1, N},$$

то

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1N} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k<j} a_{jk} \left(E_{jk} - E_{kj}\right). \tag{1.73}$$

Поэтому базис этого линейного подпространства образуют матрицы вида

$$D_{jk} = E_{jk} - E_{kj}, \quad k > j. \tag{1.74}$$

Докажем, что это семейство матриц образует базис в данном линейном подпространстве.

□ Действительно, пусть выполнено равенство

$$\sum_{k>j} b_{jk} D_{jk} = O \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\sum_{k>j} b_{jk} E_{jk} - \sum_{k>j} b_{jk} E_{kj} = O,$$

$$\sum_{j\neq k} c_{jk} E_{jk} = O, \quad c_{jk} = \begin{cases} b_{jk}, & \text{если} \quad k > j; \\ -b_{jk}, & \text{если} \quad k < j. \end{cases}$$

Поскольку семейство матриц $\{E_{jk}\}$ линейно независимо, то линейно независимо и любое его под семейство. Следовательно, приходим к выводу о том, что $c_{jk} = 0$, т.е. $b_{jk} = 0$. Линейная независимость доказана. Полнота семейства $\{D_{jk}\}$ следует из равенства (1.73). ⊠

Можно заметить, что количество этих базисных матриц совпадает с числом матриц (1.67). Поэтому размерность линейного подпространства антисимметричных матриц равно

$$\frac{N(N-1)}{2}. \tag{1.75}$$

1.71. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что в линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) подмножество, состоящее из матриц с нулевым следом (т.е. сумма диагональных элементов матрицы равна нулю), является линейным подпространством. Найти размерность и указать какой–либо базис этого подпространства.

Решение. Шаг 1. Пусть $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $\operatorname{tr} A_1 = \operatorname{tr} A_2 = 0$. Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ имеем

$$\operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2 = 0.$$

Шаг 2. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ и $\operatorname{tr} A = 0$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}, \quad a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN} = 0. \quad (1.76)$$

Отсюда получаем равенство

$$A = \sum_{j\neq k} a_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj} E_{jj} + a_{NN} E_{NN} =$$
$$= \sum_{j\neq k} a_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj} E_{jj} - \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj} E_{NN} =$$
$$= \sum_{j\neq k} a_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} a_{jj}(E_{jj} - E_{NN}). \quad (1.77)$$

Докажем, что семейство матриц, состоящее из наборов $\{E_{jk}\}$ при $j \neq k \in \overline{1,N}$ и $\{E_{jj} - E_{NN}\}$ при $j = \overline{1,N}$ образуют базис в данном линейном подпространстве.

$\square$ Действительно, рассмотрим равенство

$$\sum_{j\neq k} b_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{jj}(E_{jj} - E_{NN}) = O \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

из которого получаем равенство

$$\sum_{j\neq k} b_{jk} E_{jk} + \sum_{j=1}^{N-1} b_{jj} E_{jj} + b_0 E_{NN} = O, \quad b_0 = -\sum_{j=1}^{N} b_{jj}.$$

В силу линейной независимости семейства $\{E_{jk}\}$ приходим к выводу о том, что $b_{jk} = 0$. Следовательно, линейная независимость данного семейства матриц доказана. Полнота следует из равенства (1.77). $\boxtimes$

Заметим, что число элементов базиса равно

$$N^2 - N + (N-1) = N^2 - 1.$$

1.72. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собою прямую сумму двух своих линейных подпространств: линейного подпространства симметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = A$) и линейного подпространства антисимметричных матриц (т. е. матриц, удовлетворяющих условию $A^T = -A$).

Решение. Произвольную матрицу $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ можно единственным образом представить в виде суммы симметричной матрицы из $\mathbb{R}^{N\times N}$ и антисимметричной матрицы из $\mathbb{R}^{N\times N}$ следующим образом:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Докажем единственность разложения.

$\square$ Действительно, пусть имеют место два разложения

$$A = A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}_s^{N\times N}, \quad B_1, B_2 \in \mathbb{R}_{as}^{N\times N}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \Leftrightarrow \mathbb{R}_s^{N\times N} \ni A_1 - A_2 = B_2 - B_1 \in \mathbb{R}_{as}^{N\times N},$$

$$(A_1 - A_2)^T = (B_2 - B_1)^T \Rightarrow A_1 - A_2 = B_1 - B_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 - A_2 = O = B_1 - B_2 \Rightarrow A_1 = A_2, \quad B_1 = B_2. \quad \boxtimes \quad (1.78)$$

Поэтому прямая сумма линейного подпространства симметричных матриц $\mathbb{R}_s^{N\times N}$ и линейного подпространства антисимметричных матриц $\mathbb{R}_{as}^{N\times N}$ образует все линейное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$:

$$\mathbb{R}_s^{N\times N} \oplus \mathbb{R}_{as}^{N\times N} = \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Поэтому

$$\dim \mathbb{R}_s^{N\times N} + \dim \mathbb{R}_{as}^{N\times N} = \dim \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Проверяем

$$\frac{N(N+1)}{2} + \frac{N(N-1)}{2} = N^2.$$

1.73. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^{N\times N}$ (пространство всех матриц размера $N \times N$ с элементами из поля $\mathbb{R}$) представляет собою прямую сумму двух своих линейных подпространств: линейного подпространство матриц с нулевым следом и линейного подпространства матриц λI_N, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $I_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — единичная матрица.

Решение. Шаг 1. Существование. Прежде всего докажем существование указанного разложения. Действительно, пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$:

$$A - \lambda I_N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} - \lambda I_N =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN}-\lambda \end{pmatrix} := A_0, \quad (1.79)$$

где число $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda = \frac{a_{11} + \cdots + a_{NN}}{N}. \quad (1.80)$$

Тогда матрица A_0 в правой части равенства (1.79) имеет нулевой след. Тогда из (1.79) имеем

$$A = A_0 + \lambda I_N, \quad \operatorname{tr} A_0 = 0. \quad (1.81)$$

Шаг 2. Единственность. Пусть разложений два

$$A = A_{01} + \lambda_1 I_N = A_{02} + \lambda_2 I_N, \quad \operatorname{tr} A_{01} = \operatorname{tr} A_{02} = 0. \quad (1.82)$$

В силу линейности операции взятия следам матрицы имеем

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 N = \lambda_2 N \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow A_{01} = A_{02}.$$

Таким образом, разложение (1.81) единственное.

1.74. Пример. Экзаменационная задача. Доказать, что линейное вещественное пространство $\mathbb{R}^N$ представляет собой прямую сумму своих линейных подпространств: линейного подпространства столбцов, сумма элементов которого равна нулю, и линейного подпространства столбцов вида $\lambda \cdot (1, ..., 1)^T$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Решение. Шаг 1. Существование. Пусть $A \in \mathbb{R}^N$:

$$A - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \lambda \\ \vdots \\ a_N - \lambda \end{pmatrix} := A_0, \quad (1.83)$$

где

$$\lambda = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}.$$

Таким образом, приходим к разложению

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 + \dots + b_N = 0. \tag{1.84}$$

Шаг 2. Единственность. Пусть разложений два:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1.85}$$

где $b_1 + \dots + b_N = c_1 + \dots + c_N = 0$. Из (1.85) получаем равенства $a_1 + \dots + a_N = \lambda_1 N = \lambda_2 N \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow (b_1, \dots, b_N) = (c_1, \dots, c_N)$, т.е. разложение (1.84) единственно.

1.75. Пример. Экзаменационная задача. Показать, что множество $\mathbb{C}^N$ является линейным пространством как над полем вещественных чисел $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$, так и над полем комплексных чисел $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Найти размерности этих линейных пространств и указать какие–либо базисы.

Решение. Шаг 1. Нетрудно проверить, что $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$ и $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$ действительно линейные пространства.

Шаг 2. Базис в $\mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Пусть $A \in \mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Тогда имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_N\mathbf{e}_N, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

причем семейства столбцов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$, очевидно, линейно независимо. Значит, $\dim \mathbb{C}^N(\mathbb{C}) = N$.

Шаг 2. Базис в $\mathbb{C}^N(\mathbb{R})$. Пусть $A \in \mathbb{C}^N(\mathbb{C})$. Тогда имеем

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} a_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} a_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \operatorname{Im} a_1 \\ \vdots \\ i \operatorname{Im} a_N \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{Re} a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + \operatorname{Re} a_N \cdot \mathbf{e}_N +$$

$$+\operatorname{Im} a_1 \cdot \mathbf{f}_1 + \dots + \operatorname{Im} a_N \cdot \mathbf{f}_N, \quad (1.86)$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{f}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}.$$

Значит, $\dim \mathbb{C}(\mathbb{R}) = 2N$.

1.76. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $P_{2N}(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше $2N$). Является ли линейным подпространством линейного пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$ множество всех полиномов F, удовлетворяющих условиям: $F(-1) = F(1) = 0$? В случае положительного ответа найти размерность и указать какой–либо базис этого пространства.

Решение. Шаг 1. Нетрудно доказать, что указанное множество полиномов образует линейное подпространство линейного пространства $P_{2N}(\mathbb{R})$.

Шаг 2. Пусть $F(t) \in P_{2N}(\mathbb{R})$ и $F(-1) = F(1) = 0$. Тогда имеем

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{2N-1} t^{2N-1} + a_{2N} t^{2N}, \quad (1.87)$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2N-1} + a_{2N} = 0, \quad (1.88)$$

$$F(-1) = 0 \Rightarrow a_0 - a_1 + a_2 + \dots - a_{2N-1} + a_{2N} = 0. \quad (1.89)$$

Из равенств (1.88) и (1.89) получаем следующие равенства:

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2N} = 0 \Rightarrow a_0 = -a_2 - a_4 - \dots - a_{2N}, \quad (1.90)$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2N-1} = 0 \Rightarrow a_1 = -a_3 - a_5 - \dots - a_{2N-1}. \quad (1.91)$$

Подставляя (1.90) и (1.91) в (1.87) получим выражение

$$F(t) = a_2(t^2-1) + a_3(t^3-t) + \cdot + a_{2N-1}(t^{2N-1}-t) + a_{2N}(t^{2N}-1). \quad (1.92)$$

Нетрудно проверить, что семейство полиномов

$$t^2-1,\ t^3-t,\ t^4-1,\ t^5-t,\ \dots, t^{2N-1}-t,\ t^{2N}-1$$

образует базис указанного линейного подпространства и его размерность равна $2N-2$.

1.77. Пример. Вычислительная задача. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ выполнить задания: найти базис линейной оболочки симметричных матриц:

$$X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

и найти размерность линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p})$; разложить элементы $X_{1,p}$, $X_{2,p}$, $X_{3,p}$ по найденному базису.

Решение. Введем базис в линейном пространстве $\mathbb{R}_s^{2\times 2}$ вещественных симметричных матриц размера 2×2:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.94)$$

Тогда справедливы разложения матриц (1.93) по базису (1.94):

$$X_{1,p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 1 \cdot E_2 + (-1) \cdot E_3 = E \cdot Y_1, \qquad (1.95)$$

$$X_{2,p} = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_1 + 2p \cdot E_2 + 3 \cdot E_3 = E \cdot Y_2, \qquad (1.96)$$

$$X_{3,p} = \begin{pmatrix} -p & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot E_1 + (-p) \cdot E_2 + 2 \cdot E_3 = E \cdot Y_3, \qquad (1.97)$$

где $E = (E_1, E_2, E_3)$ и

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2p \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -p \\ 2 \end{pmatrix}. \qquad (1.98)$$

Образуем следующую матрицу:

$$A = \left\| \begin{matrix} Y_1^T \\ Y_2^T \\ Y_3^T \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2p & 3 \\ 2 & -p & 2 \end{pmatrix}. \qquad (1.99)$$

Прежде всего заметим, что $\operatorname{rk} A \geqslant 2$, поскольку первые две строчки матрицы A линейно независимы. Вычислим определитель матрицы A.

$$\det A = 12p + 4. \qquad (1.100)$$

Значит, при $p = -1/3$ имеем $\operatorname{rk} A = 2$, а при $p \neq -1/3$ имеем $\operatorname{rk} A = 3$.

Случай 1. Итак, в случае $p \neq -1/3$ базис линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3p})$ образуют матрицы $\{X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}\}$ и разложение матриц $X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}$ по этому базису очевидным образом выписываются. Очевидно, что $\dim L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}) = 3$.

Случай 2. Пусть $p = -1/3$. Тогда матрица A примет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2/3 & 3 \\ 2 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (1.101)$$

Ясно, что третья строчка есть сумма первых двух. Поэтому

$$Y_3 = Y_1 + Y_2 \Rightarrow X_{3,p} = E \cdot Y_3 = E \cdot (Y_1 + Y_2) = X_{1,p} + X_{2,p}.$$

Итак, в случае $p = -1/3$ базис линейной оболочки $L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p})$ образуют, например, матрицы $X_{1,p}$ и $X_{2,p}$, $\dim L(X_{1,p}, X_{2,p}, X_{3,p}) = 2$ и справедливо разложение по базису

$$X_{3,p} = 1 \cdot X_{1,p} + 1 \cdot X_{2,p}.$$

ГЛАВА 2

Системы линейных уравнений

1. Основные теоремы

2.1. Определение. Алгебраической линейной системой m уравнений с n неизвестными называется система уравнений

$$a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \dots + a_n^1x^n = b^1, \tag{2.1}$$

$$a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \dots + a_n^2x^n = b^2, \tag{2.2}$$

$$\dots\dots\dots\dots \tag{2.3}$$

$$a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \dots + a_n^mx^n = b^m, \tag{2.4}$$

где $a_j^k, b^s \in \mathbb{K}$ для $j = \overline{1,n}$, $k, s = \overline{1,m}$, а переменные $x^1, \dots, x^n$ принимают значения из поля $\mathbb{K}$.

2.2. Из чисел a_j^k можно составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей системы (2.1)–(2.4). Числа b^k при $k = \overline{1,m}$ называются свободными членами системы, а x^j — неизвестными системы (2.1)–(2.4). *Систему уравнений* (2.1)–(2.4) можно переписать в следующем виде:

$$A \cdot X = B, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

2.3. Определение. Решением системы из определения 2.1 называется набор чисел

$$x^1, x^2, \dots, x^n,$$

который, будучи поставленным в систему, обращает все ее уравнения в тождества. Система, имеющая решение, называется **совместной,** а не имеющая решений — **несовместной**.

2.4. Определение. Если не все b^k равны нулю система уравнений из определения 2.1 называется **неоднородной,** если же все $b^k = 0$, система называется **однородной**.

2.5. Определение. Однородную систему уравнений $A \cdot X = O$ с той же матрицей A, что и у неоднородной системы (2.5), называется однородной системой, соответствующей неоднородной системе (2.5).

2.6. Определение. Две линейные системы уравнений

$$A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A' \cdot X = B'$$

называются эквивалентными, если все решения первой системы являются решениями второй системы и, наоборот, все решения второй системы являются решениями первой системы.

2.7. Систему (2.5) можно переписать в следующем виде:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \tag{2.6}$$

где

$$A = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

При такой записи системы уравнений (2.5) рассмотрение этой системы уравнений с позиции линейных пространств состоит в построении всевозможных разложений столбца B по столбцам $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

2.8. Определение. Система уравнений (2.5) называется системой Крамера, если $m = n$ и набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым.

2.9. Теорема. Система Крамера. *Система Крамера* (2.5) *для любого столбца $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ правой части имеет единственное решение.*

Доказательство. Поскольку набор столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым, то они образуют базис в линейном пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ длины n.

☐☐ Действительно, как известно, базис пространства столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$ состоит из n векторов и поэтому размерность этого линейного пространства равна $n \in \mathbb{N}$. Поэтому семейство столбцов $\{B, A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ линейно зависимо, поскольку их число равно $n+1$. Следовательно, найдутся такие числа $\beta, \alpha^1, \ldots, \alpha^n$, не все равные нулю, что справедливо равенство

$$\beta B + \alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{2.7}$$

Если $\beta = 0$, то получим равенство

$$\alpha^1 A_1 + \cdots + \alpha^n A_n = O \in \mathbb{K}^{n\times 1} \Rightarrow \alpha^1 = \cdots = \alpha^n = 0,$$

поскольку семейство столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ линейно независимо. Противоречие. Следовательно, $\beta \neq 0$. Поэтому из (2.7) вытекает равенство

$$B = -\frac{\alpha^1}{\beta} A_1 - \cdots - \frac{\alpha^n}{\beta} A_n \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{2.8}$$

Отсюда получаем полноту семейства столбцов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. ⊠⊠

Следовательно, произвольный столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ можно единственным образом разложить по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Следовательно,

$$X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}$$

— есть единственное решение системы уравнений, записанной в форме (2.6). ☐

2.10. Теорема. Теорема Кронекера–Капелли. *Для того чтобы система уравнений* (2.6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы столбец правой части* $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Доказательство. Необходимость. Если система уравнений (2.6) имеет решение, то эта система уравнений выполняется при некотором наборе $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ и поэтому $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Достаточность. Пусть $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, то найдутся такие числа $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

И, следовательно, столбец $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)^T$ является решением системы уравнений (2.6). $\square$

2.11. Следствие. *Для того чтобы система* (2.6) *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* $\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$.

Доказательство. С одной стороны, совершенно понятно, что $L(A_1, A_2, \ldots, A_n) \subset L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$. С другой стороны, в силу результата теоремы 2.10 система уравнений (2.6) имеет решение, тогда и только тогда, когда $B \in L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, что равносильно тому что, $L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B) \subset L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Следовательно, $L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$. Таким образом, согласно определению ранга семейства столбцов имеем

$$\operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \operatorname{rk} L(A_1, A_2, \ldots, A_n, B).$$

$\square$

2.12. Теорема. Альтернативы Фредгольма 1. *Если квадратная однородная система уравнений, состоящая из n уравнений относительно n переменных*:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = O, \quad A_k,\ O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.9)$$

отвечающая неоднородной системе уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B, \quad B \in \mathbb{K}^{n\times 1} \qquad (2.10)$$

имеет только тривиальное решение, то неоднородная система (2.10) *имеет единственное решение для любого столбца* $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Если же однородная система (2.9) *имеет решения, отличные от тривиального, то существует такой столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, при котором неоднородная система* (2.10) *не имеет ни одного решения.*

Доказательство. Если однородная система уравнений (2.9) имеет только тривиальное решение $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (0, 0, \ldots, 0)$, то набор столбцов $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathbb{K}^{n\times 1}$ является линейно независимым, а поскольку их число равно n, то они образуют базис в пространстве столбцов $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Следовательно, любой столбец $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ можно разложить единственным образом по базису $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$:

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \cdots + \xi^n A_n.$$

Стало быть, неоднородная система уравнений (2.10) имеет единственное решение $(x^1, x^2, \ldots, x^n) = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ для любого столбца правой части $B \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Во втором случае набор столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ является линейно зависимым и поэтому столбцы этого набора не образуют базиса в $\mathbb{K}^{n\times 1}$. Значит, найдется такой столбец $B \neq O$ из $\mathbb{K}^{n\times 1}$, который нельзя выразить через столбцы $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, т. е. уравнение

$$B = \xi^1 A_1 + \xi^2 A_2 + \dots + \xi^n A_n$$

невозможно не для какого-либо набора чисел $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)^T \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. $\square$

2.13. Теорема. Альтернативы Фредгольма 2. *Если однородная система* (2.9) *имеет решения, отличные от тривиального, то для того чтобы неоднородная система уравнений* (2.10) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы* $B^T \cdot Y = 0$ *для всех решений* Y *однородной системы уравнений*

$$A^T \cdot Y = O. \tag{2.11}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть неоднородная система уравнений (2.10) имеет решение $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — произвольное решение однородной системы уравнений (2.11). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A \cdot X = B \quad \text{и} \quad A^T \cdot Y = O \Rightarrow Y^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot B \Rightarrow \\ \Rightarrow (Y^T \cdot A \cdot X)^T = (Y^T \cdot B)^T \Rightarrow X^T \cdot (A^T \cdot Y) = B^T \cdot Y \Rightarrow \\ \Rightarrow X^T \cdot O = B^T \cdot Y \Rightarrow B^T \cdot Y = O \end{aligned}$$

для всех решений $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ матричного уравнения (2.11), где мы воспользовались известными равенствами для операции транспонирования матриц

$$Z^{TT} = Z, \quad (Z_1 \cdot Z_2)^T = Z_2^T \cdot Z_1^T$$

для всех

$$Z \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_1 \in \mathbb{K}^{l\times p}, \quad Z_2 \in \mathbb{K}^{p\times r}.$$

Достаточность. Пусть выполнено следующее условие:

$$Y^T \cdot B = 0 \quad \text{для всех решений} \quad Y \in \mathbb{K}^{n\times 1} \quad \text{уравнения} \quad A^T \cdot Y = O.$$

Заметим, что

$$A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|, \; A^T = \|A^1, \dots, A^n\|, \; Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \; Y^T = (y^1, \dots, y^n),$$

причем

$$A^T \cdot Y = O \Leftrightarrow Y^T \cdot A = O \Leftrightarrow (y^1, \cdots, y^n) \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда равенство (2.11) можно переписать в следующем виде:

$$y^1 A^1 + \cdots + y^n A^n = O, \tag{2.12}$$

а уравнение $Y^T \cdot B = 0$ можно переписать в следующем виде:

$$y^1 b^1 + \cdots + y^n b^n = 0. \tag{2.13}$$

Равенства (2.12) и (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$y^1 (A^1, b^1) + \cdots + y^n (A^n, b^n) = (O, 0) \tag{2.14}$$

или в свернутом матричном виде

$$Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|0\| \tag{2.15}$$

для всех столбцов $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — решений однородного уравнения (2.11).

Предположим теперь, что неоднородная система уравнений (2.10) не совместна. Это означает, что методом Гаусса–Жордана расширенную матрицу $\widetilde{A} = \|A|B\|$ методом элементарных преобразований строк можно привести к такому упрощенному виду, что у расширенной матрицы появится строчка следующего вида:

$$(0, \ldots, 0, 1),$$

причем эта строчка согласно методу Гаусса–Жордана является линейной комбинацией исходных строк расширенной матрицы $\widetilde{A} = \|A|B\|$. Следовательно, найдутся такие числа $y^1, \ldots, y^n \in \mathbb{K}$, что

$$y^1 (A^1, b^1) + \cdots + y^n (A^n, b^n) = (0, \ldots, 0, 1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow Y^T \cdot \|A|B\| = \|O|1\|. \tag{2.16}$$

Из равенства (2.16) вытекает, что есть такой столбец $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, что он одновременно удовлетворяет равенствам (2.15) и (2.16), причем

$$A^T \cdot Y = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

Противоречие. Значит, система (2.10) совместна. □

2. Фундаментальное Семейство Решений

2.14. В этом параграфе будет показано, что множество решений однородной системы m линейных уравнений относительно n неизвестных является подпространством линейного пространства $\mathbb{K}^{n\times 1}$, а множество решений неоднородной системы линейных уравнений представляет из себя *линейное многоообразие* — аналог плоскости и прямой в трехмерном пространстве. При этом мы будем использовать векторную форму записи неоднородной системы уравнений:

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = B. \tag{2.17}$$

и соответствующей однородной системы уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = O. \tag{2.18}$$

2.15. Теорема. *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений* (2.18) *образует линейное подпространство в арифметическом пространстве* $\mathbb{K}^{n\times 1}$.

Доказательство. Пусть

$$X_1 = (x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)^T \quad \text{и} \quad X_2 = (x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n)^T$$

— два решения однородной системы уравнений

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \cdots + x^n A_n = O \Leftrightarrow A \cdot X = O.$$

Тогда для любых $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$A \cdot (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A \cdot X_1 + \alpha^2 A \cdot X_2 = \alpha^1 O + \alpha^2 O = O.$$

□

2.16. Определение. Множество всех решений линейной однородной системы (2.18) называется пространством решений и обозначается далее знаком $\mathcal{N}$.

2.17. Определение. Базис в пространстве решений $\mathcal{N}$ однородной системы уравнений (2.17) называется Фундаментальной Системой Решений или ФСР.

2.18. Построение ФСР. Рассмотрим матрицу линейной однородной системы уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Предположим, что матрица $A \neq O$ и поэтому у матрицы A существует базисный минор порядка $r \in [1, \min\{m, n\}]$. Без ограничения общности будем считать, что базисный минор этой матрицы расположен в левом верхнем углу:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

При этом исходная система однородных линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Тогда в силу теоремы о базисном миноре строчки матрицы системы (2.20) с номерами от $r+1$ до m линейно выражаются через первые r строк. Поэтому эквивалентная к (2.20) однородная система линейных уравнений имеет матрицу системы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix},$$

а сама эквивалентная система однородных линейных уравнений к (2.20) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

При этом используя свойства произведения матриц эквивалентную систему линейных уравнений (2.21) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная однородная система линейных уравнений (2.20) эквивалентна следующей, вообще говоря, неоднородной линейной системе уравнений:

$$\widetilde{A}_r \cdot X_r = \widetilde{B}_r, \quad X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T, \tag{2.22}$$

$$\widetilde{A}_r = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_r = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$

причем система линейных уравнений (2.22) относительно переменных $X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T$ является Крамеровской (см. 2.8), поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$.

2.19. Определение. В эквивалентной системе линейных уравнений (2.22) переменные $x^1, \ldots, x^r$ называются *независимыми*, а переменные $x^{r+1}, \ldots, x^n$ называются *свободными*.

2.20. Построение ФСР. Продолжение. Для построения всех линейно независимых решений однородной системы уравнений

$$A \cdot X = O, \quad X = (x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^n)^T \tag{2.23}$$

с матрицей A, определенной равенством (2.19), воспользуемся полученной эквивалентной системой уравнений (2.22). Для этого сначала построим так называемое *нормальное семейство решений* рассматриваемой однородной линейной системы уравнений.

Шаг 1. Сначала положим в системе уравнений (2.22) свободные переменные равными $x^{r+1} = 1$, $x^{r+2} = \cdots = x^n = 0$ и получим из (2.22) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+1}^1 \\ \vdots \\ a_{r+1}^r \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение

$$X_{1r} = (x_1^1, \ldots, x_1^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_1 = (x_1^1, \dots, x_1^r, 1, 0, \dots, 0)^T \tag{2.25}$$

однородной системы уравнений (2.23).

Шаг 2. Теперь положим в системе уравнений (2.22) свободные переменные равными $x^{r+1} = 0$, $x^{r+2} = 1$, $x^{r+3} = \dots = x^n = 0$ и получим из (2.22) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{r+2}^1 \\ \vdots \\ a_{r+2}^r \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение

$$X_{2r} = (x_2^1, \dots, x_2^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_2 = (x_2^1, \dots, x_2^r, 0, 1, \dots, 0)^T \tag{2.27}$$

однородной системы уравнений (2.23).

Шаг $n - r$. На этом завершающем шаге построения нормального семейства решений положим свободные переменные равными $x^{r+1} = \dots = x^{n-1} = 0$ и $x^n = 1$ и получим из (2.22) следующую неоднородную, вообще говоря, линейную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^r \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

которая, как Крамеровская, имеет единственное решение

$$X_{n-rr} = (x_n^1, \dots, x_n^r)^T.$$

Таким образом, нами построено нетривиальное решение

$$X_{n-r} = (x_{n-r}^1, \dots, x_{n-r}^r, 0, 0, \dots, 1)^T \tag{2.29}$$

однородной системы уравнений (2.23).

2.21. Лемма. Нормальное семейство решений линейной однородной системы уравнений (2.23)

$$X_1 = (x_1^1, \dots, x_1^r, 1, 0, \dots, 0)^T, \tag{2.30}$$

$$X_2 = (x_2^1, \dots, x_2^r, 0, 1, \dots, 0)^T, \tag{2.31}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{2.32}$$

$$X_{n-r} = (x_{n-r}^1, \dots, x_{n-r}^r, 0, 0, \dots, 1)^T \tag{2.33}$$

линейно независимое.

Доказательство. Предположим, что столбцы нормального семейства решений однородной системы уравнений (2.23) линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{n-r} \in \mathbb{K}$, не равные одновременно нулю, что справедливо равенство

$$\alpha^1 X_1 + \cdots + \alpha^{n-r} X_{n-r} = O \in \mathbb{K}^{n \times 1}, \tag{2.34}$$

но тогда согласно свойствам операций сложения столбцов и умножения столбцов на числа приходим к равенству следующего вида:

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^r \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{n-r} = 0.$$

Таким образом, равенство (2.34) возможно тогда и только тогда, когда $\alpha^1 = \alpha^2 = \cdots = \alpha^{n-r} = 0$. Следовательно, построенное нормальное семейство решений (2.30)–(2.33) линейно независимое. $\square$

2.22. Лемма. Нормальное семейство решений (2.30)–(2.33) линейной однородной системы уравнений (2.23) полно в линейном пространстве $\mathcal{N}$ решений линейной однородной системы уравнений (2.23).

Доказательство. Шаг 1. Рассмотрим эквивалентную систему линейных уравнений (2.22). Поскольку $\det \widetilde{A}_r \neq 0$, то при заданной правой части $\widetilde{B}_r$ эта система имеет единственное решение $X_r = (x^1, \ldots, x^r)^T$. Но в силу явного вида столбца $\widetilde{B}_r$ правой части видно, что он однозначно определяется заданием свободных переменных $x^{r+1}, \ldots, x^n$. Отсюда приходим к важному выводу о том, что задание свободных переменных $x^{r+1}, \ldots, x^n$ однозначно определяет решение $X = (x^1, \ldots, x^r, x^{r+1}, \ldots, x^n)^T$ исходной однородной системы уравнений (2.23). Этим результатом мы воспользуемся на следующем шаге доказательства леммы.

Шаг 2. Пусть $X_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^r, x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n)^T$ — произвольное решение однородной линейной системы уравнений (2.23). Тогда это решение можно представить в виде следующей линейной комбинации нормального семейства решений:

$$X_0 = x_0^{r+1} X_1 + \cdots + x_0^n X_{n-r}. \tag{2.35}$$

□□ Действительно, с одной стороны, заметим, что правая часть равенства (2.35) в силу теоремы 2.15 является решением линейной однородной системы уравнений (2.23). С другой стороны, используя свойства сложения столбцов и умножения столбца на числа правая часть равенства (2.35) представима в следующем виде:

$$x_0^{r+1}X_1 + \cdots + x_0^n X_{n-r} = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ \vdots \\ z_0^r \\ x_0^{r+1} \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} := Y_0, \tag{2.36}$$

причем в силу результата шага 1 решение Y_0 однозначно определяется числами $x_0^{r+1}, \ldots, x_0^n$ как и решение X_0. Следовательно, $Y_0 = X_0$. ⊠⊠ □

2.23. Следствие. $\dim \mathcal{N} = n - r$, *где* $r = \operatorname{rk} A$.

2.24. Теорема. *Общее решение совместной неоднородной системы уравнений $A \cdot X = B$ можно представить в следующем виде:*

$$X = Y + \sum_{k=1}^{n-r} c^k X_k, \tag{2.37}$$

где Y — какое–либо частное решение неоднородной системы линейных уравнений, а $\{X_1, \ldots, X_{n-r}\}$ — ФСР соответствующей линейной однородной системы уравнений $A \cdot X = O$.

Доказательство. Результат теоремы является следствием теоремы **??** и следствия 2.23. □

2.25. Теорема. *Пусть матрица B состоит из столбцов, образующих ФСР линейной однородной системы уравнений*

$$A \cdot X = O. \tag{2.38}$$

Тогда пространство решений однородной линейной системы уравнений

$$B^T \cdot Y = O \tag{2.39}$$

совпадает с линейной оболочкой строк матрицы A.

Доказательство. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $\operatorname{rk} A = r \geqslant 1$. Тогда ФСР линейной однородной системы уравнений (2.38) состоит из $n - r$ вектор–столбцов $X_1, \ldots, X_{n-r} \in \mathbb{K}^{n \times 1}$. Составим из этих столбцов матрицу B

$$B = \|X_1, \ldots, X_{n-r}\| \in \mathbb{K}^{n \times (n-r)}, \tag{2.40}$$

причем

$$A \cdot X_j = O \in \mathbb{K}^{m\times 1}, \quad j = \overline{1, n-r}. \tag{2.41}$$

Поэтому из (2.40) и (2.41) вытекают следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^{m\times(n-r)} \ni O = \|A \cdot X_1, \ldots, A \cdot X_{n-r}\| = \\ = A \cdot \|X_1, \ldots, X_{n-r}\| = A \cdot B \end{aligned} \tag{2.42}$$

Используя операцию транспонирования матриц с учетом ранее доказанных свойств транспонирования получим из (2.42) равенство

$$B^T \cdot A^T = O \in \mathbb{K}^{(n-r)\times m}. \tag{2.43}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T \cdot Y = O, \quad B^T \in \mathbb{K}^{(n-r)\times n}, \quad A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{2.44}$$

Из сравнения (2.43) и (2.44) приходим к выводу о том, что все столбцы матрицы A^T являются решениями системы уравнений (2.44). Поскольку $\operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A = r$, то число линейно независимых столбцов матрицы A^T совпадает с числом линейно независимых строк матрицы A и равно r. Теперь выясним число столбцов в ФСР системы уравнений (2.44). Заметим, что по построению $\operatorname{rk} B^T = \operatorname{rk} B = n-r$. Следовательно, ФСР состоит из $n-(n-r) = r$ столбцов. Таким образом, пространством решений однородной системы уравнений (2.44) является линейная оболочка столбцов матрицы A^T, т.е. линейная оболочка строчек матрицы A, и только она. $\square$

3. Примеры решения задач

2.26. Пример. Система уравнений, задающая линейную оболочку системы векторов и только ее. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку системы векторов

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Запишем координаты векторов–столбцов v_1, v_2, v_3, v_4 по строкам в матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

и рассмотрим соответствующую линейную однородную систему уравнений

$$A \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)^T. \tag{2.47}$$

ФСР этой системы уравнений находится методом Гаусса–Жордана и имеет следующий вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

Запишем матрицу B в следующем виде:

$$B = \|X_1, X_2, X_3\| = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Тогда имеем

$$B^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

Рассмотрим следующую линейную однородную систему уравнений:

$$B^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)^T, \tag{2.51}$$

которую можно переписать в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \\ y^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.52)$$

из которой получаем искомую систему уравнений

$$-y^1 + y^2 + 2y^3 = 0, \qquad (2.53)$$

$$y^1 - y^2 + 2y^4 = 0, \qquad (2.54)$$

$$-2y^1 - y^2 + y^5 = 0. \qquad (2.55)$$

2.27. Пример. Сумма и пересечение линейных подпространств. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1 и V_2 :

$$V_1 = L(X_1, X_2, X_3), \quad V_2 = L(Y_1, Y_2, Y_3), \qquad (2.56)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (2.57)$$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \qquad (2.58)$$

Решение. Шаг 1. $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$. Прежде всего составим матрицу

$$A = \|X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (2.59)$$

и найдем методом Гаусса–Жордана ее ранг.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 3. Поэтому $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ и базис в $V_1 + V_2$ можно взять, например, следующий

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Базис в $V_1 \cap V_2$. Сначала зададим линейное подпространство V_1 как решение некоторой системы уравнений (см. теорему 2.25). Для этого запишем матрицу

$$A_1 = \|X_1, X_2, X_3\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Теперь построим ФСР в пространстве решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$A_1 \cdot X = O, \quad (2.62)$$

которая в силу (2.61) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

из которой получаем

$$x^1 + x^2 - x^3 = 0, \quad x^2 + 2x^3 = 0,$$

ФСР которой состоит, например, из вектора

$$X_4 = (3 - 2, 1)^T. \quad (2.64)$$

Тогда согласно результату теоремы 2.25 линейное подпространство V_1 можно определить как решение следующей системы уравнений:

$$X_4^T \cdot X = 0 \Leftrightarrow 3x^1 - 2x^2 + x^3 = 0. \quad (2.65)$$

Теперь запишем линейное подпространство V_2 как решение некоторой линейной однородной системы уравнений. Для этого запишем матрицу

$$A_2 = \|Y_1, Y_2, Y_3\|^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (2.66)$$

Таким образом, из (2.66) получаем, что система уравнений

$$A_2 \cdot Y = O \qquad (2.67)$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^1 - 8y^3 = 0, \quad y^2 + 5y^3 = 0. \qquad (2.68)$$

Таким образом, ФСР системы уравнений (2.67) состоит, например, из столбца

$$Y_4 = (8, -5, 1)^T. \qquad (2.69)$$

Тогда согласно результату теоремы 2.25 линейное подпространство V_2 можно определить как решение следующей системы уравнений:

$$Y_4^T \cdot Y = 0 \Leftrightarrow 8y^1 - 5y^2 + y^3 = 0. \qquad (2.70)$$

Но тогда базис в $V_1 \cap V_2$ — есть в точности ФСР системы уравнений (2.65) и (2.70):

$$3x^1 - 2x^2 + x^3 = 0, \quad 8x^1 - 5x^2 + x^3 = 0. \qquad (2.71)$$

ФСР этой системы уравнений состоит из одного столбца, например,

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = L(Z_0). \qquad (2.72)$$

2.28. Пример. Прямая сумма подпространств. Пусть в линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^4$ заданы два линейных подпространства:

$$U = L(X_1, X_2), \quad V = L(X_3, X_4), \qquad (2.73)$$

$$X_1 = (1, 1, 1, 1)^T, \quad X_2 = (-1, -2, 0, 1)^T, \qquad (2.74)$$

$$X_3 = (-1, -1, 1, -1)^T, \quad X_4 = (2, 2, 0, 1)^T. \tag{2.75}$$

Доказать, что имеет место разложение в прямую сумму $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, и найти проекцию столбца

$$w = (4, 2, 4, 4)^T \tag{2.76}$$

на линейное подпространство U параллельно V.

Решение. Шаг 1. Докажем сначала, что столбцы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы. Запишем матрицу

$$A = \|X_1, X_2, X_3, X_4\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.77}$$

т.е. ранг матрицы A равен 4 и, стало быть, столбцы X_1, X_2, X_3, X_4 линейно независимы. Следовательно, $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Шаг 2. Найдем систему уравнений, которая определяет линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. Здесь можно поступить следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow X = \alpha X_1 + \beta X_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.78}$$

Отсюда вытекает равенство столбцов

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}, \tag{2.79}$$

из которого вытекает

$$x^1 = \alpha - \beta, \quad x^2 = \alpha - 2\beta, \quad x^3 = \alpha, \quad x^4 = \alpha + \beta. \tag{2.80}$$

Отсюда приходим к следующей системе уравнений

$$x^1 + x^4 = 2x^3, \quad x^2 + 2x^4 = 3x^3, \tag{2.81}$$

определяющая линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. Произвольный столбец линейного подпространства $V = L(X_3, X_4)$ имеет следующий вид:

$$v = \lambda X_3 + \mu X_4 = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.82}$$

Искомое разложение столбца w имеет следующий вид:

$$w = u + v, \quad u \in U = L(X_1, X_2), \quad v \in V = L(X_3, X_4). \tag{2.83}$$

Но тогда $w - v \in U$. Заметим, что

$$w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \lambda - 2\mu \\ 2 + \lambda - 2\mu \\ 4 - \lambda \\ 4 + \lambda - \mu \end{pmatrix}. \tag{2.84}$$

Подставим координаты столбца $w - v$ из (2.84) в систему (2.81), определяющая линейное подпространство $U = L(X_1, X_2)$ и только его. В результате получим следующую систему уравнений:

$$4\lambda = 3\mu, \quad 3\lambda = 2\mu + 1 \Rightarrow \lambda = 3, \quad \mu = 4. \tag{2.85}$$

Но тогда из (2.82) получим равенства

$$v = 3X_3 + 4X_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.86}$$

$$u = w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{2.87}$$

2.29. Пример. Вычислительная задача. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы:

$$x_1(t) = -1 + 3t + 2t^2, \quad x_2(t) = 2t + 3t^2, \quad x_3(t) = -1 + 7t + 8t^2,$$

Используя метод Гаусса, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3)$; найти $\dim L(x_1, x_2, x_3)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3 по найденному базису.

Решение. Семейство

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = t^2$$

образует базис в $P_2(\mathbb{R})$. Полиномы x_1, x_2 и x_3 можно разложить по этому базису следующим образом:

$$x_1(t) = \mathbf{E} \cdot X_1, \quad x_2(t) = \mathbf{E} \cdot X_2, \quad x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3, \tag{2.88}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

Составим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ X_3^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{2.90}$$

Методом Гаусса найдем базисный минор матрицы A. Вычитая из третьей строчки матрицы первую строчку получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{2.91}$$

Последняя матрица имеет базисный минор, расположенный на пересечении первых строк и первых двух столбцов. Кроме того, имеем

$$X_2^T = \frac{1}{2}(X_3^T - X_1^T) \Leftrightarrow X_2 = \frac{1}{2}(X_3 - X_1) \Leftrightarrow X_3 = X_1 + 2X_2. \tag{2.92}$$

Поэтому в силу (2.88) и (2.92) имеем

$$x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3 = \mathbf{E} \cdot (X_1 + 2X_2) = \mathbf{E} \cdot X_1 + 2\mathbf{E} \cdot X_2 = x_1(t) + 2x_2(t). \tag{2.93}$$

Следовательно, базис в $L(x_1, x_2, x_3)$ образуют полиномы $x_1(t)$, $x_2(t)$ и, стало быть, $\dim L(x_1, x_2, x_3) = 2$. А разложение по базису с учетом (2.93) имеет вид

$$x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2, \quad x_2 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2, \quad x_3 = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2.$$

2.30. Пример. Вычислительная задача. Для каждого $p \in \mathbb{R}$ исследовать на совместность неоднородную СЛАУ, заданную расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+p & 1+p & 0 \\ p & 1 & -p \end{array}\right). \tag{2.94}$$

Найти общее решение во всех случаях, когда система совместна.

Решение. Вычислим определитель основной матрицы и получим, что он равен нулю при $p = 1$ и при $p = -1$. Рассмотрим соответствующие случаи.

Случай 1. $p = 1$. В этом случае расширенная матрица (2.94) примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

т.е. система не совместна.

Случай 2. $p = -1$. В этом случае расширенная матрица (2.94) примет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Общее решение имеет следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ -1 + t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Случай 3. $p \neq 1$ *и* $p \neq -1$. Тогда решая СЛАУ с расширенной матрицей(2.94), получим, что

$$X = \begin{pmatrix} p/(1-p) \\ -p/(1-p) \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 3

Линейные формы

1. Линейные формы и линейные функционалы

3.1. Определение. *Линейной формой* называется функция $f(x)$, определенная на конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, со значениями в числовом поле $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$:

$$f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$$

и обладающая свойством линейности:

$$f(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 f(x_1) + \alpha^2 f(x_2) \tag{3.1}$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$. *Линейным функционалом* называется функция $f(x)$, определенная на бесконечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$, со значениями в числовом поле $\mathbb{K}$, удовлетворяющая свойству линейности (3.1).

3.2. Иногда линейные формы называют *ковекторами*.

3.3. В этом определении мы использовали обозначение $f(x)$ для значения линейной формы f на векторе x линейного пространства $\mathcal{L}$. Это обозначение не очень удобно в дальнейшем при рассмотрении так называемых обобщенных функций, к которым относится, наверное, вам уже известная δ–функция Дирака. Поэтому ниже мы будем использовать такое обозначение для результата применения линейной формы f к вектору $x \in \mathcal{L}$:

$$\langle f, x \rangle. \tag{3.2}$$

Используемое обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ носит название *скобок двойственности* или *угловых скобок*. Не путайте их со скалярным произведением в евклидовом или в унитарном пространствах, которое мы рассмотрим ниже и для которого мы будем использовать другое обозначение (y, x). В обозначении (3.2) свойство линейности (3.1) примет следующий вид:

$$\langle f, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \rangle = \alpha^1 \langle f, x_1 \rangle + \alpha^2 \langle f, x_2 \rangle \tag{3.3}$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$.

3.4. Пример. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$ и $x \in \mathcal{L}$. Запишем разложение вектора x по введенному базису:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \tag{3.4}$$

где мы пользуемся обозначением Эйнштейна (по индексу $i \in \overline{1,n}$ предполагается суммирование). Рассмотрим следующую числовую функцию:

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle \stackrel{def:}{=} x^j, \tag{3.5}$$

где x^j — j–ая координата в разложении по базису (3.4) вектора $x \in \mathcal{L}$. Проверим, что $\mathbf{e}^j$ есть линейная форма. Действительно, пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и справедливы следующие разложения по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad y = y^i \cdot \mathbf{e}_i, \tag{3.6}$$

причем

$$(\alpha \cdot x + \beta \cdot y)^i \mathbf{e}_i = \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha x^i \cdot \mathbf{e}_i + \beta y^i \cdot \mathbf{e}_i = (\alpha x^i + \beta y^i) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{3.7}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^j, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \rangle = (\alpha \cdot x + \beta \cdot y)^j = \alpha x^j + \beta y^j = \alpha \langle \mathbf{e}^j, x \rangle + \beta \langle \mathbf{e}^j, y \rangle.$$

Следовательно, $\mathbf{e}^j$ — линейная форма.

3.5. Пример. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ с вещественными коэффициентами рассмотрим следующее отображение:

$$\langle f_{t_0}, p \rangle := p(t_0), \tag{3.8}$$

которое сопоставляет произвольному полиному $p(t) \in P^n$ его значение в некоторой фиксированной точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Докажем, что f_{t_0} является линейной формой.

$\triangle$ Действительно, пусть $p(t), q(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle f_{t_0}, \alpha p + \beta q \rangle = (\alpha p(t) + \beta q(t))(t_0) = \alpha p(t_0) + \beta q(t_0) = \\ = \alpha \langle f_{t_0}, p \rangle + \beta \langle f_{t_0}, q \rangle. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

3.6. Пример. Для любого полинома $q(t)$ отображение, определенное на P^n следующим образом:

$$\langle f_q, p \rangle := \int\limits_0^1 q(t) p(t)\, dt$$

является линейной формой, если определенный интеграл понимается в смысле Римана или Лебега.

$\triangle$ Действительно, для любых $p(t), g(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$\langle f_q, \alpha p + \beta g \rangle = \int\limits_0^1 q(t) \left[\alpha p(t) + \beta q(t)\right] \, dt =$$

$$= \alpha \int\limits_0^1 q(t) p(t) \, dt + \beta \int\limits_0^1 q(t) g(t) \, dt = \alpha \langle f_q, p \rangle + \beta \langle f_q, g \rangle. \quad \boxtimes \tag{3.9}$$

3.7. Пример. Бесконечномерное пространство $\mathbb{C}[0,1]$**.** Прежде всего заметим, что в линейном пространстве полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$, для которого используется обозначение P^n базисом является следующее семейство полиномов $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ (докажите сами!), причем для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $P^n \subset \mathbb{C}[0,1]$, где $\mathbb{C}[0,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций. Следовательно, линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является бесконечномерным.

Для любой непрерывной функции $g(t) \in \mathbb{C}[0,1]$ определим линейный функционал над линейным пространством $\mathbb{C}[0,1]$:

$$\langle f_g, x(t) \rangle := \int\limits_0^1 g(t) x(t) \, dt,$$

линейность которого доказывается точно также как и в (3.9).

3.8. Пример. δ**–функция Дирака.** Эта функция определяется следующим образом:

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

и определен этот линейный функционал над линейным пространством основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, построение которого далеко выходит за рамки нашего курса. Заметим, что действие δ–функции на основных функций <u>нельзя записывать</u> в виде интеграла Римана (и даже в виде интеграла Лебега):

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \phi(x) \, dx, \quad \delta(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad x = 0; \\ 0, & \text{если} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Эта запись неверна.

3.9. Определение. Линейные формы f и g называются равными, и пишут $f = g$, если для всех векторов $x \in \mathcal{L}$ имеет место равенство

$$\langle f, x\rangle = \langle g, x\rangle.$$

3.10. Пример. Показать, что две линейные формы f_1 и f_2, заданные на линейном пространстве полиномов P^2 степени не выше 2, равенствами

$$\langle f_1, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} g_1(t)p(t)\,dt, \quad \langle f_2, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} g_2(t)p(t)\,dt, \tag{3.10}$$

совпадают, если $g_1(t) - g_2(t) = 5t^3 - 3t$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle f_1 - f_2, p\rangle = \int\limits_{-1}^{1} [g_1(t) - g_2(t)]p(t)\,dt = \int\limits_{-1}^{1} [5t^3 - 3t][a_0 + a_1 t + a_2 t^2]\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [a_0 5t^3 + a_1 5t^4 + 5a_2 t^5 - 3a_0 t - 3a_1 t^2 - 3a_2 t^3]\,dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} [a_1 5t^4 - 3a_1 t^2]\,dt = a_1[2 - 2] = 0,$$

поскольку

$$\int\limits_{-1}^{1} t^n\,dt = 0 \quad \text{для любого нечетного} \quad n \in \mathbb{N}. \quad \boxtimes$$

3.11. Лемма. Всякая линейная форма $f : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ однозначно определяется своими значениями $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на векторах базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть линейная форма f задана. Тогда однозначно определены ее значения $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на элементах базиса. Обратно. Пусть заданы значения формы $\langle f, \mathbf{e}_i\rangle$ на элементах базиса. Рассмотрим разложение элемента $x \in \mathcal{L}$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i \Rightarrow \langle f, x\rangle = \langle f, x^i \cdot \mathbf{e}_i\rangle = x^i \langle f, \mathbf{e}_i\rangle.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы. □

2. Сопряженное линейное пространство

3.12. Определение. Суммой линейных форм f и g называется отображение $h : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, определяемое равенством

$$\langle h, x\rangle \stackrel{def:}{=} \langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

3.13. Определение. Произведением линейной формы f на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется отображение $l : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$, для всех векторов $x \in \mathcal{L}$ определяемое равенством

$$\langle l, x\rangle \stackrel{def:}{=} \alpha\langle f, x\rangle.$$

Обозначение. $l = \alpha \cdot f$.

3.14. Лемма. Сумма линейных форм и произведение линейной формы на число являются линейными формами.

Доказательство. Шаг 1. Линейность суммы форм. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ — произвольны и $h = f + g$. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}\langle h, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = \langle f, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle + \langle g, \alpha x + \beta y\rangle = \\ = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle + \alpha\langle g, x\rangle + \beta\langle g, y\rangle = \\ = \alpha(\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle) + \beta(\langle f, y\rangle + \langle g, y\rangle) = \alpha\langle h, x\rangle + \beta\langle h, y\rangle.\end{aligned}$$

Шаг 2. Линейность произведения формы на число. Пусть $l = \gamma \cdot f$.

$$\begin{aligned}\langle l, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = \gamma\langle f, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = \gamma(\alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, y\rangle) = \\ = \gamma\alpha\langle f, x\rangle + \gamma\beta\langle f, y\rangle = \alpha\gamma\langle f, x\rangle + \beta\gamma\langle f, y\rangle = \alpha\langle l, x\rangle + \beta\langle l, y\rangle.\end{aligned}$$

□

3.15. Определение. Нулевой формой θ^* называется отображение, сопоставляющая любому вектору $x \in \mathcal{L}$ нуль поля $0 \in \mathbb{K}$:

$$\langle \theta^*, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

3.16. Лемма. Нулевая форма θ^* является линейной.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle \theta^*, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha\langle \theta^*, x\rangle + \beta\langle \theta^*, y\rangle.$$

□

3.17. Теорема. *Множество всех линейных форм с введенными законами сложения* 3.12 *и умножения на числа* 3.13 *является линейным пространством.*

Доказательство. Пусть f, g, h — произвольные линейные формы и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольные числа. Проверим все аксиомы линейного пространства.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle f + g, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle g, x \rangle = \langle g, x \rangle + \langle f, x \rangle = \langle g + f, x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + g = g + f$.

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (f + g) + h, x \rangle = \langle f + g, x \rangle + \langle h, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle g, x \rangle + \langle h, x \rangle = \\ = \langle f, x \rangle + \langle g + h, x \rangle = \langle f + (g + h), x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + (g + h) = (f + g) + h$.

Шаг 3. Нулевая форма. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 3.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle f + \theta^*, x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle \theta^*, x \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + \theta^* = f$.

Шаг 4. Существование противоположного элемента. Определим противоположный элемент f' к линейной форме f следующим образом:

$$\langle f', x \rangle \stackrel{def:}{=} -\langle f, x \rangle.$$

Тогда для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие равенства:

$$\langle f + f', x \rangle = \langle f, x \rangle + \langle f', x \rangle = 0 = \langle \theta^*, x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $f + f^{'} = \theta^*$.

Шаг 5. Свойство $1 \in \mathbb{K}$. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 3.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle 1 \cdot f, x \rangle = 1 \langle f, x \rangle = \langle f, x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $1 \cdot f = f$.

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 3.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (\alpha\beta) \cdot f, x \rangle = (\alpha\beta) \langle f, x \rangle = \alpha \langle \beta \cdot f, x \rangle = \langle \alpha \cdot (\beta \cdot f), x \rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$.

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения элементов. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 3.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle \alpha \cdot (f+g), x\rangle = \alpha\langle f+g, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \alpha\langle g, x\rangle = \\ = \langle \alpha \cdot f, x\rangle + \langle \alpha \cdot g, x\rangle = \langle \alpha \cdot f + \alpha \cdot g, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $\alpha \cdot (f+g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Для всех $x \in \mathcal{L}$ с учетом определения 3.15 справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle (\alpha+\beta) \cdot f, x\rangle = (\alpha+\beta)\langle f, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle + \beta\langle f, x\rangle = \\ = \langle \alpha \cdot f, x\rangle + \langle \beta \cdot f, x\rangle = \langle \alpha \cdot f + \beta \cdot f, x\rangle.$$

Поэтому в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к выводу о том, что $(\alpha+\beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$. □

3.18. Определение. Линейное пространство всех линейных форм на линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется сопряженным к $\mathcal{L}$ линейным пространством и обозначается символом $\mathcal{L}^*$.

3.19. Лемма. Для произвольных $f \in \mathcal{L}^*$, $x \in \mathcal{L}$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$\langle \alpha \cdot f, x\rangle = \alpha\langle f, x\rangle = \langle f, \alpha \cdot x\rangle. \tag{3.11}$$

Доказательство. Здесь нужно воспользоваться определением умножения линейной формы на числа и линейностью формы $f \in \mathcal{L}^*$. □

3.20. Теорема. *Пусть* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — *базис в* $\mathcal{L}$. *Набор форм* $\{\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n\}$, *действующих по правилу*

$$\langle \mathbf{e}^j, x\rangle = x^j, \tag{3.12}$$

где $x = x^j \cdot \mathbf{e}_j$, *образуют базис сопряженного пространства* $\mathcal{L}^*$.

Доказательство. Полнота. Пусть $f \in \mathcal{L}^*$ и $x \in \mathcal{L}$ — произвольны. Тогда с учетом леммы 3.19 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f, x\rangle = \langle f, x^j \cdot \mathbf{e}_j\rangle = x^j\langle f, \mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}^j, x\rangle\langle f, \mathbf{e}_j\rangle = \langle\langle f, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j, x\rangle.$$

Поскольку последнее равенство должно быть выполнено для всех $x \in \mathcal{L}$, то в силу определения 3.9 равенства линейных форм приходим к равенству

$$f = \langle f, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j,$$

т.е. набор $\{\mathbf{e}^1, \dots \mathbf{e}^n\}$ полный.

Линейная независимость. Прежде всего заметим, что

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \delta_i^j,$$

Пусть

$$\alpha_j \cdot \mathbf{e}^j = \theta^*. \tag{3.13}$$

Применим обе части равенства (3.13) к $\mathbf{e}_i$ и получим следующие равенства:

$$\alpha_i = \alpha_j \delta_i^j = \alpha_j \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \alpha_j \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \theta^*, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, набор $\{\mathbf{e}^1, \dots \mathbf{e}^n\}$ линейно независим в $\mathcal{L}^*$.

Таким образом, с учетом полноты этого семейства ковекторов они образуют базис в $\mathcal{L}^*$. □

3.21. Следствие. *Справедливо равенство* $\dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}$.

3.22. Определение. Построенный в теореме 3.20 базис $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}^*$ называется взаимным к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

3.23. Лемма. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\} \in \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливо следующее равенство:

$$x = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j. \tag{3.14}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j.$$

□

3.24. Лемма. Взаимный базис $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ однозначно определяется базисом $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть существуют два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^n\}$ для данного базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$, которые определяются равенствами

$$\langle \mathbf{e}^j, x \rangle = x^j = \langle \mathbf{f}^j, x \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Таким образом,

$$\langle \mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Значит, из определения 3.9 равенства линейных форм получаем, что

$$\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n}.$$

□

3. Линейные формы над P^n

3.25. Над линейным пространством P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим формы, определенные следующим образом:

$$D_t^{(s)} : P^n \to \mathbb{R}, \quad \langle D_t^{(s)}, p(t)\rangle := p^{(s)}(0), \quad s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{3.15}$$

где индексом s мы указываем порядок производной $D_t^{(s)}$ по переменной t.

3.26. Лемма. Формы $D_t^{(s)} \in (P^n)^*$, т.е. являются линейными.

Доказательство. Пусть $p(t), q(t) \in P^n$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\langle D_t^{(s)}, \alpha p(t) + \beta q(t)\rangle = (\alpha p(t) + \beta q(t))^{(s)}(0) =$$
$$= \alpha p^{(s)}(0) + \beta q^{(s)}(0) = \alpha\langle D_t^{(s)}, p(t)\rangle + \beta\langle D_t^{(s)}, q(t)\rangle.$$

□

3.27. Лемма. Набор линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$ образуют базис линейного пространства $(P^n)^*$.

Доказательство. Шаг 1. Линейная независимость. Рассмотрим линейную комбинацию этих линейных форм

$$\alpha_0 D_t^{(0)} + \alpha_1 D_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n D_t^{(n)} = \theta^*. \tag{3.16}$$

Применим обе части этого равенства к полиному t^k при $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и получим следующие равенства:

$$\langle \alpha_0 D_t^{(0)} + \alpha_1 D_t^{(1)} + \cdots + \alpha_n D_t^{(n)}, t^k\rangle = \langle \theta^*, t^k\rangle = 0, \tag{3.17}$$

Справедливы следующие выражения:

$$\langle D_t^{(j)}, t^k\rangle = k(k-1)\cdots(k-j+1)t^{k-j}\Big|_{t=0} = 0, \quad j \in [0, k-1], \tag{3.18}$$

$$\langle D_t^{(k)}, t^k\rangle = k!, \tag{3.19}$$

$$\langle D_t^{(j)}, t^k\rangle = 0, \quad j \in [k+1, n]. \tag{3.20}$$

Таким образом, из (3.17) с учетом (3.18)–(3.20) получим равенство

$$\alpha_k k! = 0 \quad \text{для} \quad k = \overline{0, n}.$$

Итак, равенство (3.16) возможно тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е. семейство линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\} \in (P^n)^*$ линейно независимо.

Шаг 2. Базис. Из следствия 3.21 вытекает, что

$$\dim P^n = \dim (P^n)^*.$$

При этом, как нам уже известно, $\dim P^n = n+1$. Но линейно независимый набор $D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}$ состоит из $n+1$ элементов, т.е. этот набор образует базис в $(P^n)^*$. $\square$

3.28. Лемма. Набор линейных форм $\{D_t^{(0)}, \ldots, D_t^{(n)}\}$ является взаимным базисом в $(P^n)^*$ к базису $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n.

Доказательство. Шаг 1. Линейная независимость. Прежде всего докажем, что набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ образует базис линейного пространства P^n. Действительно, рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \alpha_n \frac{t^n}{n!} = \theta. \tag{3.21}$$

Из этого равенства при $t = 0$ получим равенство $\alpha_0 = 0$. Дифференцируя это равенство в точке $t = 0$ получим $\alpha_1 = 0$. Продолжая дифференцировать, мы получим в итоге равенства $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Итак, набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ образует линейно независимое семейство в линейном пространстве P^n.

Шаг 2. Полнота. Пусть $p(t) \in P^n$. Справедливы следующие равенства:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n = \\ = a_0 1 + a_1 \frac{t}{1} + a_2 2! \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n n! \frac{t^n}{n!} \tag{3.22}$$

Из равенства (3.22) вытекает, что набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ полон в P^n. Таким образом, из первых двух шагов данного доказательства вытекает, что набор $\{1, t, t^2/2, \ldots, t^n/n!\}$ образует базис в P^n.

Шаг 3. Взаимный базис. С учетом равенств (3.18)–(3.20) мы приходим к следующему выражению:

$$\left\langle D_t^{(j)}, p(t) \right\rangle = \delta^{jk} \left\langle D_t^{(k)}, a_k \frac{t^k}{k!} \right\rangle = a_k \delta^{jk}, \tag{3.23}$$

где δ^{jk} — символ Кронекера и

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}$$

и в частности,

$$\left\langle D_t^{(j)}, \frac{t^k}{k!} \right\rangle = \delta^{jk}.$$

Отсюда и в силу результата леммы 3.27 приходим к выводу о том, что набор $\{D_t^{(0)}, \dots, D_t^{(n)}\}$ — это взаимный базис в $(P^n)^*$ к базису $\{1, t, t^2/2, \dots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n. $\square$

3.29. Можно получить разложение полинома $p(t) \in P^n$ не пользуясь формулой Тейлора, а только фактом, что базис $\{D_t^{(0)}, \dots, D_t^{(n)}\} \subset (P^n)^*$ является взаимным к базису $\{1, t, t^2/2, \dots, t^n/n!\}$ линейного пространства P^n. Действительно, справедлива следующая лемма:

3.30. Лемма. Всякий полином $p(t) \in P^n$ разлагается по базису $\{1, t, t^2/2, \dots, t^n/n!\}$ согласно формуле

$$p(t) = p(0) + p'(0)t + p''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots + p^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}. \tag{3.24}$$

Доказательство. В силу результата леммы 3.28 и равенства (3.14) мы приходим к выводу о том, что справедливо следующее равенство:

$$x = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \cdot \mathbf{e}_j, \tag{3.25}$$

в котором нужно положить

$$x = p(t) \in P^n, \quad \mathbf{e}^j = D_t^{(j)}, \quad \mathbf{e}_j = \frac{t^j}{j!} \tag{3.26}$$

и в результате получим равенство

$$p(t) = \sum_{j=0}^{n} \langle D_t^{(j)}, p(t) \rangle \frac{t^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} p^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}. \tag{3.27}$$

$\square$

ГЛАВА 4

Линейные операторы

1. Преобразование базисов и координат

4.1. Прежде всего введем (или напомним) обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всех лекций. Прежде всего укажем, что для матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, т.е. состоящей из m строк и n столбцов используются три формы записи для элементов матрицы. Первая запись — a^j_k, вторая форма — a_{jk}, и, наконец, третья форма a^{jk}, где $j \in \overline{1,m}$ нумерует строчки матрицы, $k \in \overline{1,n}$ — нумерует столбцы матрицы, на пересечении которых находится соответствующий элемент из поля $\mathbb{K}$.

4.2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ — две произвольные матрицы. С учетом введенных обозначений в пункте 4.1, произведение $C = A\cdot B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ в обозначениях Эйнштейна можно записать следующими шестью способами:

$$c^j_k = a^j_s b^s_k, \quad c_{jk} = a_{js} b_{sk}, \quad c^j_k = a^j_s b_{sk}, \quad c_{jk} = a_{js} b^s_k,$$
$$c^{jk} = a^{js} b^{sk}, \quad c^{jk} = a^{js} b^s_k.$$

Запишем эти суммы произведений в матричных формах записи.

$$c^j_k = a^j_s b^s_k = (a^j_1, \ldots, a^j_p)\begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js} b_{sk} = (a_{j1}, \ldots, a_{jp})\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^j_k = a^j_s b_{sk} = (a^j_1, \ldots, a^j_p)\begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js} b^s_k = (a_{j1}, \dots a_{jp}) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js} b^{sk} = (a^{j1}, \dots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js} b^s_k = (a^{j1}, \dots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix}.$$

4.3. Теперь мы сделаем очень важное замечание об обозначениях. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда для обозначения новых базисов мы будем использовать «штрихованные индексы». Например,

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}, \ \{\mathbf{e}_{1''}, \dots, \mathbf{e}_{n''}\} \text{ и так далее.}$$

Отметим, что в вычислениях для обозначения нового базиса лучше использовать другую букву, например, новый базис можно обозначить так: $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$. Мы, кстати говоря, в дальнейшем тоже будем использовать такое обозначение для нового базиса.

4.4. Итак, пусть нам заданы старый базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Разложим новый базис по старому и для этого разложения будем использовать матрицу $(c^i_{i'})^n_{n'}$, причем натуральные числа n и n' равны. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}_{1'} = c^1_{1'} \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c^n_{1'} \cdot \mathbf{e}_n, \tag{4.1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{4.2}$$

$$\mathbf{e}_{n'} = c^1_{n'} \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + c^n_{n'} \cdot \mathbf{e}_n. \tag{4.3}$$

В обозначениях Эйнштейна формулы (4.1)–(4.3) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{4.4}$$

Последнее равенство, записанное в координатной форме, можно представить в матричной форме записи:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), \tag{4.6}$$

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Из формул (4.5)–(4.7), пользуясь правилом умножения матриц «строчка на столбец», легко получаются равенства (4.1)–(4.3). Для квадратной матрицы C справедлива следующая лемма:

4.5. Лемма. $\det C \neq 0$.

Доказательство. Пусть противное и квадратная матрица C перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{E}'$ вырождена: $\det C = 0$. Тогда столбцы матрицы C линейно зависимы:

$$\alpha^{1'} C_{1'} + \cdots + \alpha^{n'} C_{n'} = O \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad C = \|C_{1'}, C_{2'}, \ldots, C_{n'}\|, \tag{4.8}$$

где числа $\alpha^{1'}, \ldots, \alpha^{n'}$ одновременно в нуль не обращаются. Согласно правилу умножения «строчка на столбец» из равенства (4.5) получаем равенство

$$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{E} \cdot C_{i'}, \quad i' \in \overline{1', n'}. \tag{4.9}$$

В обозначениях Эйнштейна справедливы следующие равенства:

$$\alpha^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'} = \alpha^{i'} \cdot (\mathbf{E} \cdot C_{i'}) = \mathbf{E} \cdot \left(\alpha^{i'} C_{i'}\right) = \mathbf{E} \cdot O = \theta.$$

Таким образом, семейство $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейно зависимо, что противоречит тому, что это семейство образует базис. Значит, $\det C \neq 0$. □

4.6. С одной стороны, из результата леммы 4.5 и из равенства (4.5) вытекает равенство

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' \cdot C^{-1}. \tag{4.10}$$

Будем в дальнейшем использовать следующее обозначение:

$$C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n.$$

С другой стороны, из равенства (4.4) в наших обозначениях (штрихованные индексы) вытекает обратное равенство

$$\mathbf{e}_i = c^{i'}_i \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{4.11}$$

Из сравнения (4.10) с (4.11) приходим к выводу о том, что

$$C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \cdots & c^{1'}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n'}_1 & \cdots & c^{n'}_n \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$C \cdot C^{-1} = I, \quad C^{-1} \cdot C = I \Leftrightarrow \boxed{c^i_{i'} c^{i'}_j = \delta^i_j,} \quad \boxed{c^{i'}_i c^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}.}$$

Сделаем еще одно замечание. Если вы захотите записать транспонированную к матрице C, определенной равенством (4.7), то нельзя переставлять местами индексы. Транспонированной к матрице C является следующая матрица:

$$C^T = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^n_{1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^1_{n'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}, \quad \text{а не матрица} \quad \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \cdots & c^{n'}_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{1'}_n & \cdots & c^{n'}_n \end{pmatrix}.$$

4.7. Мы получили формулы (4.4) и (4.11) перехода от одного базиса линейного пространства к другому базису. Теперь наша задача выяснить как при переходе к другому базису преобразуются координаты векторов линейного пространства.

4.8. Действительно, пусть $x \in \mathcal{L}$ — это произвольных вектор. Тогда с учетом равенства (4.4) и линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (базиса в $\mathcal{L}$) справедливы следующие равенства:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k = x^{k'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = x^{k'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^k - c^k_{k'} x^{k'}) \cdot \mathbf{e}_k = \theta \Leftrightarrow \boxed{x^k = c^k_{k'} x^{k'}.} \tag{4.13}$$

Кроме того, имеем

$$x = x^{k'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = x^k \cdot \mathbf{e}_k = x^k c^{k'}_k \cdot \mathbf{e}_{k'} \Rightarrow \boxed{x^{k'} = c^{k'}_k x^k.} \tag{4.14}$$

Аналогичные рассуждения можно провести в матричной форме записи. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Из (4.15) с учетом (4.5) приходим к следующей цепочке выражений:

$$\mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot C \cdot X_{e'} \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot (X_e - C \cdot X_{e'}) = \theta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{X_e = C \cdot X_{e'},\ X_{e'} = C^{-1} \cdot X_e.} \tag{4.16}$$

Сравним теперь законы преобразования базисов и координат:

$$\boxed{\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k, \quad x^{k'} = c^{k'}_k x^k} \tag{4.17}$$

или

$$\boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E} \cdot C, \quad X_{e'} = C^{-1} \cdot X_e.} \tag{4.18}$$

Мы видим, что закон преобразования базисов отличается от закона преобразования координат вектора линейного пространства при переходе от старого базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ к новому базису $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$.

4.9. Определение. Закон преобразования базиса линейного пространства $\mathcal{L}$ при переходе от старого базиса к новому базису называется *ковариантным*, а соответствующий закон преобразования координат вектора линейного пространства называется *контравариантным*.

4.10. Лемма. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, причем $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$, связанный со старым соотношением

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i.$$

Тогда

$$\mathbf{e}^{j'} = c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{E}}' = C^{-1} \cdot \hat{\mathbf{E}} \tag{4.19}$$

— взаимный базис к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, где

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{n'} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, имеем

$$\mathbf{e}^j = c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} \quad \text{или} \quad \hat{\mathbf{E}} = C \cdot \hat{\mathbf{E}}'. \tag{4.20}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{L}$. Тогда имеем

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'}, \tag{4.21}$$

$$x^{j'} = c^{j'}_j x^j = c^{j'}_j \langle \mathbf{e}^j, x \rangle = \langle c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j, x \rangle. \tag{4.22}$$

Взаимный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\} \subset \mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\} \subset \mathcal{L}$ однозначно определяется равенствами

$$\langle \mathbf{e}^{j'}, x \rangle := x^{j'}, \quad x = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'}.$$

Значит, отсюда и из (4.22) приходим к выводу о том, что

$$\mathbf{e}^{j'} = c^{j'}_{j} \cdot \mathbf{e}^{j}, \quad j' = \overline{1', n'}$$

— есть взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$.

Используя наше правило умножения «строчка на столбец» получаем матричную форму записи. □

4.11. Лемма. Справедливы следующие формулы преобразования координат линейной формы $f \in \mathcal{L}^*$:

$$f_j = f_{j'} c^{j'}_{j}, \quad f_{j'} = f_j c^{j}_{j'}, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^{j}, \quad f = f_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} \tag{4.23}$$

или

$$F_{e'} = F_e \cdot C, \quad F_e = F_{e'} \cdot C^{-1}, \tag{4.24}$$

$$F_e = (f_1, \ldots, f_n), \quad F_{e'} = (f_{1'}, \ldots, f_{n'}).$$

Доказательство. С учетом (4.19) справедливы следующие равенства:

$$f = f_j \cdot \mathbf{e}^j = f_{j'} \cdot \mathbf{e}^{j'} = f_{j'} c^{j'}_{j} \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow f_j = f_{j'} c^{j'}_{j}.$$

Меняя местами j и j', получим равенство

$$f_{j'} = f_j c^{j}_{j'}.$$

Следовательно, равенства (4.23) доказаны. Докажем теперь равенства (4.24). Действительно, с учетом (4.19) справедливы равенства

$$f = F_e \cdot \hat{\mathbf{E}} = F_{e'} \cdot \hat{\mathbf{E}}' = F_{e'} \cdot C^{-1} \cdot \hat{\mathbf{E}} \Rightarrow F_e = F_{e'} \cdot C^{-1}.$$

Отсюда сразу же получаем второе равенство: $F_{e'} = F_e \cdot C$. Тем самым, равенства (4.24) доказаны. □

4.12. Из результатов лемм 4.10 и 4.11 вытекает, что взаимный базис при переходе к новому базису преобразуется контравариантным образом, а координаты линейной формы при переходе к новому базису преобразуется ковариантным образом.

4.13. Из полученных формул преобразования координат вектора и координат ковектора вытекает общее правило. Пусть у нас имеется один из этих объектов a_i, $a_{i'}$, a^i и $a^{i'}$, то преобразуются эти объекты следующим образом:

$$a_i = c^{i'}_{i} a_{i'}, \quad a_{i'} = c^{i}_{i'} a_i, \quad a^i = c^{i}_{i'} a^{i'}, \quad a^{i'} = c^{i'}_{i} a^i.$$

Это правило позволяет не задумываться над тем как преобразуются эти объекты, а писать «машинально» правильные формулы.

2. Линейные операторы

4.14. Определение. Линейным оператором $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется однозначное отображение линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{M}$, обладающее свойством линейности

$$A(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

4.15. Определение. Множество $\{y = Ax : \ \forall x \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{M}$ называется образом оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и обозначается символом $\operatorname{im} A$.

4.16. Определение. Множество $\{x \in \mathcal{L} : \ Ax = \theta \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{L}$ называется ядром оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и обозначается символом $\ker A$.

4.17. Лемма. Множества $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ и $\ker A \subset \mathcal{L}$ являются линейными подпространствами в соответствующих линейных пространствах.

Доказательство. Шаг 1. $\operatorname{im} A$. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что

$$y_1 = Ax_1, \quad y_2 = Ax_2.$$

Докажем, что $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in \operatorname{im} A$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) \in \operatorname{im} A,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A.

Шаг 2. $\ker A$. Пусть $x_1, x_2 \in \ker A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot \theta + \alpha^2 \cdot \theta = \theta,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A. Следовательно, $\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \in \ker A$. $\square$

4.18. Определение. Линейный оператор $A : \ \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется линейным оператором в пространстве $\mathcal{L}$.

4.19. Лемма. Если $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, то как линейное отображение $A : \mathbb{K}^{n \times 1} \to \mathbb{K}^{n \times 1}$ обладает следующим свойством:

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = n = \dim \mathbb{K}^{n \times 1}. \tag{4.25}$$

Доказательство. Итак, пусть $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ и $O, X, Y \in \mathbb{K}^{n \times 1}$. Тогда

$$\operatorname{im} A = \{Y = A \cdot X, \quad \forall X \in \mathbb{K}^{n \times 1}\}, \ \ker A = \{X \in \mathbb{K}^{n \times 1} : \ A \cdot X = O\}.$$

Введем канонический базис в арифметическом пространстве $\mathbb{K}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $Y \in \operatorname{im} A$. Тогда найдется такой столбец $X \in \mathbb{K}^{n\times 1}$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

что справедливо равенство $Y = A \cdot X$. Заметим, что

$$X = x^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x^n \mathbf{e}_n.$$

Тогда имеем

$$Y = A \cdot X = A \cdot (x^k \mathbf{e}_k) = x^k A \cdot \mathbf{e}_k \in L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{im} A \subset L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n). \quad (4.26)$$

Обратно. Пусть $Y \in L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n)$. Тогда

$$Y = c^1 A\cdot\mathbf{e}_1 + \cdots + c^n A\cdot\mathbf{e}_n = A\cdot(c^k \mathbf{e}_k) = A\cdot Z, \quad Z = c^k \mathbf{e}_k \Rightarrow Y \in \operatorname{im} A.$$

Итак, $\operatorname{im} A = L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n)$. Заметим, что

$$A \cdot \mathbf{e}_1 = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_1$$

и в общем случае получаем, что

$$A \cdot \mathbf{e}_j = A_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Следовательно,

$$L(A \cdot \mathbf{e}_1, \ldots, A \cdot \mathbf{e}_n) = L(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Пусть $\operatorname{rk} A = r$. Тогда, с одной стороны,

$$r = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \dim \operatorname{im} A.$$

С другой стороны, $\ker A$ состоит из всех решений однородной линейной однородной системы уравнений $A \cdot X = O$ и только из них. Базис пространства решений состоит из $n - r$ столбцов. Следовательно, имеем

$$\dim \operatorname{im} A + \dim \ker A = r + (n - r) = n = \dim \mathbb{K}^{n\times 1}.$$

$\square$

4.20. Определение. Операторы $A, B: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называются равными, если $Ax = Bx$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

4.21. Пример. Оператор I в пространстве $\mathcal{L}$, определяемый равенством $Ix = x$ для всех $x \in \mathcal{L}$, является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$I(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = \alpha^1 \cdot Ix_1 + \alpha^2 \cdot Ix_2. \quad \boxtimes$$

4.22. Определение. Оператор I называется единичным оператором.

4.23. Пример. Оператор $O: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, определяемый равенством

$$Ox = \theta \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L},$$

где θ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{M}$, является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$O(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \theta = \alpha^1 \cdot \theta + \alpha^2 \cdot \theta = \alpha^1 \cdot Ox_1 + \alpha^2 \cdot Ox_2. \quad \boxtimes$$

4.24. Определение. Оператор O называется нулевым оператором.

4.25. Пример. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ определим дифференцирование $D: P^n \to P^{n-1}$ формулой

$$Dp(t) = \frac{dp(t)}{dt}.$$

Оператор D является линейным оператором.

$\square$ Действительно, для любых $p_1(t), p_2(t) \in P^n$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$D(\alpha^1 p_1(t) + \alpha^2 p_2(t)) = \frac{d}{dt}\left(\alpha^1 p_1(t) + \alpha^2 p_2(t)\right) = \\ = \alpha^1 \frac{dp_1(t)}{dt} + \alpha^2 \frac{dp_2(t)}{dt} = \alpha^1 Dp_1(t) + \alpha^2 Dp_2(t). \quad \boxtimes$$

4.26. Пример. Зададим отображение $A: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ следующим образом:

$$Y = A \cdot X, \tag{4.27}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}.$$

Отображение A является линейным.

□ Действительно, для любых $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу свойств сложения матриц и умножения матриц на числа справедливы равенства

$$A \cdot (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 A \cdot X_1 + \alpha^2 A \cdot X_2. \quad \boxtimes$$

3. Матрица линейного оператора

4.27. Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$, т.е.

$$A:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

Для того чтобы задать линейный оператор A нам нужно знать его значение Ax на каждом $x \in \mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение вектора $x \in \mathcal{L}$ по этому базису

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j.$$

В силу линейности оператора A имеют место следующие равенства:

$$A(x) = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j). \tag{4.28}$$

Отсюда приходим к выводу о том, что для того чтобы задать линейный оператор, необходимо и достаточно, задать его значения на базисе рассматриваемого линейного пространства $\mathcal{L}$.

4.28. Разложим теперь $A\mathbf{e}_j$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a_j^k \cdot \mathbf{e}_k \tag{4.29}$$

или в матричной форме (используя правило умножения матриц «строчка на столбец»)

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

4.29. Определение. Матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

называется матрицей линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

4.30. Рассмотрим уравнение

$$y = Ax, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j,$$

из которого получаем равенства

$$y^k \cdot \mathbf{e}_k = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = x^j a^k_j \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow y^k = a^k_j x^j$$

или в матричной форме

$$\boxed{Y_e = A_e \cdot X_e,} \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

4.31. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$ с матрицей перехода $C = (c^j_{j'})^n_{n'}$ от старого базиса к новому:

$$\mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j.$$

Пусть A_e — матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $A_{e'}$ — в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Справедлива следующая теорема:

4.32. Теорема. *Имеют место равенства*

$$\boxed{A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C} \quad \text{или} \quad \boxed{a^{k'}_{j'} = c^j_{j'} c^{k'}_k a^k_j.} \tag{4.33}$$

Доказательство. Первый способ. Используя формулы связывающие элементы старого и нового базисов, приходим к следующим равенствам:

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = a^{k'}_{j'} \cdot \mathbf{e}_{k'} = a^{k'}_{j'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k, \tag{4.34}$$

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = A(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j) = c^j_{j'} \cdot A(\mathbf{e}_j) = c^j_{j'} a^k_j \cdot \mathbf{e}_k. \tag{4.35}$$

Из (4.34) и (4.35) вытекает равенство

$$a^{k'}_{j'} c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k = c^j_{j'} a^k_j \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow a^{k'}_{j'} c^k_{k'} = c^j_{j'} a^k_j \tag{4.36}$$

или переставляя множители, получим равенство

$$c^k_{k'} a^{k'}_{j'} = a^k_j c^j_{j'} \tag{4.37}$$

или в матричной форме

$$C \cdot A_{e'} = A_e \cdot C \Leftrightarrow A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C. \tag{4.38}$$

Из полученной формулы (4.38) вытекает следующая цепочка равенств:

$$a^{k'}_{j'} = \{A_{e'}\}^{k'}_{j'} = \{C^{-1}\}^{k'}_k \{A_e \cdot C\}^k_{j'} = c^{k'}_k a^k_j c^j_{j'}.$$

Второй способ. Воспользуемся равенством (4.32) в старом и новом базисах:

$$Y_e = A_e \cdot X_e, \quad Y_{e'} = A_{e'} \cdot X_{e'}, \tag{4.39}$$

где

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \; X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \; Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \; Y_{e'} = \begin{pmatrix} y^{1'} \\ \vdots \\ y^{n'} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что имеют место следующие формулы:

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'}. \tag{4.40}$$

Из формул (4.39) и (4.40) вытекают следующие равенства:

$$C \cdot Y_{e'} = Y_e = A_e \cdot X_e = A_e \cdot C \cdot X_{e'} \Rightarrow C \cdot A_{e'} \cdot X_{e'} = A_e \cdot C \cdot X_{e'} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (C \cdot A_{e'} - A_e \cdot C) \cdot X_{e'} = O \Rightarrow C \cdot A_{e'} = A_e \cdot C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C,}$$

где мы воспользовались тем, что столбец $X_{e'}$ произвольный. □

4.33. Лемма. Для элементов матрицы линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ справедливо следующее выражение:

$$a_i^k = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle, \tag{4.41}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}^k, a_i^j \cdot \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j \rangle a_i^j = \delta_j^k a_i^j = a_i^k.$$

□

4.34. Пример. Рассмотрим линейное пространство P^n полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$. Выберем в этом линейном пространстве базис следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \; \mathbf{e}_2 = t, \; \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \; \ldots, \; \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{4.42}$$

Оператор дифференцирования $\hat{D}$ действует следующим образом:

$$\hat{D}\mathbf{e}_1 = \theta = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \cdots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \tag{4.43}$$

$$\hat{D}\mathbf{e}_2 = 1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \cdots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \tag{4.44}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{D}\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n = 0\mathbf{e}_1 + \cdots + 1\mathbf{e}_n + 0\mathbf{e}_{n+1}. \tag{4.45}$$

С учетом равенств (4.43)–(4.45) приходим к следующему выражению:

$$\left(\hat{D}\mathbf{e}_1, \hat{D}\mathbf{e}_2, \ldots, \hat{D}\mathbf{e}_{n+1}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.46}$$

Таким образом, матрица D линейного оператора

$$\hat{D}: \; P^n \to P^{n-1} \subset P^n$$

в рассматриваемом базисе имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

4. Линейное пространство линейных операторов

4.35. Определение. Множество всех линейных операторов $A: \; \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ будем обозначать символом $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$.

4.36. Определение. Суммой линейных операторов $A, B: \; \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется оператор $C: \; \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, действующий по правилу $Cx = Ax + Bx$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

4.37. Определение. Произведением оператора $A: \; \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$ называется оператор $D: \; \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, действующий по правилу $Dx = \alpha \cdot Ax$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

4.38. Лемма. Сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на число являются линейным операторами.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Справедливы следующие равенства:

$$C(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) + B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) =$$
$$= \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 + \alpha^1 \cdot Bx_1 + \alpha^2 \cdot Bx_2 =$$
$$= \alpha^1 \cdot (Ax_1 + Bx_1) + \alpha^2 \cdot (Ax_2 + Bx_2) = \alpha^1 \cdot Cx_1 + \alpha^2 \cdot Cx_2,$$

$$D(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha \cdot A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha\alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha\alpha^2 \cdot Ax_2 = \\ = \alpha^1\alpha \cdot Ax_1 + \alpha^2\alpha \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot D(x_1) + \alpha^2 \cdot D(x_2).$$

□

4.39. Лемма. Множество $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ является линейным пространством относительно введенных операций сложения операторов и умножения оператора на число.

Доказательство. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ — произвольные линейные операторы и $x \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Справедливы равенства

$$(A + B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B + A)x,$$

поскольку $Ax, Bx \in \mathcal{M}$, а $\mathcal{M}$ — линейное пространство и, следовательно, в нем справедливо свойство коммутативности сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$A + B = B + A.$$

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Справедливы равенства

$$((A + B) + C)x = (Ax + Bx) + Cx = Ax + (Bx + Cx) = \\ = Ax + (B + C)x = (A + (B + C))x,$$

поскольку $\mathcal{M}$ — линейное пространство и поэтому в нем справедлива ассоциативность сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Шаг 3. Свойство нулевого оператора. Справедливы равенства

$$(A + O)x = Ax + Ox = Ax + \theta = Ax.$$

Здесь мы воспользовались свойством нулевого вектора θ линейного пространства $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:

$$A + O = A.$$

Шаг 4. Существование противоположного оператора. Для линейного оператора A противоположным является линейный оператор $(-1) \cdot A$. Действительно, имеют место равенства

$$(A + (-1) \cdot A)x = Ax + (-1) \cdot Ax = (1 - 1) \cdot Ax = 0 \cdot Ax = \theta = Ox.$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью сложения векторов в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A + (-1) \cdot A = O.$$

Шаг 5. Свойство единицы. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(1 \cdot A)x = 1 \cdot Ax = Ax,$$

где мы воспользовались свойством единицы в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$1 \cdot A = A.$$

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Справедливы равенства

$$((\alpha\beta) \cdot A)x = (\alpha\beta) \cdot Ax = \alpha \cdot (\beta \cdot Ax) = (\alpha \cdot (\beta \cdot A))x,$$

где мы воспользовались свойством ассоциативности умножения на числа в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A).$$

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения операторов. Справедливы равенства

$$(\alpha \cdot (A + B))x = \alpha \cdot (A + B)x = \alpha \cdot Ax + \alpha \cdot Bx = \\ = (\alpha \cdot A)x + (\alpha \cdot B)x = (\alpha \cdot A + \alpha \cdot B)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности операции сложения векторов в $\mathcal{M}$ относительно умножения на числа. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B.$$

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Имеют место следующие равенства:

$$((\alpha + \beta) \cdot A)x = (\alpha + \beta) \cdot Ax = \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ax = (\alpha \cdot A + \beta \cdot A)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности относительно сложения чисел в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к выводу, что

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A.$$

□

4.40. Определение. Матрица $A_{ef} = (\alpha_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m \times n}$, определенная равенством

$$A\mathbf{e}_i = \alpha_i^k \cdot \mathbf{f}_k \quad \text{или} \quad (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) \cdot A_{ef}, \qquad (4.47)$$

называется матрицей линейного оператора A, где $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ — базисы соответствующих линейных пространств.

5. Алгебры операторов и матриц

4.41. В этом параграфе мы рассмотрим новую операцию — операцию умножения операторов и докажем, что операторы из линейного пространства $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ образуют ассоциативную и некоммутативную алгебру операторов с единицей. Учтем результаты предыдущего раздела в случае $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ и докажем, что алгебра операторов $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$, где $n = \dim\mathcal{L}$ и $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел, над которым определено линейное пространство $\mathcal{L}$.

4.42. Определение. Произведением линейных операторов

$$A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$$

называется оператор $C: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$Cx \stackrel{def:}{=} B(Ax) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{4.48}$$

4.43. Лемма. Оператор C — линейный, т.е. $C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда в силу линейности операторов $A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы следующие равенства:

$$C(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = B(A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)) =$$
$$= B(\alpha^1{\cdot}Ax_1{+}\alpha^2{\cdot}Ax_2) = \alpha^1{\cdot}B(Ax_1){+}\alpha^2{\cdot}B(Ax_2) = \alpha^1{\cdot}Cx_1{+}\alpha^2{\cdot}Cx_2.$$

□

4.44. Заметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

4.45. Лемма. Для любых $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы свойства дистрибутивности справа и слева

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC, \tag{4.49}$$

а также ассоциативности

$$(AB)C = A(BC). \tag{4.50}$$

Доказательство. Шаг 1. Дистрибутивность. Пусть $x \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда с учетом определения сложения операторов и произведения операторов справедливы следующие равенства:

$$(A + B)Cx = A(Cx) + B(Cx) =$$
$$= (AC)x + (BC)x = (AC + BC)x.$$

В силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Докажем второе равенство из (4.49). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A(B+C)x = A(Bx) + A(Cx) = \\ = (AB)x + (AC)x = (AB+AC)x,$$

из которого в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A(B+C) = AB + AC.$$

Ассоциативность. Справедливы равенства

$$(AB)Cx = A(B(Cx)) = A((BC)x) = A(BC)x,$$

из которых в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ вытекает равенство (4.50). □

4.46. Определение. Алгеброй над числовым полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство $\mathcal{A}$, снабженное внутренней операцией умножения $\bullet$:

$$x \bullet y : \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \tag{4.51}$$

обладающее следующим свойствами дистрибутивности слева и справа:

$$(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z, \tag{4.52}$$

$$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z \tag{4.53}$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z), \tag{4.54}$$

и коммутативной, если для любых $x, y \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$x \bullet y = y \bullet x. \tag{4.55}$$

Также говорят, что у алгебры $\mathcal{A}$ есть единица $\mathbf{e}$, если существует такой вектор $\mathbf{e} \in \mathcal{A}$, что для всех $x \in \mathcal{A}$ справедливы равенства

$$x \bullet \mathbf{e} = \mathbf{e} \bullet x = x. \tag{4.56}$$

4.47. Теорема. *Линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ является ассоциативной, некоммутативной алгеброй с единицей относительно операции умножения операторов.*

Доказательство. Утверждение является следствием лемм 4.43, 4.45. Единицей этой алгебры является единичный оператор. □

4.48. Посмотрим, что происходит с матрицами линейных операторов при произведении операторов. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Справедливы следующие равенства:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad A\mathbf{e}_i = a_i^l \cdot \mathbf{e}_l, \quad B\mathbf{e}_l = b_l^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{4.57}$$

С учетом равенств (4.57) при $C = BA$ имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} C\mathbf{e}_i = c_i^k \cdot \mathbf{e}_k = B(A\mathbf{e}_i) = B(a_i^l \cdot \mathbf{e}_l) = \\ = a_i^l \cdot B\mathbf{e}_l = a_i^l b_l^k \cdot \mathbf{e}_k = b_l^k a_i^l \cdot \mathbf{e}_k. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, то из (4.58) приходим к следующему равенству:

$$c_i^k = b_l^k a_i^l \Leftrightarrow C_e = B_e \cdot A_e, \tag{4.59}$$

где $C_e = (c_i^k)_n^n$, $A_e = (a_i^l)_n^n$ и $B_e = (b_l^k)_n^n$. Таким образом, доказана следующая лемма:

4.49. Лемма. Произведению BA операторов $A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ соответствует произведение матриц операторов в этом базисе $B_e \cdot A_e \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

4.50. В курсе «Аналитическая геометрия» фактически было доказано следующее утверждение:

4.51. Теорема. *Линейное пространство квадратных матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ является ассоциативной и некоммутативной алгеброй с единицей (единичная матрица) относительно операции умножения матриц.*

4.52. Теорема. *Алгебра операторов $L(\mathcal{L},\mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.*

Доказательство. Доказательство утверждения теоремы является следствием результатов теорем 4.47, 4.51 и лемм 4.43–4.49. Определим искомое отображение в следующем виде:

$$\phi_{\mathbf{E}}: \; L(\mathcal{L};\mathcal{L}) \to \mathbb{K}^{n\times n}, \quad n = \dim \mathcal{L}, \tag{4.60}$$

$$\phi_{\mathbf{E}}(A) = A_e, \quad A \cdot \mathbf{E} := (A\mathbf{e}_1, \cdots, A\mathbf{e}_n) = \mathbf{E} \cdot A_e,$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Отметим, что при фиксированном базисе в $\mathcal{L}$ единичный оператор при данном изоморфизме переходит в единичную матрицу. $\square$

6. Теорема об обратном операторе

4.53. Теорема. *Если* $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{M})$, *то справедливо равенство*

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}, \tag{4.61}$$

где, напомним,

$$\ker A = \{x \in \mathcal{L} : \ Ax = \theta\}, \quad \operatorname{im} A = \{y = Ax : \ \forall\, x \in \mathcal{L}\}.$$

Доказательство. Ранее в лемме 4.17 было доказано, что $\ker A \subset \mathcal{L}$ и $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ являются подпространствами в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$, соответственно. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис в $\ker A$, где $\dim \ker A = k$. Дополним это семейство векторов до базиса в $\mathcal{L}$. Пусть

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\} \tag{4.62}$$

— базис в $\mathcal{L}$. Рассмотрим теперь набор

$$\{A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n\} \subset \operatorname{im} A \subset \mathcal{M}. \tag{4.63}$$

Докажем, что этот набор линейно независим в линейном пространстве $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot A\mathbf{e}_s = \theta \Rightarrow A\left(\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot \mathbf{e}_s\right) = \theta \Rightarrow \sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \cdot \mathbf{e}_s \in \ker A.$$

Следовательно, найдутся такие числа β^j, $j = \overline{1,k}$, что

$$\alpha^{k+1} \cdot \mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \beta^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

а поскольку набор (4.62) линейно независим, то все числа

$$\alpha^{k+1} = \cdots = \alpha^n = \beta^1 = \cdots = \beta^k = 0.$$

Итак, набор (4.63) линейно независим. Докажем его полноту в $\operatorname{im} A$. Действительно, для любого $y \in \operatorname{im} A$ найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что справедливы следующие равенства:

$$y = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = A\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) =$$

$$= \theta + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \cdot A\mathbf{e}_j.$$

Итак, полнота набора (4.63) в $\operatorname{im} A$ доказана. Следовательно, этот набор образует базис в $\operatorname{im} A$. Таким образом, имеют место равенства

$$\dim \operatorname{im} A = n - k = \dim \mathcal{L} - \dim \ker A \Leftrightarrow \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}.$$

$\square$

4.54. Следствие. *Справедливы следующие равенства:*

$$\dim\ker A^T + \dim\operatorname{im} A^T = \dim\mathcal{L}^* = \dim\mathcal{L}. \tag{4.64}$$

4.55. Теорема. *Следующие три свойства для оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ эквивалентны:*

1. *Оператор A обратим и $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$;*
2. $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$;
3. $\ker A = \{\theta\}$.

Доказательство. Докажем, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Шаг 1. $1 \Rightarrow 2$. Пусть оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ обратим и $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Тогда уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение $x \in \mathcal{L}$ для любого $y \in \mathcal{L}$, причем $x = A^{-1}y$. Поэтому $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$.

Шаг 2. $2 \Rightarrow 3$. Пусть $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Тогда $\dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}$ и из равенства (4.61) вытекает, что $\dim\ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\theta\}$.

Шаг 3. $3 \Rightarrow 1$. Пусть $\ker A = \{\theta\}$. Тогда $\dim\ker A = 0$. В силу равенства (4.61) получаем, что $\dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}$. Значит, $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. С одной стороны, из равенства $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$ вытекает, что уравнение $Ax = y$ для каждого $y \in \mathcal{L} = \operatorname{im} A$ имеет решение $x \in A$. С другой стороны, если для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ существует два решения $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, то имеют место следующие равенства:

$$Ax_1 = y_0 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Стало быть, для каждого $y \in \mathcal{L}$ существует единственное решение $x \in \mathcal{L}$ уравнения $Ax = y$. Поэтому определено обратное отображение A^{-1}. Докажем, что $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, т.е. осталось доказать линейность оператора A^{-1}. Пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие единственные $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что справедливы равенства

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2, \quad x_1 = A^{-1}y_1, \quad x_2 = A^{-1}y_2,$$

$$A^{-1}(\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2) = A^{-1}(\alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2) =$$
$$= A^{-1}A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 = \alpha^1 \cdot A^{-1}y_1 + \alpha^2 \cdot A^{-1}y_2.$$

Итак, оператор A^{-1} — линейный. □

4.56. Лемма. Если $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и оператор $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, причем A_e — матрица оператора A в фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда матрица $(A^{-1})_e$ оператора A^{-1} в том же базисе равна $(A_e)^{-1}$.

Доказательство. Пусть

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \quad X_e = (x^1, \cdots, x^n)^T,$$

Итак, имеем

$$A(x) = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \ldots, A(\mathbf{e}_n)) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y_e, \quad Y_e = A_e \cdot X_e, \quad (4.65)$$

где $Y_e = (y^1, y^2, \ldots, y^n)^T$. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = x = A^{-1}(A(x)) = A^{-1}(y^k \cdot \mathbf{e}_k) = y^k \cdot A^{-1}(\mathbf{e}_k) = \\ = (A^{-1}(\mathbf{e}_1), A^{-1}(\mathbf{e}_2), \ldots, A^{-1}(\mathbf{e}_n)) \cdot Y_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A^{-1})_e \cdot A_e \cdot X_e. \quad (4.66)$$

Отсюда имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \big[I_e - (A^{-1})_e \cdot A_e\big] \cdot X_e = \theta \in \mathcal{L}.$$

Поскольку семейство $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимо, то приходим к равенству

$$\big[I_e - (A^{-1})_e \cdot A_e\big] \cdot X_e = O \in \mathbb{K}^{n \times 1},$$

а в силу произвольности $X_e \in \mathbb{K}^{n \times 1}$ приходим к равенству

$$(A^{-1})_e \cdot A_e = I_e \Leftrightarrow (A^{-1})_e = (A_e)^{-1}.$$

□

7. Инвариантные подпространства линейного оператора

4.57. Определение. Линейное подпространство $U \subset \mathcal{L}$ называется инвариантным подпространством относительно линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, если

$$AU \subset U,$$

т.е. $Ax \in U$ для всех $x \in U$. Символом $A|_U$ мы обозначаем ограничение оператора A на инвариантное подпространство U.

4.58. Лемма. Ограничение $A|_U$ линейного оператора A на инвариантное подпространство U является линейным оператором:

$$A|_U \in L(U; U).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in U$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда, с одной стороны, поскольку U — линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{L}$, то $\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \in U$. С другой стороны, в силу того, что U — инвариантное подпространство оператора A справедливы следующие соотношения:

$$A|_U(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = A(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) =$$

$$= \alpha^1 \cdot Ax_1 + \alpha^2 \cdot Ax_2 = \alpha^1 \cdot A|_U x_1 + \alpha^2 \cdot A|_U x_2.$$

□

4.59. Лемма. Если базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ выбран таким образом, что инвариантное подпространство $U = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$, то матрица A_e оператора A в этом базисе имеет следующий блочный вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{4.67}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$, C — квадратная матрица порядка $n-k$ и D — какая–то матрица размера $k \times (n-k)$.

Доказательство. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i. \tag{4.68}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис инвариантного подпространства U, то $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ при $j = \overline{1,k}$ и поэтому $a^i_j = 0$ при $i = \overline{k+1,n}$. Поэтому справедливо следующее выражение:

$$(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \dots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & a^1_{k+1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k & a^k_{k+1} & \cdots & a^k_n \\ 0 & \cdots & 0 & a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

Заметим, что $A\mathbf{e}_j = A|_U \mathbf{e}_j$ при $j = \overline{1,k}$. Поэтому из равенства (4.68) получаем равенство

$$A|_U \mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1,k}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{4.70}$$

Но тогда справедливо равенство

$$(A|_U \mathbf{e}_1, \dots, A|_U \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \cdot B.$$

Следовательно, B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ линейного подпространства $U \subset \mathcal{L}$. □

4.60. Лемма. Если $\mathcal{L} = U \oplus V$, где U и V — инвариантные подпространства оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, то в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таком, что $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ матрица A_e этого линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{4.71}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, а C — матрица оператора $A|_V$ в базисе $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Пусть $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ и $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. С одной стороны, справедливо равенство (4.68). С другой стороны, $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j \in \overline{1,k}$ и $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ при $j \in \overline{k+1,n}$. Поэтому в равенстве (4.68) $a^i_j = 0$ при $i = \overline{k+1,n}$, $j = \overline{1,k}$ и $a^i_j = 0$ при $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{k+1,n}$. Следовательно, справедливы следующие выражения:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \tag{4.72}$$

Заметим, что

$$A|_U\mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,k}, \tag{4.73}$$

$$A|_V\mathbf{e}_j = a^i_j \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = \overline{k+1,n}, \quad j = \overline{k+1,n}. \tag{4.74}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$(A|_U\mathbf{e}_1, \ldots, A|_U\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\cdot \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)\cdot B,$$

$$(A|_V\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A|_V\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

$\square$

4.61. Лемма. Если $\mathcal{L} = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$, то в базисе $\mathcal{L}$, составленном из базисов инвариантных подпространств $U_1, \ldots, U_m$ оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, матрица A_e оператора A примет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathrm{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & A_m \end{pmatrix},$$

где A_j — матрица оператора $A|_{U_j}$ в соответствующем базисе линейного подпространства U_j.

8. Собственные векторы

4.62. Основной задачей теории линейных операторов является нахождение такого базиса, в котором его матрица является наиболее простой. Пределом мечтаний является нахождение базиса, в котором матрица линейного оператора диагональна. Как мы покажем, такой базис может не существовать.

4.63. Определение. Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ называется собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, если $Ae = \lambda \cdot e$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом собственным значением оператора A, отвечающим собственному вектору e.

4.64. Лемма. Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, тогда и только тогда, когда линейное подпространство $L(e)$ инвариантно и $\dim L(e) = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. Тогда e — базис в линейной оболочке $L(e)$. Предположим, что $y \in L(e)$. Тогда найдется такое число $\alpha \in \mathbb{K}$, что $y = \alpha \cdot e$. Справедливы следующие равенства:

$$Ay = \alpha \cdot Ae = \alpha\lambda \cdot e \in L(e).$$

Следовательно, $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство.

Достаточность. Пусть $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство. Пусть e — его базис. Тогда справедливо соотношение

$$Ae \in L(e) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad Ae = \lambda \cdot e.$$

Следовательно, $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. $\square$

4.65. Лемма. Для того чтобы матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ состоял из собственных векторов этого линейного оператора A; при этом диагональные элементы матрицы A_e являются собственными значениями оператора A.

Доказательство. Шаг 1. Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ — это такой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Тогда для матрицы A_e оператора A в этом базисе имеет следующий вид:

$$(A\mathbf{e}_1,\ldots,A\mathbf{e}_n) = (\lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1,\ldots,\lambda_n \cdot \mathbf{e}_n) =$$
$$= (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n) \cdot A_e.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ имеет следующий диагональный вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

но тогда согласно определению матрицы оператора справедливы равенства

$$(A\mathbf{e}_1,\ldots,A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot A_e = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)\cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

из которых получаем, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1,n},$$

причем поскольку $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, то $\mathbf{e}_j \neq \theta$. □

4.66. Собственные значения λ_j, $j = \overline{1,n}$ могут попарно совпадать. Например, у единичного оператора.

4.67. Пример. Выберем базис в линейном пространстве P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ следующим специальным образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{4.75}$$

Любой полином $p_n(t) \in P^n$ можно разложить по базису (4.75) следующим образом:

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}. \tag{4.76}$$

Теперь изучим вопрос о существовании собственного вектора оператора дифференцирования $D: \ P^n \to P^{n-1} \subset P^n$. С этой целью применим оператор дифференцирования D к полиному $p_n(t)$ и получим полином $p_{n-1}(t) \in P^{n-1} \subset P^n$:

$$p_{n-1}(t) \stackrel{def:}{=} Dp_n(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{4.77}$$

Рассмотрим равенство

$$Dp_n(t) = \lambda p_n(t) \Rightarrow p_{n-1}(t) = \lambda p_n(t). \tag{4.78}$$

Сначала рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Тогда в равенстве (4.78) в правой части содержится слагаемое с старшей степенью $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda a_n \frac{t^n}{n!},$$

а в левой части слагаемое со старшей степенью — это слагаемое

$$a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Поскольку равенство (4.78) должно быть выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$, то приходим к выводу о том, что $\lambda a_n = 0$, т.е. $a_n = 0$. Далее повторяем все рассуждения и мы получим в итоге равенство $\lambda a_0 = 0$, т.е. $a_0 = 0$. Стало быть, с одной стороны, у оператора дифференцирования $D: \ P^n \to P^n$ не может быть собственного вектора с собственным значением $\lambda \neq 0$. С другой стороны, $\lambda = 0$ является собственным значением собственного вектора $\mathbf{e}_1$

$$D\mathbf{e}_1 = \theta = 0\mathbf{e}_1$$

и других собственных векторов у оператора дифференцирования нет. Стало быть, у оператора дифференцирования D в линейном пространстве P^n <u>нет собственного базиса.</u>

4.68. Теорема. *Вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующего собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, тогда и только тогда, когда в базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство*

$$e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot X_e, \tag{4.79}$$

где $X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — нетривиальное решение однородной системы уравнений

$$A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \tag{4.80}$$

а A_e — матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$Ae = \lambda \cdot e, \quad e \neq \theta. \tag{4.81}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Разложим собственный вектор $e \in \mathcal{L}$ по этому базису и получим следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{4.82}$$

Тогда справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} Ae = A((\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot X_e) = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n)\cdot X_e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot A_e \cdot X_e, \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\lambda e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot \lambda X_e. \tag{4.84}$$

Следовательно, из равенств (4.81)–(4.84) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot \lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot (A_e\cdot X_e - \lambda X_e) = \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e\cdot X_e - \lambda X_e = O \Leftrightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \end{aligned} \tag{4.85}$$

поскольку $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ — базис.

Достаточность. Справедливо следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot X_e \neq \theta,$$

поскольку в противном случае

$$(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot X_e = \theta$$

и в силу линейной независимости системы векторов $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ получим $X_e = O$, что противоречит условию $X_e \neq O$.

Из (4.79), (4.80), поскольку $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ — базис, вытекают следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\cdot \lambda X_e, \quad e \neq \theta,$$

$$A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e = \lambda \cdot (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e,$$
$$Ae = \lambda \cdot e, \quad e \neq \theta.$$

Следовательно, e — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

4.69. Лемма. Если X_e — решение однородной системы уравнений (4.80), записанной в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, то в любом другом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ справедливо равенство

$$A_{e'} \cdot X_{e'} = \lambda X_{e'}. \tag{4.86}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C. \tag{4.87}$$

Тогда имеем

$$A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C, \quad X'_e = C^{-1} \cdot X_e. \tag{4.88}$$

Из равенства (4.80) с учетом (4.87), (4.88) приходим к следующим равенствам:

$$C^{-1} \cdot A_e \cdot X_e = \lambda C^{-1} \cdot X_e \Leftrightarrow C^{-1} \cdot A_e \cdot C \cdot C^{-1} \cdot X_e = \lambda C^{-1} \cdot X_e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_{e'} \cdot X_{e'} = \lambda X_{e'}.$$

$\square$

4.70. Таким образом, вопрос о существовании собственного вектора у линейного оператора сводится к изучению однородной системы уравнений (4.80), а именно к изучению вопроса существования нетривиального решения (решений) этой системы уравнений. В частности, из общей теории линейных однородных квадратных систем уравнений вытекает следующее утверждение:

4.71. Лемма. Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (4.80), необходимо и достаточно, чтобы $\det(A_e - \lambda I) = 0$.

4.72. Определение. Многочлен $f(\lambda) = \det(A_e - \lambda I)$ называется характеристическим многочленом.

4.73. Лемма. Характеристический многочлен не зависят от выбора базиса, в котором записана матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Доказательство. С учетом (4.88) справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_{e'} - \lambda I = C^{-1} \cdot A_e \cdot C - \lambda C^{-1} \cdot C = C^{-1} \cdot (A_e - \lambda I) \cdot C,$$

из которой получаем равенства

$$\det(A_{e'} - \lambda I) = \det(C^{-1} \cdot (A_e - \lambda I) \cdot C) =$$
$$= \det C^{-1} \det(A_e - \lambda I) \det C = \frac{1}{\det C} \det(A_e - \lambda I) \det C =$$
$$= \det(A_e - \lambda I).$$

□

4.74. Отметим, что из (4.72) вытекает, что характеристический многочлен имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Из этого явного вида вытекает, в частности, что коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$, а коэффициент при λ^0 равен $\det A_e$. Несколько сложнее заметить, что коэффициент при λ^{n-1} равен $-\operatorname{tr} A$, где

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + \cdots + a_n^n.$$

4.75. Теорема. *Корни характеристического многочлена из поля $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ ($A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$) — в точности собственные значения линейного оператора.*

Доказательство. Это следствие теоремы 4.68, леммы 4.71 и определения 4.72. □

4.76. Лемма. Любой оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в комплексном линейном пространстве $\mathcal{L}$ имеет собственный вектор.

Доказательство. Согласно основной теореме алгебры уравнение $\det(A_e - \lambda I) = 0$ имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Поэтому существует нетривиальное решение линейной однородной системы уравнений

$$A_e \cdot X_e = \lambda_0 X_e.$$

Но тогда $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e \neq \theta$ в силу результата теоремы 4.68 является нетривиальным решением уравнения

$$Ae = \lambda_0 \cdot e,$$

т.е. собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ_0. □

9. Собственные векторы. Продолжение

4.77. Теорема. *Любой оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ над полем вещественных чисел имеет одномерное или (и) двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Шаг 1. Вещественный корень. Если существует вещественный корень характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$, то существует собственный вектор $e \neq \theta$ этого оператора, а следовательно, его линейная оболочка $L(e)$ является одномерным инвариантным подпространством этого оператора.

Шаг 2. Комплексный корень. Пусть $\lambda_0 = l + i\mu \in \mathbb{C}$ при $\mu \neq 0$ — корень характеристического многочлена, который, как мы знаем, существует в силу основной теоремы алгебры, т.е. $\det(A_e - \lambda_0 I) = 0$. В силу этого равенства однородная система уравнений

$$A_e \cdot Z = (l + i\mu)Z, \quad Z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$

имеет нетривиальное решение $Z = X + iY$, $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_e\cdot(X+iY) = (l+i\mu)(X+iY) \Leftrightarrow A_e\cdot X + iA_e\cdot Y = lX - \mu Y + i(lY + \mu X),$$

из которой получаем два равенства

$$A_e \cdot X = lX - \mu Y, \quad A_e \cdot Y = lY + \mu X. \tag{4.89}$$

Рассмотрим элементы линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$u = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X \quad \text{и} \quad v = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y. \tag{4.90}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X &= (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X = \\ &= x^1 \cdot A\mathbf{e}_1 + \cdots + x^n \cdot A\mathbf{e}_n = \\ &= A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X = Au,\end{aligned}$$

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot Y = A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y = Av.$$

Тогда из равенств (4.89) с учетом (4.90) получим следующие равенства:

$$Au = l \cdot u - \mu \cdot v, \quad Av = l \cdot v + \mu \cdot u, \quad u, v \in \mathcal{L}. \tag{4.91}$$

Отсюда сразу же в силу линейности оператора A получаем, что линейное вещественное подпространство $L(u, v)$ является инвариантным подпространством для оператора A.

☐ Действительно, пусть $z \in L(u, v)$. Значит,

$$\begin{aligned}z = \alpha \cdot u + \beta \cdot v \Rightarrow A(z) &= \alpha \cdot A(u) + \beta \cdot A(v) = \\ &= \alpha \cdot (l \cdot u - \mu \cdot v) + \beta \cdot (l \cdot v + \mu \cdot u) =\end{aligned}$$

$$= (\alpha l + \beta\mu) \cdot u + (-\alpha\mu + \beta l) \cdot v \in L(u, v). \quad \boxtimes \qquad (4.92)$$

Шаг 4. Размерность. Докажем, что $\det L(u, v) = 2$.

Сначала докажем, что $X \neq O$. Действительно, пусть $X = O$. Тогда из (4.89) вытекает равенство

$$\mu Y = 0 \Rightarrow Y = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $X \neq O$.

Теперь докажем, что $Y \neq O$. Пусть $Y = O$. Тогда из (4.89) получаем равенство

$$\mu X = 0 \Rightarrow X = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $Y \neq O$.

Предположим, что столбцы X и Y линейно зависимы. Тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $X = \alpha Y$, и из равенств (4.89) получаем следующие выражения:

$$\alpha A_e \cdot Y = \alpha\lambda Y - \mu Y, \quad A_e \cdot Y = \lambda Y + \alpha\mu Y, \quad Y \neq O,$$

из которых исключая $A_e Y$ получим равенство

$$\alpha(\lambda Y + \alpha\mu Y) = \alpha\lambda Y - \mu Y \Rightarrow \mu(1+\alpha^2)Y = O \in \mathbb{R}^{n\times 1} \Rightarrow \mu(1+\alpha^2) = 0,$$

поскольку по доказанному $Y \neq O$. Равенство $\mu\alpha^2 + \mu = 0$ невозможно, поскольку $\mu \neq 0$. Итак, столбцы X и Y линейно независимы, а, стало быть, линейно независимы и элементы (4.90). Значит, $\det L(u, v) = 2$. $\square$

4.78. Лемма. *Множество всех* $e \in \mathcal{L}$ *таких, что*

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e, \qquad (4.93)$$

где X_e *пробегает все множество решений линейной однородной системы уравнений*

$$A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \qquad (4.94)$$

а $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — *базис в* $\mathcal{L}$, *образуют линейное подпространство* $V_\lambda(A)$, *причем*

$$V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{L}, \qquad (4.95)$$

где A_e — *матрица оператора* $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ *в базисе* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$. *Кроме того, линейное подпространство* $V_\lambda(A)$ *инвариантно относительно оператора* A.

Доказательство.

Шаг 0. Заметим, что $\ker(A - \lambda I)$ — есть линейное подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из линейной оболочки всех собственных векторов оператора A, соответствующих собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$.

Шаг 1. Пусть $e \in V_\lambda(A)$. Тогда имеем

$$Ae = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = (A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)) \cdot X_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (A_e \cdot X_e) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot (\lambda X_e) = \\ = \lambda(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = \lambda e \Rightarrow e \in \ker(A - \lambda I).$$

Шаг 2. Пусть $e \in \ker(A - \lambda I)$. Тогда имеем

$$Ae = \lambda \cdot e. \tag{4.96}$$

Разложим e по базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e. \tag{4.97}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ae = A((\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e) = A(x_e^k \cdot \mathbf{e}_k) = x_e^k \cdot A\mathbf{e}_k = \\ = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \tag{4.98}$$

$$\lambda \cdot e = \lambda \cdot (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e. \tag{4.99}$$

Из равенств (4.96)–(4.99) приходим к равенству

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot \lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot [A_e \cdot X_e - \lambda X_e] = \theta \Leftrightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e. \tag{4.100}$$

Следовательно, $e \in V_\lambda(A)$.

Из результатов шагов 1 и 2 имеем

$$\boxed{V_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I).}$$

Шаг 3. Пусть $x \in V_\lambda(A)$. Тогда имеем цепочку соотношений

$$(A - \lambda I)x = \theta \Leftrightarrow A(x) = \lambda \cdot x \Rightarrow A(A(x)) = A(\lambda \cdot x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A(A(x)) = \lambda \cdot (A(x)) \Leftrightarrow [A - \lambda I]A(x) = \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow A(x) \in \ker(A - \lambda I) = V_\lambda(A).$$

Следовательно, $V_\lambda(A)$ — инвариантное подпространство относительно оператора A.

□

4.79. Определение. Подпространство $V_\lambda(A) \overset{def:}{=} \ker(A - \lambda I)$ называется собственным подпространством линейного оператора A.

4.80. Теорема. *Собственные векторы* $\mathbf{e}_1 \in V_{\lambda_1}(A), \ldots, \mathbf{e}_s \in V_{\lambda_s}(A)$, *соответствующие различным собственным значениям* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$[1] *оператора* A, *линейно независимы.*

[1]Из поля $\mathbb{K}$.

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. При $m = 1$ доказывать нечего. Пусть $m > 1$ и $\theta \neq e_k \in V_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I)$ и $k = \overline{1,m}$ и утверждение теоремы выполнено для $m-1$ собственных векторов. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot e_1 + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot e_{m-1} + \alpha^m \cdot e_m = \theta. \tag{4.101}$$

Применим оператор A к обеим частям равенства (4.101) и в результате получим равенство

$$\begin{aligned} &\alpha^1 \cdot Ae_1 + \cdots + \alpha^{m-1} \cdot Ae_{m-1} + \alpha^m \cdot Ae_m = \theta \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \lambda_1 \alpha^1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_{m-1} \alpha^{m-1} \cdot e_{m-1} + \lambda_m \alpha^m \cdot e_m = \theta. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Теперь умножим обе части равенства (4.101) на λ_m и вычтем получившееся равенство из (4.102). В результате получим равенство

$$\alpha^1(\lambda_1 - \lambda_m) \cdot e_1 + \cdots + \alpha^{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \cdot e_{m-1} = \theta. \tag{4.103}$$

Поскольку все собственные числа попарно не совпадают и в силу предположения индукции векторы $e_1, \ldots, e_{m-1}$ линейно независимы получаем, что $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{m-1} = 0$. Тогда из равенства (4.101) получаем, что $\alpha^m = 0$. Итак, равенство (4.101) возможно тогда и только тогда, когда все числа $\alpha^1 = \cdots = \alpha^m = 0$, т.е. соответствующие собственные векторы линейно независимы. □

4.81. Следствие. *Если характеристический многочлен* $\det(A-\lambda I)$ *имеет* $n = \dim \mathcal{L}$ *различных корней из поля* $\mathbb{K}$, *над которым определено линейное пространство* $\mathcal{L}$, *то существует собственный базис этого оператора в линейном пространстве* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные собственные числа из поля $\mathbb{K}$, а e_k при $k = \overline{1,n}$ — это соответствующие собственные векторы. В силу результата теоремы 4.80 получаем, что они линейно независимы и их число совпадает с размерностью n линейного пространства $\mathcal{L}$. Значит, они образуют базис. □

4.82. Результат этого следствия является достаточным условием существования собственного базиса линейного оператора. Например, с одной стороны, характеристический многочлен единичного оператора равен $f(\lambda) = (1-\lambda)^n$ и имеет n–кратный корень $\lambda = 1$. С другой стороны, любой базис линейного пространства $\mathcal{L}$ является собственным для единичного оператора.

4.83. Лемма. Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора.

Доказательство. Пусть $U \subset \mathcal{L}$ — это инвариантное подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $B = A|_U$ — ограничение линейного оператора A на инвариантном подпространстве U. Рассмотрим следующий базис в $\mathcal{L}$:

$$\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m,\mathbf{e}_{m+1},\ldots,\mathbf{e}_n\},\quad U = L(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m).$$

В этом базисе, как нами ранее было показано, матрица A_e оператора A имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B_e & * \\ O & C_e \end{pmatrix},$$

где B_e — это матрица оператора $B = A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m\}$. Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$A_e - \lambda I_n = \begin{pmatrix} B_e - \lambda I_m & * \\ O & C_e - \lambda I_{n-m} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A_e - \lambda I_n) = \det(B_e - \lambda I_m)\det(C_e - \lambda I_{n-m}). \quad (4.104)$$

Следовательно, характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I_n)$ оператора A делится на характеристический многочлен $\det(B_e - \lambda I_m)$ оператора $B = A|_U$. □

4.84. Определение. Алгебраической кратностью n_{λ_0} собственного значения λ_0 называется его кратность как корня характеристического многочлена.

4.85. Определение. Геометрической кратностью p_{λ_0} собственного значения $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ называется размерность собственного подпространства $V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$.

4.86. Теорема. *Алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 не меньше его геометрической кратности p_{λ_0} :*

$$n_{\lambda_0} \geqslant p_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство

$$V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$$

оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующее собственному значению λ_0. Ранее мы доказали, что оно инвариантно относительно оператора A. Сужение оператора A на $V_{\lambda_0}(A)$ равно

$$B = A|_{V_{\lambda_0}} = \lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}},$$

где $I|_{V_{\lambda_0}}$ единичный оператор на $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{L}$. Характеристический многочлен введенного оператора B имеет следующий вид:

$$\det(B_e - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) = \det(\lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}} - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) =$$

$$= \det(\lambda_0 - \lambda) I|_{V_{\lambda_0}} = (\lambda_0 - \lambda)^{p_{\lambda_0}}, \quad I|_{V_{\lambda_0}} \in \mathbb{K}^{p_{\lambda_0} \times p_{\lambda_0}}, \quad p_{\lambda_0} = \dim V_{\lambda_0}.$$

поскольку размер квадратной матрицы B_e равен размерности подпространства $V_{\lambda_0}(A)$. В силу результата леммы 4.83 характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I)$ оператора A делится на характеристический многочлен $(\lambda - \lambda_0)^{p_{\lambda_0}}$ оператора B. Но это означает, что алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$ не меньше, чем p_{λ_0} — его геометрическая кратность. □

4.87. Лемма. Для различных собственных значений $\lambda_1 \neq \lambda_2$ оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ имеем

$$V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A) = \{\theta\}.$$

Доказательство. Пусть $x \in V_{\lambda_1}(A) \cap V_{\lambda_2}(A)$. Тогда имеем

$$Ax = \lambda_1 \cdot x, \quad Ax = \lambda_2 \cdot x \Rightarrow \lambda_1 \cdot x = \lambda_2 \cdot x \Leftrightarrow x = \theta,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

4.88. Теорема. *Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *характеристический многочлен $\det(A - \lambda I)$ разлагается на линейные множители из поля $\mathbb{K}$, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$;*
2) *геометрическая кратность p_λ каждого собственного значения λ равна алгебраической кратности n_λ.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda I)$ из поля $\mathbb{K}$ и $n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_s}$ — их алгебраические кратности, а V_{λ_i}, $i = \overline{1, s}$ — это соответствующие собственные подпространства, размерности p_{λ_i}. Согласно результату теоремы 4.86 имеют место следующие соотношения:

$$p_{\lambda_i} := \dim V_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i} \tag{4.105}$$

и, значит, имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} \leqslant n. \tag{4.106}$$

Однако единственный способ получить базис из собственных векторов — взять объединение базисов собственных подпространств. Для того чтобы при этом действительно получился базис пространства $\mathcal{L}$ в силу результата леммы 4.87, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n.$$

Отсюда и с учетом (4.105) и (4.106) приходим к двум условиям:

$$\sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} = n \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i}. \tag{4.107}$$

Первое из этих условий означает, что характеристический многочлен разлагается на линейные множители из поля $\mathbb{K}$. Докажем, что второе условие означает, что $p_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}$ для всех $i = \overline{1, s}$.

□□ Действительно, в силу результата теоремы 4.86 всегда выполнено неравенство $p_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i}$ для всех $i = \overline{1, s}$. Пусть, например, $p_{\lambda_1} < n_{\lambda_1}$. Тогда справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} = p_{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{s} p_{\lambda_i} < n_{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{s} n_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i}.$$

Пришли к противоречию со вторым равенством из (4.107). ⊠⊠

□

4.89. Спектральное разложение. Пусть выполнены условия теоремы 4.88 и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все различные собственные значения оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ из поля $\mathbb{K}$, над которым определено линейное пространство $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение линейного пространства $\mathcal{L}$ в прямую сумму

$$\mathcal{L} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}, \quad V_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I), \quad j = \overline{1, s}.$$

Отметим, что

$$A|_{V_{\lambda_j}} = \lambda_j I|_{V_{\lambda_j}},$$

где $I|_{V_{\lambda_j}}$ — единичный оператор на V_{λ_j}. Символом P_j обозначим проектор на собственное подпространство V_{λ_j}. Отметим, что тогда

$$P_j|_{V_{\lambda_j}} = I|_{V_{\lambda_j}}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Тогда справедливо следующее спектральное разложение линейного оператора A:

$$A = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j.$$

10. Примеры решения задач

4.90. Пример. Оператор поворота на угол. Пусть $\mathbf{e}$ — произвольный вектор в пространстве. Рассмотрим цилиндрическую систему координат с осью Oz, совпадающей с направлением вектора $\mathbf{e}$. Рассмотрим отображение, которое сопоставляет каждому радиус–вектору $\mathbf{r}$ с концом в точке (ρ, ϕ, h) радиус–вектор $\mathbf{r}'$, конец которого имеет координаты $(\rho, \phi + \alpha, h)$:

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}'. \tag{4.108}$$

Найти явное выражение для этого оператора, доказать, что он линейный, найти все инвариантные собственные подпространства, записать его матрицу в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ таком, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ при условии, что $|\mathbf{e}| = 1$.

Решение. Без ограничения общности будем считать, что $|\mathbf{e}| = 1$. Совершенно понятно, что если радиус–вектор $\mathbf{r}$ лежит на оси Oz, то

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r}. \tag{4.109}$$

В этом случае оператор A_α является линейным для таких радиус–векторов. Действительно,

$$A_\alpha(\beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2) = \beta^1\mathbf{r}_1 + \beta^2\mathbf{r}_2 = \beta^1 A_\alpha(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_\alpha(\mathbf{r}_2). \tag{4.110}$$

Пусть теперь радиус–вектор $\mathbf{r}$ не лежит на оси Oz. Тогда однозначно определена плоскость π, в которой лежат вектора $\mathbf{e}$ и $\mathbf{r}$. Для радиус–вектора $\mathbf{r}$ справедливо разложение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp, \quad \mathbf{r}_\perp \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_\parallel \parallel \mathbf{e}. \tag{4.111}$$

Рассмотрим правую прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{r}_\perp, [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp], \mathbf{e}\}$. Заметим, что

$$[\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp] = [\mathbf{e}, \mathbf{r}]. \tag{4.112}$$

Для искомого повернутого на угол в указанном выше смысле вектора $\mathbf{r}'$ справедливо разложение

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\parallel + \mathbf{r}'_\perp, \quad \mathbf{r}'_\perp \perp \mathbf{e}, \quad \mathbf{r}'_\parallel \| \mathbf{e}, \tag{4.113}$$

причем

$$\mathbf{r}'_\parallel = \mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}, \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}. \tag{4.114}$$

Рассмотрим теперь в плоскости π прямоугольную декартову систему координат $\{O, \mathbf{r}_\perp, [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp]\}$. Заметим также, что

$$|\mathbf{r}'_\perp| = |\mathbf{r}_\perp| \neq 0$$

для поворотов. Но тогда справедливо равенство

$$\frac{\mathbf{r}'_\perp}{|\mathbf{r}'_\perp|} = \frac{\mathbf{r}_\perp}{|\mathbf{r}_\perp|}\cos\alpha + \left[\mathbf{e}, \frac{\mathbf{r}_\perp}{|\mathbf{r}_\perp|}\right]\sin\alpha, \quad |\mathbf{e}| = 1 \tag{4.115}$$

или равносильно

$$\mathbf{r}'_\perp = \mathbf{r}_\perp \cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp] \sin\alpha. \tag{4.116}$$

из которого с учетом (4.112)–(4.114) получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + \mathbf{r}'_\parallel = \mathbf{r}_\perp \cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}_\perp] \sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e} =\\ = (\mathbf{r} - (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e}) \cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}] \sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})\mathbf{e} =\\ = \mathbf{r} \cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}] \sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} :=\\ := A_{1\alpha}(\mathbf{r}) + A_{2\alpha}(\mathbf{r}) + A_{3\alpha}(\mathbf{r}).\end{aligned} \tag{4.117}$$

Итак, из (4.117) вытекает, что

$$A_\alpha(\mathbf{r}) = A_{1\alpha}(\mathbf{r}) + A_{2\alpha}(\mathbf{r}) + A_{3\alpha}(\mathbf{r}). \tag{4.118}$$

Поскольку сумма линейных операторов — есть линейный оператор, то нам достаточно доказать, что операторы $A_{j\alpha}(\mathbf{r})$ при $j = 1, 2, 3$ являются линейными. Действительно, это есть следствие следующих цепочек равенств:

$$\begin{aligned}A_{1\alpha}(\beta^1 \mathbf{r}_1 + \beta^2 \mathbf{r}_2) = (\beta^1 \mathbf{r}_1 + \beta^2 \mathbf{r}_2) \cos\alpha =\\ = \beta^1 \mathbf{r}_1 \cos\alpha + \beta^2 \mathbf{r}_2 \cos\alpha = \beta^1 A_{1\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{1\alpha}(\mathbf{r}),\end{aligned} \tag{4.119}$$

$$\begin{aligned}A_{2\alpha}(\beta^1 \mathbf{r}_1 + \beta^2 \mathbf{r}_2) = [\mathbf{e}, \beta^1 \mathbf{r}_1 + \beta^2 \mathbf{r}_2] \sin\alpha =\\ = (\beta_1 [\mathbf{e}, \mathbf{r}_1] + \beta^2 [\mathbf{e}, \mathbf{r}_2]) \sin\alpha = \beta^1 [\mathbf{e}, \mathbf{r}_1] \sin\alpha + \beta^2 [\mathbf{e}, \mathbf{r}_2] \sin\alpha =\\ = \beta^1 A_{2\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{2\alpha}(\mathbf{r}_2),\end{aligned} \tag{4.120}$$

$$\begin{aligned}A_{3\alpha}(\beta^1 \mathbf{r}_1 + \beta^2 \mathbf{r}_2) = (\mathbf{e}, \beta^1 \mathbf{r}_1 + \beta^2 \mathbf{r}_2)(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} =\\ = \beta^1 (\mathbf{e}, \mathbf{r}_1)(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} + \beta^2 (\mathbf{e}, \mathbf{r}_2)(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} =\\ = \beta^1 A_{3\alpha}(\mathbf{r}_1) + \beta^2 A_{3\alpha}(\mathbf{r}_2).\end{aligned} \tag{4.121}$$

Таким образом, если радиус–вектор $\mathbf{r}$ не лежит на оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$, то оператор A_α поворота является линейным.

Заметим, что если $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{e}$, то для выражения (4.117) справедливы равенства

$$\begin{aligned}A_\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cos\alpha + [\mathbf{e}, \mathbf{r}] \sin\alpha + (\mathbf{e}, \mathbf{r})(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} =\\ = \mathbf{r} \cos\alpha + \lambda(1 - \cos\alpha)\mathbf{e} = \mathbf{r} \cos\alpha + (1 - \cos\alpha)\mathbf{r} = \mathbf{r}.\end{aligned} \tag{4.122}$$

Таким образом, для произвольных радиус–векторов $\mathbf{r}$ отображение A_α является линейным.

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированный базис в пространстве, причем такой, что $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$. Рассмотрим следующее разложение на прямую сумму подпространств трехмерного линейного пространства радиус-векторов с началом в точке O :

$$V_3 = U \oplus W, \quad U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad W = L(\mathbf{e}_3) \tag{4.123}$$

В силу (4.109) имеем

$$A_\alpha(\mathbf{e}) = \mathbf{e}, \tag{4.124}$$

т.е. вектор $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ — собственный вектор оператора A_α, соответствующий собственному значению $\lambda = 1$. Но тогда, очевидно, что

$$A_\alpha W \subset W, \tag{4.125}$$

т.е. линейное подпространство W является инвариантным одномерным подпространством для оператора поворота A_α. Пусть теперь вектор $\mathbf{g} \in U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Значит, найдутся такие вещественные числа $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{R}$, что справедливо равенство

$$\mathbf{g} = \beta^1\mathbf{e}_1 + \beta^2\mathbf{e}_2, \quad A_\alpha(\mathbf{g}) = \beta^1 A_\alpha(\mathbf{e}_1) + \beta^2 A_\alpha(\mathbf{e}_2), \tag{4.126}$$

поскольку оператор A_α — линейный. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$A_\alpha(\mathbf{e}_1) = \cos\alpha\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\mathbf{e}_2 \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = U, \tag{4.127}$$

$$A_\alpha(\mathbf{e}_2) = -\sin\alpha\mathbf{e}_1 + \cos\alpha\mathbf{e}_2 \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = U. \tag{4.128}$$

Из (4.126) с учетом (4.127) и (4.128) приходим к выводу о том, что

$$A_\alpha U \subset U, \tag{4.129}$$

т.е. $U = L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ — это двумерное инвариантное линейное подпространство относительно оператора поворота A_α. Значит, выражение (4.123) — есть прямая сумма одномерного и двумерного линейных подпространств инвариантных относительно оператора поворота A_α.

Наконец, из (4.124) и (4.127), (4.128) получаем равенство

$$(A_\alpha(\mathbf{e}_1), A_\alpha(\mathbf{e}_2), A_\alpha(\mathbf{e}_3)) = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.130}$$

Отметим, что операторы поворота A_α при $\alpha \in (-\pi, \pi]$ обладают следующими полезными свойствами:

$$A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_{\beta+\alpha} = A_\beta A_\alpha, \quad A_0 = I, \quad \alpha, \beta \in (-\pi, \pi], \tag{4.131}$$

которые означают, что поворот на нулевой угол совпадает с единичным оператором, а повороты A_α, A_β коммутативны и их произведение равно оператору $A_{\alpha+\beta}$ суммарного поворота на угол $\alpha + \beta$.

Соответствующие равенства могут быть получены непосредственно алгебраически, но лучше их доказать исходя из геометрических соображений.

4.91. Пример. Матрица линейного оператора. Найти матрицы линейного оператора в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением, заданного формулой

$$A(x) = (x,a)a, \quad a = (3,2,1)^T, \tag{4.132}$$

в стандартном базисе в $\mathbb{R}^3$ и в базисе

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4.133}$$

Решение. Сначала найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{e}_1) = 3a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{4.134}$$

$$A(\mathbf{e}_2) = 2a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{4.135}$$

$$A(\mathbf{e}_3) = a = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.136}$$

Таким образом, из (4.134)–(4.136) получаем искомое выражение для матрицы линейного оператора (4.132) в стандартном базисе

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.137}$$

Теперь найдем матрицу линейного оператора (4.132) в базисе (4.133). Действительно, имеем

$$A(b_1) = 6a, \quad A(b_2) = 3a, \quad A(b_3) = -a. \tag{4.138}$$

Найдем разложение столбца a по базису $\{b_1, b_2, b_3\}$. Действительно, имеем

$$xb_1 + yb_2 + zb_3 = a, \tag{4.139}$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.140}$$

Откуда легко находим, что

$$x = 3, \quad y = -1, \quad z = 1. \tag{4.141}$$

Следовательно, из (4.139) и (4.141) получаем искомое разложение

$$a = 3b_1 - b_2 + b_3. \tag{4.142}$$

Из (4.138) и (4.142) получаем следующие равенства:

$$A(b_1) = 18b_1 - 6b_2 + 6b_3 = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \tag{4.143}$$

$$A(b_2) = 9b_1 - 3b_2 + 3b_3 = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{4.144}$$

$$A(b_2) = -3b_1 + b_2 - b_3 = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4.145}$$

Таким образом, из (4.143)–(4.145) вытекает искомое выражение для матрицы линейного оператора (4.132) в базисе (4.133):

$$(A(b_1), A(b_2), A(b_3)) = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} 18 & 9 & -3 \\ -6 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.146}$$

4.92. Пример. Матрица линейного оператора. Найти матрицу линейного оператора

$$A(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, \mathbf{x}] : \ V_3 \to V_3, \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{4.147}$$

в правом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, где вектор $\mathbf{a}$ — фиксированный.

Решение. Справедливы следующие равенства:

$$A(\mathbf{e}_1) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_1] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_3\mathbf{e}_2 - a_2\mathbf{e}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}, \quad (4.148)$$

$$A(\mathbf{e}_2) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\mathbf{e}_3 - a_3\mathbf{e}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad (4.149)$$

$$A(\mathbf{e}_3) = [\mathbf{a}, \mathbf{e}_3] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a_2\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.150)$$

Таким образом, из (4.148)–(4.150) вытекает выражение для матрица оператора (4.147)

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), A(\mathbf{e}_3)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.151)$$

4.93. Пример. Ядро и образ линейного оператора. Найти базисы ядра и образа линейного оператора A, действующего в линейном пространстве столбцов $\mathbb{R}^4$ по правилу умножения матрицы на столбец:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} X, \quad X \in \mathbb{R}^4. \quad (4.152)$$

Решение. Шаг 1. Ядро. Для того чтобы найти базис в ядре оператора A нужно найти ФСР следующей системы уравнений:

$$A \cdot X = O \in \mathbb{R}^4, \quad X \in \mathbb{R}^4. \quad (4.153)$$

Найдем ФСР методом Гаусса. Действительно, имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim C^3 - C^4 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{3}C^3 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim C^1 \leftrightarrow C^4 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim C^4 - C^3 - C^2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim C^4 \ominus \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim C^3 - C^2 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim C^2 + 2C^3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim C^1 - 2C^3 \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \frac{1}{3}C^1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (4.154)$$

Таким образом, система уравнений (4.153) эквивалентна следующей системе

$$x^1 = 2x^4, \quad x^2 = -3x^4, \quad x^3 = -2x^4. \qquad (4.155)$$

Следовательно, базис ядро оператора A состоит из одного столбца

$$\ker A = \{c^1 X_1, \quad c^1 \in \mathbb{R}\}, \quad X_1 = (2, -3, -2, 1)^T. \qquad (4.156)$$

Шаг 2. Образ. Здесь мы сделаем небольшое теоретическое отступление. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$ и $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Докажем, что семейство векторов

$$\{A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n)\} \in \operatorname{Im} A$$

полно в $\operatorname{Im} A$. Действительно, пусть $y \in \operatorname{Im} A$. Тогда найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = A(x)$. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow y = A(x) = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j).$$

Отсюда вытекает полнота.

Теперь вернемся к нашей задаче. Рассмотрим стандартный базис линейного пространства столбцов $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$A(\mathbf{e}_1) = A \cdot \mathbf{e}_1 = \|A_1, \ldots, A_n\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A_1, \tag{4.157}$$

$$A(\mathbf{e}_j) = A_j, \quad j = \overline{1,4}. \tag{4.158}$$

Таким образом, нам осталось выделить из семейства столбцов $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ максимальное линейно независимое подсемейство. Но мы этот вопрос фактически изучили в цепочке эквивалентных преобразований (4.154). И поэтому максимальное линейно независимое семейство столбцов матрицы A состоит из первого, второго и третьего столбцов матрицы A. Значит,

$$\operatorname{Im} A = \{Y = c^1 A_1 + c^2 A_2 + c^3 A_3,\ c^1, c^2, c^3 \in \mathbb{R}\},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что как и должно быть

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = 4.$$

4.94. Пример. Задача на собственные векторы и собственные значения. Найти собственные значения, их кратности и собственные подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, заданного в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в $\mathcal{L}$ матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.159}$$

Решение. Рассмотрим характеристический многочлен

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-3). \quad (4.160)$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет два корня $\lambda = 1$ и $\lambda = 3$ алгебраических кратностей 2 и 1, соответственно. Построим базисы в соответствующих собственных подпространствах $V_1(A)$ и $V_3(A)$. Начнем с $V_1(A)$. Справедливы равенства

$$A_e - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim (2, -1, 0). \quad (4.161)$$

Поэтому система линейных однородных уравнений

$$(A_e - I) \cdot X_e = O \quad (4.162)$$

эквивалентна одному уравнению

$$2x^1 - x^2 + 0x^3 = 0. \quad (4.163)$$

ФСР этой системы уравнений состоит из двух векторов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.164)$$

Поэтому

$$V_1(A) = \{c^1X_1 + c^2X_2,\ c^1, c^2 \in \mathbb{R}\}.$$

Теперь найдем базис в $V_3(A)$. Действительно,

$$A_e - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.165)$$

Поэтому система уравнений

$$(A_e - 3I) \cdot X_e = O$$

эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.166)$$

ФСР которой состоит из оного вектора, например, следующего:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4.167}$$

Поэтому

$$V_3(A) = \{c^3 X_3,\ c^3 \in \mathbb{R}\}. \tag{4.168}$$

4.95. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$. Пусть $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$. Доказать, что оператор A ортогонален, т. е.

$$(Ax, Ay) = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}, \tag{4.169}$$

тогда и только тогда, когда

$$\|Ax\| = \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{4.170}$$

Решение. Шаг 1. Прежде всего заметим, что справедливы следующие равенства:

$$\|B(x+y)\|^2 = (B(x+y), B(x+y)) =$$
$$= (B(x), B(x)) + (B(y), B(y)) - 2(B(x), B(y)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (B(x), B(y)) = \frac{1}{2}\left[\|B(x+y)\|^2 - \|B(x)\|^2 - \|B(y)\|^2\right] \tag{4.171}$$

для любого $B \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$.

Шаг 2. Необходимость. Пусть оператор A — ортогональный, тогда из (4.169) при $x = y \in \mathcal{E}$ получим равенство (4.170).

Шаг 3. Достаточность. Пусть выполнено равенство (4.170) тогда при $B = A$ и при $A = I$ в (4.171) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, Ay) = \frac{1}{2}\left[\|A(x+y)\|^2 - \|Ax\|^2 - \|Ay\|^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = (x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}. \tag{4.172}$$

4.96. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$. Доказать, что сумма двух различных собственных подпространств оператора A является инвариантным подпространством оператора A. Является ли эта сумма собственным подпространством оператора A?

Решение. Пусть

$$H = \ker(A - \lambda_1 I) + \ker(A - \lambda_2 I) \subset \mathcal{L}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Как сумма линейных подпространств H является линейным подпространством в $\mathcal{L}$. Докажем, что H — инвариантное относительно A подпространство.

$\square$ Действительно, пусть $z \in H$. Тогда

$$z = x + y, \quad x \in \ker(A - \lambda_1 I), \quad y \in \ker(A - \lambda_2 I).$$

Имеем

$$Az = Ax + Ay = \lambda_1 x + \lambda_2 y \in \ker(A - \lambda_1 I) + \ker(A - \lambda_2 I) = H. \quad \boxtimes$$

Однако, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$ собственным подпространством H не будет.

$\square$ Действительно, пусть от противного

$$\forall z \in H = \ker(A - \lambda I) \quad \text{и} \quad Az = \lambda z. \tag{4.173}$$

Тогда возьмем

$$z = x + y, \quad \theta \neq x \in \ker(A - \lambda_1 I), \quad \theta \neq y \in \ker(A - \lambda_2 I), \tag{4.174}$$

$$Az = Ax + Ay = \lambda_1 x + \lambda_2 y. \tag{4.175}$$

Из (4.173)–(4.175) получаем равенство

$$\lambda x + \lambda y = \lambda_1 x + \lambda_2 y \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)x + (\lambda - \lambda_2)y = \theta,$$

т.е. векторы x и y ненулевые и линейно зависимы. Значит,

$$x, y \in \ker(A - \lambda_1 I) \cap \ker(A - \lambda_2 I) = \{\theta\}.$$

Пришли к противоречию. $\boxtimes$

4.97. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{L} \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \mathcal{L}$.

Решение. Как было доказано ранее, справедливо равенство

$$\dim \ker(A - \lambda I) + \dim \mathrm{Im}(A - \lambda I) = \dim \mathcal{L}.$$

Поэтому для того, чтобы $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $\dim \ker(A - \lambda I) = 0$, т.е. чтобы

$$\ker(A - \lambda I) = \{\theta\}.$$

Таким образом, вывод такой числа λ не должны быть собственными значениями оператора A.

4.98. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ над числовым полем $\mathbb{K}$, $\dim \mathcal{L} \in \mathbb{N}$. Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Найти все числа $\lambda \in \mathbb{K}$, для которых $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathcal{L}$.

Решение. В силу решения предыдущей задачи ответ такой: когда λ — собственное значение оператора A.

4.99. Пример. Вычислительная задача. В линейном пространстве $\mathbb{R}^2$ заданы элементы:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_{1'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_{2'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad (4.176)$$

Доказать, что: элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$; элементы $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Найти: матрицу перехода от базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ к базису $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})$.

Решение. Пусть $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$ — канонический базис в $\mathbb{R}^2$, т. е.

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.177)$$

Тогда имеем

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \cdot A_1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad (4.178)$$

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \cdot A_2, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (4.179)$$

Из (4.178) и (4.179) имеем

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot A, \quad A = A_1^{-1} \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (4.180)$$

4.100. Пример. Вычислительная задача. В линейном вещественном пространстве $P_1[0,2]$ (пространстве всех полиномов на сегменте $[0,2]$ степени не выше 1) задан линейный оператор, действующий по правилу:

$$A(x)(t) = \int_0^2 (t-\tau)x(\tau)\,d\tau. \qquad (4.181)$$

Найти матрицу оператора A в базисе $\mathbf{e}_1(t) = 1$, $\mathbf{e}_2(t) = t$.

Решение. Справедливы равенства

$$A(\mathbf{e}_1)(t) = \int_0^2 (t-\tau)\,d\tau = 2t - 2 = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \qquad (4.182)$$

$$A(\mathbf{e}_2)(t) = \int_0^2 (t-\tau)\tau\,d\tau = 2t - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2. \qquad (4.183)$$

Из (4.182), (4.183) получаем

$$(A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) A_e, \quad A_e = \begin{pmatrix} -2 & -8/3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 5

Билинейные и квадратичные формы

1. Матрица билинейной формы

5.1. Определение. Функция $B : x, y \to B(x, y) \in \mathbb{K}$ двух векторных аргументов $x, y \in \mathcal{L}$ называется билинейной формой на $\mathcal{L}$, если при каждом фиксированном значении одного аргумента она является линейной формой от другого, т.е. если

$$B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 B(x_1, y) + \alpha^2 B(x_2, y), \tag{5.1}$$

$$B(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1 B(x, y_1) + \beta^2 B(x, y_2) \tag{5.2}$$

для любых $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$.

5.2. Пример. Пусть $X, Y \in \mathbb{K}^{2\times 1}$. Тогда определитель 2×2 является билинейной формой относительно двух столбцов:

$$B(X, Y) = |X, Y| = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

5.3. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — произвольный базис пространства $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$B(x, y) = B(x^i \cdot \mathbf{e}_i, y^j \cdot \mathbf{e}_j) = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x^i y^j = b_{ij} x^i y^j, \quad b_{ij} = B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

5.4. Определение. Матрица $(b_{ij})_{n,n}$ называется матрицей билинейной формы.

5.5. Матричная запись билинейной формы. Рассмотрим отдельно выражение

$$b_{ij} x^i y^j. \tag{5.3}$$

Наша задача переписать это выражение в матричной форме. С этой целью введем следующие обозначения:

$$B_e = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{matrix} \right\|, \quad B_j = (b_{j1}, \ldots, b_{jn}), \quad j = \overline{1, n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Матрица $B_e \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$. Поэтому $B_e \cdot Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — это столбец, причем

$$B_e \cdot Y = \begin{Vmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Vmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} B_1 \cdot Y \\ \vdots \\ B_n \cdot Y \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Теперь заметим, что

$$b_{ij}y^j = (b_{i1}, \cdots, b_{in}) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = B_i \cdot Y \tag{5.5}$$

и из (5.3), (5.4) получаем равенство

$$\begin{aligned} b_{ij}x^iy^j = x^ib_{ij}y^j = x^iB_i \cdot Y = \\ = x^1B_1 \cdot Y + \cdots + x^nB_n \cdot Y = (x^1, \ldots, x^n) \begin{pmatrix} B_1 \cdot Y \\ \vdots \\ B_n \cdot Y \end{pmatrix} = \\ = X^T \cdot B_e \cdot Y, \quad X^T = (x^1, \ldots, x^n), \end{aligned} \tag{5.6}$$

где мы воспользовались нашим правилом умножения матриц «строчка на столбец». Таким образом, в координатах билинейная форма записывается следующим образом:

$$\boxed{B(x,y) = X^T \cdot B_e \cdot Y.} \tag{5.7}$$

5.6. Закон преобразования матрицы билинейной формы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис и

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i. \tag{5.8}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} b_{i'j'} = B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = B(c^i_{i'} \cdot \mathbf{e}_i, c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = c^i_{i'}c^j_{j'}B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = c^i_{i'}c^j_{j'}b_{ij}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Наша задача переписать полученный закон преобразования матрицы билинейной формы

$$\boxed{b_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} b_{ij}} \tag{5.10}$$

в матричной форме. С одной стороны, заметим, что в силу нашего правила умножения «строчка на столбец»

$$c^j_{j'} b_{ij} = b_{ij} c^j_{j'} = \{B_e\}^i_j \{C\}^j_{j'} = \{B_e \cdot C\}^i_{j'}, \tag{5.11}$$

$$B_e = (b_{ij})_{n,n}, \quad C = (c^j_{j'})^n_{n'}.$$

С другой стороны, имеем

$$b_{i'j'} = c^i_{i'} b_{ij} c^j_{j'} = \sum_{i=1}^{n} c^i_{i'} \{B_e \cdot C\}^i_{j'} = \sum_{i=1}^{n} \{C\}^i_{i'} \{B_e \cdot C\}^i_{j'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{C^T\}^{i'}_i \{B_e \cdot C\}^i_{j'} = \{C^T\}^{i'}_i \{B_e \cdot C\}^i_{j'} =$$

$$= \{C^T \cdot B_e \cdot C\}^{i'}_{j'} = \{C^T \cdot B_e \cdot C\}_{i'j'}. \tag{5.12}$$

Из равенств (5.10)–(5.12) получаем равенство

$$\{B_{e'}\}_{i'j'} = \{C^T \cdot B_e \cdot C\}_{i'j'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C,} \quad B_{e'} = (b_{i'j'})_{n',n'}. \tag{5.13}$$

Предложим другой способ вывода матричного равенства (5.13). С этой целью воспользуемся матричным равенством (5.7). Кроме того, пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot X_e = x^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \tag{5.14}$$

$$y = y^j \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \cdot Y_e = y^{j'} \cdot \mathbf{e}_{j'} = \mathbf{E}' \cdot Y_{e'}, \tag{5.15}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$. Тогда, как мы установили ранее, имеют место следующие равенства:

$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'}. \tag{5.16}$$

Справедливы следующие равенства:

$$X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e = B(x, y) = X_{e'}^T \cdot B_{e'} \cdot Y_{e'}, \tag{5.17}$$

где B_e и $B_{e'}$ — матрицы билинейной формы в старом и новом базисах, из которых с учетом (5.16) получаем следующие равенства:

$$X_{e'}^T \cdot B_{e'} \cdot Y_{e'} = X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e = X_{e'}^T \cdot C^T \cdot B_e \cdot C \cdot Y_{e'} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_{e'}^T \cdot (B_{e'} - C^T \cdot B_e \cdot C) \cdot Y_{e'} = 0. \quad (5.18)$$

Последнее равенство выполнено для любых столбцов $X_{e'}$ и $Y_{e'}$, поскольку равенства (5.17) справедливо для любых $x, y \in \mathcal{L}$, а значит в силу формул (5.14) и (5.15) для любых столбцов $X_e, Y_e, X_{e'}, Y_{e'}$. Поэтому из (5.18) с учетом ниже доказанной леммы 5.7 вытекает искомое равенство:

$$\boxed{B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C.}$$

5.7. Лемма. Если $X^T \cdot A \cdot Y = 0$ для любых $X, Y \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ и для некоторой матрице $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, то $A = O$.

Доказательство. Пусть $Y_k \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец, у которого все ячейки заполнены нулями за исключением k–ой строчки, где расположена 1. Кроме того, пусть $X_j \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — столбец заполненный нулями за исключением j–ой строчки, где расположено число 1. Справедливы следующие равенства:

$$A \cdot Y_k = \|A_1, \dots, A_n\| \cdot Y_k = A_k, \quad 0 = (X_j)^T \cdot A \cdot Y_k = (X_j)^T \cdot A_k = a_{jk}$$

для всех $j, k \in \overline{1, n}$. Следовательно, $A = O \in \mathbb{K}^{n\times n}$. □

2. Линейное пространство билинейных форм

5.8. Определение. Суммой билинейных форм $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ называется форма

$$(B_1 + B_2)(x, y) \overset{def:}{=} B_1(x, y) + B_2(x, y),$$

а произведением билинейной формы $B(x, y)$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется следующая форма:

$$(\alpha B)(x, y) \overset{def:}{=} \alpha B(x, y).$$

5.9. Определение. Две билинейные формы $B_1(x, y)$ и $B_2(x, y)$ равны, если $B_1(x, y) = B_2(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

5.10. Лемма. Сумма билинейных форм и умножение билинейной формы на число — билинейные формы.

Доказательство. Пусть $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2, \beta^1, \beta^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$(B_1{+}B_2)(\alpha^1{\cdot}x_1{+}\alpha^2{\cdot}x_2, y) = B_1(\alpha^1{\cdot}x_1{+}\alpha^2{\cdot}x_2, y){+}B_2(\alpha^1{\cdot}x_1{+}\alpha^2{\cdot}x_2, y) =$$
$$= \alpha^1 B_1(x_1, y) + \alpha^2 B_1(x_2, y) + \alpha^1 B_2(x_1, y) + \alpha^2 B_2(x_2, y) =$$

$$= \alpha^1(B_1(x_1, y) + B_2(x_1, y)) + \alpha^2(B_1(x_2, y) + B_2(x_2, y)) =$$
$$= \alpha^1(B_1 + B_2)(x_1, y) + \alpha^2(B_1 + B_2)(x_2, y).$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$(B_1 + B_2)(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) =$$
$$= \beta^1(B_1 + B_2)(x, y_1) + \beta^2(B_1 + B_2)(x, y_2).$$

Итак, сумма билинейных форм — билинейная форма.

Шаг 2. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$(\alpha B)(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha B(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) =$$
$$= \alpha\alpha^1 B(x_1, y) + \alpha\alpha^2 B(x_2, y) = \alpha^1(\alpha B)(x_1, y) + \alpha^2(\alpha B)(x_2, y).$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$(\alpha B)(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \beta^1(\alpha B)(x, y_1) + \beta^2(\alpha B)(x, y_2).$$

Следовательно, произведение билинейной формы на число — билинейная форма. □

5.11. Теорема. *Множество* $\mathrm{T}_2(\mathcal{L})$ *всех билинейных форм на линейном пространстве* $\mathcal{L}$ *образует линейное пространство относительно операций сложения билинейных форм и умножения билинейной формы на число.*

Доказательство. Доказательство всех 8 аксиом линейного пространства проводится на основе того, что числовое поле $\mathbb{K}$ является линейным пространством относительно операций сложения чисел и умножения чисел. □

5.12. Инварианты билинейных форм. Пусть B_e — матрица билинейной формы в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а $B_{e'}$ — матрица билинейной формы в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$, причем

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

Тогда справедливы равенства

$$B_{e'} = C^T \cdot B_e \cdot C \Leftrightarrow B_e = (C^{-1})^T \cdot B_{e'} \cdot C^{-1}. \tag{5.19}$$

5.13. Лемма. Ранг матрицы B_e и знак определителя матрицы B_e являются инвариантами, т.е. не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Поскольку $\det C \neq 0$, то из равенств (5.19) получаем

$$\operatorname{rk} B_{e'} \leqslant \operatorname{rk}(B_e \cdot C) \leqslant \operatorname{rk} B_e, \quad \operatorname{rk} B_e \leqslant \operatorname{rk}(B_{e'} \cdot C^{-1}) \leqslant \operatorname{rk} B_{e'} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{rk} B_{e'} = \operatorname{rk} B_e. \tag{5.20}$$

Кроме того, имеем

$$\det B_{e'} = \det C^T \det B_e \det C = (\det C)^2 \det B_e.$$

□

5.14. Симметричные и кососимметричные билинейные формы.

5.15. Определение. Билинейная форма $B(x, y)$ называется симметричной, если $B(x, y) = B(y, x)$, и называется кососимметричной, если $B(x, y) = -B(y, x)$, для всех $x, y \in \mathcal{L}$.

5.16. Теорема. *Любую билинейную форму можно единственным образом представить в виде суммы симметричной билинейной формы и кососимметричной билинейной формы.*

Доказательство. Справедливо равенство

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x)) + \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x)) := \\ := B_S(x, y) + B_A(x, y).$$

Докажем теперь единственность разложения. Действительно, пусть имеют место два разложения

$$B_{S1}(x, y) + B_{A1}(x, y) = B(x, y) = B_{S2}(x, y) + B_{A2}(x, y) \Rightarrow \\ \Rightarrow B_{S1}(x, y) - B_{S2}(x, y) = B_{A2}(x, y) - B_{A1}(x, y). \quad (5.21)$$

В левой части равенства (5.21) расположена симметричная билинейная форма,а в левой части кососимметричная билинейная форма. Докажем, что равенство

$$B_S(x, y) = B_A(x, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L} \quad (5.22)$$

возможно тогда и только тогда, когда $B_S(x, y) = B_A(x, y) = 0$. Действительно, с одной стороны, поскольку равенство (5.22) выполнено для всех $x, y \in \mathcal{L}$, то имеем

$$B_S(x, y) = B_A(x, y) \quad \text{и} \quad B_S(y, x) = B_A(y, x) \quad (5.23)$$

С другой стороны, переставляя местами аргументы в равенстве (5.22), получим равенство

$$B_S(y, x) = -B_A(y, x) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}. \quad (5.24)$$

Следовательно, из (5.23) и (5.24) вытекает, что

$$B_S(x, y) = B_A(x, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Отсюда и из (5.21) получаем равенства

$$B_{S1}(x, y) = B_{S2}(x, y) \quad \text{и} \quad B_{A2}(x, y) = B_{A1}(x, y) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{L}.$$

□

3. Квадратичные формы

5.17. Определение. Форма $Q : \mathcal{L} \to \mathbb{K}$ называется квадратичной, если существует такая билинейная форма $B(x,y)$ на $\mathcal{L}$, что $Q(x) = B(x,x)$. Такая билинейная форма B называется полярной к квадратичной форме $Q(x)$.

5.18. Матрица квадратичной формы. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Пусть B_e — матрица билинейной формы $B(x,y)$ в этом базисе. Тогда, как мы доказали ранее, билинейная формы примет следующий вид:

$$B(x,y) = X_e^T \cdot B_e \cdot Y_e \Rightarrow Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = b_{ik} x^i x^k, \qquad (5.25)$$

где $x = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot X_e$ и $y = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot Y_e$. Заметим, что в силу теоремы 5.16 билинейная форма $B(x,y)$ единственным образом представима в виде

$$B(x,y) = B_S(x,y) + B_A(x,y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

В частности, справедливо аналогичное утверждение для квадратных матриц

$$B_e = B_{eS} + B_{eA}.$$

Поэтому справедливы равенства

$$Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = X_e^T \cdot (B_{eS} + B_{eA}) \cdot X_e = \\ = X_e^T \cdot B_{eS} \cdot X_e + X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e, \qquad (5.26)$$

$$X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = (X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e)^T = X_e^T \cdot B_{eA}^T \cdot X_e = -X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e \Rightarrow \\ \Rightarrow 2X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = 0 \Rightarrow X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e = 0, \qquad (5.27)$$

поскольку $X_e^T \cdot B_{eA} \cdot X_e$ — число. Таким образом,

$$Q(x) = X_e^T \cdot B_e \cdot X_e = X_e^T \cdot B_{eS} \cdot X_e. \qquad (5.28)$$

5.19. Канонический вид квадратичной формы. Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$, которая в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ имеет вид

$$Q(x) = X_e^T \cdot Q_e \cdot X_e = q_{jk} x^j x^k.$$

5.20. Определение. Базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ называется каноническим для квадратичной формы $Q(x)$, если в этом базисе матрица $Q_{e'}$ этой квадратичной формы имеет диагональный вид, на главной диагонали которой расположены числа 1, 0, -1.

5.21. Матрица $Q_{e'}$ в каноническом базисе имеет следующий вид:

$$q_{jk} = \lambda_k \delta_{jk}, \quad \lambda_k \in \{1, 0, -1\}.$$

Тогда справедливы равенства

$$Q(x) = q_{jk} x^j x^k = \lambda_k \delta_{jk} x^j x^k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x^k)^2.$$

5.22. Лемма. Если квадратичная форма $Q(x)$ порождена симметричной билинейной формой $B(x, y)$, то билинейная форма имеет следующий вид:

$$B(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right]. \tag{5.29}$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x+y) = B(x+y, x+y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) =$$
$$= Q(x) + 2B(x, y) + Q(y) \Rightarrow B(x, y) = \frac{1}{2} \left[Q(x + y) - Q(x) - Q(y) \right].$$

□

5.23. Пример. Пусть $\mathbb{C}[0, 1]$ — линейное пространство вещественных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим квадратичную функцию

$$Q(x) = \int_0^1 x^2(t)\, dt, \quad x(t) \in \mathbb{C}[0, 1].$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)] =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(x(t) + y(t))^2 - x^2(t) - y^2(t) \right] dt =$$
$$= \int_0^1 x(t) y(t)\, dt := B(x, y).$$

Очевидно, что $B(x, y)$ — билинейная форма.

4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

5.24. Определение. Рангом квадратичной формы $Q = X_e^T \cdot Q_e \cdot X_e$, записанной в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, называется ранг ее матрицы Q_e в этом базисе.

5.25. Поскольку матрицы $Q_{e'}$ и Q_e в двух различных базисах связаны равенством $Q_{e'} = C^T \cdot Q_e \cdot C$, $\det C \neq 0$, то $\operatorname{rk} Q_{e'} = \operatorname{rk} Q_e$. Поэтому определение 5.24 корректно и матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в некотором каноническом базисе в случае когда $\operatorname{rk} Q_e = n = \dim \mathcal{L}$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & \text{O} \\ & q_{2'2'} & & \\ & & \ddots & \\ \text{O} & & & q_{n'n'} \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1, -1\}, \quad j' = \overline{1, n},$$

а в случае, когда $\operatorname{rk} Q_e = r' \in [1, n)$ матрица $Q_{e'}$ квадратичной формы в некотором каноническом базисе имеет следующие вид:

$$\begin{pmatrix} q_{1'1'} & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & q_{r'r'} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad q_{j'j'} \in \{1, -1\}, \quad j' = \overline{1, r'}.$$

5.26. Теорема. *Любую квадратичную форму линейным невырожденным преобразованием можно привести к каноническому виду.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольную квадратичную форму можно записать в следующем виде:

$$Q(x) = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \cdots + 2q_{1n}x^1x^n + G(x^2, \ldots, x^n). \quad (5.30)$$

Доказательство теоремы проведем по индукции. Квадратичная форма от одного аргумента всегда имеет канонический вид $q_{11}(x^1)^2$. Предположим, что любую квадратичную форму от $n-1$ аргумента всегда можно привести к каноническому виду. Рассмотрим произвольную квадратичную форму от n аргументов

$$Q(x) = q_{ij}x^ix^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5.31)$$

Случай 1. Предположим, что в квадратичной форме $Q(x)$ хотя бы один из коэффициентов q_{jj} при квадрате $(x^j)^2$ отличен от нуля. Без ограничения общности, можно считать, что $q_{11} \neq 0$. Составим следующее преобразование переменных:

$$y^1 = q_{11}x^1 + \dots + q_{1n}x^n, \tag{5.32}$$

$$y^2 = x^2, \dots, y^n = x^n. \tag{5.33}$$

Преобразование (5.32), (5.33) можно записать в следующей матричной форме:

$$Y = \widetilde{C}_1 \cdot X, \tag{5.34}$$

$$\widetilde{C}_1 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}. \tag{5.35}$$

Заметим, что $\det \widetilde{C} = q_{11} \neq 0$, т.е. преобразование (5.34) не вырожденное. Возведем выражение (5.32) для y^1 в квадрат и разделим на $q_{11} \neq 0$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 = \frac{1}{q_{11}}(q_{11}x^1 + \dots + q_{1n}x^n)^2 = \\ = q_{11}(x^1)^2 + 2q_{12}x^1x^2 + \dots + 2q_{1n}x^1x^n + \Phi(x^2, \dots, x^n), \end{aligned} \tag{5.36}$$

где $\Phi(x^2, \dots, x^n)$ — некоторая квадратичная форма относительно $n-1$ аргумента $x^2, \dots, x^n$. Определим новую квадратичную форму относительно аргументов $x^2, \dots, x^n$:

$$\Psi(x^2, \dots, x^n) \overset{def:}{=} G(x^2, \dots, x^n) - \Phi(x^2, \dots, x^n). \tag{5.37}$$

Из равенств (5.30) и (5.36) с учетом (5.37), (5.33) приходим к выражению

$$Q(x) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(x^2, \dots, x^n) = \frac{1}{q_{11}}(y^1)^2 + \Psi(y^2, \dots, y^n). \tag{5.38}$$

По предположению индукции существует такое невырожденное преобразование

$$\begin{pmatrix} z^2 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_2 \cdot \begin{pmatrix} y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad \det \widetilde{C}_2 \neq 0, \quad \widetilde{C}_2 \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}, \tag{5.39}$$

которое приводит квадратичную форму $\Psi(y^2,\ldots,y^n)$ к каноническому виду

$$\Psi(y^2,\ldots,y^n)=\lambda_2(z^2)^2+\cdots+\lambda_n(z^n)^2. \tag{5.40}$$

Дополним преобразование (5.39) так чтобы в нем участвовали все n переменных. Именно, положим

$$\begin{pmatrix} z^1\\ z^2\\ \vdots\\ z^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y^1\\ y^2\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}. \tag{5.41}$$

В частности, при этом преобразовании $z^1=y^1$. Рассмотрим последовательно преобразования (5.34) и (5.41) и получим итоговое преобразование

$$\begin{pmatrix} z^1\\ z^2\\ \vdots\\ z^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \widetilde{C}_2\end{pmatrix}\cdot\widetilde{C}_1\cdot\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}=C_2\cdot\begin{pmatrix} x^1\\ x^2\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

причем $\det C_2=\det\widetilde{C}_2\det\widetilde{C}_1\neq 0$ и в результате преобразования (5.42) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x)=\frac{1}{q_{11}}(z^1)^2+\lambda_2(z^2)^2+\cdots+\lambda_n(z^n)^2. \tag{5.43}$$

Случай 2. Рассмотрим теперь случай, когда у квадратичной формы $Q(x)$ все диагональные коэффициенты $q_{jj}=0$, $j=\overline{1,n}$, но какой–то вне диагональный элемент отличен от нуля. Например, $q_{12}\neq 0$. Тогда квадратичная форма $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x)=2q_{12}x^1x^2+\cdots\,. \tag{5.44}$$

Сделаем преобразование

$$x^1=\widetilde{x}^1+\widetilde{x}^2, \tag{5.45}$$

$$x^2=\widetilde{x}^1-\widetilde{x}^2, \tag{5.46}$$

$$x^3=\widetilde{x}^3,\ldots,x^n=\widetilde{x}^n, \tag{5.47}$$

которое можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix} = \widetilde{C}_3 \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x}^1 \\ \widetilde{x}^2 \\ \widetilde{x}^3 \\ \vdots \\ \widetilde{x}^n \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

причем $\det \widetilde{C}_3 = -2$, т.е. преобразование $\widetilde{C}_3$ не вырожденное. Подставим равенства (5.45)–(5.47) в выражение (5.44) и получим равенство

$$Q(x) = 2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2 - 2q_{12}(\widetilde{x}^2)^2 + \cdots . \quad (5.49)$$

Слагаемое $2q_{12}(\widetilde{x}^1)^2$ не может исчезнуть при приведении подобных слагаемых, так как все слагаемые квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (5.44), не содержат произведение x^1x^2 и поэтому не могут в результате преобразования (5.45)–(5.47) дать величину $(\widetilde{x}^1)^2$. Далее нужно воспользоваться рассуждениями, рассмотренные в случае 1.

В заключение, в выражении (5.43) нужно сделать завершающее невырожденное преобразование

$$w^1 = \frac{z^1}{|q_{11}|^{1/2}},$$

$$w^j = \begin{cases} |\lambda_j|^{1/2} z_j, & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0; \\ z_j, & \text{если} \quad \text{если} \quad \lambda_j = 0, \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}$$

и в результате получить следующее каноническое уравнение квадратичной формы

$$Q(x) = \widetilde{\lambda}_1(w^1)^2 + \widetilde{\lambda}_2(w^2)^2 + \cdots + \widetilde{\lambda}_n(w^n)^2, \quad (5.50)$$

где $\widetilde{\lambda}_1 = \operatorname{sign}(q_{11})$,

$$\widetilde{\lambda}_j = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \lambda_j = 0; \\ \operatorname{sign}(\lambda_j), & \text{если} \quad \lambda_j \neq 0, \end{cases} \qquad j = \overline{2, n}.$$

Таким образом, невырожденным линейным преобразованием мы привели квадратичную форму к каноническому виду (5.50). □

5.27. Нормальный вид квадратичной формы. Пусть $r = \operatorname{rk} Q$ — ранг квадратичной формы. Тогда нормальным видом квадратичной формы $Q(x)$ называется следующая квадратичная форма:

$$Q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2.$$

Используя метод Лагранжа, а также переобозначение переменных, любую квадратичную форму невырожденным линейным преобразованием можно привести к нормальному виду.

5. Закон инерции квадратичных форм

5.28. Пусть на вещественном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана квадратичная форма ранга r :

$$Q(x) = q_{jk}x^j x^k,$$

где $\{x^s\}$ — координаты вектора $x \in \mathcal{L}$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть $\{\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}\}$ — некоторый новый базис, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид

$$Q(x) = (y^1)^2 + \cdots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \cdots - (y^r)^2. \tag{5.51}$$

5.29. Определение. Число положительных и число отрицательных членов в формуле (5.51) называется соответственно положительным и отрицательным индексом формы.

5.30. Теорема. Закон инерции квадратичных форм. *Положительный и отрицательный индексы являются инвариантами квадратичной формы, т.е. не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.*

Доказательство. Предположим, что помимо вида (5.51) существует такой базис $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$, в котором квадратичная форма имеет следующий вид:

$$Q(x) = (z^1)^2 + \cdots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \cdots - (z^r)^2, \tag{5.52}$$

где $\{z^s\}$ — координаты вектора x в базисе $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$. Нужно доказать, что $k = m$. Предположим, что $k \neq m$, например, $k > m$. Пусть координаты $Z^T = (z^1, \ldots, z^n)$ вектора x в базисе $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n\}$ связаны с координатами $Y^T = (y^1, \ldots, y^n)$ вектора x в базисе $\{\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}\}$ следующим образом:

$$Z = D \cdot Y, \quad Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

или

$$z^i = D^i_j y^j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{5.54}$$

Отметим, что $\det D \neq 0$, поскольку справедливы следующие равенства:

$$\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{e}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_n), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = (\tilde{\mathbf{e}_1}, \ldots, \tilde{\mathbf{e}_n}), \quad \widetilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}} \cdot D \Rightarrow \det D \neq 0.$$

Подставив выражения (5.54) в (5.52) мы должны получить выражение (5.51). Стало быть, имеет место следующее тождество:

$$(z^1)^2 + \dots + (z^m)^2 - (z^{m+1})^2 - \dots - (z^r)^2 \equiv$$
$$\equiv (y^1)^2 + \dots + (y^k)^2 - (y^{k+1})^2 - \dots - (y^r)^2 \quad (5.55)$$

которое справедливо для любых $Y^T = (y^1, \dots, y^n)$ и всех $Z^T = (z^1, \dots, z^n)$, которые связаны с $Y^T = (y^1, \dots, y^n)$ равенством (5.54).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений

$$D^1_1 y^1 + \dots + D^1_k y^k = 0, \quad (5.56)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$D^m_1 y^1 + \dots + D^m_k y^k = 0. \quad (5.57)$$

Поскольку число переменных k больше числа уравнений в системе (5.56)—(5.57), то у этой системы уравнений существует нетривиальное решение

$$y^1 = y^1_0, \dots, y^k = y^k_0.$$

Пусть

$$y^{k+1}_0 = \dots = y^r_0 = y^{r+1}_0 = \dots = y^n_0 = 0.$$

Таким образом, получим столбец

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y^1_0 \\ \vdots \\ y^k_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

Но тогда из (5.56) получаем равенства

$$z^1_0 = D^1_1 y^1_0 + \dots + D^1_k y^k_0 + D^1_{k+1} 0 + \dots + D^1_n 0 = 0, \quad (5.59)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z^m_0 = D^m_1 y^1_0 + \dots + D^m_k y^k_0 + D^m_{k+1} 0 + \dots + D^m_n 0 = 0. \quad (5.60)$$

Таким образом, из (5.53) имеем

$$Z_0 = D \cdot Y_0, \quad Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_0^{m+1} \\ \vdots \\ z_0^n \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0^1 \\ \vdots \\ y_0^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.61}$$

Подставляя столбцы Y_0 и Z_0 в равенство (5.55) получим равенство

$$-(z_0^{m+1})^2 - \cdots - (z_0^r)^2 = (y_0^1)^2 + \cdots + (y_0^k)^2 > 0, \tag{5.62}$$

поскольку по построению числа $y_0^1, \ldots, y_0^k$ одновременно в нуль не обращаются. При этом левая часть равенства неположительна. Пришли к противоречию. Значит, $k \leqslant m$. В точности точно также рассматривается случай $m > k$ с заменой $Y \leftrightarrow Z$. В результате снова придем к противоречию. Следовательно, $k = m$. □

6. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра

5.31. Определение. Квадратичная форма $Q(x)$ называется положительно определенной, если $Q(x) > 0$ для всех $x \neq \theta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

5.32. Определение. Квадратичная форма $Q(x)$ называется отрицательно определенной, если $Q(x) < 0$ для всех $x \neq \theta$ из линейного пространства $\mathcal{L}$.

5.33. Примеры. Квадратичная форма $Q(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$ на двумерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ положительно определена, а квадратичная форма $Q(x) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$ является отрицательно определенной. А форма $Q(x) = (x^1)^2$ на двумерном линейном пространстве не является положительно определенной, поскольку $Q(x) = 0$ для всех $x = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2$, где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — базис в $\mathcal{L}$.

5.34. Теорема. *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее ранг r и положительный индекс инерции p равны размерности пространства n: $r = p = n$.*

Доказательство. Достаточность. Если $p = r = n$, то в каноническом базисе квадратичная форма имеет следующий нормальный вид:

$$Q(x) = (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}.$$

Кроме того, эта квадратичная форма обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$x^1 = \dots = x^n = 0 \Leftrightarrow x = x^i \cdot \mathbf{e}_i = \theta.$$

Необходимость. Пусть или $p < n$ или $r < n$. Тогда в каноническом базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ квадратичная форма принимает следующий вид:

$$Q(x) = Q'(x^1, \dots, x^{n-1}) + \lambda_n (x^n)^2, \quad \lambda_n \leqslant 0.$$

При этом

$$Q(\mathbf{e}_n) = Q'(0, ..., 0) + \lambda_n = \lambda_n \leqslant 0.$$

Следовательно, $Q(x)$ не является положительно определенной квадратичной формой. Поэтому если $Q(x)$ — положительно определенная квадратичная форма, то $p = r = n$. □

5.35. Определение. Главным минором порядка $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ матрицы A размера $n \times n$ называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием последних $n - k$ строк и $n - k$ столбцов.

5.36. Теорема. Теорема Якоби. *Пусть $Q(x)$ — квадратичная форма на линейном пространстве $\mathcal{L}$ с матрицей Q_e в некотором базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$:*

$$Q_e = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

все главные миноры которой отличны от нуля. Тогда существует такой базис $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'})$ линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \left(x^{n'}\right)^2, \tag{5.63}$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \dots + x^{n'} \cdot \mathbf{e}_{n'},$$

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = q_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Справедлива следующая цепочка строгих вложений:

$$L(\mathbf{e}_1) \subset L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \subset \dots \subset L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

На линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1)$ квадратичная форма Q имеет следующий вид:

$$Q(x) = q_{11} \left(x^1\right)^2, \quad x = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_n, \tag{5.64}$$

$$q_{11} = B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0.$$

Рассмотрим в линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1)$ вектор

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{q_{11}} \mathbf{e}_1. \tag{5.65}$$

Этот вектор образует базис в $L(\mathbf{e}_1)$ и при этом

$$B(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}) = \frac{1}{q_{11}^2} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{q_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}. \tag{5.66}$$

Следовательно, в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1)$ квадратичная форма $Q(x)$ при $x \in L(\mathbf{e}_1)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2, \quad x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{e}_n. \tag{5.67}$$

Шаг 2. Предположим, что при $m \in \overline{1, n-1}$ в линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \subset \mathcal{L}$ искомый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$[1] построен. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \subset \mathcal{L}$ для $x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ имеем

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \left(x^{1'}\right)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} \left(x^{m'}\right)^2, \tag{5.68}$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \cdots + x^{m'} \cdot \mathbf{e}_{m'} + 0 \cdot \mathbf{e}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{e}_n.$$

Из вида квадратичной формы (5.68) имеем

$$B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \delta_{i'j'}, \quad i', j' \in \overline{1, m'}, \quad i = i'. \tag{5.69}$$

Теперь рассмотрим следующую систему уравнений:

$$B(x, \mathbf{e}_{1'}) = 0, \ldots, B(x, \mathbf{e}_{m'}) = 0, \quad x \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}). \tag{5.70}$$

Заметим, что

$$x = \sum_{i=1}^{m+1} x^i \cdot \mathbf{e}_i. \tag{5.71}$$

Тогда из (5.70) и (5.71) получим, следующую систему m уравнений относительно $m+1$ переменных $x^1, \ldots, x^{m+1}$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{1'}) x^i = 0, \ldots, \sum_{i=1}^{m+1} B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{m'}) x^i = 0. \tag{5.72}$$

[1] При этом $m' = m$.

Очевидно, что такая система линейных однородных уравнений имеет нетривиальное решение, которое обозначим через $x_0 \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Пусть

$$\mathbf{e}_{m'+1} := \lambda_0 \cdot x_0, \tag{5.73}$$

где $\lambda_0 \neq 0$ выберем таким образом, чтобы

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}) \cdot C, \tag{5.74}$$

$$\det C = \frac{1}{\Delta_{m+1}}, \quad \Delta_{m+1} = \det Q_{m+1,e}, \tag{5.75}$$

где $Q_{m+1,e}$ — это матрица квадратичной формы $Q(x)$, рассматриваемой на линейном подпространстве $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}\}$. Отметим, что $\mathbf{e}_{m'+1}$ тоже решение системы уравнений (5.70). Семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ образует базис в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$.

□□ Действительно, по построению семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}\}$ линейно независимо в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Поэтому если семейство векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейно зависимо в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$, то

$$\mathbf{e}_{m'+1} = \sum_{i'=1}^{m'} \alpha^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}. \tag{5.76}$$

Поскольку $\mathbf{e}_{m'+1}$ по построению — решение системы уравнений (5.70), то

$$\sum_{i'=1}^{m'} \alpha^{i'} B(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = 0, \quad j' = \overline{1, m'}, \tag{5.77}$$

из которого в силу (5.69) получаем равенства

$$\alpha^{j'} \frac{\Delta_{j'-1}}{\Delta_{j'}} = 0 \Rightarrow \alpha^{j'} = 0, \quad j' = \overline{1, m'}. \tag{5.78}$$

Отсюда приходим к выводу о линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ в $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$, а поскольку их число равно размерности этого линейного подпространства, то они образуют базис в этом линейном подпространстве. ⊠⊠

Шаг 3. Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{B(\mathbf{e}_{m'+1}, \mathbf{e}_{m'+1})}{\Delta_m} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \cdots \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m} B(\mathbf{e}_{m'+1}, \mathbf{e}_{m'+1}) =$$
$$= \prod_{k'=1}^{m'+1} B(\mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'}) = \det Q_{m+1,e'} = \det \left(C^T \cdot Q_{m+1,e} \cdot C\right) =$$

$$= (\det C)^2 \det Q_{m+1,e} = \frac{1}{\Delta_{m+1}}, \quad (5.79)$$

где мы воспользовались равенством (5.75) и $Q_{m+1,e'}$ — это матрица квадратичной формы $Q(x)$ в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$. Поэтому из (5.79) получаем равенство

$$B(\mathbf{e}_{m'+1}, \mathbf{e}_{m'+1}) = \frac{\Delta_m}{\Delta_{m+1}}. \quad (5.80)$$

Следовательно, из (5.69), (5.70) и (5.80) приходим к выводу о том, что в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}\}$ линейного подпространства $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1})$ квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\left(x^{1'}\right)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{m-1}}{\Delta_m}\left(x^{m'}\right)^2 + \frac{\Delta_m}{\Delta_{m+1}}\left(x^{m'+1}\right)^2, \quad (5.81)$$

$$x = x^{1'} \cdot \mathbf{e}_{1'} + \cdots + x^{m'} \cdot \mathbf{e}_{m'} + x^{m'+1} \cdot \mathbf{e}_{m'+1} + 0 \cdot \mathbf{e}_{m+2} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{e}_n. \quad (5.82)$$

В силу результатов шагов 1 и 3 приходим к утверждению теоремы. □

5.37. Определение. Матрица $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется положительно определенной, если соответствующая квадратичная форма

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{n} q_{ij} x^i x^j$$

является положительно определенной.

5.38. Теорема. Критерий Сильвестра. *Матрица Q является положительно определенной тогда и только тогда, когда все ее главные миноры положительны:*

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доказательство. Необходимость. Доказательство проведем по индукции.

Предположение индукции. Матрица $Q \in \mathbb{R}^{k \times k}$ положительно определенная, тогда все ее главные миноры положительны.

Шаг индукции. Пусть матрица $Q \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ положительно определенная. Докажем, что все ее главные миноры положительны.

Рассмотрим соответствующую положительно определенную квадратичную форму

$$Q(x) = \sum_{i,j=1,1}^{k+1} q_{ij}x^i x^j = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij}x^i x^j + \\ + 2\sum_{i=1}^{k} q_{ik+1}x^i x^{k+1} + q_{k+1k+1}(x^{k+1})^2.$$

Заметим, что

$$0 \leqslant Q(x^1, \ldots, x^k, 0) = \sum_{i,j=1,1}^{k} q_{ij}x^i x^j$$

и $Q(x^1, \ldots, x^k, 0) = 0$ тогда и только тогда когда, $x^1 = \cdots = x^k = 0$. Следовательно, по предположению индукции все главные миноры матрицы Q до порядка k включительно положительны. Сделаем переход к каноническому базису, в котором квадратичная форма примет нормальный вид с матрицей $Q' = C^T QC$. Поскольку матрица Q положительно определенная, то матрица Q' имеет следующий вид:

$$Q' = \begin{pmatrix} 1 & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det Q' = 1.$$

Тогда имеем

$$1 = \det Q' = (\det C)^2 \det Q \Rightarrow \det Q > 0.$$

Необходимость условий доказана.

Достаточность. Следует из теоремы 5.36.

□

7. Примеры решения задач

5.39. Пример. Приведение квадратичной формы невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Рассмотрим в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ квадратичную форму

$$Q(x) = (x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 8(x^3)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 - 16x^2x^3, \quad (5.83)$$

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j.$$

Нужно найти какой–либо базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$, в котором квадратичная форма примет нормальный вид.

Решение. Сначала рассмотрим все слагаемые в (5.83), которые содержат переменную x^1. Действительно, справедливы равенства

$$\begin{aligned}(x^1)^2 + 4x^1x^2 - 2x^1x^3 &= \\ &= (x^1 + 2x^2 - x^3)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^2x^3 = \\ &= (y^1)^2 - 4(x^2)^2 - (x^3)^2 + 4x^2x^3, \quad y^1 = x^1 + 2x^2 - x^3. \quad (5.84)\end{aligned}$$

С учетом (5.84) из (5.83) получим следующее равенство:

$$Q = (y^1)^2 - 2(x^2)^2 - 9(x^3)^2 - 12x^2x^3. \quad (5.85)$$

Рассмотрим все слагаемые в (5.85), содержащие переменную x^2. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}-2(x^2)^2 - 12x^2x^3 &= -2(x^2 + 3x^3)^2 + 18(x^3)^2 = \\ &= -(y^2)^2 + 18(x^3)^2, \quad y^2 = \sqrt{2}(x^2 + 3x^3). \quad (5.86)\end{aligned}$$

Из (5.85) с учетом (5.86) приходим к следующим равенствам:

$$Q = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 9(x^3)^2 = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^3)^2, \quad (5.87)$$

где

$$y^1 = x^1 + 2x^2 - x^3, \quad y^2 = \sqrt{2}(x^2 + 3x^3), \quad y^3 = 3x^3. \quad (5.88)$$

В матричной форме имеем

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

Таким образом, новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, в котором квадратичная форма Q имеет нормальный вид связан со старым базисом соотношением

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (5.90)$$

ГЛАВА 6

Евклидовы и унитарные пространства

1. Евклидово пространство

6.1. Определение. Евклидово пространство $\mathcal{E}$ — это вещественное линейное пространство, в котором зафиксирована симметричная билинейная форма $G(x, y)$, причем соответствующая квадратичная форма $Q(x) = B(x, x)$ является положительно определенной. Значение билинейной формы на паре элементов x, y называется скалярным произведением этих векторов и обозначается (x, y), т.е.

$$(x, y) := G(x, y).$$

6.2. Лемма. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in \mathcal{E}$;
2. $(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 (x_1, y) + \alpha^2 (x_2, y)$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$;
3. $(x, x) > 0$ для всех $x \neq \theta$.

Доказательство. Первое свойство — следствие симметричности билинейной формы $G(x, y)$, второе свойство — следствие билинейности формы $G(x, y)$ и третье свойство — следствие положительной определенности соответствующей квадратичной формы $Q(x) = G(x, x)$. $\square$

6.3. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие равенства (см. главу 5):

$$(x, y) = G(x, y) = G(x^i \cdot \mathbf{e}_i, y^j \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = x^i y^j G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i y^j = X_e^T \cdot G_e \cdot Y_e,$$

где матрица $G_e = (g_{ij})$ — положительно определенная матрица.

6.4. Определение. Матрица $G_e = (g_{ij})$ называется матрицей Грама или метрическим тензором.

6.5. Элементы матрицы Грама представляют собой скалярное произведение элементов базиса:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji}.$$

При переходе к новому базису с помощью матрицы перехода C матрица Грама преобразуется по тому же закону, что и любая матрица билинейной формы

$$G_{e'} = C^T \cdot G_e \cdot C, \quad g_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}.$$

6.6. Лемма. $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Это следствие критерия Сильвестра положительной определенности матрицы. $\square$

6.7. В силу результата леммы 6.6 матрица Грама G_e обратима. Элементы обратной матрицы G_e^{-1} обозначаются g^{ij}. Тогда справедливы равенства

$$G_e \cdot G_e^{-1} = I \Leftrightarrow \{G_e \cdot G_e^{-1}\}^l_j = \{G_e\}^l_k \{G_e^{-1}\}^k_j = \\ = \{G_e\}_{lk} \{G_e^{-1}\}^{kj} = g_{lk} g^{kj}, \quad \{I\}^l_j = \{I\}^j_l = \delta^j_l \Rightarrow g_{lk} g^{kj} = \delta^j_l, \quad (6.1)$$

$$G_e^{-1} \cdot G_e = I \Rightarrow \{G_e^{-1} \cdot G_e\}^l_j = \{G_e^{-1}\}^l_k \{G_e\}^k_j = \\ = \{G_e^{-1}\}^{lk} \{G_e\}^{kj} = g^{lk} g_{kj} \Rightarrow g^{lk} g_{kj} = \delta^l_j. \quad (6.2)$$

Заметим, что мы используем на протяжении книги следующие три обозначения:

$$\{A\}_{jk}, \quad \{A\}^j_k, \quad \{A\}^{jk},$$

где индекс j нумерует строчку, а индекс k столбец. Операции $\{A\}_{jk}, \{A\}^j_k, \{A\}^{jk}$ заключаются в извлечении элемента из матрицы A, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Например, если $A = (a^{jk})^n_m$, то

$$\{A\}_{jk} = a^{jk}.$$

Отметим, что справедлива

6.8. Теорема. *Справедливо неравенство Коши–Буняковского:*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) \quad \textit{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}. \quad (6.3)$$

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathcal{E}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

$$(\alpha \cdot x + y, \alpha \cdot x + y) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\alpha) := (x, x)\alpha^2 + 2(x, y)\alpha + (y, y) \geqslant 0. \quad (6.4)$$

Для того чтобы функция $f(\alpha)$ принимала только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неположителен:
$$(x,y)^2-(x,x)(y,y)\leqslant 0.$$
$\square$

6.9. Лемма. Для того чтобы было выполнено равенство
$$(x,y)^2=(x,x)(y,y), \tag{6.5}$$
необходимо и достаточно, чтобы векторы $x,y\in\mathcal{E}$ были линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим снова функцию $f(\alpha)$. Эта функция равна нулю тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного уравнения $f(\alpha)=0$ равен нулю, т.е. тогда и только тогда, когда выполнено равенство (6.5). Возьмем это $\alpha=\alpha_0\in\mathbb{R}$. Тогда получим равенство
$$(\alpha_0\cdot x+y,\alpha_0\cdot x+y)=0\Leftrightarrow\alpha_0\cdot x+y=0,$$
т.е. векторы x и y линейно зависимы. Здесь мы воспользовались тем, что квадратичная форма $Q(x)=B(x,x)=(x,x)$ положительно определенная. $\square$

6.10. Пример. Линейное пространство столбцов $\mathbb{R}^{n\times 1}$ становится евклидовым пространством, если для столбцов
$$X=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y^1\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}$$
определить скалярное произведение по формуле
$$(X,Y)=X^T\cdot G\cdot Y, \tag{6.6}$$
где $G\in\mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно определенная, симметричная матрица. Действительно, справедливы следующие равенства:
$$(Y,X)=Y^T\cdot G\cdot X=(Y^T\cdot G\cdot X)^T=$$
$$=X^T\cdot G^T\cdot Y^{TT}=X^T\cdot G\cdot Y=(X,Y)\quad\text{для всех}\quad X,Y\in\mathbb{R}^{n\times 1},$$
поскольку $G^T=G$,
$$(\alpha^1X_1+\alpha^2X_2,Y)=(\alpha^1X_1+\alpha^2X_2)^T\cdot G\cdot Y=(\alpha^1X_1^T+\alpha^2X_2^T)\cdot G\cdot Y=$$
$$=\alpha^1X_1^T\cdot G\cdot Y+\alpha^2X_2^T\cdot G\cdot Y=$$
$$=\alpha^1(X_1,Y)+\alpha^2(X_2,Y)\quad\text{для всех}\quad X_1,X_2,Y\in\mathbb{R}^{n\times 1},\quad\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{R},$$

$$(X,X)=X^T\cdot G\cdot X>0 \quad \text{для всех} \quad X^T\neq(0,\ldots,0),$$

поскольку G — положительно определенная матрица.

6.11. Пример. Скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times m}$ можно ввести по формуле

$$(X,Y)=\operatorname{tr}(X^T\cdot Y),\quad X,Y\in\mathbb{R}^{n\times m}.$$

Действительно, в курсе аналитической геометрии нами были доказаны следующие свойства следа квадратной матрицы:

$$\operatorname{tr}A^T=\operatorname{tr}A,\quad \operatorname{tr}(\alpha^1A_1+\alpha^2A_2)=\alpha^1\operatorname{tr}A_1+\alpha^2\operatorname{tr}A_2$$

для любых матриц $A,A_1,A_2\in\mathbb{R}^{p\times p}$ и произвольных чисел $\alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(Y,X)=\operatorname{tr}(Y^T\cdot X)=\operatorname{tr}((Y^T\cdot X)^T)=$$
$$=\operatorname{tr}(X^T\cdot Y)=(X,Y)\quad \text{для любых}\quad X,Y\in\mathbb{R}^{n\times m},$$

$$(\alpha^1X_1+\alpha^2X_2,Y)=\operatorname{tr}((\alpha^1X_1+\alpha^2X_2)^T\cdot Y)=$$
$$=\operatorname{tr}(\alpha^1X_1^T\cdot Y+\alpha^2X_2^T\cdot Y)=\alpha^1\operatorname{tr}(X_1^T\cdot Y)+\alpha^2\operatorname{tr}(X_2^T\cdot Y)=$$
$$=\alpha^1(X_1,Y)+\alpha^2(X_2,Y)\quad \text{для всех}\quad Y,X_1,X_2\in\mathbb{R}^{n\times m},\quad \alpha^1,\alpha^2\in\mathbb{R},$$

$$(X,X)=\operatorname{tr}(X^T\cdot X)=\sum_{j=1}^{m}\{X^T\cdot X\}_j^j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\{X^T\}_k^j\{X\}_j^k=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\{X\}_j^k\right)^2\Rightarrow(X,X)>0\quad \text{для всех}\quad X\neq O\in\mathbb{R}^{n\times m}.$$

6.12. Пример. На бесконечномерном линейном пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций можно ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt=$$

$$= \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = (g,f) \quad \text{для любых} \quad f(t), g(t) \in \mathbb{C}[0,1],$$

$$(\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2, g) = \int_0^1 (\alpha^1 f_1(t) + \alpha^2 f_2(t))g(t)\,dt =$$

$$= \alpha^1 \int_0^1 f_1(t)g(t)\,dt + \alpha^2 \int_0^1 f_2(t)g(t)\,dt =$$

$$= \alpha^1(f_1,g)+\alpha^2(f_2,g) \text{ для всех } f_1(t), f_2(t), g(t) \in \mathbb{C}[0,1],\ \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(f,f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

2. Длины и углы в евклидовом пространстве

6.13. Определение. Нормой вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число

$$\|x\| \overset{def:}{=} \sqrt{(x,x)}.$$

6.14. Теорема. *Имеют место соотношения*:

1. $\|x\| \geqslant 0$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$, *причем* $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда*, *когда* $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$ *и всех* $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *для всех* $x, y \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x,x)} = |\alpha|\sqrt{(x,x)} = |\alpha|\|x\|.$$

Для доказательства третьего утверждения заметим, что справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$$

$$= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leqslant \|x\|^2 + 2(x,x)^{1/2}(y,y)^{1/2} + \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

для всех $x, y \in \mathcal{E}$. □

6.15. Определение. Угол между векторами x, y — это число $\phi \in [0, \pi]$, определяемый из уравнения

$$\cos\phi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

6.16. Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что угол определен для любых двух ненулевых векторов.

3. Унитарные пространства

6.17. Определение. Полуторалинейной формой на комплексном линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется скалярная функция $G(x, y)$ двух переменных, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$;
2. $G(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2, y) = \alpha^1 G(x_1, y) + \alpha^2 G(x_2, y)$ для всех $x_1, x_2, y \in \mathcal{L}$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$.

6.18. Лемма. Полуторалинейная форма $G(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $G(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) = \overline{\beta^1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2)$ для всех $x, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и всех $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{C}$;
2. $G(x, x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} G(x, \beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2) &= \overline{G(\beta^1 \cdot y_1 + \beta^2 \cdot y_2, x)} = \\ &= \overline{\beta^1 G(y_1, x) + \beta^2 G(y_2, x)} = \\ &= \overline{\beta_1}\,\overline{G(y_1, x)} + \overline{\beta^2}\,\overline{G(y_2, x)} = \overline{\beta_1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2), \end{aligned}$$

$$G(x, x) = \overline{G(x, x)} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow G(x, x) \in \mathbb{R}.$$

□

6.19. Из за первого свойства антилинейности форму $G(x, y)$ называют полуторалинейной.

6.20. Определение. Полуторалинейная форма $G(x, y)$ называется положительно определенной, если

$$G(x, x) > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad x \neq \theta.$$

6.21. Определение. Унитарное пространство $\mathcal{U}$ — это комплексное линейное пространство, на котором задана полуторалинейная, положительно определенная форма $G(x, y)$. Обычно пишут (x, y) вместо $G(x, y)$ и называют выражение (x, y) скалярным произведением.

6.22. Пример. Например, на линейном пространстве $\mathbb{C}_C[0,1]$ комплекснозначных непрерывных функций можно задать следующую полуторалинейную положительно определенную форму:

$$G(f,g)=\int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

6.23. Матрица Грама. Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ выбран базис $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}(x,y)=G(x,y)=G(x^j\cdot\mathbf{e}_j,y^k\cdot\mathbf{e}_k)=\\ =x^j\overline{y^k}G(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)=x^jg_{jk}\overline{y^k}=X_e^T\cdot G_e\cdot\overline{Y_e}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Действительно, пусть

$$X_e=\begin{pmatrix}x^1\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix},\quad \overline{Y}_e=\begin{pmatrix}\overline{y^1}\\ \vdots\\ \overline{y^n}\end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$G_e\in\mathbb{C}^{n\times n},\ X_e,Y_e\in\mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$\{G_e\cdot\overline{Y}_e\}^j=\sum_{l=1}^n\{G_e\}^j_l\{\overline{Y}_e\}^l=\sum_{l=1}^n\{G_e\}_{jl}\{\overline{Y}_e\}^l=g_{jl}\overline{y}^l\in\mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$X_e^T=(x^1,\ldots,x^n)\in\mathbb{C}^{1\times n},$$

$$X_e^T\cdot G_e\cdot\overline{Y_e}=\sum_{j=1}^n\{X_e^T\}_j\{G_e\cdot\overline{Y}_e\}^j=x^jg_{jl}\overline{y}^l.$$

Здесь мы воспользовались еще двумя операциями:

$$\{X\}^j\quad\text{и}\quad\{X^T\}_k,\quad X\in\mathbb{K}^{n\times 1},$$

где первая операция — операция извлечения из столбца X элемента, расположенного на j–ой строчке, а вторая операция — операция извлечения из строчки X^T элемента, расположенного на месте k–ого столбца строчки X^T.

Теперь найдем закон преобразования матрицы полуторалинейной формы. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}g_{j'k'}=G(\mathbf{e}_{j'},\mathbf{e}_{k'})=G(c^j_{j'}\cdot\mathbf{e}_j,c^k_{k'}\cdot\mathbf{e}_k)=c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}}G(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)=\\ =c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}}g_{jk}=c^j_{j'}g_{jk}\overline{c^k_{k'}}\Leftrightarrow G_{e'}=C^T\cdot G_e\cdot\overline{C}.\end{aligned}\tag{6.8}$$

□ Действительно, с одной стороны, имеют место следующее равенство:

$$g_{jk}\overline{c}^{k}_{k'} = \{G_e \cdot \overline{C}\}_{jk'},$$

в котором индекс k' нумерует столбцы, а индекс j нумерует строчки. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$c^{j}_{j'} g_{jk}\overline{c}^{k}_{k'} = (c^{1}_{j'}, \ldots, c^{n}_{j'}) \begin{pmatrix} \{G_e \cdot \overline{C}\}_{1k'} \\ \vdots \\ \{G_e \cdot \overline{C}\}_{nk'} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{C^T\}^{j'}_{j} \{G_e \cdot \overline{C}\}_{jk'} = \{C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}\}^{j'}_{k'} =$$

$$= \{C^T \cdot G_e \cdot \overline{C}\}_{j'k'}, \quad (6.9)$$

поскольку как мы уже отмечали операции

$$\{A\}^{j}_{k} = \{A\}^{jk} = \{A\}_{jk} \quad \text{для любой матрицы} \quad A \in \mathbb{K}^{m\times n}. \quad \boxtimes$$

6.24. Теорема. *Справедливо следующее неравенство Коши–Буняковского:*

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathfrak{U}. \qquad (6.10)$$

Доказательство. Если $x = \theta$, то неравенство (6.10) выполнено. Пусть $x \neq \theta$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 \leqslant (\alpha \cdot x + y, \alpha \cdot x + y) = \alpha(x, \alpha \cdot x + y) + (y, \alpha \cdot x + y) =$$

$$= |\alpha|^2 (x, x) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha}(y, x) + (y, y) =$$

$$= |\alpha|^2 (x, x) + \alpha(x, y) + \overline{\alpha}\overline{(x, y)} + (y, y). \quad (6.11)$$

Теперь положим в (6.11)

$$\alpha = -\frac{\overline{(x, y)}}{(x, x)}$$

и получим следующее неравенство:

$$\frac{|(x, y)|^2}{(x, x)} - \frac{|(x, y)|^2}{(x, x)} - \frac{|(x, y)|^2}{(x, x)} + (y, y) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y).$$

□

6.25. Точно также как и в случае евклидова пространства вводится норма вектора унитарного пространства, а вот угол между векторами унитарного пространства ввести нельзя, поскольку $(x, y) \in \mathbb{C}$.

4. Ортогональность

6.26. Определение. Векторы x, y либо евклидова пространства $\mathcal{E}$ либо унитарного пространства $\mathcal{U}$ называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом используется обозначение $x \perp y$. Если x ортогонально каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{P}$, то используется обозначение $x \perp \mathcal{P}$. Множество всех векторов, которые ортогональны линейному подпространству $\mathcal{P}$ обозначается символом $\mathcal{P}^{\perp}$.

6.27. Лемма. Вектор x ортогонален самому себе $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

Доказательство. Поскольку скалярное произведение и в евклидовом и в унитарном пространствах является положительно определенной билинейной или полуторалинейной формами, то $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$. □

6.28. Лемма. Если $y \perp x_1, \dots, y \perp x_m$, то $y \perp L(x_1, \dots, x_m)$.

Доказательство. Пусть $x \in L(x_1, \dots, x_m)$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j \cdot x_j \Rightarrow (x, y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j (x_j, y) = 0.$$

□

6.29. Лемма. Если $x \perp \mathbf{e}_j$ для всех $j = \overline{1, n}$, где $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$, то $x = \theta$.

Доказательство. Согласно результату леммы 6.28 имеем $x \perp \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда, в частности, $(x, x) = 0$. Отсюда сразу же получаем, что $x = \theta$. □

6.30. Лемма. Справедливо неравенство $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Пусть G_e — матрица Грама в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом (унитарном) пространстве $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Пусть

$$\det G_e = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) & \cdots & (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^1 \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} + \dots + \alpha^n \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} (\alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (\alpha^n \cdot \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (y, \mathbf{e}_1) \\ \vdots \\ (y, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \alpha^j \cdot \mathbf{e}_j \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y, \mathbf{e}_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6.12}$$

причем $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \neq (0, \ldots, 0)$. Осталось воспользоваться результатом леммы (6.29) и получить, что $y = \theta$. Следовательно,

$$\alpha^1 \cdot \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha^n \cdot \mathbf{e}_n = \theta, \quad (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \neq (0, \ldots, 0).$$

Пришли к противоречию с тем, что $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис. Таким образом, $\det G_e \neq 0$. □

6.31. Лемма. Если $x \perp y$, то $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x)+(y, x)+(x, y)+(y, y) = \|x\|^2+\|y\|^2.$$

□

6.32. Лемма. Если ненулевые векторы $x_1, \ldots, x_m$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Пусть $(x_j, x_k) = 0$ при $j \neq k$ и $x_j \neq \theta$ для всех $j = \overline{1, m}$. Теперь рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha^m \cdot x_m = \theta$$

Умножим обе части этого равенства на x_k при $k \in \overline{1, m}$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha^m \cdot x_m, x_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^1 (x_1, x_k) + \cdots + \alpha^m (x_m, x_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha^k (x_k, x_k) = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0.$$

Значит, это семейство векторов является линейно независимым. □

6.33. Поскольку и евклидово пространство $\mathcal{E}$ и унитарное пространство $\mathcal{U}$ являются линейными пространствами над числами из $\mathbb{R}$ и из $\mathbb{C}$, соответственно, то над этими линейными пространствами определены сопряженные пространства $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{U}^*$ соответственно. Однако, для евклидовых и унитарных линейных пространств справедливо следующая важная **теорема Рисса–Фреше**:

6.34. Теорема. *Всякая линейная форма $f \in \mathcal{E}^*(f \in \mathcal{U}^*)$ представима в следующем виде:*

$$\langle f, x\rangle = (x, y_f) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{6.13}$$

где вектор $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ определяется формой f однозначным образом.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — соответствующий взаимный базис в $\mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$. Тогда для векторов $x, y_f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$ справедливы следующие разложения:

$$x = x^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad f = f_j \cdot \mathbf{e}^j, \quad g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{6.14}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\langle f, x\rangle = \langle f_j \cdot \mathbf{e}^j, x^i \mathbf{e}_i\rangle = f_j x^i \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i\rangle = f_j x^i \delta_i^j = f_i x^i, \tag{6.15}$$

$$(x, y_f) = (x^i \cdot \mathbf{e}_i, \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^i \overline{\eta_f^k} G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k}. \tag{6.16}$$

Тогда искомое представление (6.13) в координатах при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ эквивалентно равенству

$$f_i x^i = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k} \Leftrightarrow (f_i - g_{ik}\overline{\eta_f^k}) x^i = 0. \tag{6.17}$$

Равенство (6.13) должно быть выполнено для любых векторов $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и поэтому эквивалентное ему равенство (6.17) (в заданном базисе) должно быть выполнено для всех $x^i \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ для всех $i = \overline{1, n}$. Пусть $X^T = (x^1, \ldots, x^n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 расположена на p–ом месте, тогда из (6.17) получим следующие равенства:

$$g_{pk}\overline{\eta_f^k} = f_p, \quad p = \overline{1, n}. \tag{6.18}$$

Это неоднородная, вообще говоря, квадратная линейная система уравнений. Рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$g_{pk}\overline{\eta_f^k} = 0, \quad p = \overline{1, n}, \tag{6.19}$$

которую несложно переписать в следующем виде:

$$0 = g_{pk}\overline{\eta_f^k} = G(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_k)\overline{\eta_f^k} = G\left(\mathbf{e}_p, \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k\right) = \\ = G(\mathbf{e}_p, y_f) = (\mathbf{e}_p, y_f) \quad \text{для всех} \quad p = \overline{1, n}. \tag{6.20}$$

В силу результата леммы 6.29 получаем, что $y_f = \theta$. Следовательно, $\eta_f^k = 0$ для всех $k = \overline{1, n}$. Значит, однородная квадратная система линейных уравнений (6.19) имеет только тривиальное решение. Таким образом, в силу альтернатив Фредгольма неоднородная система линейных уравнений (6.19) имеет единственное решение

$\{\eta_f^k\}_{k=1}^n$. «Прокручивая» в обратном порядке формулы (6.18)–(6.13) для вектора $y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k$ получим, что для каждой линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$ существует элемент $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{E})$ такой, что справедливо равенство (6.13), причем

$$y_f = \eta_f^k \cdot \mathbf{e}_k,$$

а числа η_f^k определяются из неоднородной системы уравнений (6.18).

Единственность найденного вектора y_f следует из следующих соображений. Пусть векторов два y_f и z_f. Тогда для всех $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ справедливы следующие соотношения:

$$\langle f, x\rangle = (x, y_f) = (x, z_f) \Leftrightarrow (x, y_f - z_f) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (y_f - z_f, y_f - z_f) = 0 \Rightarrow y_f - z_f = \theta \Rightarrow y_f = z_f.$$

$\square$

6.35. Определение. Базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ или в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ называется ортонормированным, если справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n}.$$

6.36. Теорема. *Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ или в унитарном пространстве $\mathcal{U}$, тогда имеют место следующие равенства*:

$$x = \sum_{i=1}^n (x, \mathbf{e}_i)\cdot \mathbf{e}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |(x, \mathbf{e}_i)|^2 \text{ для всех } x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{6.21}$$

где второе равенство носит название равенства Парсеваля.

Доказательство. Представим произвольный вектор $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ в виде разложения по базису:

$$x = x^k \cdot \mathbf{e}_k \Rightarrow (x, \mathbf{e}_j) = (x^k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \\ = x^k \delta_{kj} = x^j \Rightarrow x = \sum_{j=1}^n (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j,$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{j=1}^n (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^n (x, \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x,\mathbf{e}_j)\overline{(x,\mathbf{e}_k)}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x,\mathbf{e}_j)\overline{(x,\mathbf{e}_k)}\delta_{kj} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}|(x,\mathbf{e}_j)|^2.$$

$\square$

5. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

6.37. Задача об ортогональной проекции. Пусть $\mathcal{L}$ — это либо евклидово пространство $\mathcal{E}$ либо унитарное пространство $\mathcal{U}$, $\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k\}$ — ортогональный базис в $L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k)\subset\mathcal{L}$:

$$(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_i)=0,\quad i\neq j,\quad \mathbf{f}_j\neq\theta,\quad j=\overline{1,n}, \tag{6.22}$$

причем $\dim\mathcal{L}=n$ и $1\leqslant k\leqslant n-1$. Пусть $x\in\mathcal{L}$, но $x\notin L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k)$.

Задача об ортогональной проекции заключается в том, чтобы найти ортогональную проекцию вектора x на линейную оболочку $L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k)$, т. е. представить x в следующем виде:

$$x=y+z,\quad y\in L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k),\quad z\perp L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k). \tag{6.23}$$

$\square$ Действительно, для решения этой задачи заметим, что с одной стороны, $y\in L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k)$, то

$$y=\lambda^1\cdot\mathbf{f}_1+\cdots+\lambda^k\cdot\mathbf{f}_k. \tag{6.24}$$

С другой стороны, $z\perp L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k)$ и поэтому

$$(z,\mathbf{f}_1)=\cdots=(z,\mathbf{f}_k)=0. \tag{6.25}$$

Из (6.23)–(6.25) с учетом (6.22) получаем, что

$$(x,\mathbf{f}_1)=\lambda^1(\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_1),\ldots,(x,\mathbf{f}_k)=\lambda^k(\mathbf{f}_k,\mathbf{f}_k). \tag{6.26}$$

Следовательно,

$$\lambda^j=\frac{(x,\mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_j)},\quad j=\overline{1,k}. \tag{6.27}$$

Из (6.23), (6.24) и (6.27) получаем, что

$$y=\sum_{j=1}^{k}\frac{(x,\mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_j)}\mathbf{f}_j,\quad z=x-\sum_{j=1}^{k}\frac{(x,\mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j,\mathbf{f}_j)}\mathbf{f}_j. \tag{6.28}$$

Непосредственно можно убедиться, что

$$y\in L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k),\quad z\perp L(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_k).$$

Проверим второе утверждение. Очевидно, что достаточно проверить свойства (6.25). Действительно, имеем

$$(z, \mathbf{f}_m) = (x, \mathbf{f}_m) - \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_m \right) =$$

$$= (x, \mathbf{f}_m) - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} (\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_m) =$$

$$= (x, \mathbf{f}_m) - (x, \mathbf{f}_m) = 0, \quad m = \overline{1, k}. \tag{6.29}$$

По своему смыслу вектор z, определенный равенством из (6.28) — это «перпендикуляр» к линейной оболочке $L(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k)$. Наконец, представление (6.23) можно записать так

$$x = \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j + \left(x - \sum_{j=1}^{k} \frac{(x, \mathbf{f}_j)}{(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_j)} \mathbf{f}_j \right). \tag{6.30}$$

Решение задачи об ортогональной проекции завершено. $\boxtimes$

6.38. Возникает вопрос: а всегда ли существует ортонормированный базис в евклидовом и унитарном пространствах? Ответ на этот вопрос дает следующая **теорема Грама–Шмидта.**

6.39. Теорема. *В любом нетривиальном евклидовом* (*в унитарном*) *пространстве* $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ *существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. По нему будем строить ортонормированный базис.

Шаг 1. Первый вектор будущего базиса возьмем равным первому вектору исходного базиса

$$\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow L(\mathbf{e}_1) = L(\mathbf{e}_{1'}). \tag{6.31}$$

Шаг 2. Предположим, что мы построили ортогональный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}\}$ в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. В частности, имеем

$$L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k), \quad k' = k.$$

Теперь по вектору $\mathbf{e}_{k+1} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$ согласно разложению (6.30) построим перпендикуляр $\mathbf{e}_{k'+1}$ к линейной оболочке $L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'})$. Действительно, справедливо разложение

$$\mathbf{e}_{k+1} = \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})} \mathbf{e}_{j'} + \left(\mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})} \mathbf{e}_{j'} \right), \tag{6.32}$$

причем вектор

$$\mathbf{e}_{k'+1} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum_{j'=1}^{k'} \frac{(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{j'})}{(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{j'})} \mathbf{e}_{j'} \tag{6.33}$$

— есть перпендикуляр к линейно оболочке

$$L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k).$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}_{j'} \in L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}) = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}) \quad j' = \overline{1, k'},$$

а из вида (6.33) вытекает, что и вектор $\mathbf{e}_{k'+1} \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$. Итак, семейство ненулевых векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$ попарно ортогональны. В силу результата леммы 6.32 это семейство линейно независимо, причем по построению принадлежат линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$, размерность которой, очевидно, равна $k+1$, т.е. совпадает с числом векторов семейства $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$. Значит это семейство образует базис в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$.

Таким образом, мы построили ортогональный базис

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{k'}, \mathbf{e}_{k'+1}\}$$

в линейной оболочке $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1})$.

В силу метода математической индукции мы приходим к выводу о существовании ортогонального базиса в евклидовом $\mathcal{E}$ (унитарном $\mathcal{U}$) пространстве. Осталось провести его нормировку:

$$\mathbf{e}_{1''} = \frac{\mathbf{e}_{1'}}{\|\mathbf{e}_{1'}\|}, \ldots, \mathbf{e}_{n''} = \frac{\mathbf{e}_{n'}}{\|\mathbf{e}_{n'}\|}, \quad n'' = n.$$

□

6.40. Многочлены Лежандра. В пространстве вещественных непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $\mathbb{C}[-1, 1]$ вводится скалярное умножение следующим образом:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt. \tag{6.34}$$

Соответственно

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)\, dt. \tag{6.35}$$

Возьмем линейно независимое семейство одночленов

$$1, t, t^2, t^3, \ldots, t^k, \ldots \tag{6.36}$$

и применим к нему процесс ортогонализации. В результате получим последовательность многочленов

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad f_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad \ldots. \tag{6.37}$$

После специальной подстановки вида

$$p_k(t) = \lambda_k f_k(t), \tag{6.38}$$

где λ_k выбираются из условия

$$p_k(1) = 1. \tag{6.39}$$

Можно доказать, что

$$p_k(t) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dt^k}\left\{(t^2-1)\right\}, \quad \|p_k(t)\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \tag{6.40}$$

Многочлены (6.40) носят название многочленов Лежандра.

6. Ортогональные проекторы

6.41. Определение. Ортогональной проекцией векторы x на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова $\mathcal{E}$ или унитарного пространства $\mathcal{U}$ называется такой вектор $y \in \mathcal{P}$, что разность $x - y$ ортогональна $\mathcal{P}$.

6.42. Лемма. Ортогональная проекция произвольного вектора x на любое заданное нетривиальное линейное подпространство $\mathcal{P}$ определяется единственным образом и является линейной функцией от вектора x.

Доказательство. Существование проекции. Для этого в евклидовом $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$) выберем какой–либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ таким образом, чтобы набор векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \mathcal{P}$, образовывал базис линейного подпространства $\mathcal{P}$ и построим вектор y по правилу

$$y = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{6.41}$$

Тогда с учетом результата теоремы 6.36 имеем

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \tag{6.42}$$

и поэтому

$$x - y = \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \perp \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \tag{6.43}$$

Единственность проекции. Пусть существует две ортогональные проекции $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$. Тогда, с одной стороны, имеем

$$y_1 - y_2 \in \mathcal{P}. \tag{6.44}$$

С другой стороны,

$$x - y_1 \quad \text{и} \quad x - y_2 \quad \perp \ \mathcal{P}.$$

Поэтому если $z \in \mathcal{P}$, то имеем

$$((x-y_1)-(x-y_2), z) = (x-y_1, z)-(x-y_2, z) = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{P}.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$y_1 - y_2 = (y_1 - x) - (y_2 - x) \perp \mathcal{P} \Rightarrow y_1 - y_2 \in \mathcal{P}^\perp. \tag{6.45}$$

Поскольку $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^\perp = \{\theta\}$, то $y_1 = y_2$.

Линейная зависимость от x. Из формулы (6.41) в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает линейная зависимость $y = y(x)$. □

6.43. Определение. Оператор P, сопоставляющий всякому вектору x его ортогональную проекцию на линейное подпространство $\mathcal{P}$, называется ортогональным проектором на подпространство $\mathcal{P}$.

6.44. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ при $m = \dim \mathcal{P}$ — какой–либо ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$, то ортогональный проектор на $\mathcal{P}$ задается формулой

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j \tag{6.46}$$

и, в частности, является линейным оператором.

Доказательство. Достроим ортонормированный базис базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ во всем евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$). С этой целью сначала просто достраиваем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до базиса во всем линейной пространстве, а затем используем процедуру ортогонализации Штурма. После этого достаточно воспользоваться доказательством леммы 6.42. □

6.45. Лемма. Оператор P удовлетворяет равенству $P^2 = P$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — какой–то ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$. Тогда согласно результату леммы 6.44 ортогональный проектор имеет вид (6.46) и, в частности,

$$P\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{m} (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_{jk} \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, m}.$$

Поэтому для любого $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем

$$P^2 x = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = Px.$$

□

7. Матрица перехода между ортонормированными базисами

6.46. Лемма. Если два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ унитарного пространства $\mathcal{U}$ связаны матрицей C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C, \tag{6.47}$$

то справедливо равенство

$$C^T \cdot \overline{C} = I. \tag{6.48}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}).$$

Тогда

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{E}' \cdot X_{e'}, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e = \mathbf{E}' \cdot Y_{e'},$$
$$X_e = C \cdot X_{e'}, \quad Y_e = C \cdot Y_{e'} \tag{6.49}$$

и справедливы следующие равенства:

$$X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T \cdot G_{e'} \cdot \overline{Y_{e'}}. \tag{6.50}$$

Поскольку базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ являются ортонормированными, то $G_e = G_{e'} = I$. Поэтому имеет место равенство

$$X_e^T \cdot \overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T \cdot \overline{Y_{e'}}. \tag{6.51}$$

Из (6.49) и (6.51) вытекает равенство

$$X_{e'}^T \cdot C^T \cdot \overline{C} \cdot \overline{Y_{e'}} = X_{e'}^T \cdot \overline{Y_{e'}},$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_{e'}, Y_{e'} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Поэтому приходим к равенству

$$C^T \cdot \overline{C} = I.$$

□

6.47. Лемма. Если два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны матрицей C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C, \tag{6.52}$$

то справедливо равенство

$$C^T \cdot C = I. \tag{6.53}$$

Доказательство. Доказывается аналогично доказательству равенству (6.48) леммы 6.46. □

8. Примеры решения задач

6.48. Пример. Ортогональное проецирование 1. Найти ортогональную проекцию $x^{\|}$ и ортогональную составляющую $x^{\perp}$ вектора $x = (2, -5, 4, -3)$ при проекции на подпространство

$$U = L(a_1, a_2) \subset \mathbb{R}_4, \quad a_1 = (1, 2, 1, 0), \quad a_2 = (2, 1, 4, -5). \tag{6.54}$$

Решение. Вектор $x^{\|} \in U$. Поэтому для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$x^{\|} = \lambda a_1 + \mu a_2. \tag{6.55}$$

Тогда имеем

$$x^{\perp} = x - x^{\|} = (2 - \lambda - 2\mu, -5 - 2\lambda - \mu, 4 - \lambda - 4\mu, -3 + 5\mu). \tag{6.56}$$

Числа λ и μ находим из условия ортогональности вектора $x^{\perp}$ линейному подпространству $U = L(a_1, a_2)$. Заметим, что векторы a_1 и a_2 являются линейно независимыми в $\mathbb{R}_4$. Поэтому справедливы равенства

$$(x^{\perp}, a_1) = (x^{\perp}, a_2) = 0. \tag{6.57}$$

Из (6.54), (6.56) и (6.57) получаем следующую систему уравнений:

$$6\lambda + 8\mu + 4 = 0, \quad 8\lambda + 46\mu - 30 = 0, \tag{6.58}$$

которая имеет единственное решение $\lambda = -2$, $\mu = 1$. Отсюда и из (6.55) получаем

$$x^{\|} = -2a_1 + a_2 = (0, -3, 2, -5),$$
$$x^{\perp} = x - x^{\|} = (2, -2, 2, 2).$$

6.49. Пример. Ортогональное проецирование 2. В пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ вещественных матриц размера 2×2 задано скалярное произведение

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^T \cdot B). \tag{6.59}$$

Найти ортогональную проекцию $X^{\|}$ и ортогональную составляющую $X^{\perp}$ матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \tag{6.60}$$

при проекции на линейное подпространство U, заданное системой линейных уравнений

$$\mathrm{tr}\, A = O, \quad \mathrm{tr}(J \cdot A) = O, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.61}$$

Решение. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in U. \tag{6.62}$$
Тогда имеем
$$\operatorname{tr} A = 0 \Leftrightarrow a_{11} + a_{22} = 0, \tag{6.63}$$
$$\operatorname{tr}(J \cdot A) = 0 = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}\right] = a_{21} - a_{12} = 0. \tag{6.64}$$
Поэтому $A \in U$ тогда и только тогда, когда
$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{21} - a_{12} = 0. \tag{6.65}$$
Несложно найти ФСР этой системы уравнений:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = L(A_1, A_2). \tag{6.66}$$
Заметим, что
$$(A_1, A_2) = \operatorname{tr}(A_1^T \cdot A_2) =$$
$$= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = 0. \tag{6.67}$$
Отметим, что
$$X = X^{\parallel} + X^{\perp}, \quad X^{\parallel} \in U, \quad X^{\perp} \perp U. \tag{6.68}$$
Поэтому
$$X^{\parallel} = \lambda A_1 + \mu A_2, \quad A_1 \perp A_2. \tag{6.69}$$
Из равенства (6.69) сразу же находим
$$\lambda = \frac{(X^{\parallel}, A_1)}{(A_1, A_1)} = \frac{(X, A_1)}{(A_1, A_1)}, \quad \mu = \frac{(X^{\parallel}, A_2)}{(A_2, A_2)} = \frac{(X, A_2)}{(A_2, A_2)}. \tag{6.70}$$
Следовательно,
$$X^{\parallel} = \frac{(X, A_1)}{(A_1, A_1)} A_1 + \frac{(X, A_2)}{(A_2, A_2)} A_2, \tag{6.71}$$
причем
$$(A_1, A_1) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2, \quad (6.72)$$

$$(X, A_1) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\right] = -2, \quad (6.73)$$

$$(A_2, A_2) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 2, \quad (6.74)$$

$$(X, A_2) = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \operatorname{tr}\left[\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right] = 2. \quad (6.75)$$

Поэтому из (6.71) с учетом (6.72)–(6.75) имеем

$$X^{\parallel} = -A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.76)$$

$$X^{\perp} = X - X^{\parallel} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}. \quad (6.77)$$

6.50. Пример. Экзаменационная задача. Пусть f — линейная форма в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, $\dim \mathcal{L} \geqslant 2$. Рассмотрим выражение

$$A(x, y) = \langle f, x\rangle\langle f, y\rangle \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}. \quad (6.78)$$

Является ли $A(x, y)$ билинейной формой? Если является, может ли эта билинейная форма задавать скалярное произведение в $\mathcal{L}$?

Решение.

Шаг 1. В силу свойств линейности линейной формы (ковектора) приходим к выводу о том, что форма (6.78) является билинейной.

Шаг 2. Но скалярное произведение билинейная форма (6.78) не задает. Вот почему. Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$Q(x) = A(x, x) = (\langle f, x\rangle)^2 \geqslant 0.$$

Однако, равенство $Q(x) = 0$ может быть выполнено не только при $x = \theta$, а вообще для любого $x \in \mathcal{L}$ такого, что $\langle f, x\rangle = 0$.

6.51. Пример. Вычислительная задача. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы

$$x_1(t) = 1 + t^2, \quad x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2, \quad (6.79)$$

$$x_3(t) = 2 + t + t^2, \quad x_4(t) = 4 + t + 3t^2. \tag{6.80}$$

Используя метод Гаусса, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространство $P_2(\mathbb{R})$.

Решение. Базис в $P_2(\mathbb{R})$ образуют следующие элементы:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = t^2. \tag{6.81}$$

Справедливы равенства для элементов (6.79), (6.80)

$$x_1(t) = \mathbf{E} \cdot X_1,\ x_2(t) = \mathbf{E} \cdot X_2,\ x_3(t) = \mathbf{E} \cdot X_3,\ x_4(t) = \mathbf{E} \cdot X_4, \tag{6.82}$$

где $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{6.83}$$

Составим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} X_1^T \\ X_2^T \\ X_3^T \\ X_4^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{6.84}$$

Из второй строчки вычтем первую, умноженную на 3; из третьей строчки вычтем первую; из четвертой строчки вычтем первую, умноженную на три и получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базисного минора можно выбрать минор, расположенный на пересечении первой и третьей строчках, и первого и второго столбца. Поэтому базис в линейной оболочке $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образуют, например, элементы $x_1(t)$ и $x_3(t)$. Теперь построим ортогональное дополнение

$$(L(X_1, X_2, X_3, X_4))^{\perp} = (L(X_1, X_3))^{\perp}$$

относительно стандартного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^3$. Пусть

$$y(t) = \mathbf{E} \cdot Y, \quad Y^T = (\alpha, \beta, \gamma) \in (L(X_1, X_3))^{\perp}. \tag{6.85}$$

Поэтому для Y справедливы равенства

$$0 = (X_1, Y) = \alpha + \gamma = 0, \quad 0 = (X_3, Y) = 2\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \Rightarrow \alpha = -\beta = -\gamma. \quad (6.86)$$

Значит, базис в $(L(X_1, X_3))^\perp$ образует, например, столбец

$$Y = (1, -1, -1)^T. \quad (6.87)$$

Поскольку

$$\mathbb{R}^3 = L(X_1, X_3) \oplus (L(X_1, X_3))^\perp,$$

то столбцы X_1, X_3, Y линейно независимы. Тогда линейно независимы и элементы $x_1(t)$, $x_3(t)$, $y(t)$, причем элементы $x_1(t)$ и $x_3(t)$ образуют базис в $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а элемент $y(t)$ дополняет семейство $x_1(t)$, $x_3(t)$ до базиса в $P_2(\mathbb{R})$. Очевидно, что $\dim L(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2$.

6.52. Пример. Вычислительная задача. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$ заданы элементы

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.88)$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама–Шмидта (без нормировки).

Решение. Запишем матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ x_3^T \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из первой строчки сумму второй и третьей. В результате получим эквивалентную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rk} A = 3.$$

Следовательно, элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы.

Переходим к процессу ортогонализации Грама–Шмидта. Справедливы следующие равенства:

$$y_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.89)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \qquad (6.90)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \qquad (6.91)$$

6.53. Пример. Вычислительная задача. В линейном пространстве $P_2[-1, 1]$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1, 1]$) скалярное произведение определяется формулой

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t) y(t)\, dt.$$

В этом евклидовом пространстве заданы элементы

$$x_1(t) = 1, \quad x_2(t) = t, \quad x_3(t) = t^3. \qquad (6.92)$$

Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс ортогонализации Грама–Шмидта (без нормировки).

Решение. Линейная независимость этого семейства была доказана ранее в лекциях. Приступим к процессу ортогонализации Грама–Шмидта. Справедливы равенства

$$y_1 = x_1 = 1, \qquad (6.93)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 = t, \quad (x_2, y_1) = \int\limits_{-1}^{1} t\, dt = 0, \qquad (6.94)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = t^2 - \frac{1}{3}, \qquad (6.95)$$

поскольку

$$(x_3, y_1) = \frac{2}{3}, \quad (y_1, y_1) = 2, \quad (x_3, y_2) = \int\limits_{-1}^{1} t^3\, dt = 0.$$

6.54. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Заданы столбцы координат элементов x_1, x_2, x в этом базисе

$$x_1 = \mathbf{E} \cdot X_1, \quad x_2 = \mathbf{E} \cdot X_2, \quad x = \mathbf{E} \cdot X, \tag{6.96}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.97}$$

Найти ортогональную проекцию элемента x на $L(x_1, x_2)$ и перпендикуляр элемента x к $L(x_1, x_2)$.

Решение. Поскольку базис E в евклидовом пространстве ортонормированный, то можно все вычисления провести в координатном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ относительно стандартного скалярного произведения. Справедливы следующие равенства:

$$X = X_{\parallel} + X_{\perp}, \tag{6.98}$$

$$X_{\parallel} = \alpha X_1 + \beta X_2 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \beta \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \tag{6.99}$$

$$X_{\perp} = X - X_{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha - \beta \\ -\beta \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \tag{6.100}$$

причем

$$(X_{\perp}, X_1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 1, \tag{6.101}$$

$$(X_{\perp}, X_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 1. \tag{6.102}$$

Из (6.101) и (6.102) получаем

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3}.$$

Из (6.99) и (6.100) получаем, что

$$X_{\parallel} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad X_{\perp} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

6.55. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Линейное подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q.

Решение. Итак, согласно условию задачи (в силу ортонормированности рассматриваемого базиса) имеем

$$Q = \{x \in \mathcal{E} : \ (x, a) = 0\}, \quad a = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3. \tag{6.103}$$

Значит, Q — плоскость, проходящая через нулевой элемент евклидова пространства $\mathcal{E}$. Справедливо разложение

$$\mathcal{E} = Q \oplus Q^{\perp}, \tag{6.104}$$

т.е. для любого $x \in \mathcal{E}$ найдутся единственные $y \in Q$ и $z \in Q^{\perp}$, что справедливо равенство

$$x = y + z, \quad y \in Q, \quad z \perp Q. \tag{6.105}$$

Это означает, что $Q^{\perp}$ — прямая, проходящая через нулевой вектор евклидова пространства $\mathcal{E}$ и перпендикулярная плоскости Q. Следовательно,

$$Q^{\perp} = \{x = t \cdot a, \quad t \in \mathbb{R}\}. \tag{6.106}$$

Базис в $Q^{\perp}$ — это, например, вектор a.

6.56. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица билинейной формы B_λ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}. \tag{6.107}$$

При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ рассматриваемую билинейную форму $B(x,y)$ можно принять за скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$? При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ рассматриваемую билинейную форму $B(x,y)$ можно принять за псевдоскалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$?

Решение. Шаг 1. Симметричность. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$. Тогда имеем

$$x = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2, \quad y = y^1 \cdot \mathbf{e}_1 + y^2 \cdot \mathbf{e}_2, \tag{6.108}$$

$$B(x,y) = (x^1, x^2) \cdot B_\lambda \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \\ = \lambda x^1 y^1 - 2\lambda x^1 y^2 - 2\lambda x^2 y^1 + 4x^2 y^2. \tag{6.109}$$

Из равенства (6.109) видно, что $B(x,y) = B(y,x)$.

Шаг 2. Невырожденность. Рассмотрим теперь квадратичную форму $Q(x) = B(x, x)$ и методом Лагранжа приведем ее к каноническому виду. Справедливы равенства

$$Q(x) = B(x,x) = \lambda(x^1)^2 - 4\lambda x^1 x^2 + 4(x^2)^2 = \\ = \lambda(x^1 - 2x^2)^2 + 4(1-\lambda)(x^2)^2. \quad (6.110)$$

Из явного вида (6.110) и в силу инвариантности положительного и отрицательного индексов инерции квадратичных форм приходим к выводу о том, что квадратичная форма $Q(x)$ вырожденная при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$.

Шаг 3. Скалярное и псевдоскалярное произведения. Из равенства (6.110) получаем, что при $\lambda \in (0,1)$ рассматриваемая билинейная форма $B(x,y)$ является скалярным произведением, а при $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ билинейная форма $B(x,y)$ является псевдоскалярным произведением.

6.57. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ задана матрица квадратичной формы Q_λ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$:

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -2\lambda \\ -2\lambda & 4 \end{pmatrix}. \quad (6.111)$$

Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ исследовать квадратичную форму Q на знакоопределенность и записать ее канонический вид.

Решение. С учетом (6.110) канонический вид квадратичной формы $Q(x)$ имеет следующий вид:

$$Q(x) = \lambda(y^1)^2 + 4(1-\lambda)(y^2)^2, \quad (6.112)$$

$$x = x^1 \cdot \mathbf{e}_1 + x^2 \cdot \mathbf{e}_2, \quad \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (6.113)$$

Из (6.112) приходим к выводу о том, что при $\lambda \in (0,1)$ квадратичная форма $Q(x)$ является положительно определенной; при $\lambda = 0$ или при $\lambda = 1$ квадратичная форма $Q(x)$ вырожденная; при $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1 + \infty)$ не является знакоопределенной.

6.58. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается линейное вещественное пространство $\mathcal{L}$ с базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе $\mathbf{E}$:

$$Q(x) = x^1 x^2 + x^1 x^3 + x^2 x^3. \quad (6.114)$$

Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе $\mathbf{E}$. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе

$\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$; найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{G}$ и наоборот.

Решение. Полярная билинейная форма $B(x, y)$ к квадратичной форме $Q(x) = B(x, x)$ имеет, очевидно, следующий вид:

$$B(x,y) = \frac{1}{2}(x^1y^2 + x^2y^1) + \frac{1}{2}(x^1y^3 + x^3y^1) + \frac{1}{2}(x^2y^3 + x^3y^2) = \\ = (x^1, x^2, x^3, x^4) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}. \quad (6.115)$$

Поскольку матрица квадратичной формы и матрица соответствующей полярной билинейной формы совпадают, то

$$Q_e = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.116)$$

В выражении (6.114) сделаем замену переменных

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.117)$$

При этом новый базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)$ связан со старым базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ выражением

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C_1. \quad (6.118)$$

После преобразования (6.117) квадратичная форма $Q(x)$ примет следующий вид:

$$Q(x) = (y^1)^2 - (y^2)^2 + (y^1 - y^2)y^3 + (y^1 + y^2)y^3 = \\ = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 2y^1y^3 = \\ = ((y^1)^2 + 2y^1y^3 + (y^3)^2) - (y^2)^2 - (y^3)^2 = \\ = (y^1 + y^3)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 = (z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2, \quad (6.119)$$

где

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.120}$$

При этом канонический базис $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ связан с промежуточным базисом $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)$ соотношением

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} \cdot C_2. \tag{6.121}$$

Из (6.118) и (6.121) получаем равенство

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot C_3, \quad C_3 = C_1 \cdot C_2^{-1}. \tag{6.122}$$

Методом Гаусса вычисления обратной матрицы находим, что

$$C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.123}$$

Поэтому из (6.123) получаем, что

$$C_3 = C_1 \cdot C_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.124}$$

Итак, имеем

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{g}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{g}_3 = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{g}_4 = \mathbf{e}_4.$$

В базисе $\mathbf{G} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ матрица Q_g квадратичной формы Q имеет следующий вид:

$$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 7

Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

1. Сопряженный оператор

7.1. Определение. Пусть A — линейный оператор из $L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$. Оператор A^* называется сопряженным к оператору A, если для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{7.1}$$

7.2. Теорема. *Для любого $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ существует единственный сопряженный оператор $A^* \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$.*

Доказательство. Пусть $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})(A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда для любого $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ справедливо разложение

$$x = \sum_{k=1}^{n}(x, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \Rightarrow Ax = \sum_{k=1}^{n}(x, \mathbf{e}_k)A\mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (Ax, y) = \sum_{k=1}^{n}(x, \mathbf{e}_k)(A\mathbf{e}_k, y). \tag{7.2}$$

Рассмотрим линейный оператор

$$By = \sum_{k=1}^{n}(y, A\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \Rightarrow (x, By) = \sum_{k=1}^{n}\overline{(y, A\mathbf{e}_k)}(x, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(A\mathbf{e}_k, y)(x, \mathbf{e}_k) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U}). \tag{7.3}$$

Значит, $A^* = B$. □

7.3. Теорема. *Сопряженный оператор A^* обладает следующим свойствами*:

1) A^* — *линейный оператор;*
2) $(A + B)^* = A^* + B^*$*;*

3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;
4) $(AB)^* = B^* A^*$;
5) $(A^*)^* = A$.

Доказательство. Шаг 1. Докажем, что для любых $y, z \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U})$ и любого $\alpha \in \mathbb{R} (\in \mathbb{C})$ имеют место следующие равенства:

$$A^*(y+z) = A^*y + A^*z, \quad A^*(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot A^*y. \tag{7.4}$$

С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U})$ имеем

$$(Ax, y+z) = (x, A^*(y+z)). \tag{7.5}$$

С другой стороны, имеем

$$(Ax, y+z) = (Ax, y) + (Ax, z) = (x, A^*y) + (x, A^*z). \tag{7.6}$$

Из (7.5) и (7.6) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} &(x, A^*(y+z)) = (x, A^*y) + (x, A^*z) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow (x, A^*(y+z) - A^*y - A^*z) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U}) \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow A^*(y+z) = A^*y + A^*z. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Первое равенство из (7.4) доказано. Докажем второе равенство. С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U})$

$$(Ax, \alpha \cdot y) = (x, A^*(\alpha \cdot y)). \tag{7.8}$$

С другой стороны, имеем

$$(Ax, \alpha \cdot y) = \overline{\alpha}(Ax, y) = \overline{\alpha}(x, A^*y) = (x, \alpha \cdot A^*y). \tag{7.9}$$

Из равенств (7.8) и (7.9) получаем равенство

$$(x, A^*(\alpha \cdot y)) = (x, \alpha \cdot A^*y) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U}). \tag{7.10}$$

Следовательно,

$$A^*(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot A^*y.$$

Второе равенство из (7.4) доказано.

Шаг 2. Докажем, что $(A+B)^* = A^* + B^*$. Действительно, с одной стороны, для всех $x, y \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U})$ справедливо равенство

$$((A+B)x, y) = (x, (A+B)^*y). \tag{7.11}$$

С другой стороны, имеем

$$((A+B)x, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^*y) + (x, B^*y). \tag{7.12}$$

Из равенств (7.11) и (7.12) получаем

$$\begin{aligned} &(x, (A+B)^*y) = (x, A^*y) + (x, B^*y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, (A+B)^*y - A^*y - B^*y) = 0 \Leftrightarrow (A+B)^*y - A^*y - B^*y = \theta \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow (A+B)^* = A^* + B^*. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Шаг 3. Докажем, что $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо следующее равенство:

$$((\alpha A)x, y) = (x, (\alpha A)^* y). \tag{7.14}$$

С другой стороны, имеем

$$((\alpha A)x, y) = \alpha(Ax, y) = \alpha(x, A^* y) = (x, \overline{\alpha} \cdot A^* y). \tag{7.15}$$

Из сравнения равенств (7.14) и (7.15) получим равенство

$$(x, (\alpha A)^* y) = (x, (\overline{\alpha} A^*) y) \Leftrightarrow (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*. \tag{7.16}$$

Шаг 4. Докажем равенство $(AB)^* = B^* A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо равенство

$$((AB)x, y) = (x, (AB)^* y). \tag{7.17}$$

С другой стороны, имеем

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y). \tag{7.18}$$

Из сравнения (7.17) с (7.18) получим искомое равенство.

Шаг 5. Докажем равенство $(A^*)^* = A$. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} = \overline{(y, (A^*)^* x)} = ((A^*)^* x, y). \tag{7.19}$$

Отсюда приходим к искомому равенству. $\square$

2. Примеры сопряженных операторов

7.4. Пример. Сопряженные операторы к единичному и нулевому совпадают с ними. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ имеем

$$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy), \quad (Ox, y) = 0 = (\theta, y) = 0 = (x, \theta) = (x, Oy).$$

7.5. Пример. Сопряженным к оператору $Ax = [a, x]$ в трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов, где a — фиксированный вектор, является оператор $A^* = -A$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = ([a, x], y) = (y, [a, x]) = (y, a, x) =$$
$$= (x, y, a) = (x, [y, a]) = (x, -[a, y]) = (x, -Ay)$$

для всех x, y.

3. Матрица сопряженного оператора

7.6. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — произвольный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ (в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$), причем $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ ($A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$) и A_e — матрица этого оператора в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, G_e — матрица Грама базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Наша задача найти матрицу A_e^* сопряженного оператора A^* в том же базисе.

Пусть

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \tag{7.20}$$

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}(\mathbb{R}^{n\times 1}).$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = A(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot A(\mathbf{e}_k) = \\ = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \tag{7.21}$$

$$A^* y = A^*(\mathbf{E} \cdot Y_e) = A^*(y^k \cdot \mathbf{e}_k) = y^k \cdot A^*(\mathbf{e}_k) = \\ = (A^* \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e. \tag{7.22}$$

Напомним, что скалярное произведение элементов x, y выражается через координаты этих элементов следующим образом:

$$(x, y) = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e}, \tag{7.23}$$

где G_e — матрица Грама в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. С учетом (7.21)–(7.22) справедливы следующие равенства:

$$Ax = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \quad A^* y = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e.$$

Поэтому из определяющего соотношение для сопряженного оператора

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}(\in \mathcal{E}) \tag{7.24}$$

вытекает следующее равенство:

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{A_e^* \cdot Y_e} \tag{7.25}$$

или эквивалентно

$$X_e^T \cdot A_e^T \cdot G_e \cdot \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{A_e^*} \cdot \overline{Y_e}, \tag{7.26}$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ($\in \mathbb{R}^{n\times 1}$). Поэтому из (7.26) вытекает цепочка равенств

$$X_e^T \cdot \left[A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e^*}\right] \cdot \overline{Y_e} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e^*} = O \Leftrightarrow A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot \overline{A_e^*}. \tag{7.27}$$

Теперь из (7.27), пользуясь тем, что $\det G_e \neq 0$, получим выражение для матрицы A_e^* сопряженного оператора A^*:

$$\overline{A_e^*} = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e \Leftrightarrow \boxed{A_e^* = \overline{G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e}.} \tag{7.28}$$

Отдельно отметим, что в случае евклидова пространства выражение (7.28) примет следующий вид:

$$\boxed{A_e^* = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e.} \tag{7.29}$$

В случае ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица Грама является единичной и поэтому формулы (7.28) и (7.29) примут следующий вид:

$$\boxed{A_e^* = \overline{A_e^T} \quad \text{для унитарного пространства}}, \tag{7.30}$$

$$\boxed{A_e^* = A_e^T \quad \text{для евклидова пространства}}. \tag{7.31}$$

7.7. Определение. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, удовлетворяющая условию $A = \overline{A^T}$, называется эрмитовой.

7.8. Лемма. Матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ и $G(x, y)$ — полуторалинейная форма, задающая скалярное произведение в этом унитарном пространстве. Поэтому справедливы равенства

$$g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \overline{G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)} = \overline{g_{ji}},$$

из которых вытекает искомое равенство $G_e = \overline{G_e^T}$. □

7.9. Лемма. Всякая полуторалинейная форма $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ определяет единственным образом некоторый линейный оператор $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ по формуле

$$\mathcal{A}(x, y) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \tag{7.32}$$

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{U}$. Построим оператор A, чья матрица в базисе $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ задается формулой

$$a_j^k = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k).$$

Справедлива вспомогательная цепочка равенств:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} a_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Ax = A(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j^k x^j \cdot \mathbf{e}_k,$$

$$(x, \mathbf{e}_j) = (x^k \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k \delta_{kj} = x^j,$$

Следовательно, приходим к следующему равенству:

$$Ax = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \tag{7.33}$$

Прежде всего заметим, что в силу линейности скалярного произведения $(x, \mathbf{e}_j)$ по первому аргументу оператор A тоже линейный. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathcal{A}(x, y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) x^j \overline{y^k} = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k x^j \overline{y^k} =$$
$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k, y) = \left(\sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k, y \right) = (Ax, y). \tag{7.34}$$

Существование оператора доказано.

Единственность. Пусть $\hat{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ такой линейный оператор, что

$$(\hat{A}x, y) = \mathcal{A}(x, y) = (Ax, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

Тогда имеем

$$(\hat{A}x - Ax, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{U} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{A}x = Ax \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A} = A.$$

Единственность доказана. □

4. Самосопряженный оператор

7.10. Определение. Оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$), называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным

$$A = A^*, \tag{7.35}$$

или, иными словами, если для любых элементов $x, y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ выполняется соотношение

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Самосопряженные операторы в унитарном пространстве называются эрмитовыми, а самосопряженные операторы в евклидовом пространстве — симметричными.

7.11. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ был эрмитовым, необходимо и достаточно,чтобы в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица A_e была эрмитовой: $A_e = \overline{A_e^T}$.

Доказательство. Шаг 1. Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис. Тогда из равенства $A_e = \overline{A_e^T}$ вытекает следующая цепочка равенств:

$$a_k^j = \{A_e\}_k^j = \{\overline{A_e^T}\}_k^j = \{\overline{A_e}\}_j^k = \overline{a}_j^k.$$

Справедливы следующие равенства:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \cdot \mathbf{e}_l, \quad (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a_j^k, \quad (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \overline{a}_k^j. \tag{7.36}$$

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_j^l \cdot \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k\right) = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \delta_{lk} = a_j^k,$$

$$(\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \left(\mathbf{e}_j, \sum_{l=1}^{n} a_k^l \cdot \mathbf{e}_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \overline{a_k^l} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) = \overline{a}_k^j. \quad \boxtimes$$

С учетом (7.36) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k a_j^k = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k \overline{a}_k^j =$$
$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть $A^* = A$. Тогда имеем

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}. \tag{7.37}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$. Справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad y = y^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad Ax = x^j \cdot A\mathbf{e}_j = \\ = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) \cdot X_e = \\ = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot X_e, \quad Ay = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot A_e \cdot Y_e. \tag{7.38}$$

Из равенства (7.37) с учетом равенств из (7.38) получим равенство

$$(A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \overline{Y_e} = X_e^T \cdot G_e \cdot \overline{(A_e \cdot Y_e)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow X_e^T \cdot \left[A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot \overline{A_e}\right] \cdot \overline{Y_e} = 0 \tag{7.39}$$

для любых столбцов $X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Заметим теперь, что $G_e = I$ и поэтому из равенства (7.39) вытекает равенство

$$A_e^T = \overline{A_e} \Leftrightarrow A_e = \overline{A_e^T},$$

т.е. матрица $A_e \in \mathbb{C}^{n \times n}$ является эрмитовой. □

7.12. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица A_e в любом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ была симметричной: $A_e = A_e^T$.

Доказательство. Доказательство повторяет в точности доказательство леммы 7.11. □

7.13. Лемма. Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ в некотором ортонормированном базисе является эрмитовой, то она эрмитова в любом другом ортонормированном базисе.

Доказательство. Пусть два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ связаны матрицей $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \cdot C.$$

Как известно, из предыдущей лекции

$$C^T \cdot \overline{C} = I \Leftrightarrow C = (\overline{C}^T)^{-1}, \quad \overline{C}^T = C^{-1}, \quad (\overline{C}^{-1})^T = C. \tag{7.40}$$

Матрицы $A_{e'}$ и A_e связаны известным равенством

$$A_{e'} = C^{-1} \cdot A_e \cdot C, \tag{7.41}$$

причем $A_e = \overline{A_e}^T$. Из равенства (7.41) с учетом соотношений (7.40) вытекает цепочка равенств

$$\overline{A_{e'}} = \overline{C}^{-1} \cdot \overline{A_e} \cdot \overline{C} \Leftrightarrow \overline{A_{e'}}^T = \overline{C}^T \cdot \overline{A_e}^T \cdot (\overline{C}^{-1})^T =$$

$$= \overline{C}^T \cdot \overline{A_e}^T \cdot C = C^{-1} \cdot \overline{A_e}^T \cdot C = C^{-1} \cdot A_e \cdot C = A_{e'}.$$

Отсюда получаем искомое равенство $\overline{A_{e'}}^T = A_{e'}$. ☐

7.14. Лемма. Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ в некотором ортонормированном базисе является симметричной, то она симметрична в любом другом ортонормированном базисе.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения леммы 7.13. ☐

7.15. Лемма. Всякий ортогональный проектор P на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$) является самосопряженным.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, где $m = \dim \mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P}$. Тогда, как нами было доказано ранее, оператор P ортогонального проектирования на $\mathcal{P}$ имеет следующий явный вид:

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j. \tag{7.42}$$

Тогда для любых $x, y \in \mathcal{E}$ ($\in \mathcal{U}$) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Px, y) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j, y \right) = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j, y) =$$

$$= \left(x, \sum_{j=1}^{m} \overline{(\mathbf{e}_j, y)} \cdot \mathbf{e}_j \right) = \left(x, \sum_{j=1}^{m} (y, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j \right) = (x, Py). \tag{7.43}$$

☐

7.16. Определение. Оператор P называется идемпотентным, если $P^2 = P$.

7.17. Теорема. *Всякий линейный самосопряженный идемпотентный оператор P является ортогональным проектором на некоторое линейное подпространство.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Пусть $x \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такой $y \in \mathcal{E}$ ($\in \mathcal{U}$), что справедливо равенство

$$Py = x \Rightarrow x = P^2 y = Px,$$

где мы воспользовались тем, что $P^2 = P$. Итак, имеем

$$Px = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \tag{7.44}$$

Шаг 2. Пусть $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Тогда в силу самосопряженности линейного оператора P и равенства (7.44) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Py, x) = (y, Px) = (y, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \tag{7.45}$$

Значит, $Py \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp}$. Следовательно,

$$Py = \theta \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{P}^{\perp}. \tag{7.46}$$

Шаг 3. Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \operatorname{im} P = \dim \mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Дополним его до ортонормированного базиса во всем пространстве $\mathcal{E}$ $(\mathcal{U})$ Таким образом, $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис в $\mathcal{P}^{\perp}$ и справедливо разложение в прямую сумму

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} \quad \text{или} \quad \mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}.$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ справедливо разложение

$$x = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j := x_{\mathcal{P}} + x_{\mathcal{P}^{\perp}}, \tag{7.47}$$

причем $x_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$, а $x_{\mathcal{P}^{\perp}} = x - x_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}^{\perp}$. Из (7.47) с учетом (7.44) и (7.46) получаем, что

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_j) \cdot P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_j = x_{\mathcal{P}}. \tag{7.48}$$

Стало быть, P — ортогональный проектор на свой образ. □

5. Теоремы Фредгольма в абстрактной форме

Пусть $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, где $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ или $\mathcal{L} = \mathcal{U}$. Наша задача выяснить необходимые и достаточные условия разрешимости следующего уравнения в $\mathcal{L}$:

$$Ax = y. \tag{7.49}$$

Эти результаты известны как теоремы *об альтернативах Фредгольма.* Для их доказательства нам нужны следующие вспомогательные результаты:

7.18. Лемма. Если $\mathcal{P}$ — линейное подпространство в $\mathcal{L}$, то

$$\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}. \tag{7.50}$$

Кроме того, имеет место равенство множеств

$$\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}. \tag{7.51}$$

Доказательство. Шаг 1. Прежде всего заметим, что $\mathcal{P}^{\perp}$ — линейное подпространство.

$\square$ Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{P}^{\perp}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$. Тогда имеем

$$(\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2, x) = \alpha^1(y_1, x) + \alpha^2(y_2, x) = 0$$

для всех $x \in \mathcal{P}$, т.е. $\alpha^1 \cdot y_1 + \alpha^2 \cdot y_2 \in \mathcal{P}^{\perp}$. $\boxtimes$

Шаг 2. Докажем теперь, что $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{L}$. Приведем непосредственное доказательство этого факта. Итак, поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ — линейное подпространство, то можно выбрать базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$ таким образом, чтобы $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$. Применим процесс ортогонализации Грамма–Шмидта так, как это изложено при доказательстве теоремы Грама–Шмидта. Тогда получим ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}, \mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ в $\mathcal{L}$, причем $\mathcal{P} = L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'})$. Введем обозначение

$$\mathcal{H} = L(\mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) \subset \mathcal{L}.$$

По построению $\mathcal{H} \perp \mathcal{P}$. Поэтому $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}^{\perp}$. Докажем, что на самом деле $\mathcal{H} = \mathcal{P}^{\perp}$.

$\square\square$ Действительно, пусть $\mathcal{H}$ строго вложено в $\mathcal{P}^{\perp}$. Тогда поскольку по построению

$$\mathcal{L} = L(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{m'}) \oplus L(\mathbf{e}_{m'+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{H},$$

то существует вектор $x_0 \perp \mathcal{P}$, но $x_0 \notin \mathcal{H}$, т.е.

$$x_0 \perp \mathcal{P}, \quad x_0 \in \mathcal{P} \Rightarrow (x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \theta. \quad \boxtimes\boxtimes$$

Следовательно, $\mathcal{H} = \mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$.

Шаг 3. Поскольку по определению $\mathcal{P} \perp \mathcal{P}^{\perp}$, то

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\perp\perp}. \tag{7.52}$$

Если вложение (7.52) строгое, то в силу (7.50) найдется $x_0 \in \mathcal{P}^{\perp\perp} \cap \mathcal{P}^{\perp}$, т.е.

$$(x_0, x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \theta.$$

Следовательно, $\mathcal{P}^{\perp\perp} = \mathcal{P}$. $\square$

7.19. Лемма. Справедливо следующее равенство множеств:

$$\ker A^* = (\operatorname{im} A)^{\perp}. \tag{7.53}$$

Доказательство. Шаг 1. $\ker A^* \subset (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Пусть $y \in \ker A^*$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ имеют место равенства

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = 0, \quad Ax \in \operatorname{im} A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in (\operatorname{im} A)^{\perp} \Rightarrow \ker A^* \subset (\operatorname{im} A)^{\perp}. \tag{7.54}$$

Шаг 2. $(\operatorname{im} A)^{\perp} \subset \ker A^{*}$. Пусть $y \in (\operatorname{im} A)^{\perp}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ справедливы следующие равенства:

$$0 = (Ax, y) = (x, A^{*}y) \Rightarrow A^{*}y = \theta \Rightarrow y \in \ker A^{*}. \tag{7.55}$$

□

7.20. Следствие. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\ker A = (\operatorname{im} A^{*})^{\perp}. \tag{7.56}$$

Доказательство. Заметим, что всегда $A^{**} = A$. Поэтому в силу результата леммы 7.19 имеют место выражения

$$\ker A = \ker A^{**} = (\operatorname{im} A^{*})^{\perp}.$$

□

7.21. Следствие. *Справедливо следующее равенство множеств*:

$$\operatorname{im} A = (\ker A^{*})^{\perp}. \tag{7.57}$$

Доказательство. В силу (7.51) и (7.53) приходим к равенству (7.57). □

7.22. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$\dim \ker A^{*} + \dim \operatorname{im} A = \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A^{*} = \dim \mathcal{L}. \tag{7.58}$$

Доказательство. В силу результата леммы 7.50 имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{im} A \oplus (\operatorname{im} A)^{\perp} = \mathcal{L}, \quad \operatorname{im} A^{*} \oplus (\operatorname{im} A^{*})^{\perp} = \mathcal{L}. \tag{7.59}$$

Поэтому в силу определения прямой суммы подпространств имеем

$$\dim \operatorname{im} A + \dim (\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim \mathcal{L}, \tag{7.60}$$

$$\dim \operatorname{im} A^{*} + \dim (\operatorname{im} A^{*})^{\perp} = \dim \mathcal{L}. \tag{7.61}$$

Теперь в силу результата леммы 7.19 и (7.60) имеет место следующая цепочка равенств:

$$\dim \ker A^{*} = \dim (\operatorname{im} A)^{\perp} = \dim \mathcal{L} - \dim \operatorname{im} A \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim \ker A^{*} + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}. \tag{7.62}$$

Теперь в силу результата следствия 7.20 и равенства (7.61) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\dim \ker A = \dim (\operatorname{im} A^{*})^{\perp} = \dim \mathcal{L} - \dim \operatorname{im} A^{*} \Rightarrow \\ \Rightarrow \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A^{*} = \dim \mathcal{L}. \tag{7.63}$$

□

Теперь мы можем сформулировать и доказать *альтернативы Фредгольма*.

7.23. Теорема. Первая теорема Фредгольма. *Справедливо равенство*

$$\dim\ker A = \dim\ker A^*. \tag{7.64}$$

Доказательство. С одной стороны, ранее было доказано равенство

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}. \tag{7.65}$$

С другой стороны, в силу (7.58) имеет место равенство

$$\dim\ker A^* + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L}. \tag{7.66}$$

Из сравнения (7.65) с (7.66) получаем (7.64). □

7.24. Теорема. Вторая теорема Фредгольма. *Для того чтобы уравнение* (7.49) *было однозначно разрешимо при любой правой части, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение $Ax = \theta$ имело только тривиальное решение $x = \theta$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (7.49) разрешимо для любого $y \in \mathcal{L}$. Тогда $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Поскольку

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L},$$

то $\dim\ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\theta\}$. Значит, уравнение $Ax = \theta$ имеет только тривиальное решение $x = \theta$.

Достаточность. Пусть однородное уравнение $Ax = \theta$ имеет только тривиальное решение $x = \theta$, т. е. $\ker A = \{\theta\}$ и поэтому $\dim\ker A = 0$. Поскольку

$$\dim\ker A + \dim\operatorname{im} A = \dim\mathcal{L},$$

то $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Значит, для всякого $y \in \mathcal{L}$ уравнение (7.49) имеет решение. Докажем, что это решение для каждого $y \in \mathcal{L}$ единственное.

□ Действительно, пусть для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ уравнение (7.49) имеет два решения

$$\begin{aligned} &Ax_1 = Ax_2 = y_0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \Rightarrow x_1 - x_2 = \theta \Rightarrow x_1 = x_2. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{7.67}$$

□

7.25. Теорема. Третья теорема Фредгольма. *Для того чтобы уравнение* (7.49) *было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $y \in (\ker A^*)^{\perp}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (7.49) при заданном $y \in \mathcal{L}$ разрешимо, т.е. существует такое $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax \in \operatorname{im} A$. В силу результата (7.57) имеем $y \in \operatorname{im} A = (\ker A^*)^{\perp}$.

Шаг 2. Пусть $y \in (\ker A^*)^{\perp}$. В силу результата (7.57) имеем $y \in \operatorname{im} A$. Значит, найдется такой $x \in \mathcal{L}$, что $y = Ax$, т.е. уравнение (7.49) разрешимо.

□

6. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

7.26. Теорема. *Все характеристические числа самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Шаг 1. **Эрмитов оператор в унитарном пространстве.** Любое характеристическое число эрмитова оператора A принадлежит полю $\mathbb{C}$, над которым рассматривается соответствующее унитарное пространство, так что является его собственным значением. Следовательно,

$$Ax_0 = \lambda \cdot x_0, \quad x_0 \neq \theta. \tag{7.68}$$

Умножим обе части равенства (7.68) на x_0 и получим равенство

$$(Ax_0, x_0) = (\lambda \cdot x_0, x_0) = \lambda(x_0, x_0),$$

из которого с учетом равенства $A^* = A$ получим цепочку равенств

$$\lambda(x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda \cdot x_0) = \overline{\lambda}(x_0, x_0),$$

а так как $(x_0, x_0) \neq 0$, то получим равенство $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. **Симметричный оператор в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$.** Рассмотрим матрицу A_e данного симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ в каком-либо ортонормированном базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$; эта матрица симметрична, $A_e = A_e^T$. Рассмотрим оператор $\hat{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$, имеющий в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ этого унитарного пространства матрицу A_e :

$$\hat{A} \cdot \mathbf{F} = \left(\hat{A}\mathbf{f}_1, \ldots, \hat{A}\mathbf{f}_n\right) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot \hat{A}_f = \\ = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot A_e = \mathbf{F} \cdot A_e, \quad \overline{A_e} = A_e = A_e^T. \tag{7.69}$$

Докажем, что такой оператор $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ существует.

□□ Действительно, пусть $\mathcal{U}$ — произвольное унитарное пространство, причем $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{E}$. Фиксируем в этом унитарном пространстве некоторый ортонормированный базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, который существует в силу теоремы Грама–Шмидта. Искомый оператор определим следующим равенством в обозначениях Эйнштейна:

$$\hat{A}(x) := x^j a_j^k \cdot \mathbf{f}_k, \tag{7.70}$$

$$x = x^j \cdot \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n), \quad A_e = (a_j^k)_n^n, \quad n' = n \in \mathbb{N}.$$

Сделаем ряд наблюдений.

Наблюдение 1. Оператор $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$, т.е. линейный. Действительно, прежде всего заметим, что для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$ и произвольных $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$ имеют место равенства

$$(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2)^j = \left\langle \mathbf{f}^j, \alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2 \right\rangle = \\ = \alpha^1 \left\langle \mathbf{f}^j, x_1 \right\rangle + \alpha^2 \left\langle \mathbf{f}^j, x_2 \right\rangle = \alpha^1 x_1^j + \alpha^2 x_2^j, \tag{7.71}$$

где $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\} \subset \mathcal{U}^*$ — взаимный базис к $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\} \subset \mathcal{U}$. С учетом (7.71) и определения (7.70) приходим к равенству

$$\hat{A}(\alpha^1 \cdot x_1 + \alpha^2 \cdot x_2) = \alpha^1 \cdot \hat{A}(x_1) + \alpha^2 \cdot \hat{A}(x_2),$$

т.е. оператор $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$.

Наблюдение 2. Матрица $\hat{A}_f$ в заданном ортонормированном базисе $\mathbf{F}$ совпадает с матрицей A_e. Действительно, заметим, что

$$\mathbf{f}_m = \delta_m^j \cdot \mathbf{f}_j, \tag{7.72}$$

$$\hat{A}(\mathbf{f}_m) = \delta_m^j a_j^k \cdot \mathbf{f}_k = a_m^k \cdot \mathbf{f}_k \Rightarrow \\ \Rightarrow \Big(\hat{A}(\mathbf{f}_1), \ldots, \hat{A}(\mathbf{f}_n)\Big) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n) \cdot A_e \Rightarrow \hat{A}_f = A_e. \tag{7.73}$$

Таким образом, приходим к выводу о существовании такого оператора $\hat{A} \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$. ⊠⊠

В силу результата леммы 7.13 приходим к выводу о том, что оператор $\hat{A}$ эрмитов и поэтому все его характеристические числа вещественны. Осталось заметить, что характеристические многочлены операторов A и $\hat{A}$ совпадают. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$Ae = \lambda \cdot e \Rightarrow A_e \cdot X_e = \lambda X_e, \quad e = \mathbf{E} \cdot X_e,$$
$$\hat{A}f = \lambda \cdot f \Rightarrow \hat{A}_f \cdot Y_f = \lambda Y_f, \quad f = \mathbf{F} \cdot Y_f.$$

При этом

$$\det(A_e - \lambda I) = 0, \quad \det(\hat{A}_f - \lambda I) = \det(A_e - \lambda I) = 0$$

Значит, совпадают их характеристические числа. Стало быть, в силу результата шага 1 вещественны. □

7.27. Следствие. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

7.28. Теорема. *Симметричный оператор в евклидовом пространстве имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Характеристический многочлен симметричного оператора A в n–мерном евклидовом пространстве является многочленом степени n и имеет, по основной теореме алгебры, хотя бы один корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Из предыдущей теоремы вытекает, что этот корень вещественен и, стало быть, является собственным значением оператора A. В таком случае оператор $A-\lambda_0 I$ имеет ненулевое ядро, которое представляет собой собственно подпространство $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{E}$, соответствующее собственному значению λ_0. $\square$

7.29. Теорема. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения, x_1, x_2 — соответствующие собственные векторы самосопряженного оператора A. По условию, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем оба числа λ_1, λ_2 вещественны. Тогда имеем:

$$Ax_1 = \lambda_1 \cdot x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 \cdot x_2.$$

Умножим первое из этих равенств скалярно на x_2, а второе — на x_1 :

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 \cdot x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2), \tag{7.74}$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 \cdot x_2) = \overline{\lambda_2}(x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2), \tag{7.75}$$

причем

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2). \tag{7.76}$$

Из равенств (7.74)–(7.76) получаем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Отсюда, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем, что $(x_1, x_2) = 0$. $\square$

7.30. Теорема. *Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^\perp$ любого инвариантного линейного подпространства $\mathcal{P}$ самосопряженного оператора $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ либо $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ также является инвариантным линейным подпространством, причем $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$, где $\mathcal{L}$ либо $\mathcal{E}$ либо $\mathcal{U}$.*

Доказательство.

Шаг 1. В силу результата леммы 7.18 получаем, что, во–первых, $\mathcal{P}^\perp$ — линейное подпространство, а во–вторых, имеет место равенство $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$, где либо $\mathcal{L} = \mathcal{E}$ либо $\mathcal{L} = \mathcal{P}^\perp$.

Шаг 2. Докажем теперь, что $\mathcal{P}^{\perp}$ — инвариантное относительно A линейное подпространство. Действительно, пусть $\mathcal{P}$ — инвариантное линейное подпространство для линейного самосопряженного оператора A. Тогда для любых $x \in \mathcal{P}$ вытекает, что $Ax \in \mathcal{P}$. Предположим, что $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Докажем, что $Ay \in \mathcal{P}^{\perp}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = (Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P} \Rightarrow Ay \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

□

7.31. Теорема. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ ($\in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$) был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A, соответствующих вещественным собственным значениям.*

Доказательство. Достаточность. Пусть в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица диагональна, причем на диагонали стоят вещественные числа — собственные значения данного оператора, и, стало быть, эта матрица симметрична и эрмитова. Но оператор, имеющий в ортонормированном базисе симметричную (эрмитову матрицу), является самосопряженным (см. леммы 7.11 и 7.12).

Необходимость. Выше было доказано, что у самосопряженного оператора A в n–мерном пространстве имеется по крайней мере один собственный вектор и, следовательно, одномерное собственное подпространство $\mathcal{P}$. Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^{\perp}$ этого собственного (инвариантного) подпространства, согласно теореме 7.30, само является инвариантным подпространством размерности $n-1$, поскольку выше в теореме 7.30 доказано, что $\mathcal{L} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$. Ограничение оператора A на инвариантное подпространство $\mathcal{P}^{\perp}$ представляет собой самосопряженный оператор в $\mathcal{P}^{\perp}$, поскольку в силу его инвариантности

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{P}^{\perp},$$

который обладает собственным вектором, лежащим в $\mathcal{P}^{\perp}$. Продолжая процесс, получим ортогональную систему из n собственных векторов оператора A. Нормируя их, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A. □

7. Спектральное разложение самосопряженного оператора

7.32. Пусть $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ ($\in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$) и является самосопряженным. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Пусть

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A(x) = A\left(x^j \cdot \mathbf{e}_j\right) = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \lambda_j \cdot \mathbf{e}_j. \tag{7.77}$$

Рассмотрим оператор P_j ортогональной проекции на линейное подпространство $\mathcal{P}_j := L(\mathbf{e}_j)$:

$$P_j(x) = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \tag{7.78}$$

где нет суммирования по j. Из равенств (7.77) и (7.78) вытекает следующая формула:

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot P_j(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}). \tag{7.79}$$

Следовательно,

$$\boxed{A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.}$$

7.33. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\boxed{A^s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s P_j, \quad s \in \mathbb{N}.} \tag{7.80}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $P_j^2 = P_j$ и $P_j P_k = O$ при $j \neq k$. Действительно, имеем

$$P_j^2 x = P_j(x^j \cdot \mathbf{e}_j) = x^j \cdot P_j(\mathbf{e}_j) = x^j \cdot \mathbf{e}_j = P_j x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}),$$

$$P_j P_k(x) = P_j(x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k \cdot P_j(\mathbf{e}_k) = x^k 0 \cdot \mathbf{e}_j = \theta \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k P_j P_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 P_j.$$

Далее по индукции доказываем утверждение этой леммы. $\square$

7.34. Определение. Самосопряженный оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($\in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$) называется неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны.

7.35. Определение. Определим не целую степень A^s, $s \in [0,+\infty)$ неотрицательного оператора A следующим образом:

$$\boxed{A^s \overset{def:}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s P_j, \quad s \in [0,+\infty).} \tag{7.81}$$

7.36. Лемма. Для линейного неотрицательного самосопряженного оператора A справедливы равенства

$$A^0 = I, \quad A^{s_1}A^{s_2} = A^{s_1+s_2} \quad \text{для всех} \quad s_1, s_2 \in [0,+\infty).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 7.33. $\square$

8. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием

7.37. Рассмотрим в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ квадратичную форму $Q(x)$, которая имеет следующий вид:

$$Q(x^1,\ldots,x^n) = X_e^T \cdot A_e \cdot X_e, \quad X_e^T = (x^1,\ldots,x^n), \tag{7.82}$$

а $A_e \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица квадратичной формы в заданном базисе. Заметим, что $A_e^T = A_e$ и поэтому можно рассматривать матрицу A_e как матрицу некоторого симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$.

$\square$ Действительно, рассмотрим следующий оператор:

$$Ax := x^j a_j^k \cdot \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad A_e = (a_j^k)_n^n. \tag{7.83}$$

Можно проверить, что $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ и его матрица в ортонормированном базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ совпадает с матрицей A_e. $\boxtimes$

Но тогда существует ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица A_f оператора A имеет диагональный вид:

$$A_f = \operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}. \tag{7.84}$$

Пусть

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e = \mathbf{F} \cdot Y_f, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \tag{7.85}$$

где $X_e^T = (x^1,\ldots,x^n)$, $Y_f^T = (y^1,\ldots,y^n)$,

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n), \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n).$$

Тогда имеем

$$X_e = C \cdot Y_f, \quad C^T = C^{-1}, \quad X_e, Y_f \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \tag{7.86}$$

$$A_f = C^{-1} \cdot A_e \cdot C = C^T \cdot A_e \cdot C. \tag{7.87}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T \cdot A_e \cdot X_e =$$
$$= Y_f^T \cdot C^T \cdot A_e \cdot C \cdot Y_f = Y_f^T \cdot A_f \cdot Y_f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2.$$

Действительно,

$$Y_f^T \cdot A_f \cdot Y_f = (y^1, \ldots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =$$
$$= (y^1, \ldots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y^1 \\ \vdots \\ \lambda_n y^n \end{pmatrix} = \lambda^1 (y^1)^2 + \cdots + \lambda_n (y^n)^2.$$

7.38. Здесь мы существенно воспользовались тем, что матрица перехода C между двумя ортонормированными базисами $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$ является ортогональной, т.е. $C^T = C^{-1}$. В противном случае при переходе от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{F}$

$$\boxed{C^T \cdot A_e \cdot C \neq C^{-1} \cdot A_e \cdot C\,!!!}$$

9. О паре квадратичных форм

7.39. Теорема. *Для любой пары квадратичных форм $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, одна из которых положительно определена, существует общий базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(x, x)$ — положительно определенная квадратичная форма и $\mathcal{B}(x, y)$ — билинейная форма, полярная к квадратичной форме $\mathcal{B}(x, x)$. Форма $\mathcal{B}(x, y)$ определяет скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$, относительно которого $\mathcal{L}$ является евклидовым пространством. Согласно результату пункта

7.37 существует такой ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, в котором квадратичная форма $\mathcal{A}(x, x)$ имеет канонический вид, причем

$$\mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \delta_{kj}$$

и поэтому

$$(x, x) = \mathcal{B}(x, x) = x^j x^k \mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2, \quad x = x^j \cdot \mathbf{f}_j = x^k \cdot \mathbf{f}_k.$$

причем

$$\mathcal{A}(x, x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^j)^2.$$

$\square$

7.40. Один из способов нахождения общего базиса. Пусть $\mathcal{B}(x, x)$ — положительно определенная квадратичная форма и A_e и B_e — это матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}(x, x)$ и $\mathcal{B}(x, x)$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{7.88}$$

и при этом преобразование C таково, что

$$C^T \cdot A_e \cdot C = A_f = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{7.89}$$

$$C^T \cdot B_e \cdot C = B_f = I = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1\}. \tag{7.90}$$

Тогда справедливы следующие цепочки равенства:

$$\begin{gathered} A_e = (C^T)^{-1} \cdot \Lambda \cdot C^{-1}, \quad B_e = (C^T)^{-1} \cdot C^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e = (C^T)^{-1} \cdot \Lambda \cdot C^{-1}, \quad B_e^{-1} = C \cdot C^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_e^{-1} \cdot A_e = C \cdot C^T \cdot (C^T)^{-1} \cdot \Lambda \cdot C^{-1} = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B_e^{-1} \cdot A_e \cdot C = C \cdot \Lambda. \end{gathered} \tag{7.91}$$

Рассмотрим отдельно равенство

$$D \cdot C = C \cdot \Lambda, \quad C = \|C_1, \ldots, C_n\|. \tag{7.92}$$

Тогда имеем

$$(D \cdot C)_j = D \cdot C_j, \quad (C \cdot \Lambda)_j = C \cdot \Lambda_j. \tag{7.93}$$

Заметим, что

$$C \cdot \Lambda_j = \|C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j C_j. \quad (7.94)$$

Таким образом, из (7.92)–(7.93) получаем, что

$$D \cdot C = C \cdot \Lambda \Rightarrow D \cdot C_j = \lambda_j C_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда и из (7.91) получаем равенства

$$B_e^{-1} \cdot A_e \cdot C_j = \lambda_j C_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7.95)$$

Последнее равенство означает, что столбцы C_j матрицы C, т.е. координаты элемента $\mathbf{f}_j$ нового базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ относительно старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ являются собственными векторами матрицы $B_e^{-1} \cdot A_e$, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, канонические коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями уравнения

$$\det(B_e^{-1} \cdot A_e - \lambda I) = 0 \quad \text{или} \quad \det(A_e - \lambda B_e) = 0, \quad (7.96)$$

а координаты нового базиса относительно старого являются решениями следующей линейной однородной системы уравнений:

$$A_e \cdot Y = \lambda B_e \cdot Y.$$

Отметим, что теорема 7.39 обеспечивает существования полного набора вещественных корней уравнения (7.96) с учетом кратности. Кроме того, докажем, что матрица $B_e^{-1} \cdot A_e$ является симметричной.

□ Действительно, имеем

$$B_e^{-1} \cdot A_e = C \cdot C^T \cdot (C^T)^{-1} \Lambda \cdot C^{-1} = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1},$$

$$\left(B_e^{-1} \cdot A_e\right)^T = (C^{-1})^T \cdot \Lambda^T \cdot C^T = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1} = B_e^{-1} \cdot A_e. \quad \boxtimes$$

10. Примеры решения задач

7.41. Пример. Сопряженный оператор. Пусть в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства $\mathcal{E}$ заданы векторы

$$\mathbf{e}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{e}_2 = (-1, 1, 1), \quad \mathbf{e}_3 = (1, 0, 1). \quad (7.97)$$

Пусть оператор A задан матрицей

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad (7.98)$$

в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Найти матрицу сопряженного оператора A^* в том же базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Решение. Пусть билинейная форма

$$G(x, y) : \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} \to \mathbb{R}^1$$

задает скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Пусть, кроме того,

$$x = \mathbf{E} \cdot X_e, \quad y = \mathbf{E} \cdot Y_e, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad X_e, Y_e \in \mathbb{R}^{n\times 1}. \quad (7.99)$$

С одной стороны, с учетом (7.99) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x, y) = G(x, y) = x_e^j G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) y_e^k = X_e^T \cdot G_e \cdot Y_e. \qquad (7.100)$$

С другой стороны, имеем

$$Ax = A(\mathbf{E} \cdot X_e) = (A \cdot \mathbf{E}) \cdot X_e = \mathbf{E} \cdot A_e \cdot X_e, \qquad (7.101)$$

$$A^*y = A^*(\mathbf{E} \cdot Y_e) = (A^* \cdot \mathbf{E}) \cdot Y_e = \mathbf{E} \cdot A_e^* \cdot Y_e. \qquad (7.102)$$

Поэтому из (7.100) с учетом (7.101) и (7.102) приходим к равенству, справедливому для любых $X_e, Y_e \in \mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow (A_e \cdot X_e)^T \cdot G_e \cdot Y_e = X_e^T \cdot G_e \cdot A_e^* \cdot Y_e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow X_e^T \cdot \left(A_e^T \cdot G_e - G_e \cdot A_e^*\right) \cdot Y_e = 0 \Leftrightarrow A_e^T \cdot G_e = G_e \cdot A_e^* \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_e^* = G_e^{-1} \cdot A_e^T \cdot G_e. \qquad (7.103)$$

Заметим, что

$$G_e = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (7.104)$$

Поэтому из (7.103) и (7.104) вытекает равенство

$$A_e^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -53 & -20 & -83 \\ 40 & 19 & 57 \\ 31 & 11 & 49 \end{pmatrix}. \qquad (7.105)$$

Важный вопрос: где мы воспользовались тем, что базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задан своими координатами в некотором ортонормированном базисе?

7.42. Пример. Самосопряженный оператор. Для линейного оператора A, имеющего в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.106}$$

найти базис, состоящий из ортонормированных собственных векторов.

Решение. В силу результатов лемм 7.12 и 7.14 линейный оператор A является симметричным. Поэтому существует собственный базис этого оператора, состоящий из собственных векторов. Найдем теперь собственные векторы этого линейного оператора. С этой целью найдем корни характеристического многочлена:

$$\det(A_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda). \tag{7.107}$$

Таким образом, характеристический многочлен имеет три различных корня

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3.$$

Алгебраическая кратность каждого корня равна 1. Очевидно, что геометрическая кратность каждого корня тоже равна 1. Осталось найти собственные векторы. Для $\lambda = 0$ имеем

$$A_e - 0I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.108}$$

Поэтому система линейных однородных уравнений

$$(A_e - 0I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

эквивалентна следующей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ФСР состоит, например, из столбца $X_1 = (-1, 1, 1)^T$. При этом собственный вектор линейного оператора равен

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{7.109}$$

Для $\lambda = 1$ имеем

$$A_e - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.110}$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$(A_e - I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T \tag{7.111}$$

эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.112}$$

ФСР состоит, например, из столбца

$$X_2 = (0, -1, 1)^T,$$

а соответствующий собственный вектор равен

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_2 = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{7.113}$$

Для $\lambda = 3$ справедливы соотношения

$$A_e - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7.114}$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$(A_e - 3I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T$$

можно записать в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.115}$$

ФСР состоит, например, из столбца

$$X_3 = (2, 1, 1)^T,$$

которому соответствует собственный вектор

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_3 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \tag{7.116}$$

Таким образом, собственный базис линейного оператора A состоит из векторов (7.109), (7.113) и (7.116), которые осталось нормировать на единицу:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \tag{7.117}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3), \tag{7.118}$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3). \tag{7.119}$$

Найдем матрицу оператора в ортонормированном базисе $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$:

$$A \cdot (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, A\mathbf{u}_3) =$$

$$= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot A_u = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{7.120}$$

7.43. Пример. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 \tag{7.121}$$

к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Поскольку для матрицы ортогонального преобразования выполнено равенство $C^T = C^{-1}$, то ортогональное преобразование одинаковым образом преобразует матрицы линейных операторов и квадратичных форм. Запишем матрицу квадратичной формы

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{7.122}$$

Характеристический многочлен матрицы B равен

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \\ = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9). \quad (7.123)$$

Поэтому в базисе из собственных векторов матрицы B квадратичной формы ее матрица будет иметь следующий вид:

$$\widetilde{B} = C^T \cdot B \cdot C = C^{-1} \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (7.124)$$

и соответствующая квадратичная форма примет вид

$$3(x^{1'})^2 + 6(x^{2'})^2 + 9(x^{3'})^2. \quad (7.125)$$

Однако, нам нужно найти и матрицу ортогонального преобразования C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C. \quad (7.126)$$

Заметим, что столбцы матрицы C составлены из координат разложения соответствующих векторов нового базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ по старому $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Для $\lambda = 3$ имеем

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.127)$$

Тогда система линейных однородных уравнений

$$(B - 3I) \cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)$$

эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.128)$$

ФСР состоит, например, из следующего столбца

$$X_1 = (2, 2, -1)^T. \quad (7.129)$$

Для $\lambda = 6$ имеем

$$B-6I=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.130)$$

Тогда линейная однородная система уравнений

$$(B-6I)\cdot X = O, \quad X=(x^1,x^2,x^3)^T$$

примет следующий эквивалентный вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.131)$$

ФСР состоит, например, из следующего столбца:

$$X_2=(-1,2,2)^T. \quad (7.132)$$

Для $\lambda=9$ имеем

$$B-9I=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.133)$$

Тогда линейная однородная система уравнений

$$(B-9I)\cdot X = O, \quad X=(x^1,x^2,x^3)^T$$

эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.134)$$

ФСР состоит, например, из столбца

$$X_3=(2,-1,2)^T. \quad (7.135)$$

Нормируя столбцы (7.129), (7.132) и (7.135) получим разложение нового ортонормированного базиса по старому ортонормированному базису

$$\mathbf{e}_{1'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_1 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3, \tag{7.136}$$

$$\mathbf{e}_{2'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_2 = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \tag{7.137}$$

$$\mathbf{e}_{3'} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X_3 = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3. \tag{7.138}$$

Таким образом, матрица C определяется следующим образом:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C = \\ = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \tag{7.139}$$

а старые и новые координаты связаны равенством

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}. \tag{7.140}$$

7.44. Пример. Приведение пары квадратичных форм одним ортогональным преобразованием к каноническим формам. Проверить, что в паре квадратичных форм, которые имеют следующий вид:

$$\phi = 8(x^1)^2 - 28(x^2)^2 + 14(x^3)^2 + 16x^1x^2 + 14x^1x^3 + 32x^2x^3, \tag{7.141}$$

$$\psi = (x^1)^2 + 4(x^2)^2 + 2(x^3)^2 + 2x^1x^3 \tag{7.142}$$

по крайней мере одна форма является положительно определенной. Найти невырожденное линейное преобразование, приводящее эту форму к нормальному, а другую форму той же пары к каноническому виду, и найти этот канонический вид.

Решение. Квадратичной форме ϕ отвечает матрица

$$\Phi = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 \\ 8 & -28 & 16 \\ 7 & 16 & 14 \end{pmatrix}, \tag{7.143}$$

а квадратичной форме ψ отвечает матрица

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{7.144}$$

Как мы знаем из критерия Сильвестра вытекает, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все главные миноры положительны. Проверим, что квадратичная форма ψ является положительно определенной. Действительно,

$$1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Найдем тогда собственные числа пары матриц Φ и Ψ, то есть корни многочлена

$$\det(\Phi - \lambda\Psi) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 8 & 7-\lambda \\ 8 & -28-4\lambda & 16 \\ 7-\lambda & 16 & 14-2\lambda \end{vmatrix} = $$

$$= -4(\lambda-9)^2(\lambda+9). \tag{7.145}$$

Таким образом, совместными собственными числами матриц Φ и Ψ являются $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

Теперь нам нужно найти базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, обладающий следующими свойствами:

1. Верно равенство $(\Phi - \lambda_{i'}\Psi) \cdot \mathbf{e}_{i'} = O$.
2. Векторы $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения, заданного симметрической матрицей Ψ.

Прежде всего заметим, что матрица Ψ определяет некоторое скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$

$$(X, Y) := X^T \cdot \Psi \cdot Y, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad Y = (y^1, y^2, y^3)^T. \tag{7.146}$$

При этом квадратичная форма ϕ можно записать в компактном виде

$$\phi = X^T \cdot \Phi \cdot X. \tag{7.147}$$

Линейное пространство $\mathbb{R}^3$ является евклидовым относительно скалярного произведения (7.146). Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — произвольный ортонормированный относительно скалярного произведения (7.146) базис в $\mathbb{R}^3$, а Φ — это матрица квадратичной формы (7.147) в этом базисе.

Заметим, что если $\lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}$, то соответствующие столбцы $\mathbf{e}_{i'}$ и $\mathbf{e}_{j'}$ являются ортогональными.

$\square$ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(\Phi - \lambda_{i'}\Psi)\cdot \mathbf{e}_{i'} = O, \quad (\Phi - \lambda_{j'}\Psi)\cdot \mathbf{e}_{j'} = O, \tag{7.148}$$

$$\mathbf{e}_{j'}^T\cdot(\Phi-\lambda_{i'}\Psi)\cdot\mathbf{e}_{i'} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e}_{j'}^T\cdot\Phi\cdot\mathbf{e}_{i'} = \lambda_{i'}\mathbf{e}_{j'}^T\cdot\Psi\cdot\mathbf{e}_{i'} = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{i'}), \tag{7.149}$$

$$\mathbf{e}_{i'}^T \cdot (\Phi - \lambda_{j'}\Psi)\cdot \mathbf{e}_{j'} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'} = \lambda_{j'}\mathbf{e}_{i'}^T\cdot\Psi\cdot\mathbf{e}_{j'} = \lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}), \tag{7.150}$$

$$\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'} = (\mathbf{e}_{i'}^T \cdot \Phi \cdot \mathbf{e}_{j'})^T = \mathbf{e}_{j'}^T\cdot\Phi^T\cdot\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_{j'}^T\cdot\Phi\cdot\mathbf{e}_{i'}. \tag{7.151}$$

Из равенств (7.149)–(7.151) получаем, что

$$\lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{i'}), \tag{7.152}$$

из которого в силу симметричности скалярного произведения приходим к равенству

$$\lambda_{j'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = \lambda_{i'}(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}).$$

Следовательно,

$$(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_{i'} \neq \lambda_{j'}. \quad \boxtimes \tag{7.153}$$

Рассмотрим сначала корень $\lambda_3 = -9$ алгебраической кратности 1. Тогда собственный вектор относительно матриц Φ и Ψ определяется из следующей системы однородных линейных уравнений:

$$(\Phi + 9\Psi)\cdot X = O, \quad X = (x^1, x^2, x^3)^T, \quad O = (0,0,0)^T, \tag{7.154}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & 8 & 16 \\ 8 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.155}$$

Несложно проверить, что ФСР этой системы, например, состоит из столбца

$$X_3 = c_3(0, -2, 1)^T, \quad c_3 \neq 0, \tag{7.156}$$

нормируя который на единицу относительно скалярного произведения (7.146), получим следующие соотношения:

$$c_3^2(0,-2,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow c_3 = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}. \tag{7.157}$$

Таким образом, первый собственный нормированный на единицу вектор можно выбрать, например, таким

$$\mathbf{e}_{3'} = \left(0, -\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right). \tag{7.158}$$

Рассмотрим теперь случай собственного числа $\lambda = 9$ алгебраической кратности 2. Имеем

$$(\Phi - 9\Psi) \cdot X = O, \tag{7.159}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ 8 & -64 & 16 \\ -2 & 16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7.160}$$

Система уравнений (7.160) эквивалентна следующему одному уравнению:

$$-x^1 + 8x^2 - 2x^3 = 0. \tag{7.161}$$

Выберем любое решение этого уравнения, например, $X_1 = (-2, 0, 1)^T$. Квадрат длины этого вектора относительно скалярного произведения (7.146) равен

$$(-2, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2. \tag{7.162}$$

Поэтому получаем вектор длины 1

$$\mathbf{e}_{1'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{7.163}$$

Вектор $\mathbf{e}_{2'}$ должен удовлетворять уравнению (7.161) а также быть ортогональным к вектору $\mathbf{e}_{1'}$ относительно скалярного произведения (7.146). Стало быть, имеем

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}) = (-\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0. \tag{7.164}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$-x^1 + 8x^2 - 2x^3 = 0, \quad x_1 = 0. \tag{7.165}$$

ФСР этой системы уравнений состоит, например, из следующего столбца:

$$X_2 = c_2(0, 1, 4)^T, \quad c_2 \neq 0. \tag{7.166}$$

Условие того, что этот вектор имеет длину 1 относительно скалярного произведения (7.146), примет следующий вид:

$$c_2^2(0, 1, 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow c_2 = \pm\frac{2}{3}. \tag{7.167}$$

Из (7.166) и (7.167) вытекает следующее выражение для собственного вектора

$$\mathbf{e}_{2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \qquad (7.168)$$

Матрица перехода C от старого ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$, определенному равенствами (7.163), (7.168) и (7.163), имеет следующий вид:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot C =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -2/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix}. \qquad (7.169)$$

При этом в этом базисе арифметического пространства $\mathbb{R}^3$ квадратичные формы имеют следующий вид:

$$\psi(x) = (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2 + (x^{3'})^2,$$
$$\phi(x) = -9(x^{1'})^2 + 9(x^{2'})^2 + 9(x^{3'})^2,$$
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & -2/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix}.$$

7.45. Пример. Экзаменационная задача Рассматривается линейное евклидово пространство $\mathcal{E}$, $\dim \mathcal{E} \in \mathbb{N}$. Пусть: $P \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$ — самосопряженный оператор, причем $P^2 = P$ (т. е. оператор P идемпотентный). Доказать, что оператор P является оператором ортогонального проектирования на линейное подпространство $\operatorname{im} P \subset \mathcal{E}$.

Решение. Справедливо разложение

$$x = Px + (x - Px) \quad \text{для любого} \quad x \in \mathcal{E}. \qquad (7.170)$$

Очевидно, что $Px \in \operatorname{im} P$. Докажем, что

$$(x - Px) \in (\operatorname{im} P)^{\perp} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \qquad (7.171)$$

Пусть $z \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такое $y \in \mathcal{E}$, что $z = Py$. Справедливы равенства

$$(x - Px, z) = (x - Px, Py) = (P(x - Px), y) = (Px - P^2 x, y) =$$
$$= (Px - Px, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E} \quad \text{и всех} \quad z \in \operatorname{im} P. \qquad (7.172)$$

Следовательно, $x - Px \in (\operatorname{im} P)^{\perp}$. Следовательно, оператор P является оператором ортогонального проектирования на $\operatorname{im} P$.

7.46. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$. Пусть $A, B \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ — два самосопряженных оператора. Доказать, что оператор AB является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Решение. Необходимость. Пусть $(AB)^* = AB$. Для всех $x, y \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка равенств

$$(ABx, y) = (x, (AB)^*y) = (x, ABy) = \\ = (B^*A^*x, y) = (BAx, y) \Rightarrow AB = BA. \quad (7.173)$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $AB = BA$. Тогда для всех $x, y \in \mathcal{E}$ справедлива цепочка равенств

$$(x, (AB)^*y) = (x, B^*A^*y) = (x, BAy) = (x, ABy).$$

Следовательно, $(AB)^* = AB$.

7.47. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается ориентированное евклидово пространство V_3 с правым ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть $\mathbf{a} \in V_3$ и $Ax = [x, \mathbf{a}]$ при $x \in V_3$ (здесь $[x, \mathbf{a}]$ — векторное произведение векторов x и $\mathbf{a} \neq \theta$). Доказать, что A — линейный оператор в пространстве V_3. Найти матрицу оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; ядро, образ, собственные значения, собственные векторы оператора A.

Решение. Шаг 1. Линейность. Линейность оператора $Ax = [x, \mathbf{a}]$ является следствием линейности векторного произведения $[x, \mathbf{a}]$ по первому аргументу.

Шаг 2. Матрица оператора. Справедливы следующие равенства:

$$A\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{a}] = -a_3\mathbf{e}_2 + a_2\mathbf{e}_3, \quad (7.174)$$

$$A\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{a}] = a_3\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_3, \quad (7.175)$$

$$A\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_3, \mathbf{a}] = -a_2\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2, \quad (7.176)$$

где $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$. Таким образом, из (7.174)–(7.176) вытекает, что

$$(A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot A_e, \quad (7.177)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Ядро оператора. Имеем

$$\ker A = \{x \in V_3 : \ [x, \mathbf{a}] = \theta\}. \quad (7.178)$$

Справедливы выражения

$$[x, \mathbf{a}] = \theta \Leftrightarrow \alpha\mathbf{a} + \beta x = \theta, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Если $\beta = 0$, то $\alpha \neq 0$ и тогда $\mathbf{a} = \theta$, что противоречит условию задачи. Поэтому $\beta \neq 0$. Следовательно,

$$x = \frac{\alpha}{\beta}\mathbf{a}.$$

Итак, отсюда и из (7.178) получаем

$$\ker A = \{x \in V_3 : \ x = t \cdot \mathbf{a}, \ t \in \mathbb{R}\}. \tag{7.179}$$

Шаг 4. Образ оператора. По определению имеем

$$\operatorname{im} A = \{y \in V_3 : \ y = [x, \mathbf{a}], \quad \forall x \in V_3\}. \tag{7.180}$$

Докажем, что

$$\operatorname{im} A = \{y \in V_3 : \ (y, \mathbf{a}) = 0\}. \tag{7.181}$$

☐ Действительно, пусть $y \in \operatorname{im} A$. Тогда найдется такое $x \in V_3$, что $y = [x, \mathbf{a}]$. Согласно свойствам векторного произведения получаем $(y, \mathbf{a}) = 0$. Обратно. Пусть $(y, \mathbf{a}) = 0$. Введем следующий правый ортогональный базис $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ в V_3. Тогда взаимный базис будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{c}, \mathbf{a}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}, \quad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}. \tag{7.182}$$

Справедливо разложение

$$y = \alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3, \tag{7.183}$$

причем из условия $(y, \mathbf{a}) = 0$ сразу же получаем, что $\alpha = 0$. Итак,

$$y = \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3 = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}\{\beta[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + \gamma[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\} = [\mathbf{d}, \mathbf{a}] = A\mathbf{d}, \tag{7.184}$$

где

$$\mathbf{d} = \frac{\beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{b}}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}.$$

Следовательно, $y \in \operatorname{im} A$.

Шаг 5. Собственные векторы. Рассмотрим уравнение

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq \theta, \tag{7.185}$$

из которого получаем

$$[x, \mathbf{a}] = \lambda x, \quad x \neq \theta, \tag{7.186}$$

Если $\lambda \neq 0$, то из равенства (7.186) получаем, что $(x, x) = 0$, т.е. $x = \theta$. Пришли к противоречию. Значит, $\lambda = 0$. В этом случае задача (7.185) имеет один линейно независимый собственный вектор, например, $x = \mathbf{a}$. Собственное подпространство совпадает с $\ker A$.

7.48. Пример. Экзаменационная задача. Рассматривается унитарное пространство $\mathcal{U}$. Пусть $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$. Доказать, что $i(A-A^*)$ — самосопряженный оператор.

Решение. Справедлива цепочка равенств

$$(i(A-A^*)x,y) = i(Ax,y) - i(A^*x,y) = \\ = (x,-iA^*y) + (x,iA^{**}y) = (x,i(A-A^*)y) \quad (7.187)$$

для всех $x, y \in \mathcal{U}$, поскольку $A^{**} = A$.

7.49. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Заданы элементы этого евклидова пространства

$$x_1 = \mathbf{E}\cdot X_1, \quad x_2 = \mathbf{E}\cdot X_2, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.188)$$

Найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на линейное подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Решение. Очевидно, что $\dim L(x_1, x_2) = 2$. Построим базис в $(L(x_1, x_2))^{\perp}$. Действительно, в силу ортонормированности базиса $\mathbf{E}$ имеем

$$y = \mathbf{E}\cdot Y, \quad (Y, X_1) = (Y, X_2) = 0, \quad Y^T = (y^1, y^2, y^3, y^4), \quad (7.189)$$

где символом $(\cdot,\cdot)$ мы обозначили стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^4$. Из (7.189) получаем систему однородных уравнений

$$1\cdot y^1 + 0\cdot y^2 = 0\cdot y^3 + (-1)\cdot y^4, \quad 1\cdot y^1 + 1\cdot y^2 = 0\cdot y^3 + 0\cdot y^4. \quad (7.190)$$

ФСР этой системы уравнений состоит, например, из следующих столбцов

$$Y_1^T = (0,0,1,0), \quad Y_2^T = (-1,1,0,1). \quad (7.191)$$

Но тогда с учетом (7.188) и (7.191) справедливо равенство

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)\cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.192)$$

При этом согласно определению ортогонального проектирования имеем

$$Px_1 = x_1, \quad Px_2 = x_2, \quad Py_1 = \theta, \quad Py_2 = \theta. \quad (7.193)$$

Из (7.193) получаем

$$(Px_1, Px_2, Py_1, Py_2) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \cdot P_x, \tag{7.194}$$

$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.195}$$

Если

$$(P\mathbf{e}_1, P\mathbf{e}_2, P\mathbf{e}_3, P\mathbf{e}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \cdot P_e, \tag{7.196}$$

то

$$P_e = C \cdot P_x \cdot C^{-1}. \tag{7.197}$$

Вычислите сами!

7.50. Пример. Вычислительная задача. Рассматривается евклидово пространство $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе E :

$$Q(x) = 3(x^1)^2 - 4x^1x^3 + (x^2)^2 + 3(x^3)^2. \tag{7.198}$$

Найти: матрицу квадратичной формы Q в базисе $\mathbf{E}$; ортонормированный базис $\mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, в котором матрица квадратичной формы Q имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса E к базису F и наоборот; матрицу квадратичной формы в базисе F.

Решение. Полярная билинейная форма $B(x, y)$ к квадратичной форме $Q(x) = B(x, x)$ имеет следующий вид:

$$B(x, y) = 3x^1y^1 - 2x^1y^3 - 2x^3y^1 + x^2y^2 + 3x^3y^3. \tag{7.199}$$

Поэтому

$$Q_e = B_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \tag{7.200}$$

Корни характеристического многочлена

$$f(\lambda) = \det(Q_e - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7.201}$$

равны $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Случай 1. $\lambda_1 = 5$. Тогда

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim$$

$$\backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.202)$$

Нормированный на единицу ФСР последней однородной СЛАУ имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (7.203)$$

причем собственные вектор самосопряженного оператора, порождающего данную симметричную билинейную форму, имеет следующий вид:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{E} \cdot X_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3. \quad (7.204)$$

Случай 2. $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. В этом случае имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \backsim x^1 - x^3 = 0. \quad (7.205)$$

Нормированный на единицу ФСР этой системы уравнений состоит из двух столбцов

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (7.206)$$

а соответствующие собственные векторы имеют следующий вид:

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{E} \cdot X_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{E} \cdot X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_3. \quad (7.207)$$

Семейство векторов (7.204) и (7.207) образуют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{E}$, в котором матрица квадратичной формы диагональна. Именно,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot C, \quad C = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$Q_f = C^T \cdot Q_e \cdot C = C^{-1} \cdot Q_e \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 8

Тензоры

1. Правило умножения «строчка на столбец»

8.1. Пример. В этом параграфе мы детально применим наше правило умножения матриц «строчка на столбец» для того, чтобы переходить от тензорной формы записи умножения матриц к матричной форме. Причем это будем делать на примерах. Мы пользуемся обозначениями Эйнштейна. Начнем со следующего простейшего случая:

$$\boxed{a^i b_i.} \tag{8.1}$$

Заметим, что в случае одного индекса у буквы верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. В таком случае рассмотрим следующие матрицу–столбец и матрицу–строчку:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, \dots, b_n). \tag{8.2}$$

Наше правило «строчка на столбец» в данном случае означает, что мы можем умножить строчку B на столбец A и поэтому справедливы равенства

$$a^i b_i = b_i a^i = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B \cdot A. \tag{8.3}$$

Заметим, что при этом нам пришлось поменять местами сомножители в сумме произведений (8.1).

8.2. Пример. Теперь рассмотрим следующий пример. Как записать в матричной форме следующую сумму произведений

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.} \tag{8.4}$$

Поскольку у обоих букв индекс нижний, то эти индексы нумеруют столбцы следующих матриц–строчек:

$$A = (a_1, \ldots, a_n), \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{8.5}$$

Но умножить строчку на строчку мы не можем. Найдем транспонированные матрицы к матрицам–строчкам (8.5). Они имеют следующий вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

Но теперь у нас справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \cdot B^T, \tag{8.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = B \cdot A^T. \tag{8.8}$$

Заметим, что сумма произведений (8.4) — это число, произведения $A \cdot B^T$ и $B \cdot A^T$ — матрицы размера 1×1 и поэтому справедливы следующие равенства:

$$A \cdot B^T = (A \cdot B^T)^T = (B^T)^T \cdot A^T = B \cdot A^T. \tag{8.9}$$

Таким образом, мы пришли к выводу о том, что если в сумме произведений индекс суммирования у обоих элементов матриц находится внизу, нужно при записи в матричной форме переходить к транспонированной матрице.

8.3. Пример. Теперь рассмотрим следующую сумму произведений:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a^i b^i.} \tag{8.10}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то мы введем следующие матрицы–столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \tag{8.11}$$

Умножить столбец на столбец мы не можем. Поэтому как в предыдущем случае рассмотрим соответствующие транспонированные матрицы:

$$A^T = (a^1, \ldots, a^n), \quad B^T = (b^1, \ldots, b^n). \tag{8.12}$$

Но тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = (a^1, \ldots, a^n) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = A^T \cdot B, \tag{8.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = \sum_{i=1}^{n} b^i a^i = (b^1, \ldots, b^n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B^T \cdot A. \tag{8.14}$$

Заметим, как и в предыдущем примере, что $A^T \cdot B = B^T \cdot A \in \mathbb{K}^{1\times 1}$.

Теперь наша задача рассмотреть разнообразные суммы произведений элементов квадратных матриц $n \times n$.

8.4. Пример. Начнем со следующего примера:

$$\boxed{a^j_s b^s_k,} \tag{8.15}$$

здесь мы используем обозначения Эйнштейна. В данном случае мы используем один верхний и один нижний индексы для задания элемента матрицы. Верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. Итак, введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|, \quad A^j = (a^j_1, \ldots, a^j_n), \quad j = \overline{1, n}, \tag{8.16}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^n_1 & \cdots & b^n_n \end{pmatrix} = \|B_1, \ldots, B_n\|, \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{8.17}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$a_s^j b_k^s = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix} = A^j \cdot B_k = \{A \cdot B\}_k^j. \tag{8.18}$$

Напомним, что символом $\{C\}_k^j$ мы обозначаем операцию извлечения из матрицы C ее элемент, расположенный на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

8.5. Определение. Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Введем операции извлечения j–ой строчки из матрицы A и операцию извлечения k–го столбца из матрицы A следующим образом:

$$\{A\}^j = A^j, \quad \{A\}_k = A_k, \quad A = \|A_1, \ldots, A_n\| = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}.$$

8.6. Пример. Теперь рассмотрим вот такой пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^n a_s^j b_s^k.} \tag{8.19}$$

Поскольку нижний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b_1^k, \ldots, b_n^k), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix}. \tag{8.20}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(B^k)^T = \{B^T\}_k, \tag{8.21}$$

причем индекс в правой и в левой частях носят разный характер. В левой части индекс k совпадает с верхним индексом, которым мы обозначаем элементы матрицы $B = (b_s^k)$, а в правой части индексом k мы обозначаем k–ый столбец матрицы B^T.

Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^n a_s^j b_s^k = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix} = A^j \cdot (B^k)^T =$$

$$= \{A\}^j \{B^T\}_k = \{A \cdot B^T\}_k^j = \{A \cdot B^T\}^{jk}, \tag{8.22}$$

где символом $\{C\}^{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы C, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Туже операцию мы обозначаем символом $\{C\}^j_k$.

8.7. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^s_k.} \tag{8.23}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то

$$A_j = \begin{pmatrix} a^1_j \\ \vdots \\ a^n_j \end{pmatrix}, \quad (A_j)^T = (a^1_j, \ldots, a^n_j), \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix}. \tag{8.24}$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^s_k = (a^1_j, \ldots, a^n_j) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix} = (A_j)^T \cdot B_k =$$
$$= \{A^T\}^j \{B\}_k = \{A^T \cdot B\}^j_k = \{A^T \cdot B\}_{jk}, \tag{8.25}$$

где символом $\{C\}_{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента матрицы C, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

8.8. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk}.} \tag{8.26}$$

Итак, в этом примере оба индекса верхние. Тогда первый индекс нумерует строчки матрицы,а второй индекс нумерует столбцы матрицы. Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{matrix} \right\|, \quad A^j = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}), \quad j = \overline{1, n}, \tag{8.27}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^{11} & \dots & b^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n1} & \dots & b^{nn} \end{pmatrix} = \|B^1, \dots, B^n\|, \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{8.28}$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk} = (a^{j1}, \dots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \cdot \{B\}_k = \{A \cdot B\}^{jk}. \tag{8.29}$$

8.9. Пример. Рассмотрим такой пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks}.} \tag{8.30}$$

Заметим, что поскольку второй верхний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b^{k1}, \dots, b^{kn}), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix}. \tag{8.31}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks} = (a^{j1}, \dots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= A^j \cdot (B^k)^T = \{A\}^j \cdot \{B^T\}_k = \{A \cdot B^T\}^j_k = \{A \cdot B^T\}^{jk}. \tag{8.32}$$

8.10. Пример. Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk}.} \tag{8.33}$$

В обозначениях предыдущих двух примеров получаем следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk} = (a^{1j}, \dots, a^{nj}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= (A^j)^T \cdot B^k = \{A^T\}_j \cdot B^k = \{A^T \cdot B\}^{jk},$$

где

$$A^j = \begin{pmatrix} a^{1j} \\ \vdots \\ a^{nj} \end{pmatrix}, \quad (A^j)^T = (a^{1j}, \cdots, a^{nj}), \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}.$$

8.11. Пример. Следующий пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a_s^j b^{sk}.} \tag{8.34}$$

В этой сумме произведений во множителе a_s^j индекс j нумерует строчки, а индекс s нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j b^{sk} = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \cdot \{B\}_k = \{A \cdot B\}^{jk}. \tag{8.35}$$

8.12. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a_j^s b^{sk}.} \tag{8.36}$$

Здесь, во множителе a_j^s индекс s нумерует строчки, а индекс j нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_j^s b^{sk} = (a_j^1, \ldots, a_j^n) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} =$$
$$= (A_j)^T \cdot B_k = \{A^T\}^j \cdot \{B\}_k = \{A^T \cdot B\}_k^j = \{A^T \cdot B\}^{jk}, \tag{8.37}$$

где

$$A_j = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^n \end{pmatrix}, \quad (A_j)^T = (a_j^1, \cdots, a_j^n).$$

2. «Мистическое» определение тензора

8.13. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим два базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ в этом линейном пространстве, которые связаны линейным преобразованием

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^i \cdot \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = c_i^{i'} \cdot \mathbf{e}_{i'}, \quad c_{i'}^i c_j^{i'} = \delta_j^i, \quad c_i^{i'} c_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}. \tag{8.38}$$

Дадим «мистическое» определение тензора.

8.14. Определение. Тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется объект, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ задается n^{p+q} координатами $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} \in \mathbb{K}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A_{j_{1'} \ldots j_{p'}}^{k_{1'} \ldots k_{q'}} = c_{j_{1'}}^{j_1} \cdots c_{j_{p'}}^{j_p} c_{k_1}^{k_{1'}} \cdots c_{k_q}^{k_{q'}} A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}, \tag{8.39}$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование. Соответствующий своим координатам $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ тензор будем называть тензором A. Соответствие

$$\boxed{\text{тензор}} \leftrightarrow \boxed{\text{координаты при фиксированном базисе}}$$

взаимно однозначно.

8.15. Иногда, допуская грубую ошибку, тензором называют его координаты $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$.

8.16. Пример. Пусть A имеет одну и туже координату во всех базисах — это тензор скаляр типа $(0, 0)$.

8.17. Пример. Контравариантный тензор типа $(0, 1)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A^{k'} = c_k^{k'} A^k. \tag{8.40}$$

Это набор координат вектора.

8.18. Пример. Ковариантный тензор типа $(1,0)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A_{k'} = c^k_{k'} A_k. \tag{8.41}$$

Это набор координат линейной формы (ковектора).

8.19. Пример. Градиент функции. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ связаны преобразованием

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \mathbf{e}_k, \quad x^k = c^k_{k'} x^{k'}. \tag{8.42}$$

Градиентом функции f называется «вектор»

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \mathbf{e}_k.$$

Однако, при переходе к новому базису (8.42) справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} c^k_{k'},$$

т.е. преобразуется как тензор ранга $(1,0)$. Следовательно, градиент функции — не вектор, а ковектор.

8.20. Лемма. Матрица линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ в каждом базисе линейного пространства $\mathcal{L}$ состоит из координат некоторого тензора ранга $(1,1)$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — два базиса линейного пространства $\mathcal{L}$, связанные равенством (8.42). Заметим, что матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, имеет следующий вид:

$$a^j_k = \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle, \tag{8.43}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в сопряженном к $\mathcal{L}$ линейном пространстве $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} a^{j'}_{k'} = \langle \mathbf{e}^{j'}, A\mathbf{e}_{k'} \rangle = \left\langle c^{j'}_j \cdot \mathbf{e}^j, A\left(c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k\right)\right\rangle = \\ = c^{j'}_j c^k_{k'} \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle = c^{j'}_j c^k_{k'} a^j_k. \end{aligned} \tag{8.44}$$

□

8.21. Лемма. Матрица билинейной формы на линейном пространстве $\mathcal{L}$ в каждом базисе состоит из координат некоторого тензора ранга $(2,0)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей леммы справедлива следующая цепочка равенств:

$$b_{j'k'} = B(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = B\left(c^j_{j'} \cdot \mathbf{e}_j, c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k\right) = \\ = c^j_{j'} c^k_{k'} B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = c^j_{j'} c^k_{k'} b_{jk}. \quad (8.45)$$

□

8.22. Дадим определение суммы тензоров и умножения тензора на число. Пусть $A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}$ и $B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}$ — координаты двух тензоров A и B одного типа (p,q), а $\alpha \in \mathbb{K}$ — произвольное число.

8.23. Определение. Суммой двух тензоров $A + B$ типа (p,q) называется объект D, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$D^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} := A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} + B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}. \quad (8.46)$$

Произведением тензора A типа (p,q) на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется объект $F := \alpha A$, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$F^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} := \alpha A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}. \quad (8.47)$$

8.24. Теорема. *Сумма двух тензоров типа (p,q) и произведение тензора типа (p,q) на число $\alpha \in \mathbb{K}$ являются тензорами типа (p,q).*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Поэтому докажем только первое утверждение. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$D^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} = A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} + B^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} + c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} \left(A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} + B^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}\right) = \\ = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} D^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p}.$$

□

8.25. Дадим определение произведения двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s), которые в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеют координаты

$$A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} \quad \text{и} \quad B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} \quad (8.48)$$

соответственно.

8.26. Определение. Произведением тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) называется объект D, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$D^{k_1\ldots k_q i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_r} = A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r}. \tag{8.49}$$

8.27. Теорема. *Произведение двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) является тензором типа $(p+r,q+s)$.*

Доказательство. В стандартных обозначениях справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
D^{k_{1'}\ldots k_{q'} i_{1'}\ldots i_{s'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'} l_{1'}\ldots l_{r'}} &= A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} B^{i_{1'}\ldots i_{s'}}_{l_{1'}\ldots l_{r'}} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} B^{i_1\ldots i_s}_{l_1\ldots l_r} = \\
&= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{l_1}_{l_{1'}}\cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{i_{1'}}_{i_1}\cdots c^{i_{s'}}_{i_s} D^{k_1\ldots k_q i_1\ldots i_s}_{j_1\ldots j_p l_1\ldots l_r}.
\end{aligned}$$

□

8.28. Для произведения тензоров A и B используется обозначение

$$\boxed{A\otimes B.}$$

8.29. Лемма. В общем случае $A\otimes B\neq B\otimes A$ для тензоров A и B.

Доказательство. Приведем пример. Пусть A и B — тензоры типа $(0,1)$, координаты которых в одном и том же базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ следующие: A^j и B^k. Рассмотрим тензоры $D=A\otimes B$ и $F=B\otimes A$, координаты которых в том же базисе имеют следующий вид:

$$D^{jk}=A^jB^k \quad \text{и} \quad F^{kj}=B^kA^j.$$

Запишем эти координаты в виде следующих матриц:

$$\|D^{jk}\| = \begin{pmatrix} A^1B^1 & \cdots & A^1B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^nB^1 & \cdots & A^nB^n \end{pmatrix},$$

$$\|F^{kj}\| = \begin{pmatrix} B^1A^1 & \cdots & B^1A^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^nA^1 & \cdots & B^nA^n \end{pmatrix}.$$

Это две взаимно транспонированные матрицы. Следовательно, $D = A \otimes B \neq F = B \otimes A$. $\square$

8.30. Свертка тензора. Пусть A — тензор типа (p,q), причем $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$. Пусть в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ он имеет координаты

$$A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}.$$

Выберем у этих координат один верхний и один нижний индекс. Например, пусть это будут индексы k_1 и j_1 и рассмотрим сумму компонент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha k_2 \ldots k_q}_{\alpha j_2 \ldots j_p} = B^{k_2 \ldots k_q}_{j_2 \ldots j_p}. \tag{8.50}$$

8.31. Определение. Объект B, который в любом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты $B^{k_2 \ldots k_q}_{j_2 \ldots j_p}$, определенные равенством (8.50), называется сверткой тензора A по паре индексов.

8.32. Теорема. *Свертка тензора типа (p,q) по паре индексов представляет собой тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая тензора A типа $(2,1)$, координаты которого в произвольном базисе обозначим символом A^l_{jk}. Рассмотрим свертку

$$B_j = A^k_{jk}$$

и получим закон преобразования для координат B_j. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B_{j'} = A^{k'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} A^{l'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} c^{l'}_l c^j_{j'} c^k_{k'} A^l_{jk} =$$
$$= c^j_{j'} c^k_{k'} c^{k'}_l A^l_{jk} = c^j_{j'} \delta^k_l A^l_{jk} = c^j_{j'} A^k_{jk} = c^j_{j'} B_j.$$

$\square$

8.33. Пример. Рассмотрим тензор A типа $(1,1)$. Его сверткой является тензор типа $(0,0)$, т.е. скаляр, имеющий в любой системе координат $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ одну координату

$$B = A^1_1 + \cdots + A^n_n. \tag{8.51}$$

С целью приобретения навыков в тензорных вычислениях давайте проверим, что тензор B является инвариантом, т.е. скаляром. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B = A^{j'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} A^{k'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} c^{k'}_k c^j_{j'} A^k_j = c^{k'}_k c^j_{k'} A^k_j =$$

$$= c^j_{k'} c^{k'}_k A^k_j = \delta^j_k A^k_j = A^j_j. \quad (8.52)$$

8.34. Довольно часто объект, который в каждом базисе задается совокупностью координат, при переходе от одного базиса к другому преобразуется другим образом, нежели закон (8.39). Однако, для специального класса преобразований базиса все же справедлив закон (8.39). Поэтому вводится еще один класс тензоров — *ортогональные тензоры*. Дадим определение.

8.35. Определение. Ортогональным тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется объект, который в каждом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ задается n^{p+q} координатами $A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \in \mathbb{K}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A^{k_{1'} \ldots k_{q'}}_{j_{1'} \ldots j_{p'}} = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}, \quad (8.53)$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование.

8.36. Для ортогональных тензоров можно, как и для тензоров, ввести операции сложения тензоров, умножения на число, произведения.

8.37. Пример. Рассмотрим тензор A типа $(2, 0)$. Докажем, что число

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jj}$$

не является инвариантом. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{j'=1}^{n'} A_{j'j'} = \sum_{j'=1}^{n'} \delta^{k'}_{j'} A_{j'k'} = \sum_{j'=1}^{n'} \delta^{k'}_{j'} c^j_{j'} c^k_{k'} A_{jk} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{n'} c^j_{j'} c^k_{j'} A_{jk} = \{CC^T\}^{jk} A_{jk}.$$

В общем случае

$$\{CC^T\}^{jk} \neq \delta^{jk} \Leftrightarrow CC^T \neq I.$$

Однако, если рассматривать ортогональные преобразования, т.е. матрицы перехода C между ортонормированными базисами в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, то будет выполнено равенство $C^T C = I$.

И тогда число A_{jj} будет инвариантом. Поэтому для ортогональных преобразований можно вести операцию свертки по двум нижним индексам, которая является *тензорной*, т.е. результатом свертки ортогональных тензоров тоже является ортогональным тензором. Ниже после рассмотрения метрического тензора мы поймем в чем здесь причина.

8.38. Пример. Вектор как тензор типа $(0,1)$**.** Почему вектор — тензор? Пусть $x \in \mathcal{L}$ — фиксированный вектор. Тогда мы можем теперь записать равенство:

$$\boxed{x = x^j \cdot \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x\rangle \cdot \mathbf{e}_j.}$$

Итак, вектор x — это тензор типа $(0,1)$, а его координаты x^j и есть те самые координаты тензора–вектора, которые преобразуются контравариантным образом

$$x^{j'} = c^{j'}_j x^j.$$

8.39. Пример. Ковектор как тензор типа $(1,0)$**.** Пусть $\xi \in \mathcal{L}^*$ — фиксированный ковектор. Тогда справедливо равенство

$$\boxed{\xi = \xi_j \cdot \mathbf{e}^j = \langle \xi, \mathbf{e}_j\rangle \cdot \mathbf{e}^j.}$$

Отсюда вытекает, что ковектор — это тензор ранга $(1,0)$, а его координаты как тензора — это координаты $\{\xi_j\}$ его разложения по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, которые преобразуются ковариантным образом

$$\xi_{i'} = c^i_{i'} \xi_i.$$

8.40. Пример. Оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ **как тензор типа** $(1,1)$**.** Пусть $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad Ax = x^j \cdot A(\mathbf{e}_j) = x^j a^k_j \cdot \mathbf{e}_k = a^k_j \langle \mathbf{e}^j, x\rangle \cdot \mathbf{e}_k,$$

Причем матрица $\|a^k_j\|$ оператора A преобразуется согласно закону

$$a^{k'}_{j'} = c^{k'}_k c^j_{j'} a^k_j.$$

3. Метрический тензор

8.41. Пусть $\mathcal{L}$ — n–мерное вещественное пространство с заданной симметричной билинейной формой $G(x,y)$, причем соответствующая квадратичная форма $G(x,x)$ является положительно определенной формой. Тогда $\mathcal{L}$ становится евклидовым пространством, а билинейная форма $G(x,y)$ называется *метрическим тензором*. В частности, $G(x,y)$ является тензором ранга $(2,0)$. Для скалярного произведения $(x,y) = G(x,y)$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(x,y) = g_{ik}x^i y^k, \quad g_{ik} = G(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k). \tag{8.54}$$

☐ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x,y) = G(x,y) = G(x^i\mathbf{e}_i, y^k\mathbf{e}_k) = x^i y^k G(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k) = g_{ik}x^i y^k. \quad \boxtimes$$

Матрицу метрического тензора в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ обозначим

$$\boxed{G = \|g_{ik}\|.}$$

В силу положительной определенности квадратичной формы $G(x,x)$ матрица этой квадратичной формы является обратимой ($\det G > 0$). Поэтому определена обратная матрица G^{-1}, элементы которой по соглашению обозначаются следующим образом:

$$\boxed{G^{-1} = \left\|g^{ik}\right\|.}$$

Согласно нашему правилу умножения «строчка на столбец» приходим к следующим равенствам:

$$\left\{G^{-1}\cdot G\right\}^i_j = g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad \left\{G\cdot G^{-1}\right\}^i_j = g_{jk}g^{ki} = \delta^i_j.$$

8.42. Теорема. *Набор n^2 чисел g^{ik} определяет некоторый тензор ранга* $(0,2)$.

Доказательство. Шаг 0. Нам нужно доказать, что при переходе от старого базиса $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$, задаваемому равенствами

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\cdot\mathbf{e}_i \tag{8.55}$$

справедливо равенство

$$g^{i'k'} = c^{i'}_i c^{k'}_k g^{ik}, \tag{8.56}$$

где $g^{i'k'}$ — это элементы матрицы, обратной к матрице $\|g_{i'k'}\|$ метрического тензора, записанного в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$. Понятно, что равенство (8.56) нужно доказать как следствие уже доказанного равенства

$$g_{i'k'} = c^i_{i'}c^k_{k'}g_{ik}. \tag{8.57}$$

Шаг 1. Пусть $\mathcal{L}^*$ — сопряженное пространство к линейному пространству $\mathcal{L}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это базис в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, т.е., в частности,

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = \delta^j_k.$$

Построим линейное преобразование

$$g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^*, \quad u = g(x),$$

которое каждому $x = x^k \cdot \mathbf{e}_k \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие $u = u_i \cdot \mathbf{e}^i \in \mathcal{L}^*$ по формуле

$$u_i = g_{ik} x^k. \tag{8.58}$$

Докажем, что это отображение инвариантно, т.е. не зависит от выбора базиса. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$u_i = c^{i'}_i u_{i'}, \quad g_{ik} = c^{j'}_i c^{l'}_k g_{j'l'}, \quad x^k = c^k_{k'} x^{k'}. \tag{8.59}$$

Подставим равенства (8.59) в выражение (8.58) и получим равенство

$$c^{i'}_i u_{i'} = c^{j'}_i c^{l'}_k c^k_{k'} g_{j'l'} x^{k'} \Leftrightarrow u_{i'} = c^i_{i'} c^{j'}_i c^{l'}_k c^k_{k'} g_{j'l'} x^{k'}. \tag{8.60}$$

Заметим, что

$$c^i_{i'} c^{j'}_i = c^{j'}_i c^i_{i'} = \delta^{j'}_{i'}, \quad c^{l'}_k c^k_{k'} = \delta^{l'}_{k'}. \tag{8.61}$$

Из (8.60) с учетом (8.61) получаем искомое равенство

$$u_{i'} = g_{i'k'} x^{k'},$$

которое и доказывает не зависимость от базиса отображения g.

Шаг 2. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений (8.58), которую с учетом нашего правила умножения «строчка на столбец» можно записать в следующей матричной форме:

$$G \cdot X = U, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad U = (u_1, \ldots, u_n)^T, \tag{8.62}$$

из которой поскольку $\det G \neq 0$ вытекает матричное равенство

$$X = G^{-1} U \quad \text{или} \quad x^i = g^{ik} u_k. \tag{8.63}$$

Очевидно, что в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ будет выполнено аналогичное равенство

$$x^{i'} = g^{i'k'} u_{k'}. \tag{8.64}$$

Осталось доказать, что числа $g^{i'k'}$ и g^{ik} связаны соотношением (8.56). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x^i = c^i_{i'} x^{i'}, \quad u_k = c^{k'}_k u_{k'}. \tag{8.65}$$

Из (8.63) с учетом (8.65) вытекает равенство

$$c^i_{i'} x^{i'} = g^{ik} c^{k'}_k u_{k'}. \tag{8.66}$$

Теперь из (8.64) и (8.66) получаем равенство

$$c^i_{i'} g^{i'k'} u_{k'} = g^{ik} c^{k'}_k u_{k'} \quad \text{для всех} \quad u' = (u_{1'}, \ldots, u_{n'}) \in \mathbb{R}_n. \tag{8.67}$$

Поэтому из (8.67) приходим к равенству

$$c^i_{i'} g^{i'k'} = g^{ik} c^{k'}_k \quad \text{или} \quad g^{i'k'} = c^{i'}_i c^{k'}_k g^{ik}.$$

Теорема доказана полностью. □

8.43. Определение. Тензор, определяемый числами g_{ik} называется ковариантным метрическим тензором, а тензор, определяемый числами g^{ik} называется контравариантным метрическим тензором.

8.44. Определение. Базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в одном и том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называются взаимными, если $(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k$.

8.45. Лемма. Взаимный базис в смысле определения 8.44 единствен.

Доказательство. Пусть к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве имеются два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k = (\mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^k(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}.$$

Поэтому $\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j$ для всех $j = \overline{1, n}$. □

8.46. Замечание. Не путайте взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису из $\mathcal{L}$ со взаимным базисом в одном и том же пространстве. Напомним, что мы уже знакомы со взаимным базисом из курса «Аналитическая геометрия». Однако, в случае евклидова пространства $\mathcal{E}$, взаимный базис в $\mathcal{E}^*$ можно отождествить с взаимным базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, справедлива следующая лемма:

8.47. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ в смысл определения 8.44, а $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{E}^*$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^j, x \rangle = (\mathbf{e}^j, x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{8.68}$$

Доказательство. Согласно определению взаимного базиса $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}^n\}$ в $\mathcal{E}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{E}$ справедливо равенство

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^j, x\rangle = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \tag{8.69}$$

а в силу определения 8.44 справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^j, x) = (\mathbf{e}^j, x^k \cdot \mathbf{e}_k) = x^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \\ = x^k \delta^j_k = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{8.70}$$

Из сравнения равенств (8.69) и (8.70) вытекает равенство (8.68). □

8.48. Теорема. *Для произвольного базиса* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *в* $\mathcal{E}$ *существует и единствен.*

Доказательство. Шаг 1. Существование. Пусть задан базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда взаимный базис будем искать в виде разложения по этому базису:

$$\mathbf{e}^k = A^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \quad A^{k\alpha} \in \mathbb{R}. \tag{8.71}$$

Заметим, что для взаимного базиса должно быть выполнено следующее равенство:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = \delta^k_i, \tag{8.72}$$

и, кроме того,

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g_{\alpha i}. \tag{8.73}$$

Тогда умножая скалярно обе части равенства (8.71) на вектор $\mathbf{e}_i$, с учетом (8.72), (8.73) получим равенство

$$\delta^k_i = A^{k\alpha} g_{\alpha i} \quad \text{или} \quad A \cdot G = I \Leftrightarrow A = G^{-1}. \tag{8.74}$$

Итак, из (8.71) получаем равенства

$$\mathbf{e}^k = g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha. \tag{8.75}$$

Шаг 2. Линейная независимость. Докажем, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (8.75), является линейно независимым, т.е. является базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, пусть $\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n)$ и $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда равенство (8.75) можно переписать в матричной форме

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cdot G^{-1}, \quad G^{-1} = \|g^{k\alpha}\|. \tag{8.76}$$

Предположим, что элементы $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ линейно зависимы. Тогда найдется ненулевой столбец $X_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\hat{\mathbf{E}} \cdot X_0 = \theta. \tag{8.77}$$

Умножим обе части равенства (8.76) слева на этот столбец X_0 и с учетом (8.77) получим равенство

$$\mathbf{E} \cdot G^{-1} \cdot X_0 = \theta \Leftrightarrow \mathbf{E} \cdot X_1 = \theta, \quad X_1 = G^{-1} \cdot X_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{8.78}$$

Поскольку набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимым, то $X_1 = O$. Следовательно,

$$G^{-1} \cdot X_0 = O \Leftrightarrow G \cdot (G^{-1} \cdot X_0) = G \cdot O = O \Leftrightarrow X_0 = O. \tag{8.79}$$

Пришли к противоречию. Значит, семейство $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ линейно независимо.

Шаг 3. Взаимный базис. Осталось доказать, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (8.75), является взаимным базисом к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = (g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g^{k\alpha} g_{\alpha i} = \delta_i^k.$$

Осталось воспользоваться результатом леммы 8.45. □

8.49. Из формулы (8.75) вытекают полезные формулы. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$g_{jk} \cdot \mathbf{e}^k = g_{jk} g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \delta_j^\alpha \cdot \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_j \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_j = g_{jk} \cdot \mathbf{e}^k,} \tag{8.80}$$

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = \Big(g^{k\alpha} \cdot \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i\Big) = g^{k\alpha} (\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i) = \\ = g^{k\alpha} \delta_\alpha^i = g^{ki} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = g^{ki}.} \tag{8.81}$$

Разложим элементы $x, y \in \mathcal{E}$ по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x_i \cdot \mathbf{e}^i, \quad y = y_j \cdot \mathbf{e}^j \Rightarrow (x, y) = (x_i \cdot \mathbf{e}^i, y_j \cdot \mathbf{e}^j) = \\ = x_i y_j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij} x_i y_j. \tag{8.82}$$

Итак, в координатах скалярное произведение евклидова пространства может быть записано двойственным образом

$$\boxed{(x, y) = g_{ij} x^i y^j} \quad \text{и} \quad \boxed{(x, y) = g^{ij} x_i y_j.}$$

8.50. Определение. Координаты x^j элемента $x \in \mathcal{E}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ называются контравариантными, а координаты x_i того же элемента в взаимном базисе $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ называются ковариантными.

8.51. Координатная запись скалярного произведения. Пусть $x, u \in \mathcal{E}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{E}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие цепочки соотношений:

$$x = x^j \cdot \mathbf{e}_j, \quad u = u_i \cdot \mathbf{e}^i \Rightarrow (u, x) = (u_i \cdot \mathbf{e}^i, x^j \cdot \mathbf{e}_j) = \\ = u_i x^j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = u_i x^j \delta^i_j = u_i x^i.$$

Таким образом,

$$\boxed{(u, x) = u_i x^i.}$$

8.52. Лемма. Элементы взаимного базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ преобразуются контравариантным образом:

$$\boxed{\mathbf{e}^{k'} = c^{k'}_k \cdot \mathbf{e}^k,} \tag{8.83}$$

если

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'} \cdot \mathbf{e}_k.$$

Доказательство. В стандартных обозначениях справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}^{k'} = g^{k'\alpha'} \cdot \mathbf{e}_{\alpha'} = g^{k'\alpha'} c^{\alpha}_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_\alpha = \\ = g^{k'\alpha'} c^{\alpha}_{\alpha'} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j_1 j_2} c^{k'}_{j_1} c^{\alpha'}_{j_2} c^{\alpha}_{\alpha'} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = g^{j_1\alpha} c^{k'}_{j_1} g_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e}^\beta = \\ = \delta^{j_1}_\beta c^{k'}_{j_1} \cdot \mathbf{e}^\beta = c^{k'}_\beta \cdot \mathbf{e}^\beta. \tag{8.84}$$

поскольку

$$c^{\alpha'}_{j_2} c^{\alpha}_{\alpha'} = c^{\alpha}_{\alpha'} c^{\alpha'}_{j_2} = \delta^{\alpha}_{j_2}, \quad g^{j_1\alpha} g_{\alpha\beta} = \delta^{j_1}_\beta. \tag{8.85}$$

□

8.53. Лемма. Контравариантные и ковариантные координаты одного и того же элемента x евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны следующими двойственными формулами:

$$\boxed{x_j = g_{jk} x^k} \quad \text{и} \quad \boxed{x^j = x_k g^{kj}.} \tag{8.86}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$x = x_i \cdot \mathbf{e}^i = x^k \cdot \mathbf{e}_k. \tag{8.87}$$

Умножим равенства (8.87) скалярно на $\mathbf{e}_j$ и получим равенство

$$x_i (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = x^k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j), \tag{8.88}$$

из которого вытекает равенство

$$x_j = g_{jk}x^k. \tag{8.89}$$

Теперь умножим равенство (8.87) скалярно на $\mathbf{e}^j$ и получим равенство

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j), \tag{8.90}$$

из которого получаем равенство

$$x^j = x_i g^{ij}.$$

□

8.54. Определение. Числа g^{jk} называются контравариантными координатами метрического тензора, а числа g_{jk} называются ковариантными координатами метрического тензора.

4. Примеры решения задач

8.55. Пример. Вычислительная задача. В линейном пространстве $P_1[-1,1]$ (пространство всех полиномов на сегменте $[-1,1]$ степени не выше 1) задано скалярное произведение

$$(x, y) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt. \tag{8.91}$$

В этом евклидовом пространстве заданы элементы

$$e_1(t) = 1, \quad e_2(t) = t. \tag{8.92}$$

Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис в $P_1[-1,1]$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе $E = (e_1, e_2)$.

Решение. Ранее было доказано, что семейство $E = (e_1, e_2)$ образуют базис в линейном пространстве $P_1[-1,1]$. Ковариантный метрический тензор имеет следующий вид:

$$G_e = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \tag{8.93}$$

$$g_{11} = \int\limits_{-1}^{1} 1\,dt = 2, \quad g_{12} = g_{21} = \int\limits_{-1}^{1} t\,dt = 0, \quad g_{22} = \int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$G_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$