Лекция 4

СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

В этой лекции мы введем понятие скалярного произведения векторов и рассмотрим его свойства. Для этого нам понадобятся некоторые геометрические понятия.

§ 1. Проекция вектора на ось

Дадим определение.

Определение 1. *Под углом между двумя неколлинеарными векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *будем понимать величину угла* $\angle AOB$, *где* $\overrightarrow{OA} \in \mathbf{a}$ *и* $\overrightarrow{OB} \in \mathbf{b}$. *Если ненулевые векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *сонаправлены, то угол между ними равен* 0, *если противоположно направлены, то* π.

Замечание. Ясно, что определение угла между векторами не зависит от выбора точки O. Угол между ненулевыми векторами заключается в пределах между 0 и π. Если хотя бы один из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нулевой, то угол между нами считается произвольным, принимающим значения между 0 и π.

Определение 2. *Осью называется прямая, для которой указан параллельный ненулевой вектор* $\mathbf{a}$. *Направление этого вектора* $\mathbf{a}$ *называется положительным направлением оси, а направление противоположного вектора* $-\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{a}$ *называется отрицательным направлением оси.*

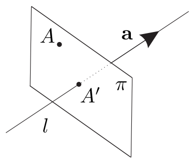

Рис. 1. Ортогональная проекция точки A на ось l.

Замечание. Пусть задана ось с вектором $\mathbf{a}$. Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

называется *ортом оси*. В частности, $|\mathbf{e}| = 1$.

Пусть в пространстве дана ось l с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и точка A. Проведём плоскость, перпендикулярную к прямой l и проходящую через точку A. Точку A' пересечения этой плоскости и оси l называется *ортогональной проекцией* точки A на ось l.

Определение 3. *Пусть l — это ось с ортом $\mathbf{e}$ и $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{b}$. Тогда под векторной проекцией вектора $\mathbf{b}$ на ось будем называть вектор, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{A'B'}$, где A' и B' — ортогональные проекции точек A и B на ось l.*

Обозначение. $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$.

Заметим, что векторы $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ и $\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$ коллинеарны. Поэтому согласно результату теоремы **??** лекции 3 найдётся такое число λ, что

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} = \lambda\mathbf{e}. \tag{1.1}$$

Определение 4. *Число λ в формуле* (1.1) *называется проекцией вектора $\mathbf{b}$ на ось l с ортом $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$.*

Обозначение. $\lambda = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$.

Согласно определению 4 имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{e}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{e}$ — орт оси.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Если* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} > 0$, *то* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$. *Если* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} < 0$, *то* $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = -|\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$.

Доказательство. Из равенств

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}} = \lambda\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

вытекает, что

$$|\lambda| = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|.$$

Раскрываем модуль числа λ. Если $\lambda > 0$, то $\lambda = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$, если же $\lambda < 0$, то $-\lambda = |\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}| \Rightarrow \lambda = -|\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}|$. Осталось заметить, что число $\lambda = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ согласно определению 4.

Лемма доказана.

Проекция вектора $\mathbf{b}$ на ось l с вектором $\mathbf{a}$ обладает определённым набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Пусть l — ось, а $\mathbf{a}$ — вектор оси. Тогда для любого ненулевого вектора $\mathbf{b}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos\varphi, \tag{1.3}$$

где $\varphi \in [0, \pi]$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

□ Действительно, нужно рассмотреть три случая.

Случай 1. Пусть $\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = 0$. Поскольку $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то это означает, что $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, т. е. угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\pi/2$. Следовательно, $|\mathbf{b}| \cos\varphi = 0$. Равенство (1.3) выполнено.

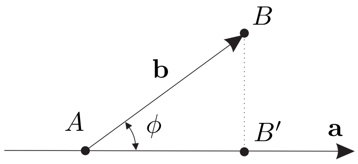

Рис. 2. Случай $\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} > 0$.

Случай 2. Пусть $\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} > 0$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место следующее равенство:

$$\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\overrightarrow{\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}| \tag{1.4}$$

и $\overrightarrow{\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$. Поэтому угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ острый.

Пусть A — это произвольная точка оси l с вектором $\mathbf{a}$. Отложим от точки A вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in$. Ортогональная проекция A' точки A совпадает с точкой A. Пусть B' — ортогональная проекция точки B на ось l. Тогда согласно определению 3 направленный отрезок $\overrightarrow{AB'} \in \overrightarrow{\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}$ и $|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi = |\mathbf{b}| \cos\varphi$. Согласно равенству (1.4) справедливы следующие равенства:

$$\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\overrightarrow{\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}| = |\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi = |\mathbf{b}| \cos\varphi.$$

Равенство (1.3) выполнено.

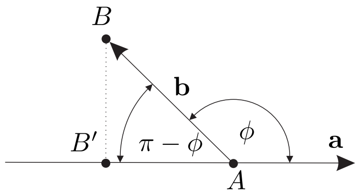

Рис. 3. Случай $\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} < 0$.

Случай 3. Пусть $\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} < 0$. Тогда согласно результату леммы 1 имеет место следующее равенство:

$$\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = -|\overrightarrow{\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}}|. \tag{1.5}$$

Поэтому $\overrightarrow{\Pr_{\mathbf{a}} \mathbf{b}} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$. Угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ тупой. Отложим от произвольной точки A оси l с вектором $\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{b}$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{b}$.

Пусть B' — ортогональная проекция точки B на ось l. Тогда $\overrightarrow{AB'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}$. Справедливы следующие равенства:

$$|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}|\cos(\pi - \varphi) = -|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$$

Отсюда в силу равенства (1.5) имеем

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = -|\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}| = -|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi = |\mathbf{b}|\cos\varphi. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Пусть l — ось с вектором $\mathbf{a}$. Тогда для любых векторов $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ справедливо равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1 + \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2. \tag{1.6}$$

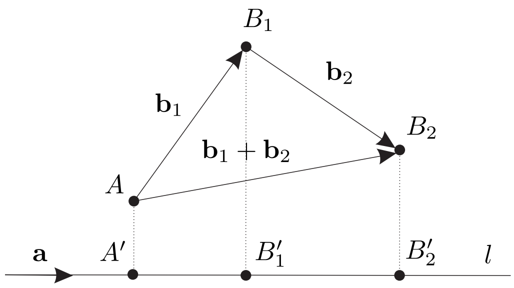

Рис. 4. К свойству 2.

□ Действительно, отложим от произвольной точки A вектор $\mathbf{b}_1$ и получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB_1} \in \mathbf{b}_1$, а от точки B_1 отложим направленный отрезок $\overrightarrow{B_1B_2} \in \mathbf{b}_2$. Тогда

$$\overrightarrow{AB_2} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1B_2} \Rightarrow \overrightarrow{AB_2} \in \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2. \tag{1.7}$$

Пусть A', B_1' и B_2' — это ортогональные проекции точек A, B_1 и B_2 на ось l. Тогда имеем

$$\overrightarrow{A'B_2'} = \overrightarrow{A'B_1'} + \overrightarrow{B_1'B_2'}. \tag{1.8}$$

Отметим, что

$$\overrightarrow{A'B_2'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)}, \quad \overrightarrow{A'B_1'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1}, \quad \overrightarrow{A'B_2'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2}. \tag{1.9}$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)} = \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1} + \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2}. \tag{1.10}$$

Пусть $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ — орт оси l. Тогда согласно определению 4 из (1.10) получим следующее равенство:

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)\mathbf{e} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1\mathbf{e} + \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2\mathbf{e}, \tag{1.11}$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$(\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1 - \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2)\,\mathbf{e} = \mathbf{0}. \tag{1.12}$$

Поскольку $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, то приходим к выводу о том, что

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) - \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1 - \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2 = 0.$$

Пришли к равенству (1.6). ☒

С в о й с т в о 3. Пусть l — произвольная ось с вектором $\mathbf{a}$. Тогда для любого числа λ и вектора $\mathbf{b}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}. \tag{1.13}$$

□ Действительно, рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Если $\lambda = 0$, то равенство (1.13) очевидно.

Случай 2. Если $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 0$, то либо $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ либо $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, но тогда либо $\lambda\mathbf{b} = \mathbf{0}$ либо $\lambda\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ и в обоих случаях $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = 0$.

Случай 3. Пусть $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} \neq 0$. Отложим векторы $\mathbf{b}$ и $\lambda\mathbf{b}$ от точки $A \in$ $\in l$. Тогда получим направленные отрезки $\overrightarrow{AB} \in \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{AC} \in \lambda\mathbf{b}$. Пусть A', B' и C' — ортогональные проекции точек A, B и C на ось l, соответственно. Заметим, что поскольку $A \in l$, то $A' = A$. Тогда имеем

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}, \quad \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC'} \in \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})} \tag{1.14}$$

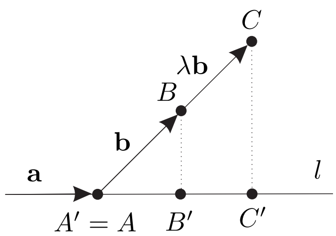

Рис. 5. Случай $\lambda > 0$.

Случай 3.1. Пусть $\lambda > 0$. Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC'}$. Нетрудно заметить. что треугольники $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$ подобны (по равенству углов). При этом

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{AB'}|}. \tag{1.15}$$

Так как $\lambda > 0$, то отсюда имеем

$$\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}.$$

Отсюда согласно определению 4 имеем

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})\mathbf{e} = \lambda\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Поскольку $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, то отсюда вытекает равенство (1.13).

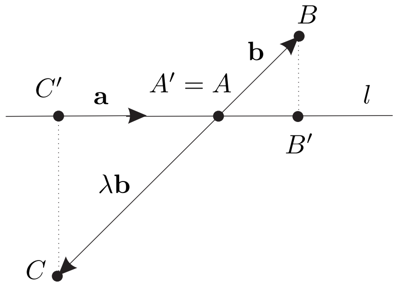

Рис. 6. Случай $\lambda < 0$.

Случай 3.2. Пусть $\lambda < 0$. Тогда имеем $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC'}$. Треугольники $\triangle ABB'$ и $\triangle ACC'$ подобны (по равенству углов) и поэтому

$$|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{AB'}|}{|\overrightarrow{AC'}|}.$$

Поскольку $\lambda < 0$, то имеет место равенство

$$\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b})} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}}.$$

Далее точно также как при рассмотрении случая 3.1 приходим к равенству (1.13). ⊠

Непосредственным следствием свойств 2 и 3 является следующее свойство:

С в о й с т в о 4. Пусть l — произвольная ось с вектором $\mathbf{a}$. Тогда для любых чисел λ_1, λ_2 и векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ выполняется равенство

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2) = \lambda_1 \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_1 + \lambda_2 \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}_2. \tag{1.16}$$

§ 2. Скалярное произведение

Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 5. *Скалярным произведением ненулевых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если среди векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *есть хотя бы один нулевой, то скалярное произведение равно нулю.*

О б о з н а ч е н и е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Таким образом, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi$.

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 2. *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *а* l *— произвольная ось, направление которой определено вектором* $\mathbf{a}$, *то для каждого вектора* $\mathbf{b}$ *справедливо равенство*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \,\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Случай* 1. Если $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ и $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 0$. Следовательно, равенство (2.1) выполнено.

Случай 2. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тогда согласно свойству 1 справедливо равенство $\operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Поэтому равенство (2.1) выполнено.

Лемма доказана.

Скалярное произведение векторов обладает определенным набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. Справедливо равенство $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

□ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi = |\mathbf{b}||\mathbf{a}| \cos\varphi = (\mathbf{b}, \mathbf{a}). \quad \boxtimes$$

Свойство 2. Пусть $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, тогда для любой оси l с направляющим вектором $\mathbf{b}$ справедливо следующее равенство: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$.

□ Действительно, в силу свойства 1 и леммы 2 справедливы равенства

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = |\mathbf{b}||\mathbf{a}| \cos\varphi = |\mathbf{b}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.2}$$

□ Докажем первое равенство из формулы (2.2). Второе равенство является следствием первого равенства и свойства 1. Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то равенство очевидно. Рассмотрим случай $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. В силу леммы 2 и свойства 2 ортогональной проекции вектора на ось справедливо равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} + |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}). \quad \boxtimes$$

Свойство 4. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и числа λ справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{2.3}$$

□ Действительно, если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то равенство (2.3) очевидно. Пусть теперь $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда в силу леммы 2 и свойства 3 ортогональной проекции вектора на ось справедливы равенства

$$(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}}(\lambda\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\lambda \operatorname{Pr}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad \boxtimes$$

Свойство 5. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и чисел λ_1, λ_2 справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \lambda_1\mathbf{b} + \lambda_2\mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda_2(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \tag{2.4}$$

$$(\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \lambda_2(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{2.5}$$

□ Указанные равенства являются следствиями свойств 3 и 4. ⊠

Свойство 6. Справедливо неравенство $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0$, причём $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

□ Действительно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \geqslant 0.$$

Ясно, что $(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$. Если же $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 > 0$. ⊠

Определение 6. *Базис* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *называется ортонормированным, если*

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j; \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{2.6}$$

Наконец справедлива следующая важная теорема:
Теорема 1. *Если в ортонормированном базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3,$$

то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.7}$$

Доказательство.
Достаточно воспользоваться свойством 6

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3, x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_2\mathbf{e}_3) = \\ = x_1x_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_1z_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + y_1x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + \\ + y_1y_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + y_1z_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + z_1x_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + z_1y_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2) + z_1z_2(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = \\ = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 3. Векторное произведение векторов

Прежде всего введём определение правой тройки векторов в трёхмерном пространстве.

Определение 6. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *называется правой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся против часовой стрелки.*

Определение 7. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *называется левой, если из конца вектора* $\mathbf{c}$ *кратчайший поворот от вектора* $\mathbf{a}$ *к вектору* $\mathbf{b}$ *виден совершающимся по часовой стрелки.*

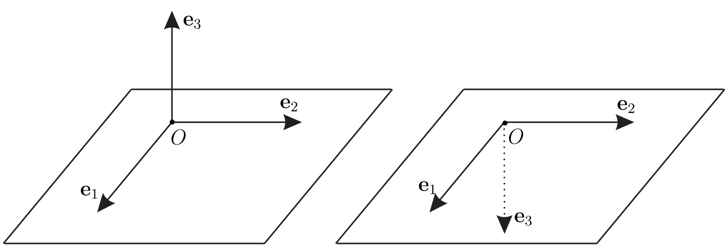

Рис. 7. Правая и левая тройка векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 3. *Если тройка некомпланарных векторов* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *правая, то при перестановке векторов, либо при перемене знака какого–либо из векторов получаются левые тройки векторов. И обратно, указанными операциями над упорядоченными тройками векторов левые тройки переходят в правые.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ — это правая тройка векторов.

Пункт 1. Докажем, что $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$. Если в тройке $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот был виден из конца вектора $\mathbf{c}$ совершающимся против часовой стрелки, то в тройке $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот видимый из конца вектора $\mathbf{c}$ будет происходить по часовой стрелке.

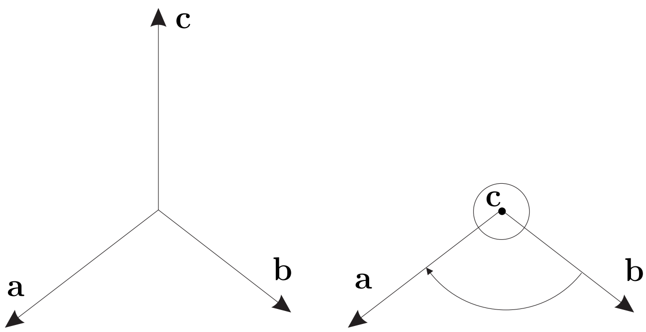

Рис. 8. Тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}\}$.

Пункт 2. Докажем, например, что $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}\}$ — это левая тройка векторов. Если в тройке векторов $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ кратчайший поворот из конца вектора $\mathbf{c}$ был виден совершающимся против часовой стрелки, то тот же поворот из конца вектора $-\mathbf{c}$ будет виден совершающимся по часовой стрелки.

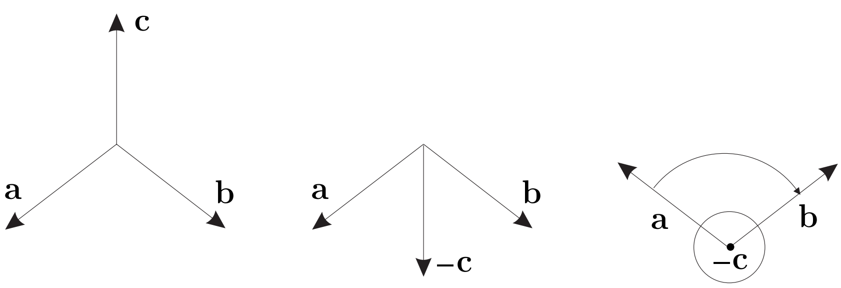

Рис. 9. Тройка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{c}\}$.

Л е м м а д о к а з а н а.

Дадим определение *векторного произведения векторов*.

Определение 8. *Векторным произведением упорядоченной пары векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор*

$$\mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\,,$$

удовлетворяющий следующим требованиям:
(i) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$, *где* φ *— это угол между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$;
(ii) *вектор* $\mathbf{c}$ *ортогонален каждому из векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*;*
(iii) *упорядоченная тройка* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *образует правую тройку.*

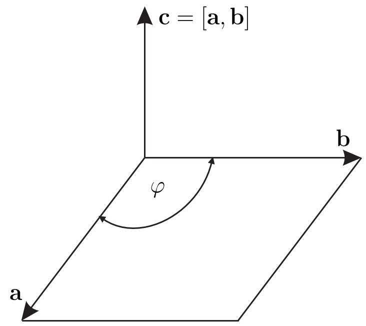

Рис. 10. Векторное произведение $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Замечание 1. Заметим, что из пункта (i) определения 14 векторного произведения векторов вытекает, что

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = S_{\mathbf{ab}},$$

где $S_{\mathbf{ab}}$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Действительно, высота h этого параллелограмма равна

$$h = |\mathbf{a}| \cdot \sin\varphi \Rightarrow S = h \cdot |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi.$$

Прежде всего докажем следующую лемму:
Лемма 4. *Условиями* (i)–(iii) *определения 7 однозначно определяется некоторый вектор* $\mathbf{c}$.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, тогда угол φ между ними равен либо 0 либо π и в любом случае согласно свойству (i) длина вектора $\mathbf{c}$ равна нулю. Значит, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Шаг 2. Пусть теперь векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинераны. Отложим эти векторы от произвольной точки O пространства и получим направленные отрезки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Треугольник AOB лежит в однозначно определённнной плоскости π_{AOB} плоскости.

Теперь заметим, что у всякой плоскости существуют ортогональные ей векторы. Рассмотрим направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$ ортогональный этой плоскости. Тогда направленный отрезок

$$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}.$$

Теперь фиксируем длину этого направленного отрезка условием

$$\left|\overrightarrow{OC}\right| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi \neq 0.$$

Однако, указанным пока условиям удовлетворяют как направленный отрезок $\overrightarrow{OC}$, так и направленный отрезок $-\overrightarrow{OC}$.

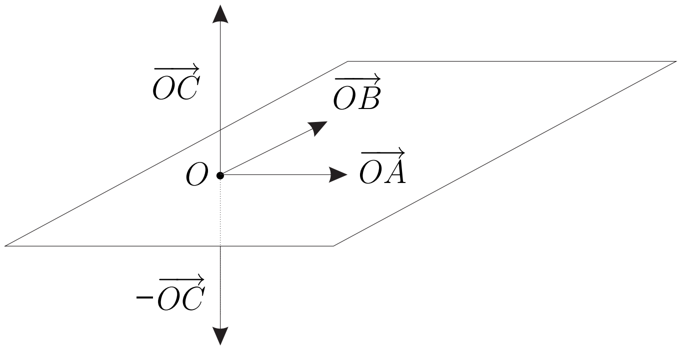

Рис. 11. К лемме 4.

Однако, если

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$$

— это правая тройка векторов, то

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$$

левая тройка. И наоборот, если

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$$

— это левая тройка векторов, то

$$\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$$

— это правая тройка векторов. Следовательно, либо $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ правая тройка либо $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, -\overrightarrow{OC}\}$ правая тройка. Таким образом, однозначно определён вектор $\mathbf{c}$, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{OC}$ либо направленным отрезком $-\overrightarrow{OC}$, удовлетворяющий свойствам (i)–(iii).

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 5. *Векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *коллинеарны тогда и только, когда их векторное произведение* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, либо $\mathbf{b} = 0$, либо $\sin\varphi = 0$. Во всех случаях $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема о таблице умножения векторов правого ортонормированного базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:
Т е о р е м а 2. *Имеет место таблица векторного умножения*:

$[\cdot,\cdot]$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

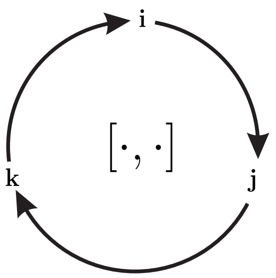

Рис. 12. Таблица векторного умножения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится непосредственной проверкой всевозможных векторных произведений.

Шаг 1. Сначала докажем, что $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$. Действительно, пусть

$$\mathbf{c} := [\mathbf{i}, \mathbf{j}].$$

Теперь следуем свойствам (i)–(iii) определения 7 векторного произведения:

1. из свойства (i), поскольку $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ и $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 0$, получаем равенство $|\mathbf{c}| = 1$;

2. из свойства (ii) вытекает, что вектор $\mathbf{c}$ коллинеарен вектору $\mathbf{k}$ и эти два вектора имеют одинаковую длину. Следовательно, $\mathbf{c} = \pm\mathbf{k}$;

3. заметим, что по условию $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — это правая тройка и поэтому тройка $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{c}\}$ будет правой тогда и только тогда, когда $\mathbf{c} = \mathbf{k}$.

Шаг 2. Докажем, например, равенство $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}$. Прежде всего заметим, что тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\}$ правая. Действительно, она получена из правой тройки векторов $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ двумя последовательными перестановки векторов:

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \to \{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\} \to \{\mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i}\}.$$

Далее рассуждаем точно также как и на первом шаге. Аналогичным образом получаем равенство

$$[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j},$$

поскольку тройка векторов $\{\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ правая:

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \to \{\mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{j}\} \to \{\mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}.$$

Шаг 3. Теперь докажем равенство $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$. Прежде всего заметим, что тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ левая, поскольку получена из правой тройки $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ одной перестановкой векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$. Но тогда тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, -\mathbf{k}\}$

правая, поскольку получена из левой тройки $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}$ заменой вектора $\mathbf{k}$ на противоположный ему вектор $-\mathbf{k}$.

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{c} := [\mathbf{j}, \mathbf{i}].$$

В силу условий (i) и (ii) мы получим, что $\mathbf{c} = \pm\mathbf{k}$, а поскольку в силу условия (iii) тройка $\{\mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{c}\}$ должна быть правой получим, что $\mathbf{c} = -\mathbf{k}$.

Шаг 4. На круговой диаграмме мы указали способ как запомнить указанную таблицу умножения. Если умножение первого вектора на второй происходит по стрелке, то это произведение будет равно третьему вектору, взятому со знаком «+». Если умножение проводится против часовой стрелки, то умножение даст третий вектор со знаком «−».

Теорема доказана.

Следствие. *Справедливы следующие равенства*:

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = -[\mathbf{j}, \mathbf{i}], \quad [\mathbf{j}, \mathbf{k}] = -[\mathbf{k}, \mathbf{j}], \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = -[\mathbf{i}, \mathbf{k}].$$

Ниже в теореме 5 мы докажем свойства линейности векторного произведения векторов, которое может быть записано в следующем виде:

$$[\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}], \tag{3.1}$$

$$[\mathbf{a}, \delta\mathbf{c} + \delta\mathbf{d}] = \delta[\mathbf{a}, \mathbf{c}] + \delta[\mathbf{a}, \mathbf{d}], \tag{3.2}$$

которые справедливы для всех соответствующих векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ и всех чисел α, β, γ, δ.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 6. *Справедливо следующее равенство*:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$$

для любых $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *из евклидова пространства* $\mathcal{E}$.

Доказательство.

Шаг 1. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}].$$

Шаг 2. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, тогда рассмотрим два вектора

$$\mathbf{c}_1 := [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_2 := [\mathbf{b}, \mathbf{a}] \neq \mathbf{0}.$$

По свойствам (i) и (ii) векторного произведения векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ обладают следующими свойствами:

1. $|\mathbf{c}_1| = |\mathbf{c}_2|$;

2. $\mathbf{c}_1 \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ и $\mathbf{c}_2 \perp \pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, где $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — это произвольная плоскость, которая параллельна векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Из этих двух свойств вытекает, что либо $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ либо $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$.

Предположим, что $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$. По свойству (iii) векторного произведения тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ и $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_2\}$ обе правые. Тогда тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ и

$\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1\}$ обе правые, но это противоречит тому, что тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}_1\}$ получена из тройки $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1\}$ перестановкой соседних векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Значит, случай $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2$ невозможен.

Следовательно, $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$.

Лемма доказана.

§ 4. Смешанное произведение векторов

Определение 9. *Смешанным произведением* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *трёх векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *называется число, равное скалярному произведению вектора* $\mathbf{a}$ *на векторное произведение* $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ *векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 7. *Векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *компланарны* (*линейно зависимы*) *тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Будем считать, что вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ неколлинеарны, поскольку в противоположных случаях смешанное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Тогда вектор $\mathbf{a}$ параллелен плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, а вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ ей перпендикулярен. Следовательно, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, тогда либо

$$|\mathbf{a}| = 0 \quad \text{либо} \quad |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]| = 0 \quad \text{либо} \quad \cos\varphi = 0,$$

где φ — это угол между векторами $\mathbf{a}$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

В первом случае вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, но тогда тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ очевидно линейно зависима и, следовательно, компланарна.

Во втором случае векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Поэтому линейно зависима и тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, а, стало быть, компланарна.

В третьем случае имеем

$$\mathbf{a} \perp [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \Rightarrow \mathbf{a} \,||\, \pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

и, следовательно, тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарна.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Смешанное произведение трёх некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *равно следующему числу*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \textit{правая}; \\ -V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), & \textit{если тройка} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \quad \textit{левая}, \end{cases}$$

где $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ — *объём параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *отложенных от одной точки.*

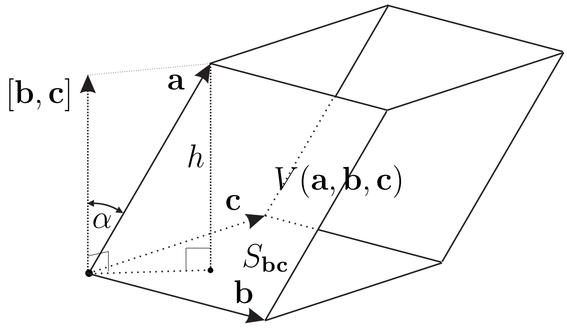

Рис. 13. Ориентированный объём.

Доказательство.

Шаг 1. Если векторы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ компланарны, то в силу леммы 7 имеем

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0 = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

Шаг 2. Пусть векторы $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ не компланарны. Отложим все векторы от одной точки. Тогда

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = h \cdot S_{\mathbf{bc}},$$

где

$$h = |\mathbf{a}| \cos \alpha, \quad S_{\mathbf{bc}} = |[\mathbf{b}, \mathbf{c}]|,$$

где α — это угол между вектором $\mathbf{a}$ и тем вектором нормали $\mathbf{n}$ к плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, который направлен в туже часть полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, что и вектор $\mathbf{a}$. Ясно, что при этом $\alpha \in (0, \pi/2]$. Заметим, что

$$\cos(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = \pm \cos \alpha,$$

причём знак «+» имеет место тогда, когда вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ направлен в туже часть полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, что и вектор $\mathbf{a}$; знак «−» берётся тогда, когда векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в разные полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Теперь заметим, что если векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в одно полупространство относительно $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то поскольку тройка

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$$

правая, то и тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ тоже правая. Если же векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в разные полупространства относительно плоскости $\pi(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, то поскольку тройка

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$$

правая, то тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, -[\mathbf{b}, \mathbf{c}]\}$ левая, а поскольку векторы $-[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ и $\mathbf{a}$ направлены в одно полупространство, то и тройка $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\}$ тоже левая.

Следовательно, имеем

$$V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\cdot|[\mathbf{b},\mathbf{c}]|\cdot\cos\alpha = \\ = |\mathbf{a}|\cdot|[\mathbf{b},\mathbf{c}]|\cdot\cos|(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad (4.1)$$

если тройка $\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\}$ правая;

$$V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = |\mathbf{a}|\cdot|[\mathbf{b},\mathbf{c}]|\cdot\cos\alpha = \\ = -|\mathbf{a}|\cdot|[\mathbf{b},\mathbf{c}]|\cdot\cos|(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = -(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = -(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), \quad (4.2)$$

если тройка $\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\}$ левая. Заметим, что тройка $\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\}$ получена из тройки $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ последовательными двумя перестановками двух соседних векторов:

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \to \{\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}\} \to \{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\}.$$

Поэтому тройки $\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}\}$ и $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ одинаково ориентированы.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 8. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *справедливо равенство*

$$(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]) = ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}). \quad (4.3)$$

Доказательство.

Шаг 1. В случае компланарной тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обе части равенства (4.3) равны нулю.

Шаг 2. Предположим, что эти векторы не компланарны. Тогда, с одной стороны,

$$V_{\mathbf{abc}} = V_{\mathbf{cab}}.$$

С другой стороны, тройка $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ и тройка $\{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, одинаково направлены, поскольку

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \to \{\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}\} \to \{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}\},$$

т. е. тройки связаны двумя последовательными перестановками векторов. Следовательно, в силу теоремы 3 приходим к утверждению леммы, поскольку

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \left.\begin{cases} V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}), & \text{если тройка } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ левая,} \end{cases}\right\} = \\ = \left.\begin{cases} V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ левая,} \end{cases}\right\} = \\ = \left.\begin{cases} V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b} \text{ правая,} \\ -V(\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}), & \text{если тройка } \mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b} \text{ левая,} \end{cases}\right\} = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Лемма доказана.

Дадим определение циклической перестановки упорядоченного семейства векторов $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$.

Определение 9. *Циклической перестановкой называется результат двух последовательных перестановок векторов.*

Например, у семейства $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ существует всего две нетривиальные циклические перестановки

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}\} \quad \text{и} \quad \{\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$$

и одна тривиальная

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}.$$

Следствие. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *имеют место следующие равенства*:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad (4.4)$$

т. е. при циклической перестановке векторов семейства $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ *смешанное произведение не меняется, а при перестановке двух каких–либо векторов смешанное произведение меняет свой знак на противоположный.*

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку при циклической перестановке векторов упорядоченного семейства $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ ориентация не меняется, то помимо доказанного в лемме 8 следующего равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

получаем ещё равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

Шаг 2. Используя антикоммутативность векторного произведения мы получим следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{a}, [\mathbf{c}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}),$$
$$(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}),$$
$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Следствие доказано.

§ 5. Линейность смешанного и векторного произведений

Справедливы следующие два утверждения:

Теорема 4. *Смешанное произведение линейно по каждому из трёх сомножителей.*

Доказательство.

Шаг 1. Линейность смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ по первому аргументу $\mathbf{a}$ вытекает из линейности скалярного произведения. Действительно,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Шаг 2. В силу (4.4) справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]),$$
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, [\mathbf{b}, \mathbf{a}]).$$

Далее нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Доказательство.

Докажем линейность по первому сомножителю. Введём вектор

$$\mathbf{d} := [\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}].$$

Имеем

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = ([\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}] - \alpha_1 [\mathbf{a}_1, \mathbf{b}] - \alpha_2 [\mathbf{a}_2, \mathbf{b}], \mathbf{d}) = \\ = (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = \\ = \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) + \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_1 (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \alpha_2 (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = 0,\end{aligned}$$

где мы воспользовались линейностью смешанного произведения по всем аргументам. Итак, приходим к следующему равенству:

$$|\mathbf{d}|^2 = (\mathbf{d}, \mathbf{d}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Теорема доказана.