Консультация 9

ЭЛЛИПС, ГИПЕРБОЛА И ПАРАБОЛА

ЗАДАЧА 1. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему есть величина постоянная, и найдите её.

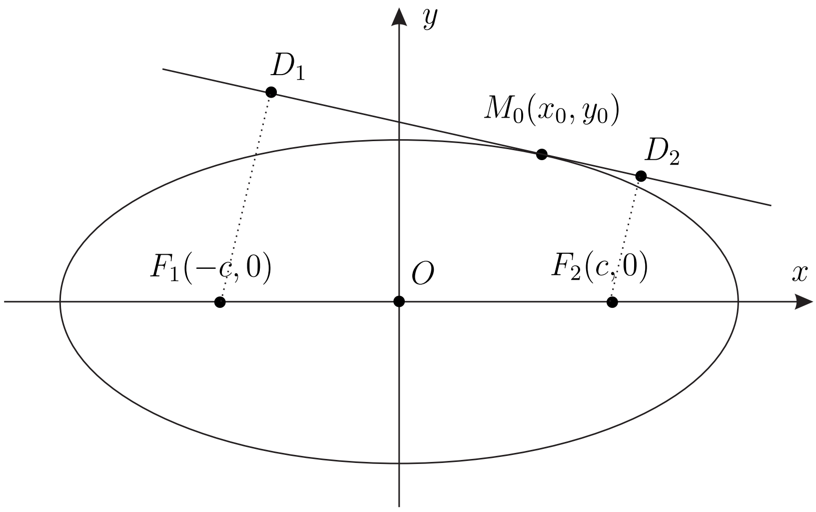

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет следующий вид:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Расстояние от точки $F_1(-c, 0)$ до касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ равно

$$d_1 = |F_1D_1| = \frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2} + 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Расстояние от точки $F_2(c,0)$ до касательной к точке $M_0(x_0,y_0)$ равно

$$d_2 = |F_2D_2| = \frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Их произведение равно

$$d_1d_2 = \frac{1 - \dfrac{c^2x_0^2}{a^4}}{\dfrac{x_0^2}{a^4} + \dfrac{y_0^2}{b^4}} = \left\{\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right\} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{c^2}{a^4}x_0^2}{\dfrac{x_0^2}{a^2}\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) + \dfrac{1}{b^2}} = \left\{c^2 = a^2 - b^2\right\} = b^2\frac{1 - \dfrac{c^2}{a^4}x_0^2}{1 - \dfrac{c^2}{a^4}x_0^2} = b^2.$$

З А Д А Ч А 2. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.

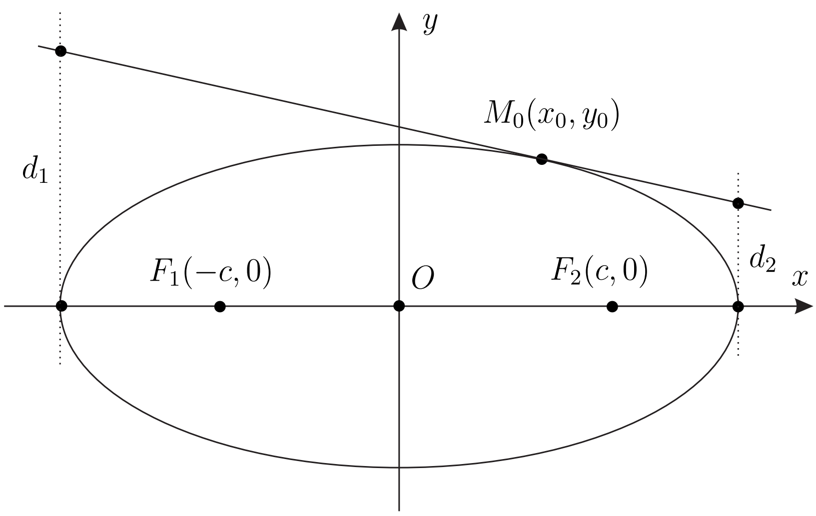

Рис. 2. К задаче 2.

Р е ш е н и е. Уравнения касательных в концевых точках большой оси эллипса имеют следующий вид:

$$x = -a \quad \text{и} \quad x = a.$$

Найдем координаты пересечения этих прямых с касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

к точке $M_0(x_0, y_0)$. Действительно, точка $M_1(x_1, y_1)$ пересечения первой прямой с касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$

$$x_1 = -a, \quad y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right);$$

точка $M_2(x_2, y_2)$ пересечения второй прямой с касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$

$$x_2 = a, \quad y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Очевидно, что соответствующие расстояния равны

$$d_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right), \quad d_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Итак,

$$d_1 d_2 = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}\frac{y_0^2}{b^2} = b^2.$$

ЗАДАЧА 3. Получите параметрические уравнения гиперболы.

Решение. Рассмотрим уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Введём параметр

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = t, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(\frac{1}{t} - t\right).$$

Для $x > 0$ имеем $t > 0$, а для $x < 0$ имеем $t < 0$. Поэтому при $x > 0$ положим $t = e^{-u}$ и получим уравнения

$$x = a\cosh u, \quad y = b\sinh u.$$

При $x < 0$ положим $t = -e^{-u}$ и получим равенство

$$x = -a\cosh u, \quad y = -b\sinh u.$$

ЗАДАЧА 4. Составьте уравнение гиперболы в системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы.

Решение. Сначала рассмотрим исходный правый ортонормированный репер $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ и новый правый нормированный репер $\{O, \mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ направленный по асимптотам гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

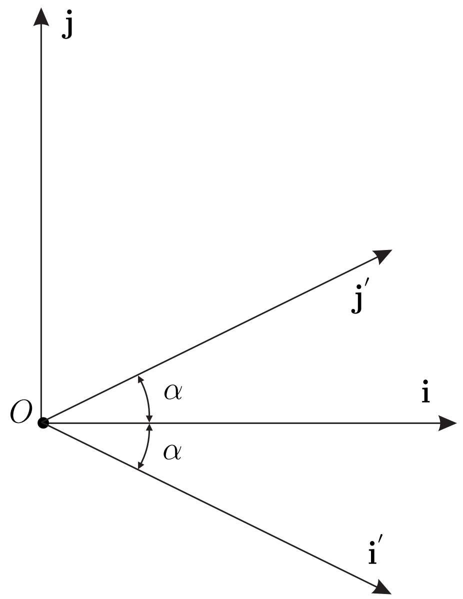

Рис. 3. К задаче 4.

Уравнения асимптот

$$y = \pm x \tan\alpha, \quad \tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

Общая линейная связь базисов $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ и $(\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ следующая:

$$(\mathbf{i}', \mathbf{j}') = (\mathbf{i}, \mathbf{j})R, \quad R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}$$

или в развёрнутом виде

$$\mathbf{i}' = r_1^1\mathbf{i} + r_1^2\mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = r_2^1\mathbf{i} + r_2^2\mathbf{j}.$$

Используя свойства скалярного произведения получим следующие равенства:

$$r_1^1 = (\mathbf{i}', \mathbf{i}) = \cos\alpha, \quad r_1^2 = (\mathbf{i}', \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$r_2^1 = (\mathbf{j}', \mathbf{i}) = \cos\alpha, \quad r_2^2 = (\mathbf{j}', \mathbf{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Итак, имеем

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Итак, в новых координатах

$$X^{'} = \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}, \quad X = RX^{'}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

исходное уравнение гиперболы

$$X^T AX = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}$$

примет следующий вид:

$$X^{'T} A^{'} X^{'} = 1, \quad A^{'} = R^T AR.$$

Вычислим матрицу $A^{'}$. Действительно,

$$A^{'} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} & \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} & \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X^{'T} A^{'} X^{'} = \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \right) \left[(x^{'})^2 + (y^{'})^2 \right] + 2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \right) x^{'} y^{'}.$$

Заметим, что

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{a^2}{a^2+b^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2+b^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = 0, \quad \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{2}{a^2+b^2}.$$

Итак, уравнение в новой системе координат пример следующий вид:

$$x^{'} y^{'} = \frac{1}{4} \left(a^2 + b^2 \right).$$

ЗАДАЧА 5. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).

Геометрическое решение. В силу оптических свойств эллипса и гиперболы касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы (смотри рисунок)

$$2(\alpha + \beta) = \pi,$$

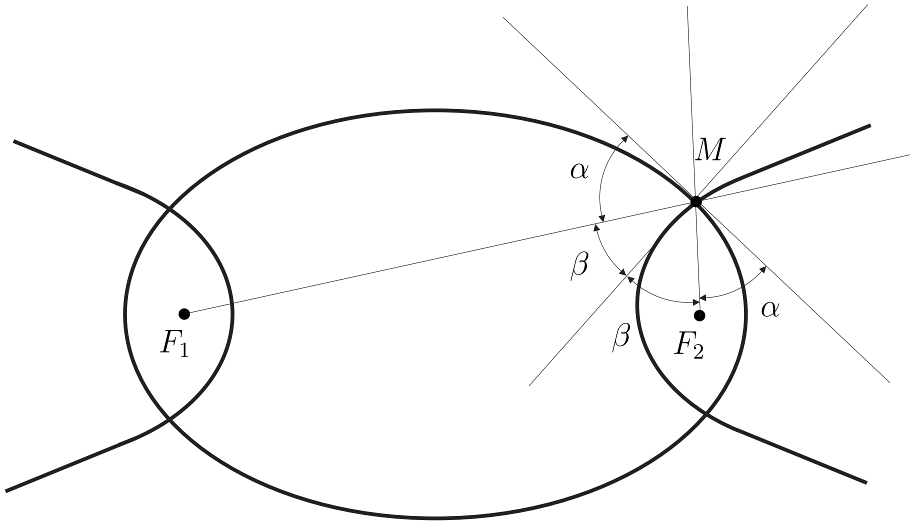

Рис. 4. К задаче 5.

а угол между касательными равен

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

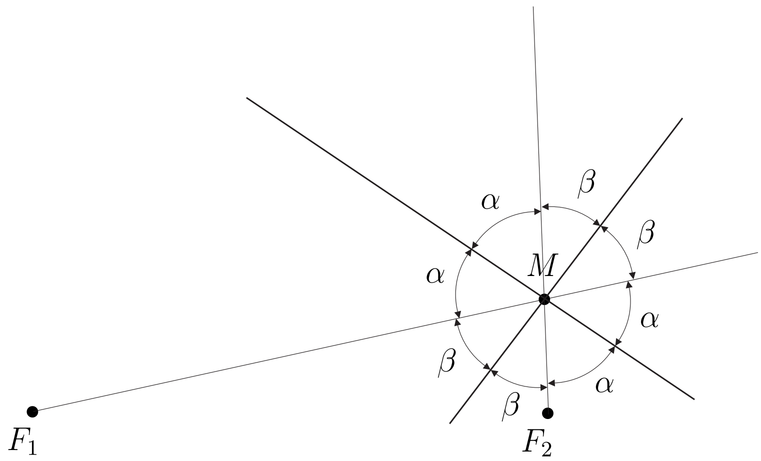

Рис. 5. Построения.

Аналитическое решение. Эллипс и гипербола в канонической декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} = 1,$$

где
$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, \quad c^2 = a_2^2 + b_2^2.$$
Уравнение касательной в общей точки $M_0(x_0, y_0)$ этого эллипса и гиперболы имеют следующий вид:
$$\frac{xx_0}{a_1^2} + \frac{yy_0}{b_1^2} = 1, \quad \frac{xx_0}{a_2^2} - \frac{yy_0}{b_2^2} = 1.$$
Нормали к этим касательным имеют следующий вид:
$$\mathbf{n}_1 = \left\{\frac{x_0}{a_1^2}, \frac{y_0}{b_1^2}\right\}, \quad \mathbf{n}_2 = \left\{\frac{x_0}{a_2^2}, -\frac{y_0}{b_2^2}\right\}.$$
Докажем, что $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$. Действительно, с одной стороны, имеем
$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2}.$$
С другой стороны, справедливо равенство
$$\frac{x_0^2}{a_1^2} + \frac{y_0^2}{b_1^2} = 1 = \frac{x_0^2}{a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_2^2},$$
из которого приходим к равенству
$$\frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2}(a_2^2 - a_1^2) + \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2}(b_1^2 + b_2^2) = 0,$$
причём
$$a_2^2 - a_1^2 = c^2 - b_2^2 - b_1^2 - c^2 = -b_1^2 - b_2^2.$$
Итак,
$$\frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2} = 0.$$
Следовательно, $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$.

З А Д А Ч А 6. Докажите, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключённый между касательными, проведёнными в концах большой оси, виден из любого фокуса под прямым углом.

Р е ш е н и е. Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ эллипса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
имеет следующий вид:
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$
Уравнения касательных к точкам с координатами $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ имеют вид $x = \mp a$. Найдём точки пересечения этих касательных с каса-

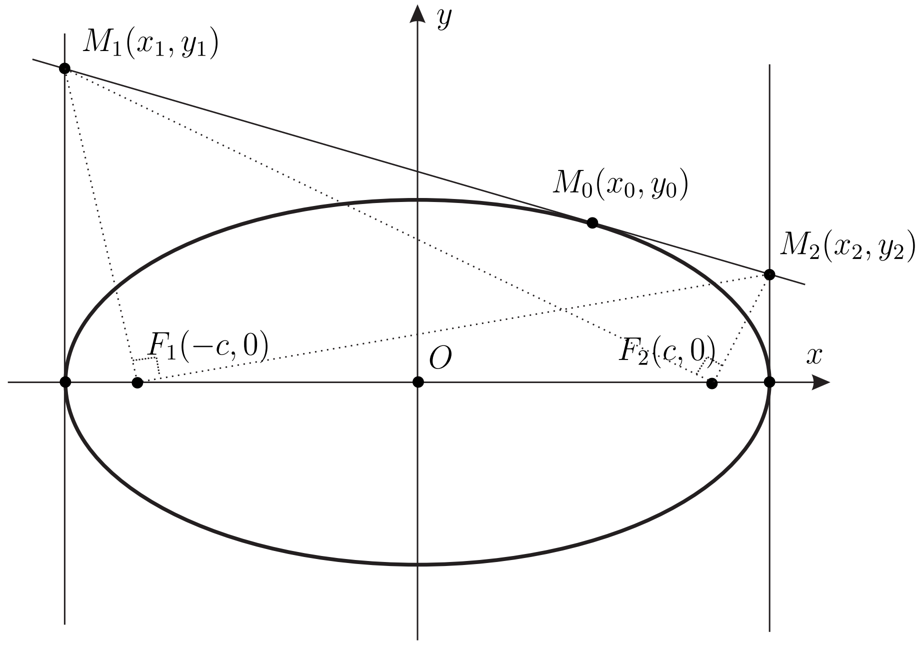

Рис. 6. К задаче 6.

тельной в точке $M_0(x_0, y_0)$. Итак, это точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ с координатами

$$x_1 = -a, \quad y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right),$$

$$x_2 = a, \quad y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Уравнения прямых l_1 и l_2, проходящих через фокус $F_1(-c, 0)$ и точку $M_1(x_1, y_1)$ и через фокус $F_1(-c, 0)$ и точку $M_2(x_2, y_2)$, имеют следующий вид

$$\frac{x+a}{-c+a} = \frac{y-y_1}{-y_1}, \quad \frac{x-a}{-c-a} = \frac{y-y_2}{-y_2}.$$

Докажем, что направляющие векторы этих прямых ортогональны. Действительно,

$$(-c-a)(-c+a) + y_1 y_2 = -a^2 + c^2 + \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \{c^2 = a^2 - b^2\} =$$

$$= -b^2 + \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = -\frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} - 1 + \frac{x_0^2}{a^2}\right) = 0.$$

З А Д А Ч А 7. Докажите, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот есть величина постоянная, и найдите эту величину.

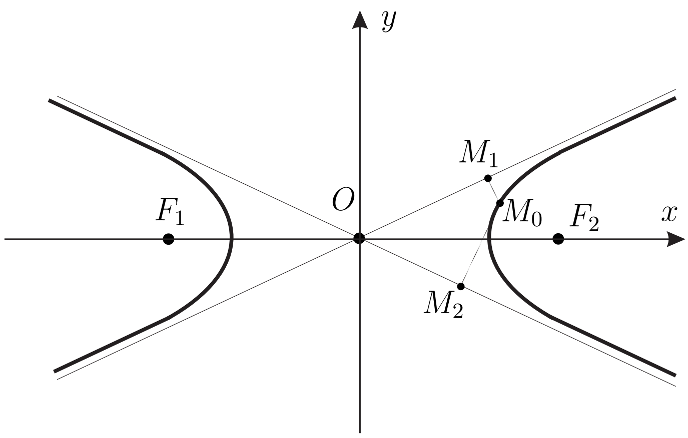

Рис. 7. К задаче 7.

Р е ш е н и е. Асимптоты для гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеют следующий вид

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы до асимптоты $y = \dfrac{b}{a}x$ равно

$$d_1 = \frac{\left|y_0 - \dfrac{b}{a}x_0\right|}{\sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы до асимптоты $y = -\dfrac{b}{a}x$ равно

$$d_2 = \frac{\left|y_0 + \dfrac{b}{a}x_0\right|}{\sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}}.$$

Таким образом, имеем

$$d_1 d_2 = \frac{\left|\dfrac{b^2}{a^2} x_0^2 - y_0^2\right|}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

ЗАДАЧА 8. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между её асимптотами, делится точкой касания пополам.

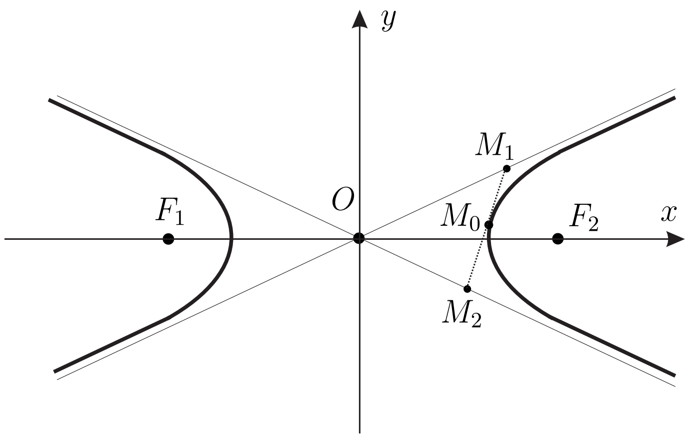

Рис. 8. К задаче 8.

Решение. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — это точки пересечения касательной

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$$

к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

к точке $M_0(x_0, y_0)$ с асимптотами

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a} x.$$

Требуется доказать, что

$$\overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \quad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

Найдём координаты точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Действительно,

$$y_1 = \frac{b}{a} x_1 \quad \text{и} \quad \frac{x_1 x_0}{a^2} - \frac{y_1 y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{b a^2}{x_0 b - y_0 a}, \quad y_1 = \frac{b^2 a}{x_0 b - y_0 a};$$

$$y_2 = -\frac{b}{a}x_2 \quad \text{и} \quad \frac{x_2x_0}{a^2} - \frac{y_2y_0}{b^2} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{ba^2}{x_0b + y_0a}, \quad y_2 = -\frac{b^2a}{x_0b + y_0a}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \frac{b^2a}{x_0b - y_0a} - \frac{b^2a}{x_0b + y_0a} = \\ &= \frac{b^2a}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2}(x_0b + y_0a - x_0b + y_0a) = 2y_0\frac{b^2a^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2} = 2y_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{ba^2}{x_0b - y_0a} + \frac{ba^2}{x_0b + y_0a} = \\ &= \frac{ba^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2}(x_0b + y_0a + x_0b - y_0a) = 2x_0\frac{b^2a^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2} = 2x_0. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 9. Докажите, что две параболы с общим фокусом и противоположно направленными осями пересекаются под прямым углом (т.е. касательные в точке пересечения взаимно перпендикулярны).

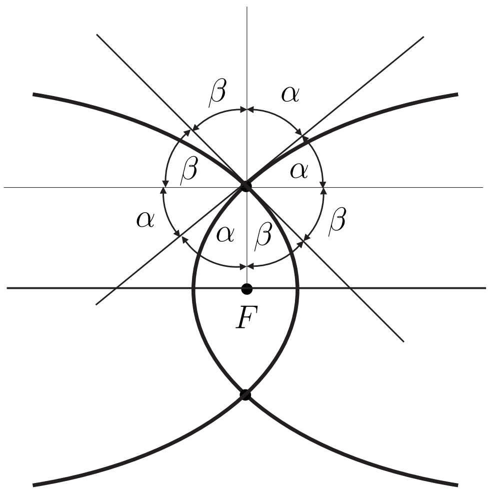

Рис. 9. К задаче 9.

Геометрическое решение. В силу оптического свойства параболы оба смежных угла между касательными равны $\alpha + \beta$. Таким образом, имеем

$$2(\alpha + \beta) = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, угол между касательными равен $\pi/2$.

Аналитическое решение. В канонической системе координат уравнения этих парабол имеет следующий вид:

$$y^2 = 2p_1x \quad \text{и} \quad y^2 = -2p_2\left(x - \frac{p_1+p_2}{2}\right).$$

Нетрудно найти координаты точек пересечения этих парабол

$$M_1(x_0, y_0), \quad M_2(x_0, -y_0), \quad x_0 = \frac{p_2}{2}, \quad y_0^2 = p_1p_2.$$

Уравнение касательной к точке $M_1(x_0, y_0)$ первой параболы было нами найдено ранее и имеет следующий вид:

$$yy_0 - p_1(x + x_0) = 0.$$

Уравнение касательной к точке $M_1(x_0, y_0)$ второй параболы имеет следующий вид:

$$y_0y + p_2(x + x_0) - p_2(p_1 + p_2) = 0.$$

Вектора нормалей к точке $M_1(x_0, y_0)$ касательных имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = \{-p_1, y_0\}, \quad \mathbf{n}_2 = \{p_2, y_0\}.$$

Поэтому имеем

$$(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = y_0^2 - p_1p_2 = 0.$$

Аналогично для точки $M_2(x_0, -y_0)$.

ЗАДАЧА 10. Докажите, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.

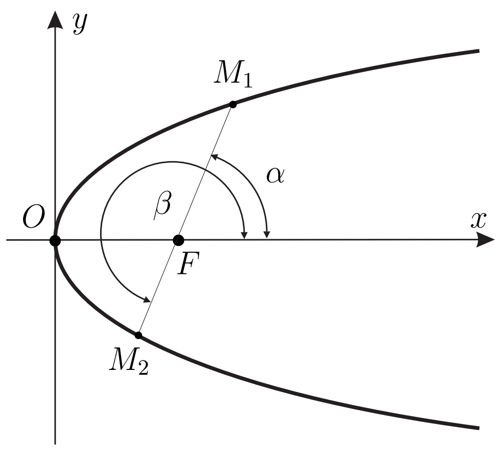

Рис. 10. К задаче 10.

Решение. Перейдем к полярной системе координат с полюсом в фокусе параболы F и с полярной осью, совпадающей с осью параболы.

Тогда в этой системе координат уравнение параболы примет следующий вид:

$$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}, \quad \varphi \in (0, 2\pi).$$

Проведём произвольную хорду через фокус параболы. Тогда в полярной системе координат точки пересечения хорды с параболой имеют следующие координаты: $M_1(r_1, \alpha)$ и $M_2(r_2, \beta)$, причём

$$\beta = \alpha + \pi, \quad r_1 = \frac{p}{1-\cos\alpha}, \quad r_2 = \frac{p}{1-\cos\beta}.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1-\cos\alpha}{p} + \frac{1+\cos\alpha}{p} = \frac{2}{p},$$

где $r_1 = |FM_1|$, $r_2 = |FM_2|$.