0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 3

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БАЗИСА

ЗАДАЧА 1. Даны полярные координаты точек $A(8, -2\pi/3)$ и $B(6, \pi/3)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка AB.

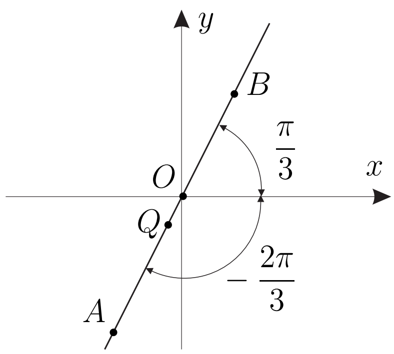

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Пусть O — это полюс. Для быстрого решения этой задачи нужно заметить, что угол между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен π. Общая длина отрезка AB равна 14. Поэтому координата центра C отрезка AB в системе координат на оси с началом координат в полюсе O будет равна -1, т. е. в соответствующей полярной системе координат центр отрезка будет иметь координаты $(1, -2\pi/3)$.

ЗАДАЧА 2. Найти длину меньшей из двух дуг большого круга, соединяющей две точки A и B, лежащие на шаре радиуса r, зная широту и долготу этих точек $A(\varphi_1, \vartheta_1)$ и $B(\varphi_2, \vartheta_2)$.

Решение. Исходя из условий задачи прямоугольные координаты точек A и B имеют следующие координаты:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2),$$

$$x_1 = r\cos\vartheta_1\cos\varphi_1, \quad y_1 = r\cos\vartheta_1\sin\varphi_1, \quad z_1 = r\sin\vartheta_1,$$

$$x_2 = r\cos\vartheta_2\cos\varphi_2, \quad y_2 = r\cos\vartheta_2\sin\varphi_2, \quad z_2 = r\sin\vartheta_2;$$

угол φ между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ определяется равенством

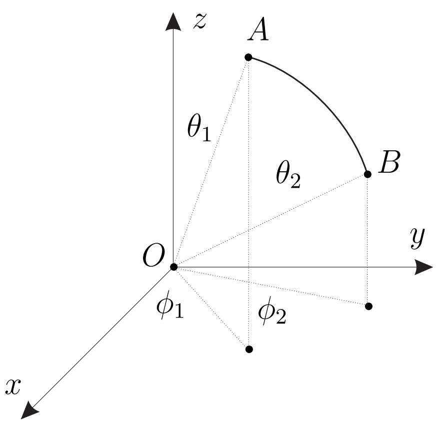

Рис. 2. К задаче 2.

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)}{r^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{r^2} = \\ = \cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2.$$

Итак, длина дуги равна

$$s = r\varphi = r\arccos\left(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\right).$$

З А Д А Ч А 3. Нарисуйте на плоскости множества точек, полярные координаты которых связаны соотношениями a) $r = 2/\cos\varphi$, b) $r = 2\cos\varphi$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала задачу a).

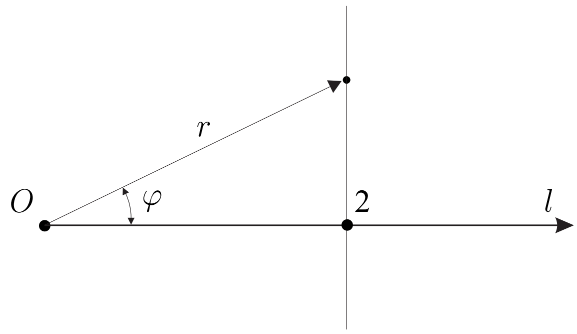

Рис. 3. К задаче 3 a).

Заметим, что при $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ величина $r = 2/\cos\varphi < 0$ и поэтому этим углам не отвечает никакая кривая на плоскости. Реально это уравнение имеет смысл при $\varphi \in (0, \pi/2)$ и при $(3\pi/2, 2\pi)$. Это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$r \cos \varphi = 2,$$

но величина $r \cos \varphi$ — это проекция радиус–вектора точки на плоскости на полярную ось. Следовательно, искомая кривая это прямая, проходящая перпендикулярно к полярной оси l через точку на полярной оси с координатами $r = 2$, $\varphi = 0$.

Рассмотрим теперь задачу b).

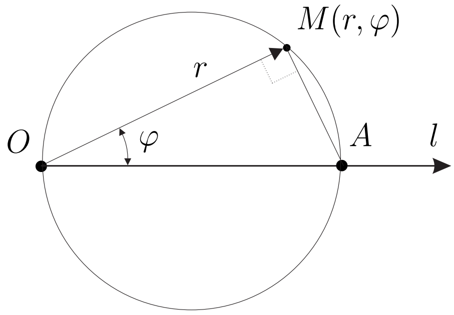

Рис. 4. К задаче 3 b).

При $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ величина $r = 2\cos\varphi < 0$ и поэтому этим углам не отвечает никакая точка искомой кривой. При $\varphi = 0$ имеем $r = 2$. При остальных углах $\varphi(0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ величина $2\cos\varphi$ — это длина катета OM прямоугольного треугольника $\triangle OMA$, построенного на гипотенузе OA. Следовательно, искомая кривая — это окружность с диаметром OA.

З А Д А Ч А 4. Связь систем декартовых косоугольных координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$ на плоскости.

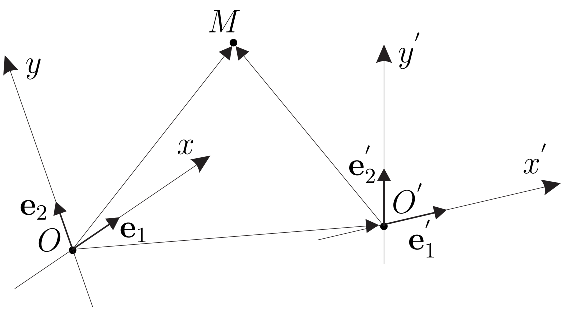

Рис. 5. К задаче 4.

Р е ш е н и е. Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ — это базис, т. е. линейно независимое семейство векторов, через которые можно представить любой другой вектор плоскости, то другой базис $\{\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\}$ можно разложить следующим однозначным образом:

$$\mathbf{e}_1^{'} = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2^{'} = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2. \tag{0.1}$$

Равенство (0.1) можно записать в компактной матричной форме, но в привлечением понятия умножения матрицы на строчку:

$$\left(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{0.2}$$

Это правило умножения называется правилом умножения «строчку на столбец». Прежде всего рассмотрим правило умножения строчки на столбец:

$$(a_1, a_2) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Нам потребуются ещё два варианта этого правила. Первое равенство

$$(a, b) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a \cdot a_{11} + b \cdot a_{21}, a \cdot a_{12} + b \cdot a_{22}), \tag{0.3}$$

т. е. результатом умножения является строчка длины 2. Теперь рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b \\ a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

т. е. результатом умножения является столбец длины 2. В силу равенства (0.3) справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2),$$

а из равенства двух строк одной длины

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2, a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$

мы получим равенства (0.1).

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M}, \tag{0.5}$$

$$\overrightarrow{OO^{'}} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{0.6}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{0.7}$$

$$\overrightarrow{O^{'}M} = x^{'}\mathbf{e}_1^{'} + y^{'}\mathbf{e}_2^{'} = \left(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}\right) \cdot \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}. \tag{0.8}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2) \times \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \mathbf{e}_1(b_1 + c_1) + \mathbf{e}_2(b_2 + c_2) = \mathbf{e}_1 b_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 c_1 + \mathbf{e}_2 c_2 =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (0.9)$$

Справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) S \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}. \quad (0.10)$$

Заметим, что

$$S \times \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x^{'} + a_{12}y^{'} \\ a_{21}x^{'} + a_{22}y^{'} \end{pmatrix},$$

т.е. это некоторый столбец. Итак, приходим к равенству

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - S \times \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (0.11)$$

Выражение в квадратных скобках — это некоторый столбец:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - S \times \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}. \quad (0.12)$$

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (0.13)$$

Это согласно правилу умножению «строчка на столбец» приходим к уравнению:

$$b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow b_1 = b_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеет место следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 5. Даны две произвольные (косоугольные) декартовы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O^{'}, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}\}$. Найти формулы связывающие координаты (x, y, z) и $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ одной и той же точки пространства M в этих системах координат.

Решение. Запишем в матричной форме разложения нового базиса $(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'})$ по старому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Действительно, поскольку

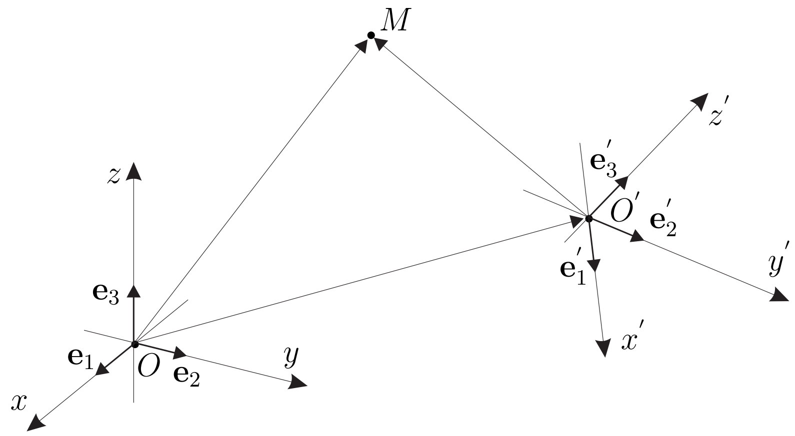

Рис. 6. К задаче 5.

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это базис, то векторы семейства $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ можно однозначно разложить по семейству $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3, \tag{0.14}$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3, \tag{0.15}$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3. \tag{0.16}$$

Равенства (0.14)–(0.16) можно записать в следующей компактной форме:

$$(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{0.17}$$

Действительно, применим правило умножения «строчка на столбец» в трёх различных ситуациях. Первый случай:

$$(a_1, a_2, a_3) \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Второй случай:

$$(b_1, b_2, b_3) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3),$$

где

$$c_1 = b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_3a_{31},$$

$$c_2 = b_1a_{12} + b_2a_{22} + b_3a_{32},$$

$$c_3 = b_1a_{13} + b_2a_{23} + b_3a_{33}.$$

Третий случай:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix},$$

где

$$d_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3,$$
$$d_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3,$$
$$d_3 = a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3.$$

Пусть

$$\overrightarrow{OO'} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot B, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix};$$

Наконец,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \tag{0.18}$$

причём имеем

$$\overrightarrow{OM} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{O'M} = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \cdot X', \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из равенства (0.18) получим следующее выражение:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot X = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot B + (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3) \cdot X' =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot B + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S \cdot X'. \tag{0.19}$$

Отсюда получаем равенство

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \left(X - B - S \cdot X'\right) = O \Rightarrow X = B + S \cdot X'.$$

ЗАДАЧА 6. Пусть O' — это середина отрезка AB. Найти формулы перехода от репера $\{O, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\}$ к реперу $\{O', \overrightarrow{O'O}, \overrightarrow{O'B}\}$.

Решение. Для удобства введём обозначения:

$$\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{O'O}, \quad \mathbf{e}'_2 = \overline{O'B}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}'_1 = \overrightarrow{O'O} = -\overrightarrow{OO'} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2;$$
$$\mathbf{e}'_2 = \overline{O'B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO'} = \mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2.$$

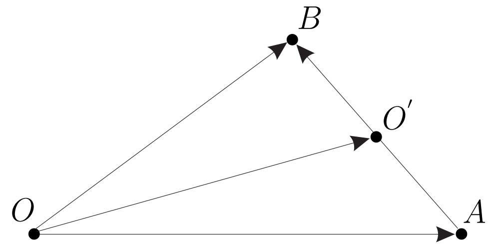

Рис. 7. К задаче 6.

Итак, имеем

$$(\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Для произвольной точки плоскости M имеет место следующее равенство:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO^{'}} + \overrightarrow{O^{'}M},$$

где

$$\overrightarrow{OM} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{O^{'}M} = (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OO^{'}} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеем

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}) \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix} =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}.$$

В силу того, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ являются линейно независимыми мы приходим к формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \end{pmatrix}.$$

Или покомпонентно имеем

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{'} + \frac{1}{2}y^{'}, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{'} - \frac{1}{2}y^{'}.$$

ЗАДАЧА 7. Дана декартова система координат с репером $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Как расположена относительно неё декартова система координат с репером $\{O, \mathbf{e}_1^{'}, \mathbf{e}_2^{'}, \mathbf{e}_3^{'}\}$, если формулы перехода имеют следующий вид

$$x = 1 - y^{'} - z^{'}, \quad y = 1 - x^{'} - z^{'}, \quad z = 1 - x^{'} - y^{'}.$$

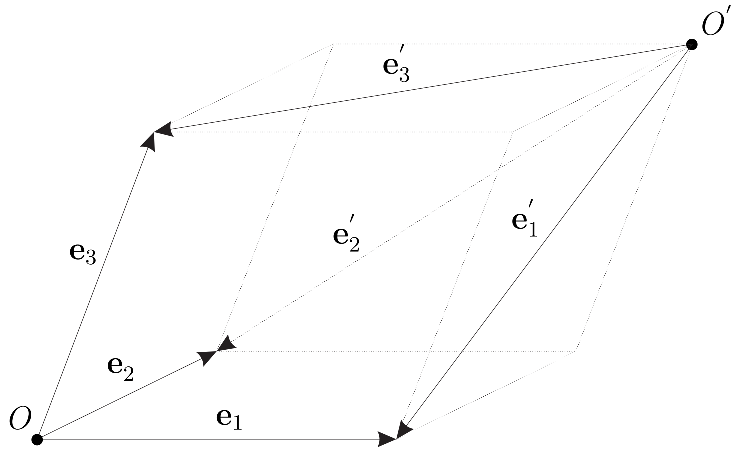

Рис. 8. К задаче 4.

Решение. Согласно общим формулам имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеем

$$(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)R.$$

Следовательно,

$$\mathbf{e}_1' = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Теперь мы можем приступить к анализу расположения ортов новой системы координат относительно старой. Начало O' новой декартовой системы координат расположено в вершине параллелограмма, которая не лежит ни в одной из координатных плоскостей старой системы координат. Концы векторов $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$, отложенного от точки O', совпадают с концами векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ соответственно, которые отложены от точки O.

ЗАДАЧА 8. В пространстве задана некоторая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Точки $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(-1,2,0)$ $D(0,0,2)$ — это вершины тетраэдра $ABCD$, точки K и L — соответственно середины рёбер $[AC]$ и $[DB]$. Найдите матрицу перехода S_2 от системы координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ к системе координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$. Напишите формулы перехода от первой системы координат ко второй.

Решение.

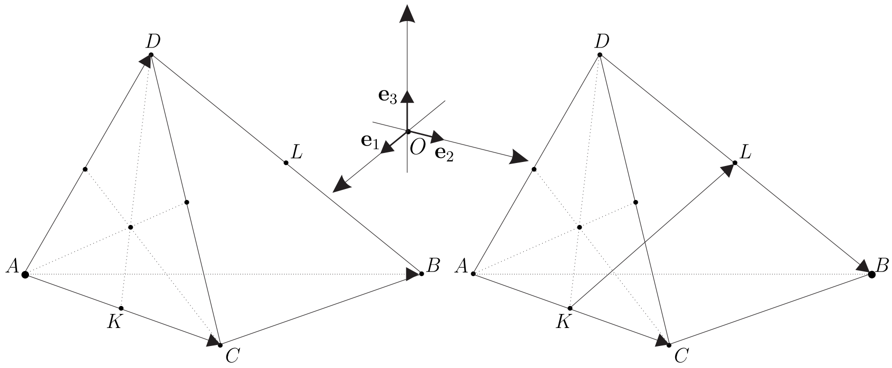

Рис. 9. К задаче 8.

Первый способ. Решение проведём за три шага.

Шаг 1. По определению координат точек имеем

$$\overrightarrow{OA} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1; \quad \overrightarrow{OB} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_2;$$

$$\overrightarrow{OC} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2; \quad \overrightarrow{OD} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_3.$$

Стало быть, имеем

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = 2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1.$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$
$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

Итак, имеет место следующая формула перехода от базиса $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ к базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \cdot S, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (0.20)$$

Шаг 2. Найдём матрицу S_1 перехода от базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ к базису $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB})$. Справедливы следующие формулы:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2,$$

$$\overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2}\left(2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3\right) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \mathbf{e}_3; \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1;$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} = 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3.$$

Итак, имеем

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S_1, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (0.21)$$

Шаг 3. Из формул (0.20) и (0.21) имеем

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \cdot S_1 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \cdot S \cdot S_1 \Rightarrow S_2 = S \cdot S_1.$$

Поскольку

$$\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \cdot Z, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

то имеем окончательную формулу связи координат X' точки M в системе координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ с координатами X в системе координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \qquad (0.22)$$

где

$$S_2 = S \cdot S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Второй способ. Этот способ основан на непосредственном выражении элементов новой декартовой системы координат $\{B, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\}$ через старую систему координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$. Имеем

$$\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KL}, \overrightarrow{DB}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \cdot S_2, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В координатах имеем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + S_2 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$