Лекция 5

Комплексные числа

Не все многочлены с вещественными коэффициентами имеют вещественные корни. Например, многочлен x^2+2x+2 не имеет вещественных корней, т.к. уравнение $x^2+2x+2=0$ имеет отрицательный дискриминант. Для того чтобы этот многочлен и все другие многочлены ненулевой степени с вещественными коэффициентами имели корни, вводится понятие комплексного числа как обобщение понятия вещественного числа.

Определение. Два вещественных числа x, y называются *упорядоченной парой чисел*, если указано, какое из этих чисел является первым и какое — вторым. Упорядоченную пару чисел будем записывать в скобках: (x, y), где x — первое число, y — второе число.

Определение. *Комплексным числом* z называется упорядоченная пара вещественных чисел (x, y), где число x называется *вещественной частью* числа z, а число y называется *мнимой частью* числа z.

Обозначения: $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел, $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$.

Определение. Два комплексных числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ называются *равными*, если у них совпадают соответственно вещественные и мнимые части:

$$z_1=z_2, \text{если} \begin{cases} x_1=x_2, \\ y_1=y_2. \end{cases}$$

Определение. *Суммой* комплексных чисел $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ называется комплексное число $z=(x_1+x_2, y_1+y_2)$.

Определение. *Разностью* комплексных чисел $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ называется такое комплексное число z, которое при сложении с числом z_2 даёт число z_1: $z+z_2=z_1$. Нетрудно убедиться, что $z=(x_1-x_2, y_1-y_2)$.

Определение. *Произведением* комплексных чисел $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ называется комплексное число $z=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$.

Свойства сложения и умножения комплексных чисел аналогичны свойствам сложения и умножения вещественных чисел: для любых $z_1, z_2, z_3, z \in \mathbb{C}$

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$ (переместительное свойство сложения),
2) $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$ (сочетательное свойство сложения),
3) $z+(0,0)=z$ (особая роль числа $(0,0)$),
4) $z_1 \cdot z_2=z_2 \cdot z_1$ (переместительное свойство умножения),
5) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)=(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ (сочетательное свойство умножения),

6) $z \cdot (1,0) = z$ (особая роль числа $(1,0)$),
7) $z \cdot (0,0) = (0,0)$,
8) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ (распределительное свойство умножения).

Докажите самостоятельно, исходя из определения суммы и произведения комплексных чисел.

Рассмотрим подробнее комплексные числа вида $(x, 0)$, т.е. такие числа, у которых мнимая часть равна 0. При сложении и умножении двух таких чисел получаются также числа вида $(x, 0)$, причём их вещественные части складываются или умножаются:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \qquad (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

т.е. такие числа при сложении и умножении ведут себя как вещественные числа. Это позволяет *отождествить* комплексное число $(x, 0)$ с вещественным числом x: $(x, 0) \equiv x$, и считать множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ подмножеством множества комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Произвольное комплексное число $z = (x, y)$ можно представить в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Определение. Комплексные числа вида $(0, y)$ называются *чисто мнимыми*.

Обозначим $i = (0, 1)$. Это комплексное число называется *мнимой единицей*. Заметим, что $i^2 = i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0) = -1$, т.е. $\boxed{i^2 = -1.}$

Таким образом, любое комплексное число можно представить в виде

$\boxed{z = x + iy,}$ где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Такое представление комплексного числа называется его *алгебраической формой*. Алгебраическая форма числа позволяет производить арифметические операции с комплексными числами точно так же, как они производятся с обычными многочленами:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1 y_2 =$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2).$$

Пример. Убедимся, что уравнение $z^2 + 2z + 2 = 0$ имеет комплексные корни.

$$\mathcal{D} = 4 - 8 = -4 = (2i)^2,$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i.$$

Нетрудно проверить подстановкой в уравнение $z^2 + 2z + 2 = 0$, что числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1 - i$ действительно являются его корнями.

Определение. Число $\bar{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряжённым* к числу $z = x + iy$.

Определение. *Частным* комплексных чисел z_1 и z_2 называется такое комплексное число z, которое при умножении на число z_2 даёт число z_1: $z \cdot z_2 = z_1$.

Вычислим частное комплексных чисел $z_1 = x_1 + ix_2$ и $z_2 = x_2 + ix_2$, используя алгебраическую форму записи. Т.е. нужно представить частное z_1/z_2 тоже в алгебраической форме.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}.$$

Для того чтобы представить это число в алгебраической форме, надо избавиться от мнимой единицы в знаменателе. Это можно сделать, умножив числитель и знаменатель на число, комплексно сопряжённое к знаменателю:

$$z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + iy_1x_2 - ix_1y_2 - i^2y_1y_2}{x_2^2 - i^2y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \underbrace{\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{x} + i\underbrace{\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{y} = x + iy.$$

Таким образом, возможно деление любого комплексного числа на любое ненулевое комплексное число.

Свойства комплексного сопряжения: для любых $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$

1) $\bar{\bar{z}} = z$,
2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,
3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

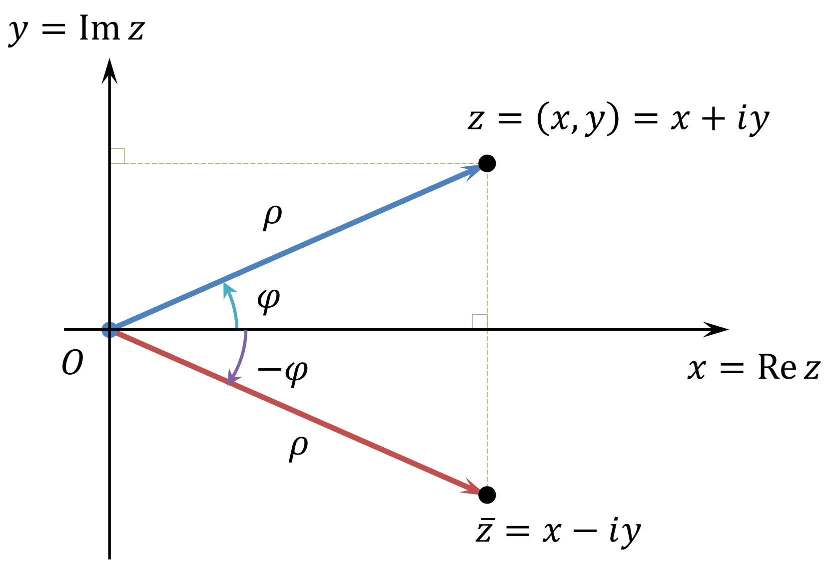
Докажите самостоятельно.

Возведение комплексного числа в целую степень

Определение. Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$z^n = \begin{cases} \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}, & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0, z \neq 0, \\ \dfrac{1}{\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{|n| \text{ раз}}}, & \text{если } n < 0, z \neq 0. \end{cases}$$

Комплексная плоскость



Каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку (x, y) на плоскости в правой декартовой системе координат Oxy (или вектор $\{x, y\}$, отложенный от начала отсчёта). Вещественным числам соответствуют точки оси Ox, которая называется *вещественной осью*. Чисто мнимым числам соответствуют точки оси Oy, которая называется *мнимой осью*.

Комплексно сопряжённому числу $\bar{z}$ соответствует точка комплексной плоскости, симметричная точке z относительно вещественной оси.

Точка z на плоскости может быть задана не только своими декартовыми координатами, но и своими полярными координатами ρ, φ. Вещественное число ρ называется *модулем* комплексного числа z:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а вещественное число φ называется *аргументом* числа z:

$$\operatorname{Arg} z = \varphi.$$

Поскольку $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $z = x + iy$, то

$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ — *тригонометрическая форма* записи комплексного числа. Любое комплексное число, кроме нуля, может быть записано в тригонометрической форме.

Для точки на плоскости угол φ определён с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому различают *главное значение аргумента*: $\arg z \in [0; 2\pi)$ или $\arg z \in (-\pi; \pi]$, и *многозначный аргумент*: $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Arg} z \in (-\infty, +\infty)$.

Для того чтобы определить аргумент комплексного числа $z = x + iy$, можно использовать формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

но при этом знания $\operatorname{tg}\varphi$ ещё не достаточно, чтобы найти φ: необходимо учитывать, в какой четверти лежит φ (а это определяется знаками x и y).

Теорема 5.1. При умножении комплексных чисел $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Докажите самостоятельно.

Следствие. Формула *Муавра:*

$$\big(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Докажите самостоятельно (по индукции).

Показательная форма записи комплексного числа

Рассмотрим функцию $f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где $\varphi \in \mathbb{R}$. По теореме 5.1 эта функция обладает *характеристическим свойством показательной функции*: $f(\varphi_1) \cdot f(\varphi_2) = f(\varphi_1 + \varphi_2)$. Поэтому данная функция обозначается $e^{i\varphi}$:

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ — формула *Эйлера* (это определение функции $e^{i\varphi}$).

Из тригонометрической формы записи и формулы Эйлера следует, что произвольное ненулевое комплексное число можно записать в виде

$z = \rho e^{i\varphi}$ — *показательная форма* записи комплексного числа.

Из формулы Муавра следует, что $\left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{in\varphi}$.

Упражнение. Докажите, что $\overline{\rho e^{i\varphi}} = \rho e^{-i\varphi}$.

Извлечение корня из комплексного числа

Определение. Комплексное число w называется корнем n-й степени из комплексного числа z, если $w^n = z$. (Здесь $n \in \mathbb{N}$.)

Очевидно, если $z = 0$, то корнем любой степени из z является только число $w = 0$.

Найдём все значения корня n-й степени из ненулевого комплексного числа z. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, $w = \mathrm{P}e^{i\Phi}$. Тогда $w^n = \mathrm{P}^n e^{in\Phi}$. Если числа w^n и z равны, то у них равны модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ (поскольку аргумент комплексного числа определён с точностью до $2\pi k$):

$$\begin{cases} \mathrm{P}^n = \rho, \\ n\Phi = \varphi + 2\pi k. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} \mathrm{P} = \rho^{1/n}, \\ \Phi = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}. \end{cases}$$

Заметим, что $\rho^{1/n}$ — это *арифметический корень* n-й степени из ρ, т.е. обычный вещественный корень n-й степени из вещественного неотрицательного числа ρ. Он равен такому неотрицательному вещественному числу, которое при возведении в степени n равно ρ. Арифметический корень $\rho^{1/n}$ определяется однозначно.

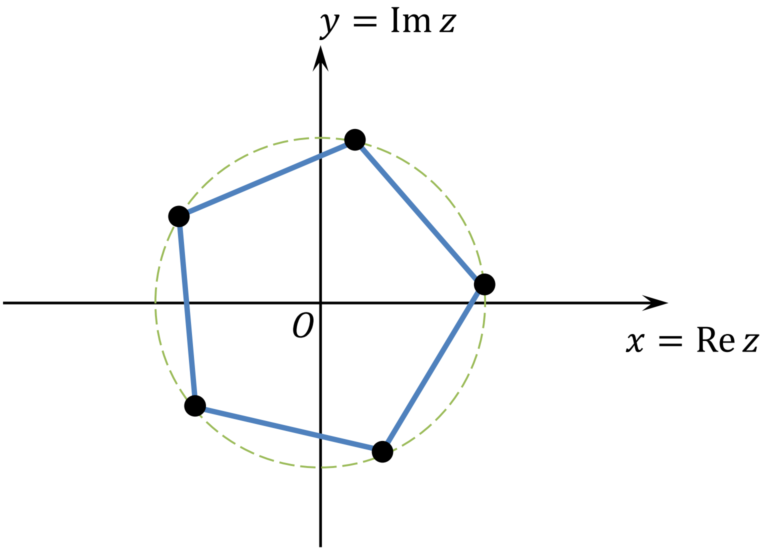
Таким образом, получаем, что

$$\sqrt[n]{z} = w = \mathrm{P}e^{i\Phi} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)} = \rho^{1/n} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

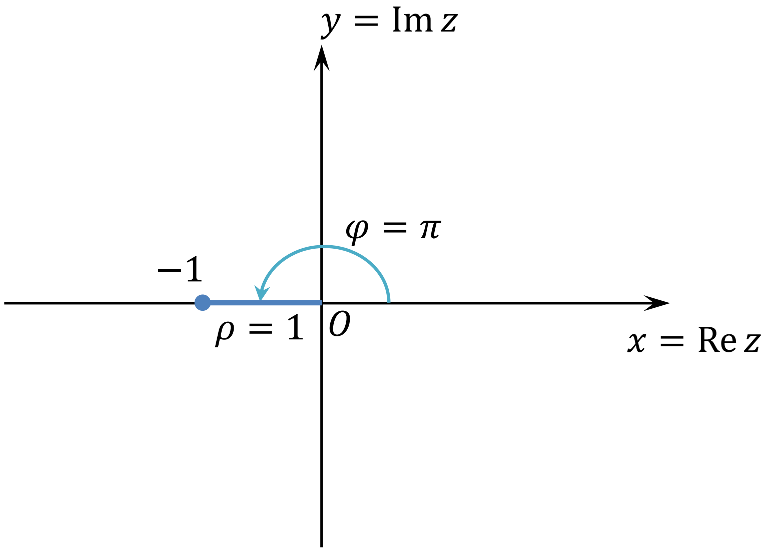
Поскольку функции синус и косинус являются 2π-периодическими, то *различных* значений корня $\sqrt[n]{z}$ будет ровно n штук: для $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Окончательно запишем

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.}$$

Таким образом, для каждого комплексного числа z, отличного от нуля, существует n различных комплексных корней $\sqrt[n]{z}$. Все они будут иметь одинаковый модуль, а аргументы их будут отличаться на $\frac{2\pi}{n}$, поэтому на комплексной плоскости эти корни будут располагаться в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho^{1/n}$ с центром в начале координат.



Пример. Вычислим $\sqrt{-1}$.



Для комплексного числа -1 имеем $\rho = 1$, $\varphi = \pi$, поэтому

$$\sqrt{-1} = \begin{cases} 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \\ 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i. \end{cases}$$