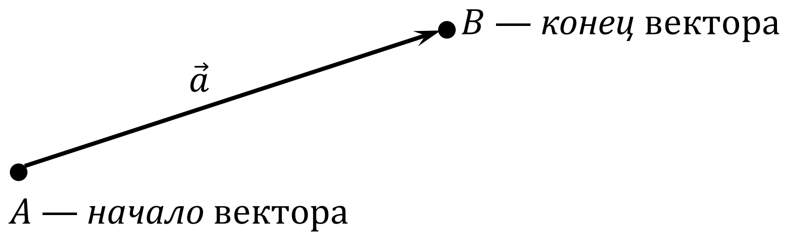
Лекция 2

Векторы

Определения.

- *Вектором* (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, т.е. отрезок, у которого указаны начало и конец.



Обозначение вектора: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение длины вектора: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

- Вектор называется *нулевым* (обозначается $\vec{0}$), если его начало и конец совпадают. Длина нулевого вектора равна нулю, а направление не определено.
- Векторы называются *коллинеарными* (это обозначается $\vec{a} \parallel \vec{b}$), если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.
Замечание. Согласно этому определению нулевой вектор коллинеарен любому вектору.
- Векторы называются *равными* (это обозначается $\vec{a} = \vec{b}$), если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

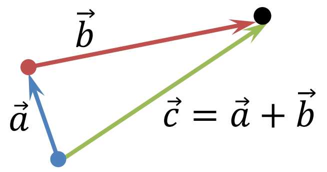
Примечание. Все нулевые векторы считаются равными.

Замечание. От любой точки A можно отложить единственный вектор $\overrightarrow{AB}$, равный данному вектору $\vec{a}$ (докажите это). Поэтому мы будем считать равные векторы, отложенные от разных точек, одним и тем же вектором (отождествлять их).

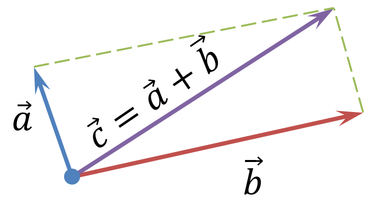
Простейшие операции над векторами

1. Сложение векторов.

Определение 1 (правило треугольника). Отложим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$. Тогда *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Определение 2 (правило параллелограмма). Пусть $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общего начала. *Суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с общим началом векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а конец — с противоположной вершиной параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Замечание. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нельзя построить параллелограмм, и тогда сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется только по правилу треугольника.

Упражнение. Докажите самостоятельно (геометрически), что при $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ векторы $\vec{a} + \vec{b}$, полученные по правилу треугольника и по правилу параллелограмма, будут равными.

Свойства сложения векторов: для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

1°) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство),

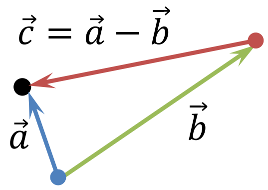
2°) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство),

3°) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, где $\vec{0}$ — нулевой вектор, $\vec{a}$ — произвольный вектор (свойство нулевого вектора),

4°) для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$ (вектор $\vec{a}'$ называется вектором, *противоположным* вектору $\vec{a}$).

2. Вычитание векторов.

Определение. *Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



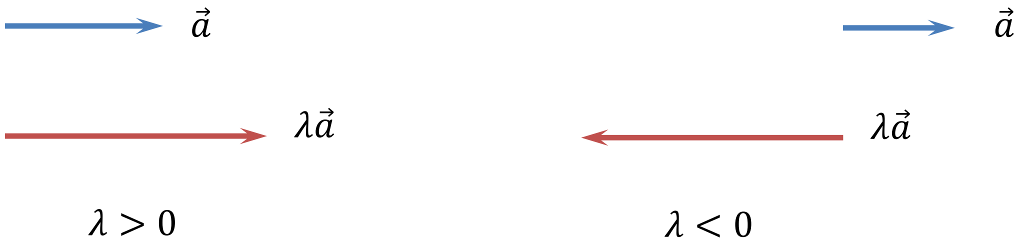
Свойство: для любого вектора $\vec{a}$ выполняется $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$.

3. **Умножение вектора на число.**

Определение. Произведением вектора $\vec{a}$ на вещественное число λ называется вектор $\vec{b}$, который

1) коллинеарен вектору $\vec{a}$,
2) имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
3) имеет направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. (Если же $\lambda = 0$, то $\vec{b}$ — нулевой вектор, направление которого не определено.)

Обозначение: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.



Свойства операции умножения вектора на число: для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и для любых вещественных чисел λ, μ

1°) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ (распределительное свойство относительно сложения векторов),
2°) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ (распределительное свойство относительно сложения чисел),
3°) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ (сочетательное свойство),
4°) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,
5°) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$,
6°) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$,
7°) $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$, т.е. вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, равен $(-1) \cdot \vec{a}$,
8°) $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$.

Перечисленные свойства сложения векторов и умножения вектора на число позволяют производить арифметические операции с векторами по правилам обычной алгебры вещественных чисел.

Векторы на прямой

Теорема 2.1. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны в том и только в том случае, когда существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Доказательство. Пусть существует число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны по определению операции умножения вектора на число, ч.т.д.

Теперь пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{b} = \vec{0}$, то равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ выполняется при $\lambda = 0$.

Пусть теперь $\vec{b} \neq \vec{0}$. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от общего начала — точки O. Поскольку векторы коллинеарны, то они будут лежать на единой прямой l. При этом возможно два случая: направления $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают или противоположны.

Рассмотрим первый случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково. Пусть $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ (поскольку $\vec{a}$ — ненулевой вектор, то знаменатель не равен нулю, и такое число λ существует). Рассмотрим вектор $\lambda\vec{a}$. Докажем, что он равен $\vec{b}$. В самом деле, согласно определению умножения вектора на число, имеем:

1) вектор $\lambda\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, а следовательно, и вектору $\vec{b}$,
2) вектор $\lambda\vec{a}$ имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$, т.е. длины вектора $\lambda\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ одинаковы,
3) поскольку $\lambda > 0$, то направление вектора $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, а значит, и вектора $\vec{b}$.

Согласно определению равных векторов, пп. 1)–3) означают, что векторы $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, т.е. $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, ч.т.д.

Второй случай рассмотрите самостоятельно (подсказка: надо взять $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$). Теорема доказана.

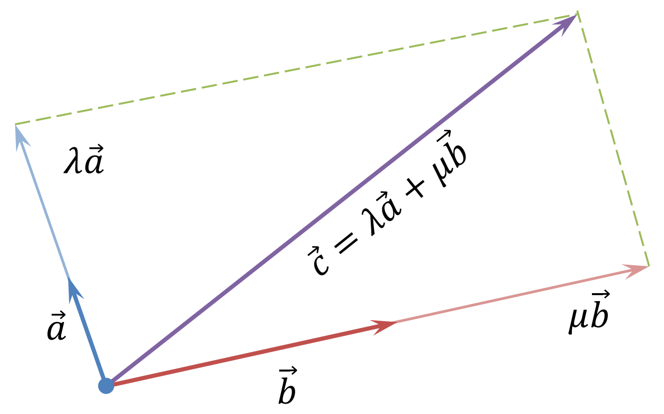
Замечание. В теореме 2.1 нельзя обойтись без условия $\vec{a} \neq \vec{0}$, поскольку, если $\vec{a} = \vec{0}$, а $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, но равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ не может выполняться ни при каком λ.

Векторы на плоскости

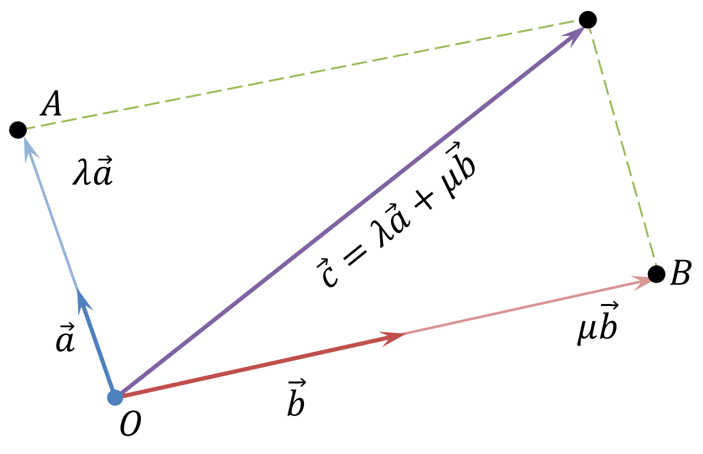
Определение. Векторы называются *компланарными*, если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Теорема 2.2. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны в том и только в том случае, когда существуют числа λ, μ такие, что $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

Доказательство. Пусть $\exists \lambda, \mu$: $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Тогда, согласно определению операций умножения вектора на число и сложения векторов, вектор $\vec{c}$ будет лежать в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ч.т.д.



Теперь пусть векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Отложим их от общего начала — точки O. Тогда все они будут лежать в единой плоскости.



Проведём через конец вектора $\vec{c}$ прямую, параллельную вектору $\vec{b}$. Пусть она пересекает прямую, на которой лежит вектор $\vec{a}$, в точке A. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA}$. Он коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, поэтому по теореме 2.1 найдётся число λ такое, что $\overrightarrow{OA} = \lambda\vec{a}$. Аналогично, проведя через конец вектора $\vec{c}$ прямую, параллельную вектору $\vec{a}$, и обозначив точку её пересечения с прямой, на которой лежит вектор $\vec{b}$, через B, получим вектор $\overrightarrow{OB}$, который будет коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$, и поэтому найдётся число μ такое, что $\overrightarrow{OB} = \mu\vec{b}$. По правилу параллелограмма
$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, ч.т.д.

Определение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *упорядоченной парой векторов*, если указано, какой из них является первым, а какой — вторым.

При записи будем располагать векторы в соответствующем порядке: $\vec{a}, \vec{b}$.

Определение. Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b}$, лежащих в единой плоскости, называется *базисом на этой плоскости*.

Пусть $\vec{a}, \vec{b}$ — базис в некоторой плоскости. Тогда теорема 2.2 говорит о том, что любой вектор $\vec{c}$, лежащий в той же плоскости, можно разложить по базису, т.е. представить в виде $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. Числа λ, μ называются *координатами* вектора $\vec{c}$ относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}$.

Векторы в пространстве

Теорема 2.3. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{d}$ существуют числа λ, μ, ν такие, что $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2.

Определение. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *упорядоченной тройкой векторов*, если указано, какой из них является первым, какой — вторым и какой — третьим.

При записи будем располагать векторы в соответствующем порядке: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *базисом в пространстве*.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — базис в пространстве. Тогда теорема 2.3 говорит о том, что любой вектор $\vec{d}$ можно разложить по базису, т.е. представить в виде $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$. Числа λ, μ, ν называются *координатами* вектора $\vec{d}$ относительно базиса $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.