МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

М. О. Корпусов, А. В. Овчинников

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

МОСКВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ
2019

УДК 51(07), 512.6, 514.1
ББК 22.1я73, 22.144, 22.151.5
К68

Корпусов Максим Олегович,
Овчинников Алексей Витальевич

К68 Аналитическая геометрия. Методы решения задач : учеб. пособие для вузов / М. О. Корпусов, А. В. Овчинников. — М.: Физический факультет МГУ, 2019. — 216 с. : ил.

ISBN 978-5-8279-0170-9

Учебное пособие создано на базе курса, читаемых авторами на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, и содержит подробное изложение решений ряда типовых задач по аналитической геометрии. Для студентов физико-математических специальностей университетов, а также других специальностей с повышенной математической подготовкой.

УДК 51(07), 512.6, 514.1
ББК 22.1я73, 22.144, 22.151.5

Рекомендовано к изданию методической комиссией отделения прикладной математики физического факультета МГУ

Печатается по решению Учёного совета физического факультета МГУ

Рецензенты:

профессор НИУ «Высшая школа экономики»
д.ф.-м.н. *С. С. Акбаров*;

вед. науч. сотр. НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова
д.ф.-м.н. *С. И. Пискарев*

Редактор *Н. Е. Шапкина*

ISBN 978-5-8279-0170-9

Оглавление

Предисловие

ПРЕДЛАГАЕМОЕ вниманию читателей учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Курс аналитической геометрии знакомит студентов с методом координат и является источником наглядных представлений и примеров для других учебных курсов, в первую очередь анализа и механики. Основные цели преподавания аналитической геометрии — продемонстрировать студентам общие принципы приложения алгебры и анализа к геометрии, приучить начинающих к оперированию математическими объектами, которые не встречались в школьном курсе (речь идёт о векторах, матрицах, определителях).

В настоящее время имеется множество прекрасных учебников, сборников задач и различных руководств по аналитической геометрии, написанных для разных кругов читателей; разумеется, пособия, написанные для студентов-математиков и для студентов-экономистов, сильно различаются как по отбору учебного материала, так и по стилю и строгости изложения. Книга, предназначенная для студентов-физиков, с одной стороны, должна содержать довольно обширный материал, необходимый для изучения других дисциплин физико-математического профиля, а с другой — не быть перегруженной информацией, не слишком интересной и востребованной при изложении физических курсов. Кроме того, по мнению авторов, при обучении студентов-физиков математике целесообразно с самых первых шагов приучать их к инвариантному, бескоординатному изложению, в рамках которого формулируются основные физические законы. При подготовке настоящего пособия авторы предприняли попытку учесть изложенные выше требования и составить книгу, ориентированную в первую очередь именно на студентов физических специальностей.

Пособие содержит около двухсот задач с решениями по всем основным разделам курса аналитической геометрии. По мнению авторов, читателя, изучившего эти решения и способного самостоятельно их повторить, можно считать освоившим курс. Читателя, желающего изучить курс аналитической геометрии глубже, авторы отсылают к многочисленным имеющимся учебникам и задачникам, некоторые из которых перечислены в списке литературы в конце пособия.

Авторы выражают надежду, что пособие будет полезно также преподавателям, ведущим практические занятия, при подготовке к семинарам и планировании аудиторной и самостоятельной работы студентов.

Авторы

Список обозначений

$\mathbb{N}$ множество натуральных чисел: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$;
$\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел с нулём: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$;
$\mathbb{Z}$ множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ множество вещественных (действительных) чисел;
(AB) прямая, проходящая через точки A и B;
$[AB]$ отрезок с концами A и B;
$[AB)$ луч с началом в точке A, проходящий через точку B;
$\overrightarrow{AB}$ направленный отрезок (вектор) с началом в точке A и концом в точке B;
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$;
$\forall$ квантор общности ($\forall x$ читается «для всех x»);
$\exists$ квантор существования ($\exists x$ читается «существует такой x, что...»);

ГЛАВА 1

Матрицы и определители

Задача 1.1. Найдите линейную комбинацию матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

с коэффициентами $\alpha = 2$, $\beta = -3$.

Решение.

$$\alpha A + \beta B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 - 3 \cdot 6 & 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) & 2 \cdot 6 - 3 \cdot 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 13 & -9 \\ -4 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.2. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

найдите произведения AB и BA.

Решение.

$$\underset{2\times 2}{A} \cdot \underset{2\times 1}{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix};$$

произведение

$$\underset{2\times 1}{B} \cdot \underset{2\times 2}{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

не существует, поскольку количество столбцов первой из перемножаемых матриц не равно количеству строк второй.

Задача 1.3. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

найдите произведения AB и BA.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что при перестановке местами матриц-сомножителей произведения получаются разными; более того, они имеют разные размеры.

Задача 1.4. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

найдите произведения AB и BA.

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Здесь размеры матриц-произведений AB и BA равны, но сами произведения различны; таким образом, матрицы A и B не коммутируют.

Задача 1.5. Убедитесь в том, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

коммутируют.

Решение. Вычисляя произведения AB и BA, убеждаемся, что они совпадают:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$
$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.6. Докажите, что матрица $A = \lambda\mathbb{1}$, где λ — произвольное число, а $\mathbb{1}$ — единичная матрица, коммутирует со всеми матрицами того же порядка.

Решение. Для произвольной матрицы B того же порядка, что рассматриваемая матрица A, имеем:

$$AB = (\lambda\mathbb{1})B = \lambda(\mathbb{1}B) = \lambda B = \lambda(B\mathbb{1}) = B(\lambda\mathbb{1}) = BA,$$

что и требовалось.

Задача 1.7. Найдите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Напомним, что матрица, обратная к данной матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, существует при условии, что $ad - bc \neq 0$, и вычисляется по формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{1.7.1}$$

Для данной матрицы $ad-bc = 1\cdot 3-(-1)\cdot 2 = 5$, так что обратная матрица существует и

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В правильности вычисления можно убедиться непосредственной проверкой:

$$A^{-1}A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.8. Найдите неизвестные матрицы X и Y из уравнений (а) $XA = B$, (б) $AY = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Каждая из матриц X, Y имеет размер 2×2. Проверим, обратима ли матрица A:

$$ad-bc = 2\cdot 5-4\cdot 3 = -2 \neq 0,$$

т.е. матрица A^{-1} существует и равна

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(а) Умножая обе части уравнения $XA = B$ справа на A^{-1}, получим

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

(б) Умножая обе части уравнения $AY = B$ слева на A^{-1}, получим

$$Y = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: (а) $X = \begin{pmatrix} -16 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$, (б) $Y = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

Задача 1.9. Вычислите определители

$$\text{(а)} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix}.$$

Решение. (а) Имеем

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

(б) Для вычисления определителя вычтем из его второй строки удвоенную первую строку:

$$\begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 & 24695 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 24691 - 2\cdot 12345 & 24695 - 2\cdot 12347 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 12345 & 12347 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12345\cdot 1 - 12347\cdot 1 = -2.$$

Задача 1.10. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} -2x + 3y = 12, \\ 11x - 6y = -7. \end{cases}$$

Решение. 1. Вычислим определители, участвующие в формулах Крамера:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 11 & -6 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-6) - 3\cdot 11 = 12 - 33 = -21,$$

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} = 12\cdot(-6) - 3\cdot(-7) = -72 + 21 = -51,$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} -2 & 12 \\ 11 & -7 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-7) - 12\cdot 11 = 14 - 132 = -118.$$

По формулам Крамера получаем

$$x = \frac{\det A_x}{A} = \frac{17}{7}, \quad y = \frac{\det A_y}{A} = \frac{118}{21}.$$

2. Запишем систему в матричной форме $AX = B$, введя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу A^{-1} с помощью формулы (1.7.1) (см. с. 9):

$$A^{-1} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{21}\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{21} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}.$$

Умножая обе части уравнения $AX = B$ на A^{-1} слева и учитывая, что $A^{-1}A = \mathbb{1}$, получим

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{11}{21} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{7} \\ \frac{118}{21} \end{pmatrix}.$$

Задача 1.11. При любом значении p решите систему уравнений

$$\begin{cases} (p+2)x & - & 3y & = & p, \\ x & + & (p-2)y & = & -1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель основной матрицы системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} p+2 & -3 \\ 1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 1.$$

Если $p \neq \pm 1$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} p & -3 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3,$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{(p+1)(p-3)}{(p-1)(p+1)} = \frac{p-3}{p-1},$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} p+2 & p \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2p - 2,$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-2(p+1)}{(p-1)(p+1)} = -\frac{2}{p-1}.$$

Если $p = -1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} x - 3y = -1, \\ x - 3y = -1, \end{cases}$$

т.е. состоит из двух одинаковых уравнений. Взяв y произвольно, $y = c$, найдём с помощью этого уравнения $x = 3c - 1$.

Если $p = 1$, то система имеет вид

$$\begin{cases} 3x - 3y = 1, \\ x - y = -1; \end{cases}$$

полученные уравнения противоречивы, так что система не имеет решений.

Ответ: при $p \neq \pm 1$ решение единственно: $\left(\dfrac{p-3}{p-1}; -\dfrac{2}{p-1}\right)$; при $p = -1$ решений бесконечно много: $(3c - 1; c)$, где c — произвольное число; при $p = 1$ решений нет.

Задача 1.12. Пусть все элементы матрицы A второго порядка являются дифференцируемыми функциями одной переменной x, так что определитель $\det A$ этой матрицы также является функцией от x. Докажите, что $\det A$ — дифференцируемая функция, причём имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} = \frac{d}{dx}\Big(a(x)d(x) - b(x)c(x)\Big) =$$

$$= \underline{a'(x)d(x)} + \underline{\underline{a(x)d'(x)}} - \underline{b'(x)c(x)} - \underline{\underline{b(x)c'(x)}} =$$

$$= \Big(a'(x)d(x) - b'(x)c(x)\Big) + \Big(a(x)d'(x) - b(x)c'(x)\Big) =$$

$$= \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

Задача 1.13. Не раскрывая определителя, докажите, что он равен нулю:

$$\text{(а)} \begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}; \qquad \text{(б)} \begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. (а) Если из второго столбца вычесть сумму первого и третьего, то получим определитель с нулевым столбцом.

(б) Если к первому столбцу определителя прибавить второй, то получится столбец, все элементы которого равны $a+b+c$; он пропорционален третьему столбцу, так что определитель равен нулю.

Задача 1.14. Вычислите определители

$$\text{(а)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(б)} \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. (а) Преобразуем определитель так, чтобы в его первом столбце образовались два нулевых элемента; после этого разложим определитель по первому столбцу. Итак, ко второй строке прибавим первую, умноженную на -2:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} {}^{-2} \\ {}_{+} \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

(поскольку во второй строке образовались два нулевых элемента, немного изменим наши первоначальные намерения и раскроем определитель по второй строке)

$$= -(-7) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 91$$

(обратите внимание на минус перед (-7), появившийся в силу соотношения между минорами и алгебраическими дополнениями).

(б) Для вычисления второго определителя попытаемся получить нули в третьем столбце; для этого к первой строке прибавим утроенную вторую строку:

$$\begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & \boxed{-1} \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} {}^{+} \\ {}_{3} \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

и ко второй строке прибавим третью строку, после чего разложим определитель по третьему столбцу:

$$= \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & \boxed{\mathbf{1}} \end{vmatrix} \;{}^{+}\; = \begin{vmatrix} 35 & 14 & 0 \\ 16 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & \boxed{\mathbf{1}} \end{vmatrix} =$$

$$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 16 & 9 \end{vmatrix} = 7 \cdot (45 - 32) = 91;$$

здесь мы вынесли за знак определителя общий множитель элементов первой строки, равный 7.

Задача 1.15. Для матрицы из примера 1.14(а) найдите обратную.

Решение. Поскольку определитель равен 91 (см. пример 1.14(а)), обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$\mathcal{A}_1^1 = +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad \mathcal{A}_2^1 = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathcal{A}_3^1 = +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 26,$$

$$\mathcal{A}_1^2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad \mathcal{A}_2^2 = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad \mathcal{A}_3^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -13,$$

$$\mathcal{A}_1^3 = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad \mathcal{A}_2^3 = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad \mathcal{A}_3^3 = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим матрицу из найденных алгебраических дополнений; после транспонирования из неё получается присоединённая матрица:

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 26 \\ 13 & 13 & -13 \\ -14 & 7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{рование}]{\text{транспони-}} A^{\vee} = \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^{\vee} = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.16. Вычислите определитель порядка 4:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя свойства определителя, преобразуем его так, чтобы в какой-либо строке или столбце появилось много нулевых элементов. Например, легко получить нулевые элементы во втором столбце, прибавив вторую строку, умноженную на подходящие коэффициенты, ко всем остальным строкам:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & \boxed{1} & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} +\\ \cdot 3 \quad \cdot(-2) \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & -11 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 11 & -5 \\ 6 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

После этого можно раскрыть определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} 11 & 0 & -11 & 10 \\ 3 & \boxed{1} & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 11 & -5 \\ 6 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & -11 & 10 \\ -2 & 11 & -5 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя последнюю строку полученного определителя третьего порядка, умноженную на подходящий коэффициент, получаем нули во втором столбце:

$$\begin{vmatrix} 11 & -11 & 10 \\ -2 & 11 & -5 \\ 6 & \boxed{-1} & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \quad + \\ \cdot(-11) \quad \cdot 11 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -55 & 0 & -34 \\ 64 & 0 & 39 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель раскрываем по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix} -55 & 0 & -34 \\ 64 & 0 & 39 \\ 6 & \boxed{-1} & 4 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -55 & -34 \\ 64 & 39 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ \end{matrix} =$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} + & -2 \end{array} \\
= \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 64 & 39 \end{vmatrix}
\end{array}
= \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -14 & 39 \end{vmatrix} = 31.
$$

Задача 1.17. Решите систему уравнений с помощью формул Крамера и с помощью обратной матрицы:

$$
\begin{cases}
x + 2y + 3z = 14, \\
2x + 4y - z = 7, \\
-4x + 5y + z = 9.
\end{cases}
$$

Решение. 1. Вычислим определители, участвующие в формулах Крамера. Определитель основной матрицы системы был найден в примере 1.14:

$$
\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 91.
$$

Для нахождения значения неизвестной x нужен определитель матрицы, полученной из основной матрицы системы заменой её первого столбца на столбец правых частей уравнений; этот определитель также был вычислен в примере 1.14:

$$
\det A_x = \begin{vmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -1 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 91.
$$

При вычислении определителей

$$
\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix}, \quad \det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}
$$

попытаемся получить нули в первом столбце на месте выделенных элементов аналогично тому, как это было сделано выше при вычислении $\det A$; после этого каждый из полученных определителей разложим по элементам первого столбца:

$$
\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix}
\begin{array}{l} 2 \quad -1 \\ + \\ \quad\;\; + \end{array}
= \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & -21 & -7 \\ 0 & 65 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -21 & -7 \\ 65 & 13 \end{vmatrix} = 182,
$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 2 & 4 & 7 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 13 & 65 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -21 \\ 13 & 65 \end{vmatrix} = 273.$$

Теперь находим решение системы:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{91}{91} = 1, \quad y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{182}{91} = 2, \quad z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{273}{91} = 3.$$

2. Запишем систему в матричной форме $AX = B$, введя матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица была вычислена выше в примере 1.15:

$$A^{-1} = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

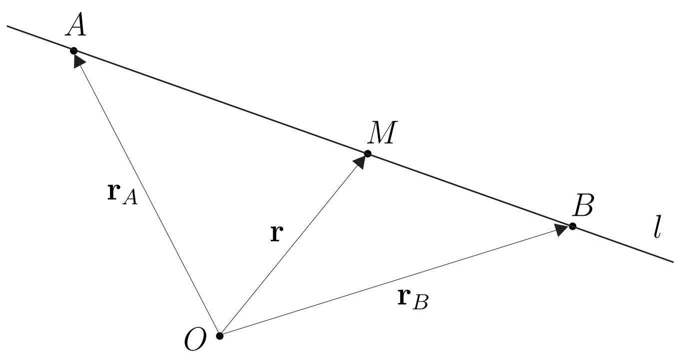
Теперь можно найти решение системы:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{91} \begin{pmatrix} 9 & 13 & -14 \\ 2 & 13 & 7 \\ 26 & -13 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ГЛАВА 2

Векторы. Линейные операции. Базис и координаты

Задача 2.1. *Задача о делении отрезка в заданном отношении.* Пусть A и B — различные точки, заданные радиус-векторами $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ относительно начала координат O, $\lambda \in \mathbb{R}$. Найдите радиус-вектор такой точки $M \in (AB)$, что $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

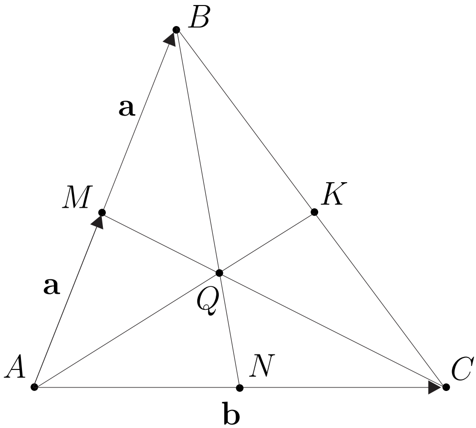


Решение. Пусть

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_A = \lambda(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_M) \Leftrightarrow \boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_A + \lambda\boldsymbol{r}_B}{1+\lambda}.$$

Если $M \in [A, B]$, то $\lambda > 0$; если $M \notin [A, B]$ и лежит за точкой A, то $\lambda \in (-1, 0)$; если $M \notin [A, B]$ лежит за точкой B, то $\lambda < -1$. Случай $\lambda \neq -1$ невозможен, поскольку тогда $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$, но такой точки M не существует.

Задача 2.2. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке Q, которая делит каждую из медиан в отношении $2:1$, считая от вершины. Кроме того, доказать, что $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QB}=\mathbf{0}$.



Решение. Пусть

$$\lambda := \frac{|CQ|}{|QM|}, \quad \mu := \frac{|AQ|}{|QK|}, \quad \boldsymbol{a} := \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}, \quad \boldsymbol{b} := \overrightarrow{AC}.$$

Применим формулу деления отрезка CM в отношении λ, считая от вершины C:

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}}{\lambda+1}. \tag{2.2.1}$$

Поэтому

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{AQ} + \frac{1}{\mu}\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu+1}{\mu}\overrightarrow{AQ} = \frac{\mu+1}{\mu}\frac{\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}}{\lambda+1}. \tag{2.2.2}$$

Точка K по определению медианы AK делит отрезок BC в отношении $1:1$, поэтому согласно результату задачи 2.1 имеем

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}. \tag{2.2.3}$$

Итак, из формул (2.2.2) и (2.2.3) имеем

$$\frac{\mu+1}{\mu}\frac{\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{a}}{\lambda+1} = \frac{2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mu+1}{\mu}\frac{\lambda}{\lambda+1} = 1, \ \frac{1}{\lambda+1}\frac{\mu+1}{\mu} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = \mu = 2.$$

Итак, точка Q лежит на пересечении медиан AK и CM и делит обе медианы в отношении $2:1$, считая от вершин A и C соответственно. Аналогично рассматривая медианы CM и BN получим, что точка

Q' их пересечения делит обе медианы в отношении $2:1$, считая от вершин C и B соответственно. Следовательно, $Q = Q'$.

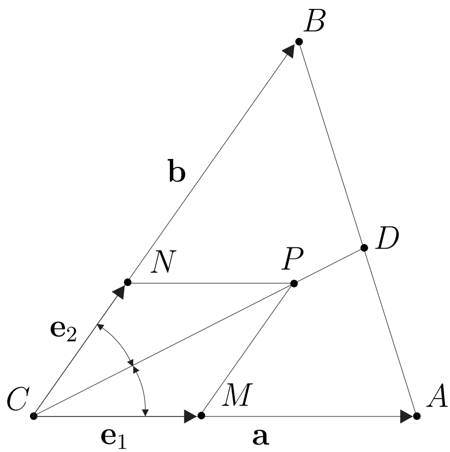
Для доказательства равенства $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}$ заметим, что

$$\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NA}, \quad \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NC}, \quad \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = 2\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{BQ} \Rightarrow \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QB} = \mathbf{0}.$$

Задача 2.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD внутреннего угла $\angle C$. Выразите вектор $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}$ и их длины.



Решение. Пусть

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \overrightarrow{CM}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \overrightarrow{CN}.$$

Рассмотрим параллелограмм $CNPM$, построенный на векторах $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CN}$. Так как по определению

$$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\overrightarrow{CN}\right| = 1,$$

то $CNMP$ — ромб. Следовательно, $\overrightarrow{CP} \upuparrows \overrightarrow{CD}$. С одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{CP} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{CP} = x\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right). \tag{2.3.1}$$

С другой стороны, точка D делит отрезок AB в некотором отношении

$$\lambda = \frac{|AD|}{|DB|} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{CD} = \frac{\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}}{1+\lambda}. \tag{2.3.2}$$

Итак, из равенств (2.3.1) и (2.3.2) имеем

$$x\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\right) = \frac{\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}}{1+\lambda}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \frac{x}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}, \quad x = \frac{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}.$$

Следовательно,

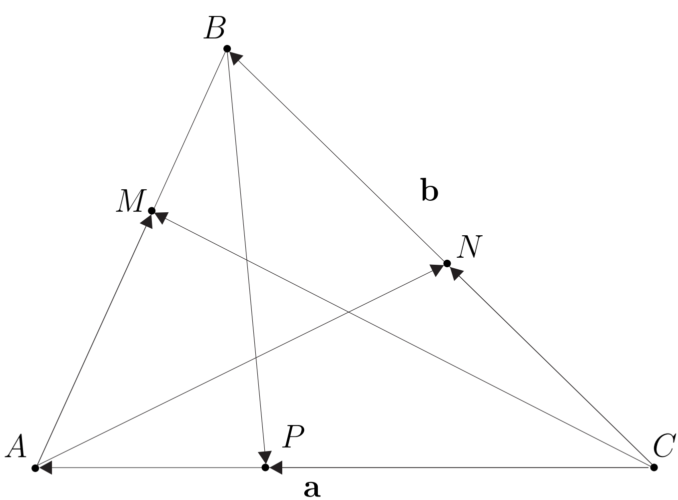
$$\overrightarrow{CD} = \frac{|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} + |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|}.$$

Задача 2.4. Дан треугольник ABC. На прямых (AB), (BC) и (CA) выбраны соответственно точки M, N и P так, что

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Найти необходимое и достаточное условие, при котором векторы $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BP}$ образуют треугольник, т.е.

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}.$$



Решение. Пусть $\boldsymbol{a} := \overrightarrow{CA}$ и $\boldsymbol{b} := \overrightarrow{CB}$. С одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}, \quad \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} = \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a});$$

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{NB} = \boldsymbol{b} - \beta\boldsymbol{b} = (1-\beta)\boldsymbol{b};$$

$$\overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA} = \gamma\boldsymbol{a}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{CM} = \boldsymbol{a} + \alpha(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}); \quad \overrightarrow{AN} = -\boldsymbol{a} + (1-\beta)\boldsymbol{b}; \quad \overrightarrow{BP} = -\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{a}.$$

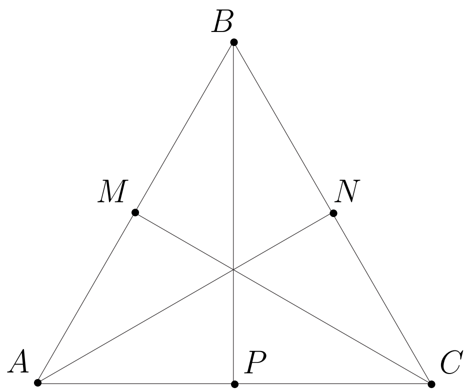
Следовательно,

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = (\gamma - \alpha)\boldsymbol{a} + (\alpha - \beta)\boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

Задача 2.5. В треугольнике ABC точки M, N и P — это основания биссектрис соответственно $[CM]$, $[AN]$ и $[BP]$ внутренних углов треугольника. Известно, что

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \mathbf{0}.$$

Докажите, что $\triangle ABC$ — правильный.



Решение. Пусть

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \beta\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \gamma\overrightarrow{CA}.$$

Имеем

$$\frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \lambda = \frac{|AC|}{|BC|}. \tag{2.5.1}$$

Найдём связь $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$:

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| = \alpha\left|\overrightarrow{AB}\right| = \alpha\left|\overrightarrow{AM}\right| + \alpha\left|\overrightarrow{MB}\right| \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

Отсюда и из (2.5.1) имеем

$$\alpha = \frac{|AC|}{|AC| + |BC|}.$$

Аналогичным образом получаем равенства

$$\beta = \frac{|AB|}{|AB| + |AC|}, \quad \gamma = \frac{|BC|}{|BC| + |AB|}.$$

В силу результата задачи 2.4 имеем $\alpha = \beta = \gamma$. Отсюда

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\gamma} - 1.$$

С одной стороны, отсюда получаем

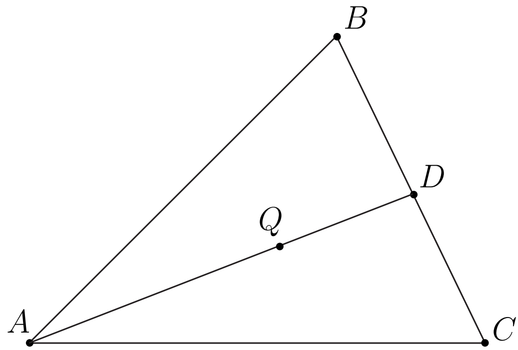
$$|AC|^2 = |AB||BC|, \quad |AB|^2 = |AC||BC| \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad |AB| = |AC|.$$

С другой стороны,

$$|BC|^2 = |AC||AB|, \quad |AB|^2 = |AC||BC| \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|}{|BC|} \quad \Rightarrow \quad |BC| = |AB|.$$

Итак, $|AB| = |AC| = |BC|$.

Задача 2.6. В плоскости треугольника $\triangle ABC$ найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна нулевому вектору.



Решение. Искомая точка Q обладает по условию задачи следующим свойством:

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \mathbf{0}. \tag{2.6.1}$$

Выберем произвольным образом начало координат O в плоскости треугольника $\triangle ABC$. Обозначим радиус-векторы точек A, B, C, Q относительно этого начала координат через $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$, $\boldsymbol{r}_C$, $\boldsymbol{r}_Q$. Тогда в силу (2.6.1) справедливо равенство

$$\boldsymbol{r}_Q = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C\right). \tag{2.6.2}$$

Отсюда следует, что если такая точка существует, то она *единственна*. Проведём через вершину A и искомую точку Q прямую. Пусть точка $D(\boldsymbol{r}_D)$ — это точка пересечения этой прямой и прямой, на которой лежит сторона BC треугольника. Положим

$$\lambda = \frac{BD}{DC}, \quad \mu = \frac{DQ}{QA}.$$

Тогда согласно известной формуле деления отрезка в заданном отношении имеют место следующие формулы:

$$\boldsymbol{r}_D = \frac{\boldsymbol{r}_B + \lambda\boldsymbol{r}_C}{1+\lambda}, \quad \boldsymbol{r}_Q = \frac{\boldsymbol{r}_D + \mu\boldsymbol{r}_A}{1+\mu}. \tag{2.6.3}$$

Из формул (2.6.2) и (2.6.3) вытекает равенство

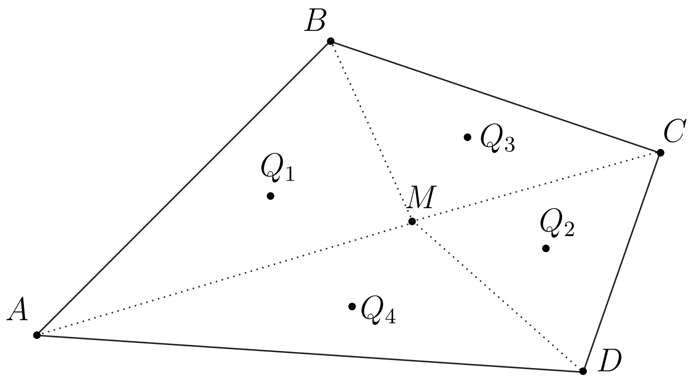
$$\frac{1}{1+\mu}\frac{\boldsymbol{r}_B + \lambda\boldsymbol{r}_C}{1+\lambda} + \frac{\mu}{1+\mu}\boldsymbol{r}_A = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C\right). \tag{2.6.4}$$

Без ограничения общности положим $O = C$. Тогда $\boldsymbol{r}_C = \mathbf{0}$, и, поскольку $\triangle ABC$ — треугольник, радиус-векторы $\boldsymbol{r}_A$ и $\boldsymbol{r}_B$ не коллинеарны. Поэтому из (2.6.4) вытекает равенство

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu}{1+\mu}\right)\boldsymbol{r}_A + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(1+\mu)(1+\lambda)}\right)\boldsymbol{r}_B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{(1+\mu)(1+\lambda)} = \frac{1}{3}. \qquad (2.6.5)$$

Отсюда получаем, что $\lambda = 1$, $\mu = 1/2$. Итак, искомая точка Q — это точка пересечения медиан треугольника.

Задача 2.7. Дан плоский четырёхугольник $ABCD$. Найти такую точку M, что выполнено равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}$.



Решение. Пусть M — это искомая точка, Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 — точки пересечения медиан треугольников $\triangle AMB$, $\triangle CMD$, $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$. Согласно условию задачи имеем

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}. \qquad (2.7.1)$$

Отсюда следует, что если такая точка существует, то она *единственна*. Согласно задаче 2.6 имеем

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{Q_1A} + \overrightarrow{Q_1B} + \overrightarrow{Q_1M} = \mathbf{0}, \\
\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{Q_1A} = 2\overrightarrow{Q_1A} + \overrightarrow{Q_1B}, \\
\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{Q_1B} = 2\overrightarrow{Q_1B} + \overrightarrow{Q_1A}, \\
\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{Q_1B} + 3\overrightarrow{Q_1A} = 3MQ_1.
\end{gathered} \qquad (2.7.2)$$

Аналогично из рассмотрения треугольника $\triangle CMD$ получим равенство

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{Q_2C} + 3\overrightarrow{Q_2D} = 3MQ_2. \qquad (2.7.3)$$

Из (2.7.1)–(2.7.3) имеем

$$\overrightarrow{MQ_1} = \overrightarrow{Q_2M},$$

т.е. точка M лежит на отрезке прямой, соединяющей середины отрезков AB и CD.

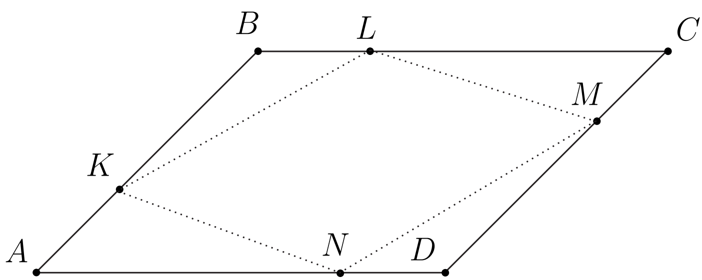
Аналогично из рассмотрения треугольников $\triangle BMC$ и $\triangle AMD$ получим равенство

$$\overrightarrow{MQ_3} = \overrightarrow{Q_4M},$$

т.е. точка M лежит на отрезке прямой, соединяющей середины отрезков BC и AD.

Таким образом, искомая точка M лежит на пересечении прямых, соединяющих середины противоположных сторон плоского четырёхугольника.

Задача 2.8. Доказать, что если точки K, L, M, N делят в одном и том де отношении λ стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$, то четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм.



Решение. Согласно условию задачи имеем

$$\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA} = \lambda.$$

Нужно доказать, что $\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML}$. С этой целью введём обозначения

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD};$$

тогда

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AL} = \frac{\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda} = \frac{\boldsymbol{a} + \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{1+\lambda},$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD}}{1+\lambda} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda}.$$

Таким образом, имеем

$$\overrightarrow{NK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\boldsymbol{a} - \frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+\lambda}(\lambda\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}).$$

Итак, доказано, что $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{NK}$.

Задача 2.9. Доказать, что если точки K, L, M, N делят в одном и том же отношении $\lambda \neq 1$ стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ и четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, то четырёхугольник $ABCD$ — тоже параллелограмм.

Решение. Введём векторы

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AD}, \quad \boldsymbol{d} = \overrightarrow{BC}.$$

Согласно условию задачи справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BL} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{BC},$$
$$\overrightarrow{CM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DN} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\overrightarrow{DA}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \boldsymbol{a} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\boldsymbol{d},$$
$$\overrightarrow{KL} = \frac{\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{d}}{\lambda+1}. \tag{2.9.1}$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{AD}}{1+\lambda} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda},$$
$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{\lambda+1}\boldsymbol{b}.$$

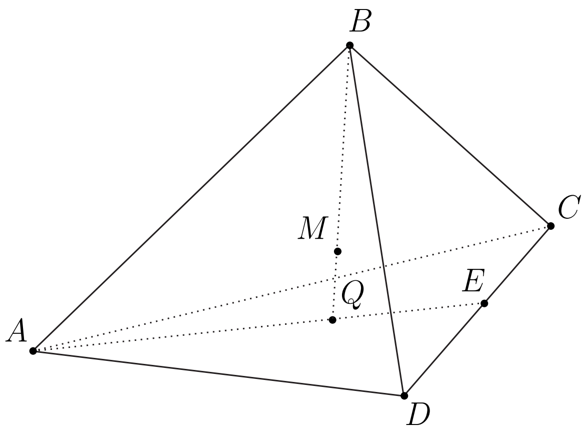
Поэтому

$$\overrightarrow{NM} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \lambda\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}}{\lambda+1}. \tag{2.9.2}$$

Из (2.9.1) и (2.9.2) и условия $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ вытекает равенство

$$(\lambda - 1)\boldsymbol{d} = (\lambda - 1)\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}.$$

Задача 2.10. Дан пространственный четырехугольник (тетраэдр) $ABCD$. Найти такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}$.



Решение. *Первая часть решения.* Пусть O — некоторая произвольная точка пространства. Согласно формулировке задачи справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \mathbf{0}. \tag{2.10.1}$$

Проведём через вершину B и искомую точку M прямую до пересечения (точка Q) с плоскостью, в которой лежит треугольник ACD. Затем проведём прямую через вершину A и точку Q. Пусть точка E — точка пересечения с прямой, содержащей отрезок CD. Предположим, что относительно полюса O заданы радиус-векторы всех введённых точек: $A(\boldsymbol{r}_A)$, $B(\boldsymbol{r}_B)$, $C(\boldsymbol{r}_C)$, $D(\boldsymbol{r}_D)$, $M(\boldsymbol{r}_M)$, $Q(\boldsymbol{r}_Q)$, $E(\boldsymbol{r}_E)$. Тогда из (2.10.1) вытекает следующее равенство:

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C + \boldsymbol{r}_D\right). \tag{2.10.2}$$

Отсюда следует, что если такая точка существует, то она *единственна.* Введём следующие числа:

$$\lambda = \frac{BM}{MQ}, \quad \mu = \frac{AQ}{QE}, \quad \nu = \frac{CE}{ED}. \tag{2.10.3}$$

Тогда по построению точек M, Q, E имеем

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_B + \lambda \boldsymbol{r}_Q}{1+\lambda}, \quad \boldsymbol{r}_Q = \frac{\boldsymbol{r}_A + \mu \boldsymbol{r}_E}{1+\mu}, \quad \boldsymbol{r}_E = \frac{\boldsymbol{r}_C + \nu \boldsymbol{r}_D}{1+\nu}. \qquad (2.10.4)$$

Из (2.10.4) вытекает следующее равенство:

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{1+\lambda}\boldsymbol{r}_B + \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)}\boldsymbol{r}_A + \\ + \frac{\mu\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)(1+\nu)}\boldsymbol{r}_C + \frac{\mu\lambda\nu}{(1+\mu)(1+\lambda)(1+\nu)}\boldsymbol{r}_D. \qquad (2.10.5)$$

Положим теперь $O = D$; тогда $\boldsymbol{r}_D = \mathbf{0}$, и из (2.10.2) и (2.10.5) и некомпланарности векторов $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$ и $\boldsymbol{r}_C$ вытекают равенства

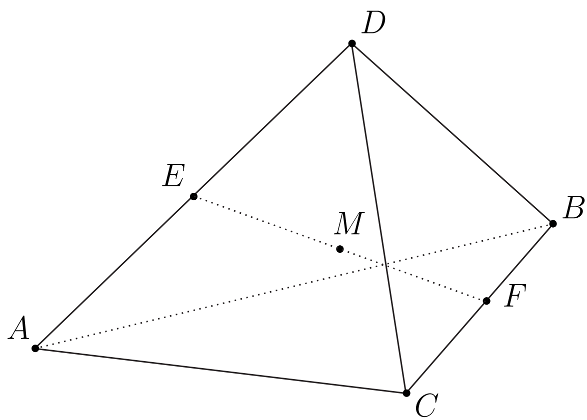
$$\frac{1}{1+\lambda} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\lambda}{(1+\lambda)(1+\mu)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\mu\lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)(1+\nu)} = \frac{1}{4},$$

откуда имеем

$$\lambda = 3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1.$$

Следовательно, точка M — это точка пересечения отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противолежащих сторон тетраэдра.

Вторая часть решения.



Пусть опять M — искомая точка (единственная), для которой, как мы уже вывели, справедливо равенство (2.10.2). Пусть точки $E(\boldsymbol{r}_E) \in (AD)$ и $F(\boldsymbol{r}_F) \in (BC)$ таковы, что

$$\lambda = \frac{AE}{ED}, \quad \mu = \frac{BF}{FC}, \qquad (2.10.6)$$

и при этом прямая, соединяющая точки E и F, проходит через искомую точку $M(\boldsymbol{r}_M)$; тогда

$$\nu = \frac{EM}{MF}. \tag{2.10.7}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{r}_E = \frac{\boldsymbol{r}_A + \lambda \boldsymbol{r}_D}{1+\lambda}, \quad \boldsymbol{r}_F = \frac{\boldsymbol{r}_B + \mu \boldsymbol{r}_C}{1+\mu}, \quad \boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_E + \nu \boldsymbol{r}_F}{1+\nu}. \tag{2.10.8}$$

Подставляя в последнее равенство первые два, получим

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{1}{(1+\nu)(1+\lambda)}\boldsymbol{r}_A + \frac{\lambda}{(1+\nu)(1+\lambda)}\boldsymbol{r}_D + \\ + \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}\boldsymbol{r}_B + \frac{\mu\nu}{(1+\nu)(1+\mu)}\boldsymbol{r}_C. \tag{2.10.9}$$

Поместим начало координат O в точку C, тогда $\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{0}$. Заметим, что при этом векторы $\boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{r}_B$ и $\boldsymbol{r}_D$ не компланарны. Из (2.10.2) и (2.10.9) вытекают три равенства

$$\frac{1}{(1+\nu)(1+\lambda)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\lambda}{(1+\nu)(1+\lambda)} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\nu}{(1+\nu)(1+\mu)} = \frac{1}{4},$$

из которых легко получаем решение $\lambda = \mu = \nu = 1$.

Таким образом, в силу единственности точки M, в этой точке пересекаются три отрезка, соединяющие противоположные рёбра тетраэдра, и делятся этой точкой пополам.

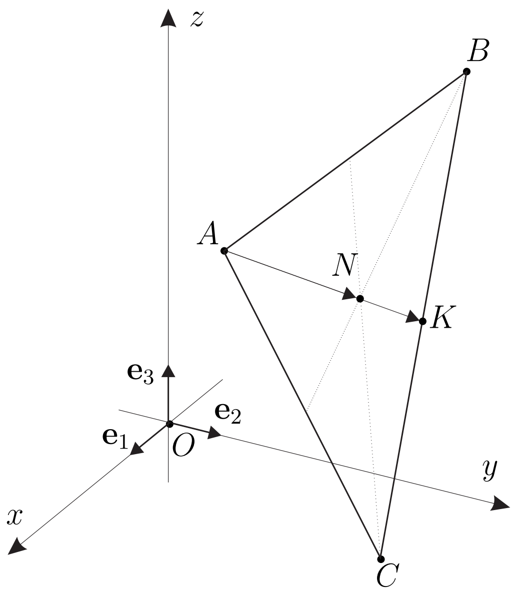
Задача 2.11. В некоторой системе координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ заданы координаты трех вершин треугольника ABC: $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ и $C(x_C, y_C, z_C)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.

Решение. Обозначим точку пересечения медиан треугольника через $N(x_N, y_N, z_N)$. Имеем

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.$$



С другой стороны,

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC};$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$$

Итак, имеем в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ равенство

$$x_N\boldsymbol{e}_1 + y_N\boldsymbol{e}_2 + z_N\boldsymbol{e}_3 = \\ = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\boldsymbol{e}_2 + \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\boldsymbol{e}_3.$$

Следовательно,

$$x_N = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_N = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_N = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

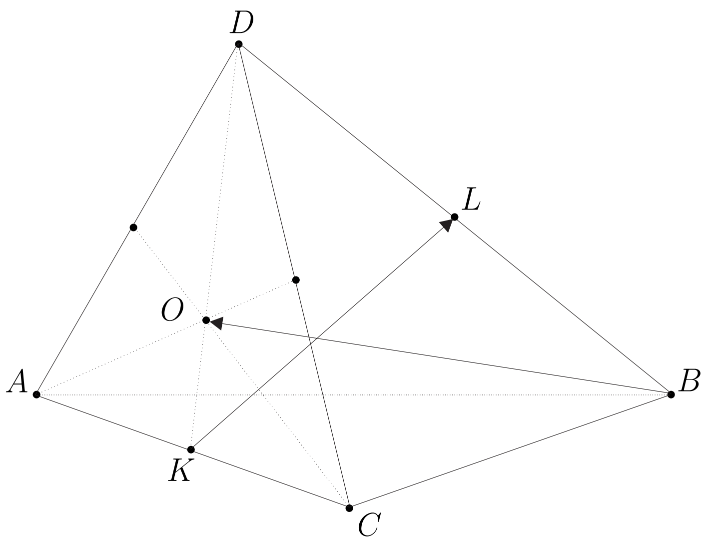
Задача 2.12. В тетраэдре $ABCD$ точки K и L — это соответственно середины ребёр $[AC]$ и $[BD]$, O — точка пересечения медиан грани ACD. Разложите

(a) вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$;

(b) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$;

(c) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$;

(d) вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$.



Решение. (a) Разложим вектор $\overrightarrow{BO}$ по базису $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\}$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BD};$$

$$3\overrightarrow{BO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.$$

В силу результата задачи 2.2 имеем $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \mathbf{0}$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{BO} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}.$$

(b) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

Первый способ. Заметим, что $\overrightarrow{AL}$ — медиана треугольника $\triangle ADB$. Согласно результату задачи 2.1 имеем

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right),$$

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Второй способ. Заметим, что

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right).$$

Действительно, имеем

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}, \quad \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL},$$
$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \mathbf{0}, \quad \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{BL} = \mathbf{0}.$$

Поэтому

$$2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Кроме того,

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right).$$

Итак,

$$\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}.$$

(c) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{AC}\}$. $\overrightarrow{KL}$ — это вектор медианы треугольника $\triangle KDB$. В силу задачи 2.2 имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{KB}\right), \quad \overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{KD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OD},$$

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OB}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} + 0 \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}, 1, 0\right\}.$$

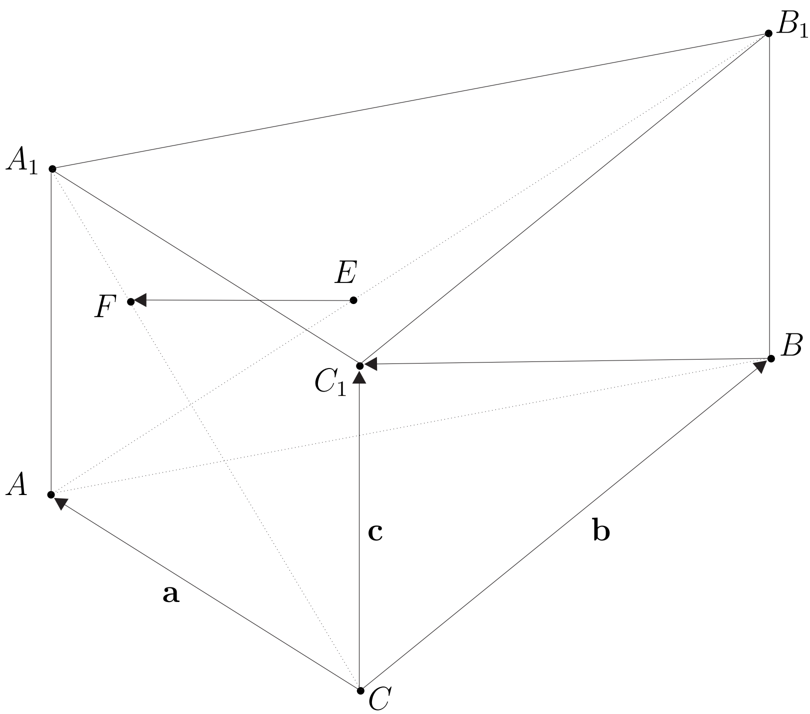
(d) Разложим вектор $\overrightarrow{KL}$ по базису $\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}\}$. Имеем

$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 0 \cdot \overrightarrow{BO}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{KL} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right\}.$$

Задача 2.13. На диагоналях $[AB_1]$ и $[CA_1]$ боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что прямые (EF) и (BC_1) параллельны. Найти отношение $|EF| : |BC_1|$.



Решение. Введём базис

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{CC_1}$$

и все интересующие нас векторы будем разлагать по этому базису. Имеем

$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

$$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA_1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \quad \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}.$$

Поскольку по условию $\overrightarrow{AE} \| \overrightarrow{AB_1}$, то найдётся такое число μ, что

$$\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AB_1} = \mu \left(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\right).$$

Поскольку по условию $\overrightarrow{CF} \| \overrightarrow{CA_1}$, то найдётся такое число ν, что

$$\overrightarrow{CF} = \nu \overrightarrow{CA_1} = \nu \left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\right).$$

Кроме того, поскольку $\overrightarrow{EF} \| \overrightarrow{BC_1}$, то найдётся такое число λ, что

$$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{BC_1} = \lambda(-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Рассмотрим замкнутую ломаную $CAEFC$. Имеем

$$\mathbf{0} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \\ = \boldsymbol{a} + \mu\,(-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \lambda(-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) - \nu\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$$

или, эквивалентно,

$$(1 - \mu - \nu)\boldsymbol{a} + (\mu - \lambda)\boldsymbol{b} + (\mu + \lambda - \nu)\boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

В силу линейной зависимости векторов $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ получаем равенства

$$1 - \mu - \nu = 0, \quad \mu - \lambda = 0, \quad \mu + \lambda - \nu = 0.$$

Эта система уравнений имеет единственное решение: $\lambda = \mu = 1/3$, $\nu = 2/3$. Итак,

$$\frac{|EF|}{|BC_1|} = \lambda = \frac{1}{3}.$$

Задача 2.14. Точки M, N, Q лежат соответственно на рёбрах $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$ тетраэдра $ABCD$. Плоскость (MNQ) пересекает прямую (AD) в точке P. Известно, что

$$|DN| = |CN|, \quad |AM| = |BM|, \quad \frac{|CQ|}{|CB|} = n.$$

Найдите отношение $|DP|/|DA|$.

Решение. Введём базис, состоящий из векторов

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \boldsymbol{d} = \overrightarrow{CD}.$$

Для замкнутой ломаной $NPACN$ имеем

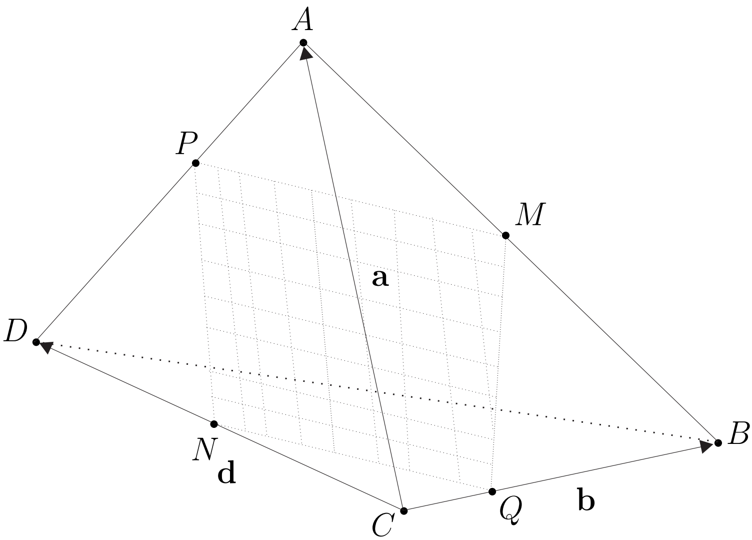
$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \mathbf{0}. \tag{2.14.1}$$

Имеем

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}, \tag{2.14.2}$$

$$\overrightarrow{PA} = (1 - \lambda)\overrightarrow{DA} = (1 - \lambda)(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CD}) = (1 - \lambda)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{d}), \tag{2.14.3}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{a}. \tag{2.14.4}$$



Отметим, что вектор $\overrightarrow{NP}$ лежит в плоскости $(QNPM)$, поэтому он однозначно разлагается по базису в этой плоскости, т.е. по двум неколлинеарным векторам в этой плоскости, например, по векторам $\overrightarrow{QN}$ и $\overrightarrow{QM}$:

$$\overrightarrow{NP} = \mu\overrightarrow{QN} + \nu\overrightarrow{QM}, \tag{2.14.5}$$

где

$$\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\boldsymbol{d} - n\boldsymbol{b}, \tag{2.14.6}$$

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - n\boldsymbol{b}. \tag{2.14.7}$$

После подстановки равенств (2.14.2)–(2.14.7) в (2.14.1) и приведения подобных слагаемых получим

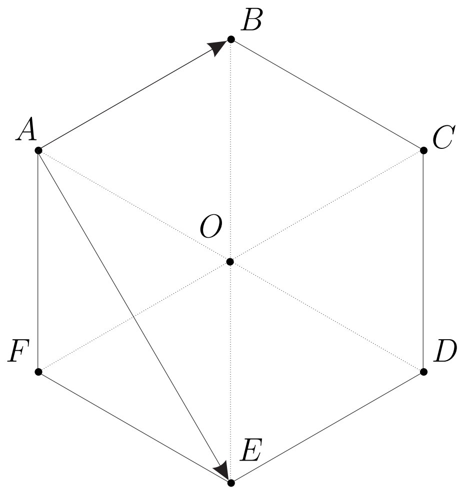
$$\left(\frac{\nu}{2} + 1 - \lambda - 1\right)\boldsymbol{a} + \left(-\mu n - \nu n + \frac{\nu}{2}\right)\boldsymbol{b} + \\ + \left(\frac{\mu}{2} - 1 + \lambda + \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}. \tag{2.14.8}$$

Поскольку $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}\}$ — базис, имеем

$$\frac{\nu}{2} + 1 - \lambda - 1 = 0, \quad -n\mu - n\nu + \frac{\nu}{2} = 0, \frac{\mu}{2} - 1 + \lambda + \frac{1}{2} = 0.$$

Сложив первое и третье равенства, получим $\mu+\nu=1$, а из второго равенства находим $\nu = 2n$. Следовательно, $\lambda = n$.

Задача 2.15. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты его вершин в системе координат $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\}$, причём единицей масштаба на обеих осях системы координат является длина вектора $\overrightarrow{AB}$.



Решение. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AE}$ и O — центр шестиугольника. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = -\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2},$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}.$$

Отсюда вытекают следующие равенства:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} = \frac{3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},$$

$$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{AE} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} = \frac{\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}}{2}.$$

Кроме того, имеем

$$|\boldsymbol{a}| = |\overrightarrow{AB}| = a, \quad |\boldsymbol{b}| = |\overrightarrow{AE}| = 2a\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}a,$$

где a — длина стороны шестиугольника. По условию задачи $|\boldsymbol{a}| = 1$. Поэтому имеем

$$\boldsymbol{e}_a := \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{e}_b := \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{b}.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_a, \quad \boldsymbol{b} = \sqrt{3}\boldsymbol{e}_b.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{AA} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_a + 0 \cdot \boldsymbol{e}_b = \{0, 0\}, \quad \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a} = 1 \cdot \boldsymbol{e}_a + 0 \cdot \boldsymbol{e}_b = \{1, 0\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_a + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_b = \left\{\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 1 \cdot \boldsymbol{e}_a + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_b = \{1, \sqrt{3}\},$$

$$\overrightarrow{AE} = \boldsymbol{b} = 0 \cdot \boldsymbol{e}_a + \sqrt{3}\boldsymbol{e}_b = \{0, \sqrt{3}\},$$

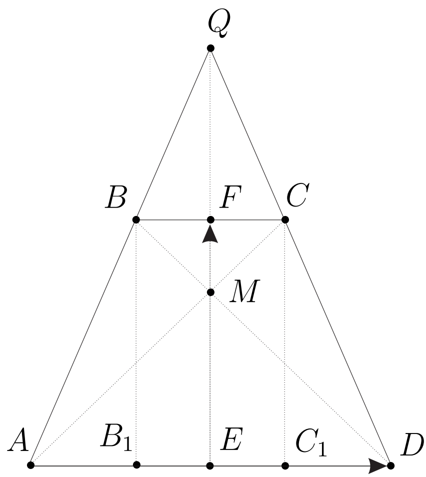
$$\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_a + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_b = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Таким образом, имеем

$$A(0, 0), \quad B(1, 0), \quad C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$D(1, \sqrt{3}), \quad E(0, \sqrt{3}), \quad F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Задача 2.16. Основание AD равнобочной трапеции $ABCD$ равно 8;, высота равна 3, а углы, прилежащие к этому основанию, равны $\pi/4$. Принимая за ось абсцисс основание $\overrightarrow{AD}$, а за ось ординат — ось симметрии трапеции, направленную от большего основания к меньшему, найти в этой прямоугольной системе координат координаты вершин трапеции, точки M пересечения диагоналей трапеции и точки S пересечения её боковых сторон.



Решение. Задана прямоугольная декартова система координат $\{E, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EF}\}$. Сначала найдём координаты вершин трапеции. Пусть

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{EF} = \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}.$$

Заметим, что $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1C} = \boldsymbol{b}$. По условию задачи имеем

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{|\overrightarrow{BB_1}|}{|\overrightarrow{AB_1}|}.$$

Поэтому

$$|AB_1| = |BB_1| = 3, \quad |B_1C_1| = |AD| - 2|AB_1| = 2,$$

$$|EB_1| = |EC_1| = 1, \quad \overrightarrow{EB}_1 = -\frac{1}{8}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{EC_1} = \frac{1}{8}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB}_1 + \overrightarrow{B_1B} = -\frac{1}{8}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EC_1} + \overrightarrow{C_1C} = \frac{1}{8}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}.$$

Заметим, что $|\boldsymbol{a}| = 8$, $|\boldsymbol{b}| = 3$. Введём единичные векторы в направлении оси абсцисс и ординат:

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{8}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{e}_b = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{1}{3}\boldsymbol{b}.$$

Тогда $\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{e}_a$, $\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{e}_b$. Поэтому

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} = 4 \cdot \boldsymbol{e}_a + 0 \cdot \boldsymbol{e}_b = \{4, 0\},$$
$$\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a} = -4 \cdot \boldsymbol{a}_a + 0 \cdot \boldsymbol{e}_b = \{-4, 0\},$$
$$\overrightarrow{EB} = -\frac{1}{8}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_a + 3\boldsymbol{e}_b = \{-1, 3\},$$
$$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{8}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_a + 3\boldsymbol{e}_b = \{1, 3\}.$$

Итак,

$$A(-4, 0), \quad D(4, 0), \quad B(-1, 3), \quad C(1, 3).$$

Теперь найдём координаты точки Q. С этой целью заметим, что

$$\frac{|QE|}{|AD|} = \frac{|QF|}{|BC|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|QE|}{|QF|} = \frac{8}{2} = 4,$$
$$|QE| = |QF| + 3 \Rightarrow |QF| = 1, \quad |QE| = 3 + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad Q(0, 4).$$

Теперь найдём координаты точки M. Пусть

$$\lambda = \frac{|AM|}{|MC|}, \quad \mu = \frac{|EM|}{|MF|}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_A + \lambda \boldsymbol{r}_C}{1 + \lambda}, \quad \boldsymbol{r}_M = \frac{\boldsymbol{r}_E + \mu \boldsymbol{r}_F}{1 + \mu}. \tag{2.16.1}$$

Если рассматривать радиус-векторы относительно точки E, то имеем

$$\boldsymbol{r}_E = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{r}_A = -\frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{r}_C = \frac{1}{8}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{r}_F = \boldsymbol{b}. \tag{2.16.2}$$

Из уравнений (2.16.1) и (2.16.2) приходим к равенству

$$-\frac{1}{1+\lambda}\frac{\boldsymbol{a}}{2} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\frac{1}{8}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\right) = \frac{\mu}{\mu+1}\boldsymbol{b}.$$

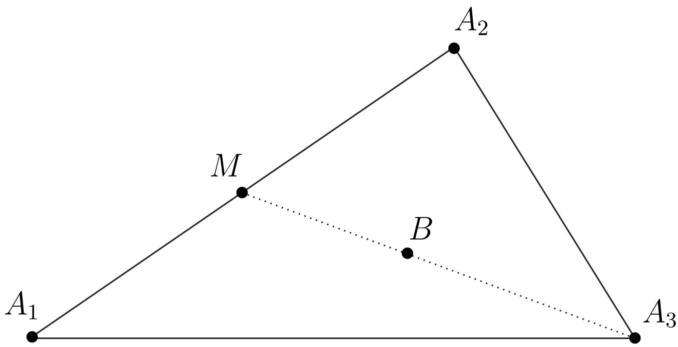
В силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приходим к равенствам

$$-\frac{1}{1+\lambda}\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\frac{1}{8} = 0, \quad \frac{\lambda}{\lambda+1} = \frac{\mu}{\mu+1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 4.$$

Итак,

$$\frac{|EM|}{|MF|} = 4, \quad |EM| + |MF| = 3 \quad \Rightarrow \quad |EM| = \frac{12}{5} \quad \Rightarrow \quad E\left(0, \frac{12}{5}\right).$$

Задача 2.17. Пусть $A_1(\boldsymbol{r}_1)$, $A_2(\boldsymbol{r}_2)$, $A_3(\boldsymbol{r}_3)$ — точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что точка $B(\boldsymbol{r})$ лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{r} = \alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \alpha_2\boldsymbol{r}_2 + \alpha_3\boldsymbol{r}_3$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0;1]$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.



Решение. Пусть точка B лежит внутри треугольника $A_1A_2A_3$. Через вершину A_3 и точку B проведём прямую. Пусть M — это точка пересечения этой прямой и отрезка A_1A_2. Для того чтобы точка B лежала внутри треугольника $A_1A_2A_3$, необходимо и достаточно, чтобы точка B была внутренней точкой отрезка A_3M, а точка M — внутренней точкой отрезка A_1A_2. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\boldsymbol{r}_M = \beta_1\boldsymbol{r}_1 + \beta_2\boldsymbol{r}_2, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \quad \beta_1, \beta_2 \in [0,1],$$
$$\boldsymbol{r}_B = \beta_3\boldsymbol{r}_M + \beta_4\boldsymbol{r}_3, \quad \beta_3 + \beta_4 = 1, \quad \beta_3, \beta_4 \in [0,1].$$

Итак, имеем

$$\boldsymbol{r}_B = \alpha_1\boldsymbol{r}_1 + \alpha_2\boldsymbol{r}_2 + \alpha_3\boldsymbol{r}_3,$$

где

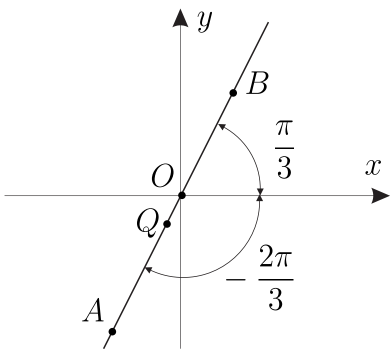
$$\alpha_1 = \beta_3\beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_3\beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_4.$$

Очевидно, что $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0,1]$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

ГЛАВА 3

Системы координат и преобразование координат

Задача 3.1. Даны полярные координаты точек $A\,(8, -2\pi/3)$ и $B(6, \pi/3)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка AB:



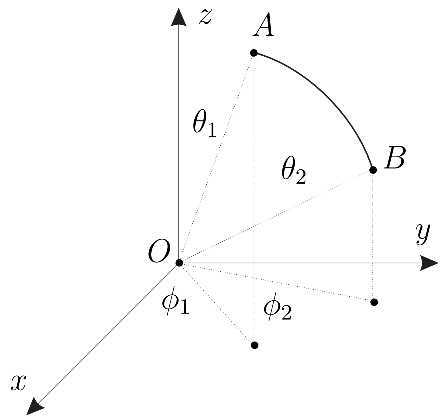
Решение. Пусть O — полюс. Заметим, что угол между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равен π, а длина отрезка AB равна 14. Поэтому расстояние от центра C отрезка AB до полюса O равно -1, т.е. в соответствующей полярной системе координат центр отрезка будет иметь координаты $(1, -2\pi/3)$.

Задача 3.2. Найдите расстояние между точками $A_1(\rho_1, \phi_1)$ и $A_2(\rho_2, \phi_2)$ на плоскости, заданными своими полярными координатами.

Решение. Поскольку угол между векторами $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OA_2}$ равен, очевидно, $\phi_2 - \phi_1$, применяя теорему косинусов к треугольнику OA_1A_2, находим:

$$|A_1A_2|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\cos(\phi_2 - \phi_1).$$

Задача 3.3. Найти длину меньшей из двух дуг большого круга, соединяющей две точки A_1 и A_2, лежащие на сфере радиуса r, зная зенитные θ_1, θ_2 и азимутальные ϕ_1, ϕ_2 углы этих точек:



Решение. Декартовы координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) точек A_1 и A_2 равны

$$x_1 = r\cos\theta_1\cos\phi_1, \qquad y_1 = r\cos\theta_1\sin\phi_1, \qquad z_1 = r\sin\theta_1,$$
$$x_2 = r\cos\theta_2\cos\phi_2, \qquad y_2 = r\cos\theta_2\sin\phi_2, \qquad z_2 = r\sin\theta_2.$$

Угол ϕ между векторами $\overrightarrow{OA}_1$ и $\overrightarrow{OA}_2$ определяется равенством

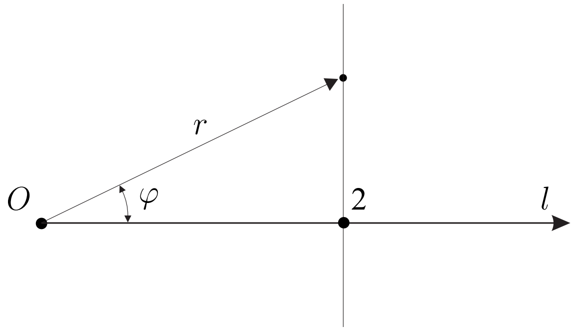
$$\cos\phi = \frac{\left(\overrightarrow{OA}_1, \overrightarrow{OA}_2\right)}{|\overrightarrow{OA}_1|\cdot|\overrightarrow{OA}_2|} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}{r^2} =$$
$$= \cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1\sin\theta_2.$$

Итак, длина дуги равна

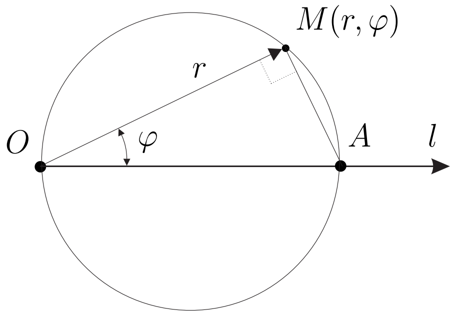
$$s = r\phi = r\arccos\Big(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \sin\theta_1\sin\theta_2\Big).$$

Задача 3.4. Нарисуйте на плоскости множества точек, уравнения которых в полярных координатах имеют вид (a) $r = 2/\cos\phi$; (b) $r = 2\cos\phi$.

Решение. (a) При $\phi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ имеем $r = 2/\cos\phi < 0$, и потому указанным значениям угла ϕ не отвечают никакие точки плоскости. Уравнение имеет смысл лишь при $\phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$; его можно переписать в виде $r\cos\phi = 2$. Так как $r\cos\phi$ — это проекция радиус-вектора точки на полярную ось, искомая кривая — это прямая, проходящая перпендикулярно к полярной оси $\vec{l}$ через точку на полярной оси с координатами $r = 2$, $\phi = 0$:



(b) При $\phi \in (\pi/2, 3\pi/2)$ имеем $r = 2\cos\phi < 0$; этим значениям угла ϕ не отвечают никакие точки плоскости. При $\phi = 0$ имеем $r = 2$. При остальных значениях $\phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ величина $2\cos\phi$ — это длина катета OM прямоугольного треугольника $\triangle OMA$, построенного на гипотенузе OA. Следовательно, искомая кривая — это окружность с диаметром OA:



Задача 3.5. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy уравнение линия задана уравнением $x + y = 1$. Найдите уравнение этой линии в декартовой прямоугольной системе координат $O'x'y'$, полученной параллельным переносом начала координат на вектор $\overrightarrow{OO'} = -2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ и поворотом осей координат на угол $\pi/4$.

Решение. Формулы преобразования координат при переходе от одной декартовой прямоугольной системы координат Oxy к другой $O'x'y'$ имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y', \\ y = y_0 + \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y', \end{cases} \tag{3.5.1}$$

где (x_0, y_0) — координаты «нового» начала O' в «старой» системе Oxy, α — угол поворота. Для данной задачи $x_0 = -2$, $y_0 = -3$, $\cos\alpha = \sin\alpha = 1/\sqrt{2}$, так что приведенные формулы принимают вид

$$\begin{cases} x = -2 + \dfrac{x'}{\sqrt{2}} - \dfrac{y'}{\sqrt{2}}, \\ y = -3 + \dfrac{x'}{\sqrt{2}} + \dfrac{y'}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Подставляя эти выражения в уравнение линии $x+y=1$ (из школьного курса математики известно, что это уравнение прямой), находим $\sqrt{2}x' = 6$.

Задача 3.6. Выведите формулы преобразования базиса на плоскости и координат вектора на плоскости.

Решение. Пусть на плоскости заданы два базиса (не обязательно ортогональные):

$$\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right), \quad \boldsymbol{E}' = \left(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\right).$$

Будем называть базис $\boldsymbol{E}$ старым, а базис $\boldsymbol{E}'$ — новым.

Векторы нового базиса $\boldsymbol{E}'$ можно разложить по старому базису:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= c_1^1 \boldsymbol{e}_1 + c_1^2 \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= c_2^1 \boldsymbol{e}_1 + c_2^2 \boldsymbol{e}_2. \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Составим матрицу, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов относительно старого базиса:

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 \\ c_1^2 & c_2^2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{E}$ к базису $\boldsymbol{E}'$*.

Обратите внимание, что координаты новых базисных векторов относительно старого базиса образуют *столбцы* матрицы перехода. Например, если выражения векторов нового базиса через векторы старого базиса имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}'_2 &= 4\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2, \end{aligned}$$

то матрица перехода имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{а не} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи формул (3.6.1):

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}C. \tag{3.6.2}$$

Формулы (3.6.1) и (3.6.2) называют *формулами преобразования базиса.*

Линейная независимость векторов базиса влечёт линейную независимость столбцов матрицы перехода C и, следовательно, её невырожденность и обратимость.

Формула обратного преобразования базиса имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'C^{-1}. \tag{3.6.3}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x}$; столбцы его координат относительно базисов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{E}'$ обозначим через X и X':

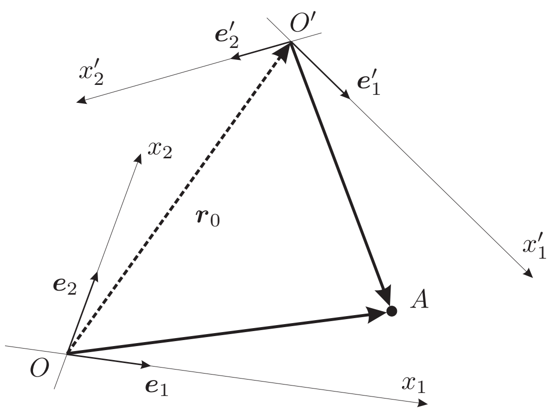
$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}.$$

Координаты X и X' вектора $\boldsymbol{x}$ в старом и новом базисе связаны соотношениями

$$X = CX', \tag{3.6.4}$$

$$X' = C^{-1}X. \tag{3.6.5}$$

Задача 3.7. Выведите формулы преобразования координат точек на плоскости.



Решение. Пусть на плоскости заданы две аффинные системы координат: $O\boldsymbol{E}$ (старая) и $O'\boldsymbol{E}'$ (новая), где $\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\right)$ и $\boldsymbol{E}' = \left(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\right)$ — старый и новый базисы, связанные формулами перехода (3.6.1) или (3.6.2). Пусть $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{OO'}$ — радиус-вектор начала новой системы координат относительно старой; разложим его по старому базису:

$$\overrightarrow{OO'} = x_0^1\boldsymbol{e}_1 + x_0^2\boldsymbol{e}_2. \tag{3.7.1}$$

Введём столбцы координат

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что справедливо векторное соотношение

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'.$$

Таким образом, связь столбцов координат X точки A в старой системе координат и X' в новой системе координат выражается формулой

$$X = X_0 + CX'. \tag{3.7.2}$$

Формула обратного преобразования:

$$X' = C^{-1}(X - X_0) = C^{-1}X - C^{-1}X_0. \tag{3.7.3}$$

Если положить здесь $X = O$, то получим координаты X'_0 начала O системы $O\boldsymbol{E}$ в системе $O'\boldsymbol{E}'$:

$$X'_0 = -C^{-1}X_0.$$

При решении задач, связанных с преобразованиями систем координат, удобно использовать так называемые *однородные координаты.* Введём матрицы

$$Z = \left(\begin{array}{c} x^1 \\ x^2 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x'^1 \\ x'^2 \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \quad P = \left\|\begin{array}{c|c} C & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|,$$

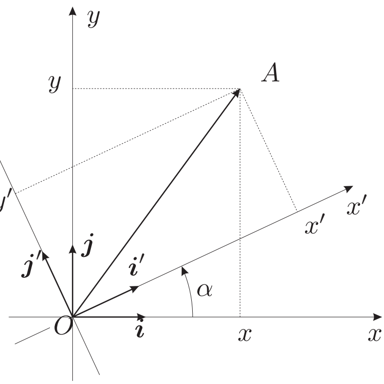
указанные преобразования можно записать в виде

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z.$$

Обратная матрица

$$P^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} C^{-1} & -C^{-1}X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|. \tag{3.7.4}$$

Задача 3.8. Выведите формулы поворота ортогонального базиса на плоскости и преобразования координат вектора при повороте.



Решение. Пусть $\boldsymbol{I} = \big(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\big)$ и $\boldsymbol{I}' = \big(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\big)$ — два ортонормированных базиса на плоскости (старый и новый), связь между которыми устанавливается формулами, полученными в задаче 3.6:

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R, \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'R^{-1}.$$

Вычисляя проекции новых базисных векторов на оси старой системы координат, легко найти элементы матрицы перехода, т.е. координаты разложения новых базисных векторов по старому базису. Общий вид ортогональной матрицы порядка 2:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.8.1}$$

Задача 3.9. Выведите формулы преобразования координат вектора при повороте координатных осей и переносе начала координат.

Решение. Применяя формулы, полученные в задаче 3.7, запишем формулы преобразований для векторов базиса и координат:

$$\text{переход } O\boldsymbol{ij} \to O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}': \quad \begin{cases} \boldsymbol{I}' = \boldsymbol{I}R, \\ X' = R^{-1}X = R^TX, \end{cases} \tag{3.9.1}$$

$$\text{переход } O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}' \to O\boldsymbol{ij}: \quad \begin{cases} \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'R^{-1} = \boldsymbol{I}'R^T, \\ X = RX', \end{cases} \tag{3.9.2}$$

где $X = \big(x, y\big)^T$, $X' = \big(x', y'\big)^T$ — столбцы координат точки относительно систем координат $O\boldsymbol{ij}$ и $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ соответственно. Такое преобразование есть не что иное, как поворот векторов базиса на угол α.

Преобразования векторов базиса и преобразование столбцов координат производятся взаимно обратными матрицами. Этот факт незаметен (более того, создаётся противоположное впечатление!), если формулы записать в координатном виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha, \\ \boldsymbol{j}' = -\boldsymbol{i}\sin\alpha + \boldsymbol{j}\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \tag{3.9.3}$$

для перехода $O\boldsymbol{ij} \to O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ и

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}'\cos\alpha - \boldsymbol{j}'\sin\alpha, \\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i}'\sin\alpha + \boldsymbol{j}'\cos\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.9.4}$$

для обратного перехода $O\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}' \to Oxy$. Конечно, всё дело здесь в порядке матричных сомножителей и ортогональности матрицы перехода.

В однородных координатах

$$\begin{gathered} Z = \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \quad Z' = \left(\begin{array}{c} x' \\ y' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right\|, \\ P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| \end{gathered} \tag{3.9.5}$$

преобразования координат запишутся в виде

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z, \tag{3.9.6}$$

причём обратная матрица P^{-1} имеет вид

$$P^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^TX_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.9.7}$$

(см. (3.7.4)), где

$$\begin{cases} x_0' = -x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha, \\ y_0' = x_0\sin\alpha - y_0\cos\alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X_0' = -R^TX_0$$

— координаты точки O (начала системы координат $O\boldsymbol{ij}$) в системе координат $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$.

Поворот координатных осей прямоугольной декартовой системы и перенос её начала, а также преобразования координат точек и уравнений линий называют *ортогональными преобразованиями* системы координат.

Задача 3.10. На плоскости даны два базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, связанные соотношениями $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}'_2 = 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2$. Найдите разложение вектора $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2$ по базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и разложение вектора $\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{e}'_1 - \boldsymbol{e}'_2$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$.

Решение. Запишем матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и матрицу обратного перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы будем пользоваться матричной техникой, все координаты нужно записывать в виде столбцов. Используя формулы преобразования координат

$$X' = C^{-1}X, \quad X = CX',$$

получаем

$$X'_{\boldsymbol{a}} = C^{-1}X_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$X_{\boldsymbol{b}} = CX'_{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = -11\boldsymbol{e}'_1 + 5\boldsymbol{e}'_2, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2.$$

Задача 3.11. На плоскости даны две системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(1; 2)$, а базисные векторы второй системы имеют в базисе первой системы координаты $(3; 5)$ и $(4; 7)$ соответственно.

(1) Найдите координаты точки в первой системе, если известны её координаты x'_1, x'_2 во второй системе координат.

(2) Найдите координаты точки во второй системе, если известны её координаты x_1, x_2 в первой системе координат.

(3) Найдите координаты точки O во второй системе и координаты векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ в базисе второй системы координат.

Решение. Матрица перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ и обратная матрицы суть

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad |C| = 1, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку мы будем пользоваться матричной техникой, все координаты нужно записывать в виде столбцов. Столбец координат $X = (x^1, x^2)^T$ точки в первой системе выражается через столбец её координат $X' = (x'^1, x'^2)^T$ во второй системе и вектор переноса начала координат $X_0 = (1; 2)^T$ по формуле

$$X = X_0 + CX' \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = 1 + 3x'^1 + 4x'^2, \\ x^2 = 2 + 5x'^1 + 7x'^2. \end{cases}$$

Столбец координат $X' = (x'^1, x'^2)^T$ точки во второй (новой) системе выражается через столбец её координат $X = (x^1, x^2)^T$ в первой (старой) системе и вектор переноса начала координат $X_0 = (1; 2)^T$ по формуле $X' = C^{-1}(X - X_0)$:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

так что

$$\begin{cases} x'_1 = 1 + 7x'_1 - 4x'_2, \\ x'_2 = -1 - 5x'_1 + 3x'_2. \end{cases}$$

Столбец координат X'_O точки O во второй системе координат выражается формулой $X'_O = -C^{-1}X_0$ и равен $(1; -1)^T$, а векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ выражаются через векторы $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$ с помощью обратной матрицы перехода:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'C^{-1} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 = 7\boldsymbol{e}'_1 - 5\boldsymbol{e}'_2, \\ \boldsymbol{e}_2 = -4\boldsymbol{e}'_1 + 3\boldsymbol{e}'_2. \end{cases}$$

ГЛАВА 4

Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов

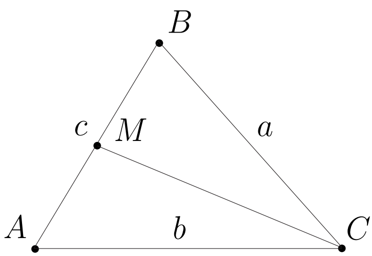
Задача 4.1. Докажите, что справедливы равенства для векторов

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Решение. Имеем

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}) = \\ = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \pm (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \pm (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 \pm 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Задача 4.2. В треугольнике ABC заданы длины его сторон $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. Найдите длину медианы $|CM|$:



Решение. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}\right), \quad a^2 = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CB}), \quad b^2 = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA}),$$

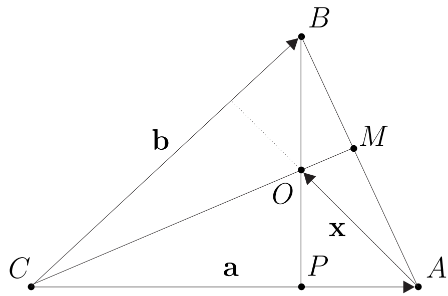
$$m_c^2 = \left|\overrightarrow{CM}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)\right),$$

$$c^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 = a^2 + b^2 - 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right),$$

$$2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) = a^2 + b^2 - c^2, \quad m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right).$$

Задача 4.3. Докажите, что в треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть CM — это высота, опущенная из точки C на сторону AB, BP — это высота, опущенная из точки B на сторону CA, O — точка пересечения высот CM и BP:



Нужно доказать, что $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{CB}$. Пусть

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}, \quad \boldsymbol{x} = \overrightarrow{AO}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AO} = -\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a},$$
$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}.$$

По определению высоты имеем

$$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - |\boldsymbol{a}|^2,$$

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CA}) = 0 \ \Leftrightarrow \ (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \ \Leftrightarrow \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - |\boldsymbol{a}|^2.$$

Итак,

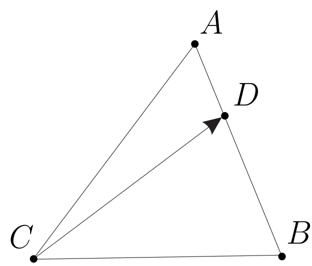
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \ \Rightarrow \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 0 \ \Leftrightarrow \ (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}) = 0.$$

Задача 4.4. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $AD : DB = \lambda$. Выразить длину отрезка $\overrightarrow{CD}$ через длины a, b, c сторон треугольника и число λ.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB}$. Тогда

$$\overrightarrow{CD} = \frac{\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda},$$

$$a^2 = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA}), \quad b^2 = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB}), \quad c^2 = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2.$$



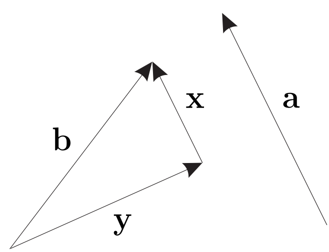
Справедливы следующие равенства:

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2}\left[a^2 + \lambda^2 b^2 + 2\lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right],$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2 = \frac{1}{1+\lambda}a^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda}b^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}c^2.$$

Задача 4.5. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Представить вектор $\boldsymbol{b}$ в виде суммы двух векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{x}$ был коллинеарен вектору $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{y}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{a}$:



Решение. Имеем

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{a}.$$

Умножая скалярно первое равенство на $\boldsymbol{a}$, получим

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{x} = \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 4.6. Даны два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = 1, \quad (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) = 0.$$

Решение. Будем искать вектор $\boldsymbol{x}$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Умножая это равенство скалярно сначала на $\boldsymbol{a}$, а затем на $\boldsymbol{b}$, получим уравнения

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\alpha + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\beta = 1, \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\alpha + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})\beta = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему при помощи формул Крамера, найдем

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ 0 & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \end{vmatrix}}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & 1 \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \end{vmatrix}}$$

или

$$\alpha = \frac{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}, \quad \beta = -\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2},$$

так что

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})^2}.$$

Задача 4.7. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) = 1, \quad (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) = 0, \quad (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) = 0.$$

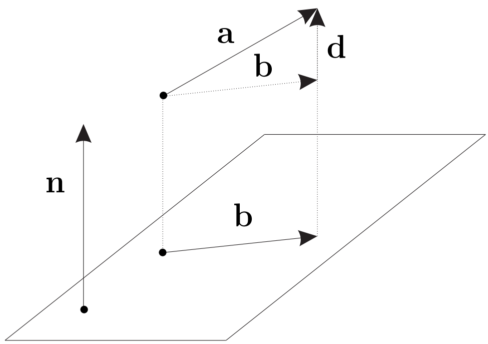
Решение. Из второго и третьего уравнений заключаем, что $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{c}$. Поэтому искомый вектор коллинеарен векторному произведению $[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$:

$$\boldsymbol{x} = \alpha \cdot [\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}] \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{x} = \frac{[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Задача 4.8. Даны вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$. Найти вектор $\boldsymbol{b}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n}$:



Решение. Имеем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{d} = \lambda \cdot \boldsymbol{n}.$$

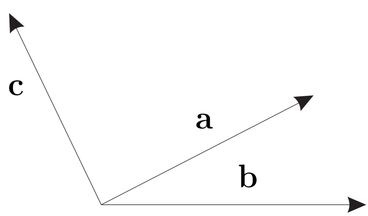
Вектор $\boldsymbol{b}$ искомый. Умножая скалярно обе части первого равенства на $\boldsymbol{n}$, находим

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}.$$

Окончательно имеем

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Задача 4.9. Даны два неколлинеарных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, компланарный векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, перпендикулярный вектору $\boldsymbol{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\boldsymbol{b}$ тупой угол:



Решение. Будем искать вектор $\boldsymbol{c}$ в виде

$$\boldsymbol{c} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}.$$

Тогда

$$(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -\lambda_2 \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})},$$

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}) = \lambda_1^2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \lambda_2^2 (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) + 2\lambda_1 \lambda_2 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

$$\lambda_2 = \pm \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}{\sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}}.$$

Выберем знак из условия

$$0 > (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = \lambda_1 (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \lambda_2 (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \;\Leftrightarrow\; \lambda_2 (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) < \lambda_2 \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \;\Rightarrow \lambda_2 < 0.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{c} = \frac{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}}{\sqrt{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2}}.$$

Задача 4.10. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось равенство

$$\big[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big] = \big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big].$$

Решение. В силу формулы Лагранжа для двойного векторного произведения это равенство эквивалентно следующему:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Отсюда вытекает, что исходное равенство выполнено, во-первых, когда

$$\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}.$$

С другой стороны, это равенство выполнено, когда векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны. Действительно, если $\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a}$, то

$$\big[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big] = \alpha\big[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{a}\big] = -\alpha\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big] = \alpha\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]\big] = \big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big].$$

Этими случаями исчерпываются все ситуации.

Задача 4.11. Докажите тождество Якоби:

$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] + \big[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]\big] + \big[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big] = \boldsymbol{0}.$$

Решение. Применяя формулу Лагранжа для двойного векторного произведения, получим:

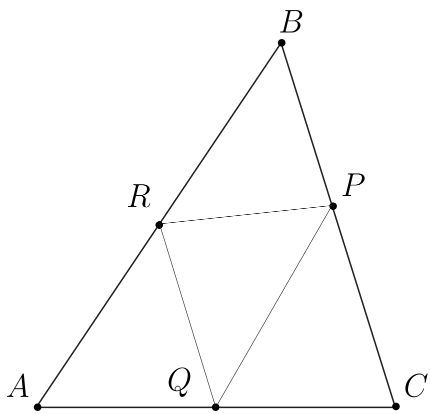
$$\big[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$
$$\big[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]\big] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}),$$
$$\big[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big] = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}).$$

Складывая полученные формулы, получаем требуемое.

Задача 4.12. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC точками P, Q, R разделены в отношениях

$$\frac{BP}{PC} = \lambda, \quad \frac{CQ}{QA} = \mu, \quad \frac{AR}{RB} = \nu.$$

Найти отношение площади треугольника PQR к площади треугольника ABC:



Решение. Введём векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC}$. Тогда согласно условиям задачи имеем

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}}{1+\lambda}, \quad \overrightarrow{AR} = \frac{\nu}{1+\nu}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{b}.$$

При этом

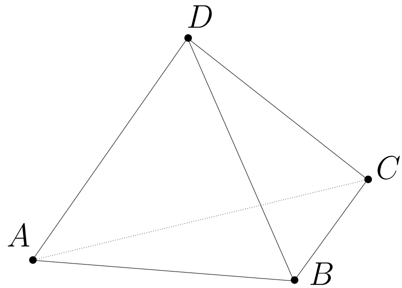
$$\overrightarrow{S}_{PQR} = \frac{1}{2}\Big[\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\Big] = \frac{1}{2}\Big[\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AR}\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1+\nu\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\nu)(1+\mu)}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \frac{1+\nu\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\nu)(1+\mu)}\overrightarrow{S}_{ABC}.$$

Итак,

$$\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \frac{1+\nu\lambda\mu}{(1+\lambda)(1+\nu)(1+\mu)}.$$

Задача 4.13. Докажите, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по абсолютной величине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

Решение. Пусть $DABC$ — это тетраэдр:



Введем обозначения

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC};$$

эти векторы образуют базис в пространстве. Векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$, $\boldsymbol{f}_4$, о которых идет речь в условии задачи, определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
2\boldsymbol{d}_1 &= [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}] = [\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}] && \text{для грани } ABC,\\
2\boldsymbol{d}_2 &= [\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] && \text{для грани } DAC,\\
2\boldsymbol{d}_3 &= [\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}] && \text{для грани } DCB,\\
2\boldsymbol{d}_4 &= [\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}] && \text{для грани } DAB.
\end{aligned}$$

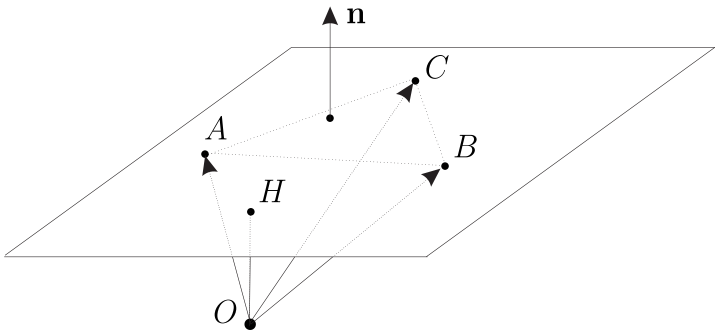
Поэтому имеем

$$2\big(\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2+\boldsymbol{d}_3+\boldsymbol{d}_4\big) = [\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}]+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}.$$

Задача 4.14. Даны три некомпланарных вектора

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC},$$

отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$, где H — это ортогональная проекция точки O на плоскость ABC.



Решение. Вектор нормали к плоскости ABC можно взять равным

$\boldsymbol{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = [\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,$

где введены обозначения

$$\boldsymbol{f}_1 := [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], \quad \boldsymbol{f}_2 := [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}], \quad \boldsymbol{f}_3 := [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Поэтому, с одной стороны, имеем

$$\overrightarrow{OH} = \lambda \boldsymbol{n} = \lambda(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3).$$

С другой стороны, точка H лежит в плоскости ABC и потому

$$\overrightarrow{CH} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OH} = \boldsymbol{c} + \alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}).$$

Итак, справедливо следующее равенство:

$$(1 - \alpha - \beta)\boldsymbol{c} + \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3).$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $\boldsymbol{f}_1$, получим

$$\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3).$$

Аналогично получаем равенства

$$\beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3),$$
$$(1 - \alpha - \beta)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3).$$

Складывая полученные три равенства, получим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda|\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3|^2,$$

откуда находим λ. Итак,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}{\bigl|[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\bigr|^2}\bigl([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\bigr).$$

Задача 4.15. Три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ связаны соотношениями

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], \quad \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}], \quad \boldsymbol{c} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Найти длины этих векторов и углы между ними.

Решение. По определению векторного произведения получаем, что все три вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ попарно ортогональны. Справедливы следующие равенства:

$$a^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \Bigl([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\Bigr) = \Bigl(\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\Bigr)$$

где $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$. Далее,

$$\begin{aligned} a^2 = \Bigl(\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\Bigr) = \Bigl(\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}]\Bigr) = -\Bigl(\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}]\Bigr) = \\ = -\Bigl(\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]\Bigr) = -\Bigl(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})\Bigr) = c^2 b^2. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$b^2 = c^2 a^2, \quad c^2 = a^2 b^2.$$

Из этих равенств ясно, что либо $a = b = c = 0$ либо $a = b = c = 1$.

Задача 4.16. Доказать, что если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны, то из равенств

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] \tag{4.16.1}$$

вытекает соотношение

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \tag{4.16.2}$$

и обратно.

Решение. Из условия, очевидно, следует, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. По условию задачи они не коллинеарны, поэтому без ограничения общности можно считать, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны. Тогда найдутся такие числа α и β, одновременно не равные нулю, что

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Из равенства

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$$

получим равенство $\beta = \alpha$. Итак, $\boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$. Тогда из равенства

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \;\Rightarrow\; \alpha = -1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

Обратное утверждение доказывается последовательным умножением равенства $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ векторно на $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Действительно, умножая равенство (4.16.2) векторно на $\boldsymbol{a}$, получим равенство

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]. \tag{4.16.3}$$

Умножая векторно равенство (4.16.2) на $\boldsymbol{b}$, получим

$$[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]. \tag{4.16.4}$$

Итак, пришли к равенству (4.16.1).

Задача 4.17. Доказать, что если векторы

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \quad [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], \quad [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$$

компланарны, то они коллинеарны.

Решение. Введем обозначения $\boldsymbol{f}_1 = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\boldsymbol{f}_2 = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\boldsymbol{f}_3 = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$. Справедливы равенства

$$[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2] = \big[[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\big] = \boldsymbol{b}\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big) - \boldsymbol{c}\big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{b}\big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\big).$$

Аналогично получаем соотношения

$$[\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad [\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1] = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}).$$

Тогда справедливо равенство

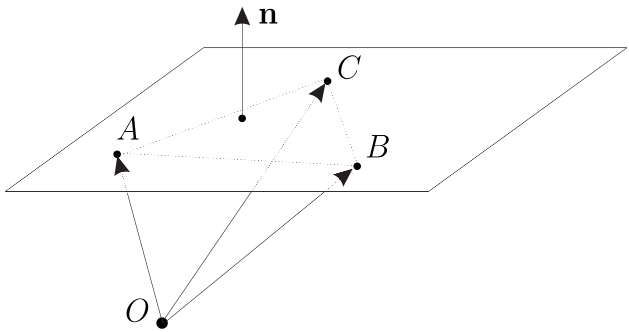
$$\big(\boldsymbol{f}_1, [\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3]\big) = \big([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{c}\big)(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2.$$

Поэтому, с одной стороны, если векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{f}_3$ компланарны, то $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. С другой стороны, мы получили равенства

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2] &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = \mathbf{0}, \\ [\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3] &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{c} = \mathbf{0}, \\ [\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1] &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

означающие, что векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{f}_3$ попарно коллинеарны.

Задача 4.18. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]$:



Решение. Пусть

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}.$$

Тогда имеем

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} = \overrightarrow{CA}, \quad \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \overrightarrow{CB},$$

причем векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ не коллинеарны и лежат в указанной плоскости. Справедлива следующая следующая цепочка равенств:

$$\boldsymbol{n} := [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] + [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}] = [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}].$$

Для любой точки X, лежащей на указанной плоскости, имеем

$$\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB},$$

и поэтому вектор $\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{CX}$. Итак, $\boldsymbol{n}$ — это вектор нормали к указанной плоскости.

Задача 4.19. Даны три некомпланарных вектора

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC},$$

отложенных от одной точки O. Найти вектор $\boldsymbol{d} = \overrightarrow{OD}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равные между собой острые углы.

Решение. По базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ построим взаимный базис

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Будем искать вектор $\boldsymbol{d}$ в виде

$$\boldsymbol{d} = x\boldsymbol{f}_1 + y\boldsymbol{f}_2 + z\boldsymbol{f}_3.$$

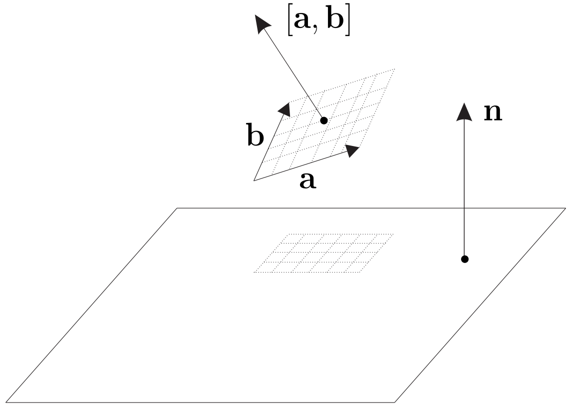
Заметим, что

$$0 < da\cos\phi = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) = x,$$
$$0 < db\cos\phi = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}) = y,$$
$$0 < dc\cos\phi = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}) = z;$$

поэтому искомый вектор имеет вид

$$\boldsymbol{d} = d\cos\phi\,(a\boldsymbol{f}_1 + b\boldsymbol{f}_2 + c\boldsymbol{f}_3) = \\ = \frac{\lambda}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\Big(a[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + b[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + c[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\Big), \quad \lambda = d\cos\phi > 0.$$

Задача 4.20. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$. Найти площадь параллелограмма, являющегося ортогональной проекцией на плоскость, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}$, параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:



Решение. Ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна

$$\overrightarrow{S}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Площадь проекции, очевидно, равна

$$|S_{\boldsymbol{n}}| = \left|\overrightarrow{S}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right| |\cos\phi|,$$

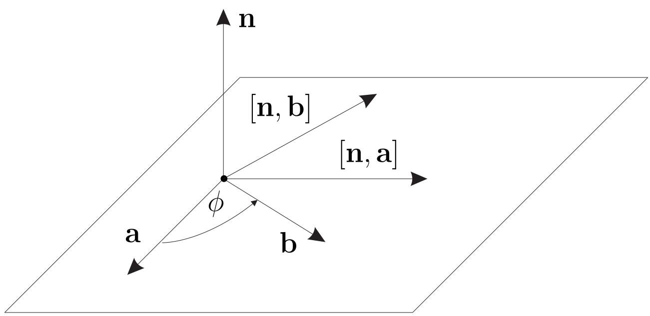
где

$$\cos\phi = \frac{\left(\overrightarrow{S}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{n}\right)}{\left|\overrightarrow{S}_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}\right| |\boldsymbol{n}|}$$

так что

$$|S_{\boldsymbol{n}}| = \frac{|([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{n})|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Задача 4.21. В пространстве даны два перпендикулярных друг другу вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{n}$, причем $|\boldsymbol{n}| = 1$. Найти вектор $\boldsymbol{b}$, полученный из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол ϕ вокруг оси, определенной вектором $\boldsymbol{n}$



Решение. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}]$ имеют одинаковые длины: $|\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|$, поскольку $\boldsymbol{b}$ получен из $\boldsymbol{a}$ поворотом, и

$$\big|[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}]\big| = |\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{a}| \sin\alpha = |\boldsymbol{a}|,$$

так как $|\boldsymbol{n}| = 1$, а угол α между векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}$ равен $\pi/2$. Поэтому разложение вектора $\boldsymbol{b}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}]$, образующим базис в плоскости поворота, имеет вид

$$\boldsymbol{b} = \cos\phi \cdot \boldsymbol{b} + \sin\phi \cdot [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}].$$

Задача 4.22. Доказать тождество

$$([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) \end{vmatrix}.$$

Решение. Имеем

$$\big(\underbrace{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}_{=\boldsymbol{x}},\ [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big) = \big(\boldsymbol{x}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]\big) = \Big(\boldsymbol{c}, \big[\boldsymbol{d}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\big]\Big) =$$
$$= \Big(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})\Big) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}).$$

Задача 4.23. Докажите тождество $\Bigl([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\Bigr)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$. Справедливо равенство

$$\bigl[\boldsymbol{x},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\bigr]=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

Таким образом,

$$\Bigl([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\bigl[\boldsymbol{x},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\bigr]\Bigr)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\bigl(\boldsymbol{c},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\bigr)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2.$$

Задача 4.24. Доказать тождества

$$\bigl[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\ [\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\bigr]=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$
$$\bigl[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\ [\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\bigr]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}).$$

Решение. Имеем

$$\bigl[\underbrace{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}_{=\boldsymbol{x}},\ [\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\bigr]=\bigl[\boldsymbol{x},[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\bigr]=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{c})=$$
$$=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),\quad(4.24.1)$$

$$\bigl[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\ [\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]\bigr]=-\bigl[\underbrace{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]}_{=\boldsymbol{y}},\ [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\bigr]=-\bigl[\boldsymbol{y},[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\bigr]=$$
$$=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}).\quad(4.24.2)$$

Задача 4.25. Пусть $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ — произвольный базис в пространстве. Разложите произвольный вектор $\boldsymbol{d}$ по этому базису, выразив коэффициенты через $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ при помощи операций скалярного, векторного и смешанного произведений.

Решение. Из формул (4.24.1) и (4.24.2) вытекает, что

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Если векторы $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ образуют базис, то они линейно независимы и $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq0$, так что, разделив обе части на это смешанное произведение, получим требуемое разложение:

$$\boldsymbol{d}=\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{a}+\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{c}.$$

Обсудим его подробнее.

Координаты найденного разложения можно представить в виде

$$\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}=\frac{\bigl(\boldsymbol{d},\ [\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\bigr)}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}=\left(\boldsymbol{d},\ \frac{[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right)=(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}^*),\qquad(4.25.1)$$

$$\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\frac{\big(\boldsymbol{d},\ [\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]\big)}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} = \left(\boldsymbol{d},\ \frac{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right) = (\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}^*), \tag{4.25.2}$$

$$\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} = \frac{\big(\boldsymbol{d},\ [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} = \left(\boldsymbol{d},\ \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right) = (\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}^*), \tag{4.25.3}$$

где

$$\boldsymbol{a}^* = \frac{[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}, \quad \boldsymbol{b}^* = \frac{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}, \quad \boldsymbol{c}^* = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

Легко проверить, что векторы $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{b}^*$ линейно независимы; для этого достаточно вычислить их смешанное произведение. Для упрощения записи рассмотрим векторы $\alpha\boldsymbol{a}^*, \alpha\boldsymbol{b}^*, \alpha\boldsymbol{b}^*$, где $\alpha = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$:

$$\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{a}^*, \alpha\boldsymbol{b}^*, \alpha\boldsymbol{b}^*) &= \Big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\ [\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\ [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\Big) = \\ &= \Big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\ \Big[[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}],\ [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\Big]\Big) = \\ &= \Big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\ \boldsymbol{a}\underbrace{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}_{=\alpha} - \boldsymbol{b}\underbrace{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}_{=0}\Big) = \\ &= \alpha\big([\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\ \boldsymbol{a}\big) = \alpha^2 \neq 0,\end{aligned}$$

что и означает линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$. Таким образом, эти векторы также образуют базис в пространстве; он называется базисом, *взаимным к базису* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Легко получить следующие соотношения между векторами исходного и взаимного базисов:

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*) = \left(\boldsymbol{a},\ \frac{[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} = 1,$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}^*) = \left(\boldsymbol{a},\ \frac{[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\right) = \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} = 0$$

и т. д. Окончательно

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^*) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}^*) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}^*) = 1, \tag{4.25.4}$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}^*) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}^*) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}^*) = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}^*) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}^*) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}^*) = 0. \tag{4.25.5}$$

Попытаемся теперь найти разложение вектора $\boldsymbol{d}$ по взаимному базису $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$:

$$\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a}^* + \beta\boldsymbol{b}^* + \gamma\boldsymbol{c}^*.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $\boldsymbol{a}$ и принимая во внимание формулы (4.25.4) и (4.25.5), получим

$$\alpha = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}), \quad \beta = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}), \quad \gamma = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}). \tag{4.25.6}$$

Формулы для координат (4.25.1)–(4.25.3) и (4.25.6) называются *формулами Гиббса.*

Задача 4.26. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \alpha, \quad (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = \beta, \quad (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \gamma.$$

Решение. Решение удобно искать в виде разложения по базису $\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*, \boldsymbol{c}^*$, взаимному к базису $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ (см. задачу 4.25):

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{a}^* + y\boldsymbol{b}^* + z\boldsymbol{c}^*.$$

Умножая обе части этого разложения скалярно на $\boldsymbol{a}$ и принимая во внимание формулы (4.25.4) и (4.25.5), получаем $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = x$; но в силу первого уравнения системы $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \alpha$. Таким образом, $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ и

$$\boldsymbol{x} = \frac{\alpha}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] + \frac{\beta}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] + \frac{\gamma}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Задача 4.27. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \end{vmatrix}}.$$

Решение. Согласно определению векторного произведения имеем

$$S^2 = ([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]).$$

Далее нужно воспользоваться решением задачи 4.22.

Задача 4.28. Вычислить объём параллелепипеда, зная длины $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OC}| = c$ трех его ребер, выходящих из одной вершины O, и углы $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle COA$, $\gamma = \angle AOB$ между ними.

Решение. Согласно условию задачи имеем

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = b \cdot c \cdot \cos\alpha, \quad (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = c \cdot a \cdot \cos\beta, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Воспользуемся известной формулой задачи 4.32

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix} =$$
$$= a^2b^2c^2\left(1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma\right).$$

Задача 4.29. Решите векторное уравнение $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ (здесь $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}$ — заданные векторы) и укажите необходимое и достаточное условие существования решения. Укажите геометрический смысл решения.

Решение. Во-первых заметим, что если существует решение $\boldsymbol{x}_0$ этого уравнения, то вектор $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}$, где t — произвольное число, также является решением. Действительно, если $[\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, то

$$[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a}] + t[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b},$$

поскольку $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$.

Далее, в предположении, что существует решение $\boldsymbol{x}_0$ этого уравнения, умножим обе его части скалярно на $\boldsymbol{a}$:

$$0 = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Таким образом, условие $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$ является *необходимым* условием разрешимости рассматриваемого уравнения. Покажем, что это условие является также и *достаточным.* Действительно, если оно выполнено, то вектор

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$$

является решением уравнения $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$, поскольку

$$[\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a}] = \frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}[[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{a}] = -\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}\left(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\right) = \boldsymbol{b}.$$

Итак, уравнение имеет бесконечно много решений, имеющих вид

$$\boldsymbol{x} = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} + t\boldsymbol{a},$$

где t — любое вещественное число. Ясно, что конец любого вектора $\boldsymbol{x}$, являющегося решением этого уравнения, лежит на прямой, проходящей через точку $\boldsymbol{x}_0$ параллельно вектору $\boldsymbol{a}$.

Задача 4.30. Решите систему уравнений

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1, \quad [\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2, \tag{4.30.1}$$

где векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны.

Решение. В силу решения задачи 4.29 каждое из уравнений (4.30.1) при выполнении условий

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0, \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) = 0 \tag{4.30.2}$$

описывает прямую в пространстве, причем в силу неколлинеарности векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ эти прямые не параллельны и не совпадают. Таким образом, решение системы, если оно существует, единственно: это точка пересечения указанных прямых. Каждое из условий (4.30.2) является *необходимым* для совместности системы (4.30.1).

1. Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$; в этом случае, очевидно, обе прямые проходят через начало координат (вектор $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ является решением системы (4.30.1)). В силу сказанного выше это решение единственно.

2. Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{b}_1 \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$. Предположим, что существует решение $\boldsymbol{x}_0$ системы (4.30.1):

$$[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1, \quad [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{0}.$$

Второе из этих соотношений влечет коллинеарность векторов $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{a}_2$: $\boldsymbol{x}_0 = \lambda \boldsymbol{a}_2$. Подставляя это в первое из уравнений, находим

$$[\lambda \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1; \tag{4.30.3}$$

выполняться это соотношение может только при условии, что векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ (отметим, что оба они ненулевые по условию) коллинеарны, т.е.

$$\boldsymbol{0} = \big[\boldsymbol{b}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\big] = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) - \boldsymbol{a}_2\underbrace{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1)}_{=0} = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)$$

или, в силу условия $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$,

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0, \tag{4.30.4}$$

которое, таким образом, является *необходимым* для совместности системы в рассматриваемом случае. Отметим также (это потребуется далее), что справедливо «симметричное» соотношение $(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1) = 0$ (поскольку $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$).

Полученное условие является также и *достаточным.* Действительно, если оно выполняется (а также, разумеется, выполняются условия $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0$ и $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$), то векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ коллинеарны, и можно найти λ из (4.30.3) и далее решение системы:

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]} \boldsymbol{a}_2; \tag{4.30.5}$$

здесь дробь — «отношение двух векторов» — означает коэффициент пропорциональности двух заведомо коллинеарных векторов.

3. Наконец, рассмотрим случай $\boldsymbol{b}_1 \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}_2 \neq \mathbf{0}$. Предполагая, что решение системы (4.30.1) существует, обозначая его $\boldsymbol{x}_0$, подставляя в каждое уравнение системы и затем умножая векторно первое уравнение на $\boldsymbol{b}_1$, а второе — на $\boldsymbol{b}_2$, имеем

$$[\boldsymbol{b}_1, [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_1]] = \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{b}_2, [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_2]] = \mathbf{0}.$$

Раскрывая двойные векторные произведения по формуле Лагранжа и принимая во внимание условия $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0$ и $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) = 0$, а также $\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{a}_2 \neq \mathbf{0}$, находим

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1) - \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}_0) = 0, \\
\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_2) - \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{x}_0) = 0.
\end{gathered}$$

Итак, вектор $\boldsymbol{x}_0$ должен быть ортогонален каждому из векторов $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$. Если эти векторы неколлинеарны, то $\boldsymbol{x}_0$ можно искать в виде $\boldsymbol{x}_0 = \lambda[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$. Если же они коллинеарны, решение будет выглядеть иначе (см. ниже).

Рассмотрим случай, когда векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ неколлинеарны, т.е. решение системы можно искать в виде $\boldsymbol{x}_0 = \lambda[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы (4.30.1), применяя формулу Лагранжа для двойного векторного произведения и учитывая равенство $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0$, получим

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 = [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_1] = \big[\lambda[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2], \boldsymbol{a}_1\big] = \lambda\big[\boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1]\big] = \\
= \lambda\big\{\boldsymbol{b}_2(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) - \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)\big\} = -\lambda \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2);
\end{aligned}$$

отсюда следует, во-первых, что $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) \neq 0$ (это условие является, таким образом, необходимым для совместности системы (4.30.1) в рассматриваемом случае) и во-вторых, что

$$\lambda = -\frac{1}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)}.$$

Аналогично, подставляя соотношение $\boldsymbol{x}_0 = \lambda[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]$ во второе уравнение системы (4.30.1), находим

$$\lambda = \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)}.$$

Таким образом, если решение существует, то два полученных выражения для λ должны совпадать, т.е.

$$-\frac{1}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)} = \frac{1}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)} \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 0.$$

Это соотношение также является *необходимым* для совместности системы (4.30.1) в рассматриваемом случае (когда $[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2] \neq \boldsymbol{0}$).

Это условие является также и *достаточным* для совместности системы в рассматриваемом случае. Действительно, при его выполнении вектор

$$\boldsymbol{x}_0 = -\frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)} = \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)}$$

удовлетворяет каждому их уравнений системы (4.30.1) (проверьте самостоятельно!).

Осталось рассмотреть ситуацию, когда векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ коллинеарны, но оба ненулевые, т.е. $\boldsymbol{b}_2 = \alpha \boldsymbol{b}_1$, $\alpha \neq 0$. Система в этом случае имеет вид

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1, \quad [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_2] = \alpha \boldsymbol{b}_1. \tag{4.30.6}$$

Предполагая, что существует решение $\boldsymbol{x}_0$, подставим его в каждое из уравнений и вычтем из второго уравнения первое, умноженное на α:

$$[\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_2] - \alpha[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; [\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{0}.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{a}_1$ коллинеарны, т.е. $\boldsymbol{x}_0 = \lambda(\boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{a}_1)$, где коэффициент λ подлежит определению. Подставляя последнее соотношение в первое уравнение системы (4.30.6), находим

$$\big[\lambda(\boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{a}_1), \boldsymbol{a}_1\big] = \boldsymbol{b}_1 \;\Leftrightarrow\; \lambda[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1.$$

Как и (4.30.3), это соотношение может выполняться только при условии, что векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ (отметим, что оба они ненулевые по условию) коллинеарны, т.е., как было показано выше, при условии (4.30.4): $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0$; это условие *необходимо* для совместности системы в рассматриваемом случае. Отметим, что симметричное соотношение $(\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1) = 0$ выполняется автоматически (поскольку $\boldsymbol{b}_2 = \alpha \boldsymbol{b}_1$ и $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1) = 0$).

Итак, в рассматриваемом случае решение системы выражается формулой

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]}(\boldsymbol{a}_2 - \alpha \boldsymbol{a}_1), \tag{4.30.7}$$

где дробь означает коэффициент пропорциональности двух заведомо коллинеарных векторов. Заметим, что формула (4.30.5) является частным случаем формулы (4.30.7) при $\alpha = 0$.

Итак, окончательный ответ таков: система (4.30.1) с неколлинеарными векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ совместна тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1) = 0, \quad (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2) = 0, \quad (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1) = 0,$$

причем ее решение единственно и задается формулой

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]}(\boldsymbol{a}_2 - \alpha\boldsymbol{a}_1),$$

если векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ коллинеарны, а именно, $\boldsymbol{b}_2 = \alpha\boldsymbol{b}_1$ (в том числе и при $\alpha = 0$), и формулой

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)} \quad \text{либо} \quad \boldsymbol{x}_0 = -\frac{[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)},$$

если векторы $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ неколлинеарны.

Задача 4.31. Докажите тождество

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix}.$$

Решение. Если $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, то левая часть равенства, очевидно, равна нулю. Но и правая часть также обращается в нуль. Действительно, в этом случае тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ линейно зависима, и без ограничения общности можно считать, что

$$\boldsymbol{a} = \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}.$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix} =$$

$$= \beta \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть теперь $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \neq 0$. Тогда $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ — базис в пространстве. Введем так называемый *взаимный базис*

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{[\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{f}_1 + x_2\boldsymbol{f}_2 + x_3\boldsymbol{f}_3, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{f}_1 + y_2\boldsymbol{f}_2 + y_3\boldsymbol{f}_3.$$

При этом справедливы следующие свойства:

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{a}) = 1, \quad (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{b}) = 0, \quad (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{c}) = 0,\\ (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{a}) = 0, \quad (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{b}) = 1, \quad (\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{c}) = 0,\\ (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{a}) = 0, \quad (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{b}) = 0, \quad (\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{c}) = 1;\\ [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2] = \frac{\boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad [\boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3] = \frac{\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}, \quad [\boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{f}_1] = \frac{\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.\end{gathered}$$

Если воспользоваться этими равенствами, получим

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\Big[(x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{c} + (x_3y_1 - x_1y_3)\boldsymbol{b} + (x_2y_3 - x_3y_2)\boldsymbol{a}\Big] = \\ = \frac{1}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Осталось заметить, что

$$\begin{gathered}x_1 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}), \quad x_2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}), \quad x_3 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}),\\ y_1 = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}), \quad y_2 = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}), \quad y_3 = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{c}).\end{gathered}$$

Второй способ (для читателя, знакомого с теоремой об определителе произведения матриц). Пусть $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ — некоторый правый ортонормированный базис в пространстве. Тогда

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}.$$

Далее,

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}.$$

Справедливо равенство

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}](\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix},$$

поскольку

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) &= x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3, & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) &= y_1a_1 + y_2a_2 + y_3a_3, \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) &= x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3, & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}) &= y_1b_1 + y_2b_2 + y_3b_3, \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) &= x_1c_1 + x_2c_2 + x_3c_3, & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) &= y_1c_1 + y_2c_2 + y_3c_3. \end{aligned}$$

Задача 4.32. Докажите тождество

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}.$$

Решение. Если $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ — некомпланарные векторы (в этом случае они образуют базис в пространстве; случай компланарных векторов рассмотрите самостоятельно по аналогии с задачей 4.31), то, введя взаимный базис (см. решение задачи 4.31) $\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,\boldsymbol{f}_3$, имеем

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z},\boldsymbol{a})\boldsymbol{f}_1 + (\boldsymbol{z},\boldsymbol{b})\boldsymbol{f}_2 + (\boldsymbol{z},\boldsymbol{c})\boldsymbol{f}_3,$$

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] \cdot (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) =$$

$$= \boldsymbol{a}\begin{vmatrix} (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} - \boldsymbol{b}\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} + \boldsymbol{c}\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix}$$

Тогда

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z},[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{z})\begin{vmatrix} (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} - \\ - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{z})\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} + (\boldsymbol{c},\boldsymbol{z})\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}.$$

Второй способ (для читателя, знакомого с теоремой об определителе произведения матриц). Если $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ — произвольный ортонормированный базис и

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{z} = z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$$

— разложения по этому базису всех фигурирующих в задаче векторов, то

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \\ = \left|\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right| = \\ = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{z},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}.$$

Задача 4.33. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, равен

$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}) \end{vmatrix}}.$$

Решение. См. решение задачи 4.32.

Задача 4.34. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1) = \alpha, \quad [\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b},$$

где

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2) \neq 0, \quad (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}) = 0.$$

Решение. Имеем в силу решения задачи 4.29

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}_2 t, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{x}_0 = \frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получим

$$\alpha = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}_1) = (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a}_1) + (\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_1)t_0 \;\Rightarrow\; t_0 = \frac{\alpha - (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_0)}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{x} = \frac{[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)} + \frac{\alpha - (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{x}_0)}{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)}\boldsymbol{a}_2.$$

Задача 4.35. Найти векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из системы уравнений

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = p, \quad [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{b},$$

предполагая, что выполнены условия $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$.

Решение. Из первого уравнения имеем $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{x}$, так что

$$\begin{gathered} [\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{a}t, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{x}_0 = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}, \\ (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = p \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) + p = 0. \end{gathered} \tag{4.35.1}$$

Поскольку $\boldsymbol{x}_0 \perp \boldsymbol{a}$, то имеет место равенство

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = x_0^2 + a^2 t^2, \tag{4.35.2}$$

где

$$x_0^2 = (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0) = \frac{b^2}{a^2}.$$

Действительно, согласно решению задачи 4.22 имеем

$$([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a},\boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \\ (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) \end{vmatrix} = a^2b^2,$$

поскольку $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 0$, и

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})t = ta^2. \tag{4.35.3}$$

Таким образом, из (4.35.1)–(4.35.3) получаем

$$a^2t^2 - a^2t + p + \frac{b^2}{a^2} = 0 \;\Rightarrow\; t_{1,2} = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4(b^2 + pa^2)}}{2a^2}.$$

Если $a^4 > 4(b^2 + pa^2)$, то решений два, если $a^4 = 4(b^2 + pa^2)$, то решение одно, а если $a^4 < 4(b^2 + pa^2)$ — решений нет. В случаях, когда решение существует, оно выражается формулами

$$\boldsymbol{x} = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{y} = -\frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{a}(1 - t).$$

ГЛАВА 5

Прямая на плоскости

Задача 5.1. Составьте уравнения прямых b и c, проходящих через точку $A(-2;5)$ соответственно параллельно и перпендикулярно прямой a, заданной уравнением $3x+2y=8$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через данную точку (x_0, y_0) параллельно прямой $Ax+By=D$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,$$

так как параллельные прямые имеют одинаковые (или, более общо, пропорциональные) нормальные векторы. Поэтому уравнение прямой b, параллельной прямой a, имеет вид

$$3(x+2)+2(y-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+2y=4.$$

Вектор нормали $\boldsymbol{n}=(3;2)$ данной прямой a является направляющим вектором искомой прямой c, уравнение которой удобно записать в каноническом виде:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{2} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x+2 & y-5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-3y=-19.$$

Задача 5.2. Известна вершина $A(3;-4)$ треугольника ABC и уравнения его высот[1]:

$$BH:\ 7x-2y=1, \qquad CP:\ 2x-7y=6.$$

Составьте уравнение стороны BC.

Решение. Найдем координаты точки Q пересечения высот треугольника:

$$\begin{cases} 7x-2y=1, \\ 2x-7y=6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q\left(-\frac{1}{9},\ -\frac{8}{9}\right).$$

[1]Здесь и далее под уравнением высот (биссектрис, сторон и т. д.) будем понимать уравнения прямых, на которых лежат высоты (биссектрисы, стороны и т. д.).

Вектор $\overrightarrow{AQ} = (-28/9,\ 28/9)$ перпендикулярен прямой BC, поэтому пропорциональный вектор $\boldsymbol{n} = (1; -1)$ можно взять в качестве вектора нормали стороны BC.

Найдём координаты точки B, являющейся пересечением высоты BH (её уравнение известно) и стороны AB (её уравнение требуется получить). Поскольку нормальный вектор $(2; -7)$ высоты CP является направляющим вектором стороны AB, можем записать каноническое уравнение прямой AB:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-7} \quad \Leftrightarrow \quad 7x + 2y = 13.$$

Далее находим координаты точки B:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 1, \\ 7x + 2y = 13 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(1; 3).$$

Теперь можем составить уравнение стороны BC:

$$1 \cdot (x-1) + (-1) \cdot (y-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y = -2.$$

Задача 5.3. Составьте уравнения биссектрис углов между прямыми $3x - 4y = -7$ и $5x + 12y = 1$.

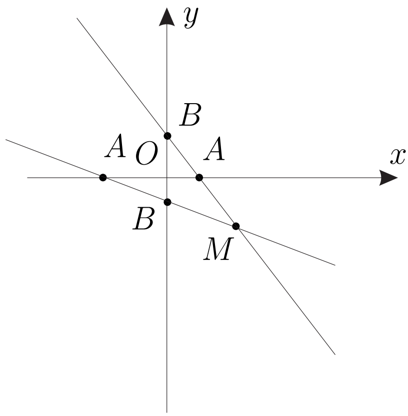
Решение. Точка $M(x, y)$ лежит на биссектрисе углов, образованных данными прямыми, тогда и только тогда, когда расстояния d_1 и d_2 от этой точки до данных прямых равны между собой, т.е.

$$\frac{|3x - 4y + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5x + 12y - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}}.$$

Снимая модули, получаем

$$\frac{3x - 4y + 7}{5} = \frac{5x + 12y - 1}{13} \quad \Leftrightarrow \quad 7x - 56y + 48 = 0,$$
$$\frac{3x - 4y + 7}{5} = -\frac{5x + 12y - 1}{13} \quad \Leftrightarrow \quad 32x + 4y + 43 = 0.$$

Задача 5.4. Через точку $M = (4, -3)$ провести прямую так чтобы площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, была равна 3. Система координат прямоугольная.



Решение. Будем искать уравнение прямой в виде $y = kx+b$. Тогда точки пересечения с осями координат имеют следующий вид:

$$A = (-b/k, 0), \quad B = (0, b).$$

Площадь искомого треугольника равна

$$3 = S = -\frac{1}{2}\frac{b^2}{k} \Rightarrow k = -\frac{b^2}{6}.$$

С другой стороны, имеем по условию

$$-3 = 4k + b \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{6}b^2 - b - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 3, \quad b_2 = -\frac{3}{2}.$$

Тогда имеем

$$k_1 = -\frac{3}{2}, \quad k_2 = -\frac{3}{8}.$$

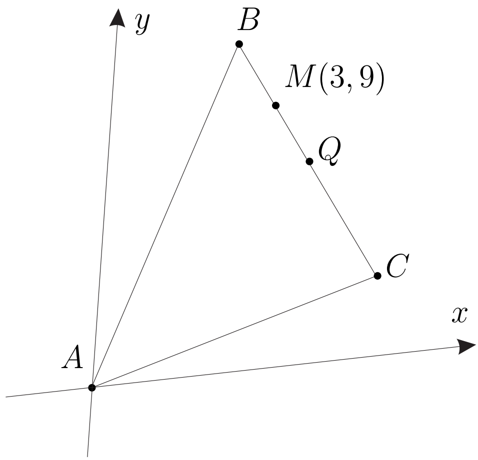
Получаем два уравнения

$$2y + 3x - 6 = 0 \quad \text{и} \quad 8y + 3x + 12 = 0.$$

Задача 5.5. Даны уравнения двух сторон треугольника

$$2x - y = 0 \quad \text{и} \quad 5x - y = 0$$

и уравнение $3x - y = 0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3, 9)$, и найти координаты его вершин. Система координат аффинная.



Решение. Пусть $A = (0, 0)$ — это вершина треугольника ABC, образованная пересечением прямых $2x - y = 0$ и $5x - y = 0$. Пусть $B = (x_B, y_B)$ и $C = (x_C, y_C)$ — это две другие вершины треугольника, а $Q = (x_Q, y_Q)$ — это точка пересечение медианы $3x - y = 0$ со стороной BC. В силу условий задачи имеем

$$x_Q = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_Q = \frac{y_B + y_C}{2},$$

$$2x_B - y_B = 0, \quad 5x_C - y_C = 0, \quad 3(x_B + x_C) - (y_B + y_C) = 0.$$

Решая последнюю систему трёх уравнений относительно четырёх неизвестных, получим следующие выражения:

$$x_B = 2x_C, \quad y_B = 4x_C, \quad y_C = 5x_C.$$

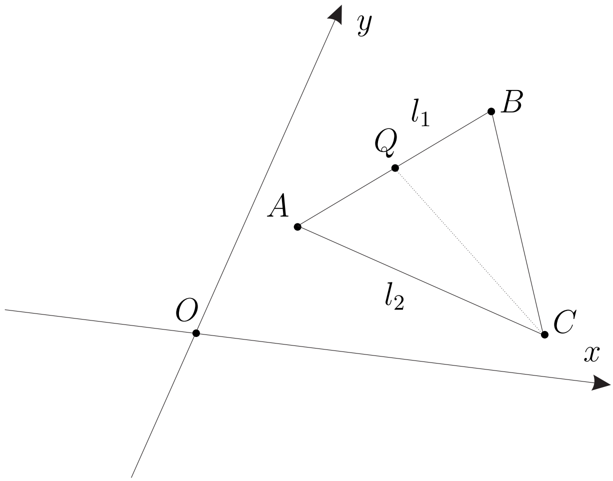
Искомое уравнение прямой

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \ni M(3, 9) \Rightarrow \frac{3 - 2x_C}{x_C - 2x_C} = \frac{9 - 4x_C}{5x_C - 4x_C} \Rightarrow x_C = 2.$$

Поэтому имеем

$$x_C = 2, \quad y_C = 10, \quad x_B = 4, \quad y_B = 8, \quad x + y - 12 = 0.$$

Задача 5.6. Даны уравнения $l_1 : 3x - 2y + 1 = 0$, $l_2 : x - y + 1 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y - 1 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника. Система координат аффинная.



Решение. Пусть $A = (x_A, y_A)$ — вершина треугольника ABC, образованная пересечением прямых в условии задачи. Имеем

$$3x_A - 2y_A + 1 = 0, \quad 2x_A - 2y_A + 2 = 0 \Rightarrow x_A = 1, \quad y_A = 2.$$

Пусть $C = (x_C, y_C)$ — это вершина треугольника ABC, из которой опущена медиана CQ. Поэтому имеем

$$2x_C - y_C - 1 = 0, \quad x_C - y_C + 1 = 0 \Rightarrow x_C = 2, \quad y_C = 3.$$

Пусть $B = (x_B, y_B)$. Тогда имеем

$$x_Q = \frac{1}{2}\,(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(1 + x_B), \quad y_Q = \frac{1}{2}\,(y_A + y_B) = \frac{1}{2}(2 + y_B),$$

$$2x_Q - y_Q - 1 = 0, \quad 3x_B - 2y_B + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x_B - y_B - 2 = 0, \quad 3x_B - 2y_B + 1 = 0 \Rightarrow x_B = 5, \quad y_B = 8.$$

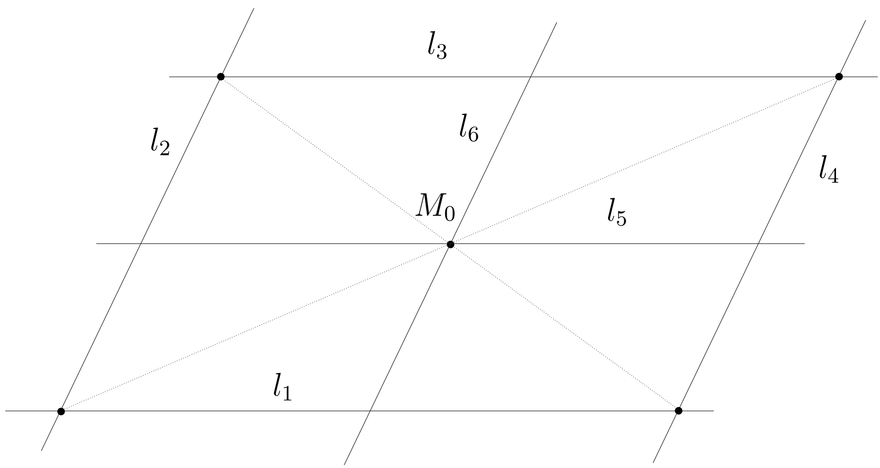
Таким образом, искомая прямая определяется как прямая, проходящая через точки C и B :

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Leftrightarrow \frac{x - 5}{-3} = \frac{y - 8}{-5} \Leftrightarrow 5x - 3y - 1 = 0.$$

Задача 5.7. Даны две смежные стороны параллелограмма

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

и точка пересечения его диагоналей $M_0 = (x_0, y_0)$. Написать уравнения двух других его сторон.



Решение. Пусть

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad l_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда уравнения двух других сторон следующие:

$$l_3: \quad A_1x + B_1y + C_3 = 0, \quad l_4: \quad A_2x + B_2y + C_4 = 0.$$

Заметим, что тогда прямые l_5 и l_6, которые соединяют середины противоположных сторон параллелограмма, имеют следующий вид:

$$l_5: \quad A_1x+B_1y+\frac{1}{2}(C_1 + C_3) = 0, \quad l_6: \quad A_2x+B_2y+\frac{1}{2}(C_2 + C_4) = 0$$

проходят через точку $M_0(x_0, y_0)$

Действительно, точки от прямых l_1 и l_3 равноудалены от прямой l_5. Проведём перпендикуляр к прямым l_1 и l_3 и пусть $M_1(x_1, y_1) \in l_1$, $M_3(x_2, y_2) \in l_3$ — это точки пересечения перпендикуляра. Тогда

$$d(M_1, l_5) = d(M_3, l_5) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{|A_1x_1 + B_1y_1 + C_5|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_1x_3 + B_1y_3 + C_5|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad |A_1x_1 + B_1y_1 + C_5| = |A_1x_3 + B_1y_3 + C_5| \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad A_1x_1 + B_1y_1 + C_5 = -A_1x_3 - B_1y_3 - C_5,$$

поскольку точки M_1 и M_3 лежат по разные стороны от прямой l_5. Осталось воспользоваться равенствами

$$C_1 = -A_1x_1 - B_1y_1, \quad C_3 = -A_1x_3 - B_1y_3$$

и получить равенство

$$C_5 = \frac{C_1 + C_3}{2}.$$

Аналогичным образом доказывается, что для прямой l_6, заданной уравнением $A_2x + B_2y + C_6 = 0$ имеет место следующее равенство:

$$C_6 = \frac{C_2 + C_4}{2}. \quad \boxtimes$$

Поэтому имеем

$$C_3 = -2A_1x_0 - 2B_1y_0 - C_1, \quad C_4 = -2A_2x_0 - 2B_2y_0 - C_2.$$

Задача 5.8. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3 + C_3 = 0$ образовывали треугольник.

Решение. Очевидно, что необходимо, чтобы эти прямые попарно пересекались, но не совпадали. Это значит, что любые два уравнения из трёх имели единственное решение. Таким образом,

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Однако, нам нужно исключить случай, когда все три прямые пересекаются в единственной точке. Для этого необходимо потребовать, чтобы система трёх уравнений не имела решение, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, в этом случае расширенная матрицы системы имеет ранг, равный трём, в то время как ранг основной матрицы системы равен двум. Согласно теореме Кронеккера–Капелли решений у этой системы трёх уравнений нет.

Задача 5.9. Пусть заданы две различные прямые на плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

которые пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$. Доказать, что уравнение произвольной прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет следующий вид:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 > 0. \quad (5.9.1)$$

Это уравнение называется *уравнением пучка прямых на плоскости*: пучок прямых — это множество всех прямых на плоскости, проходящих через задаанную точку.

Решение. Прежде всего докажем, что уравнение (5.9.1) действительно описывает прямую. Предположим, что

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0.$$

Поскольку прямые различны, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

но это противоречит тому, что по условию $\alpha^2 + \beta^2 > 0$. Значит, (5.9.1) — это уравнение прямой.

Теперь докажем, что произвольная прямая $l_3 : A_3x+B_3y+C_3 = 0$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид (5.9.1). Пусть $M_1(x_1, y_1)$ — это точка прямой l_3, отличная от точки $M_0(x_0, y_0)$. Тогда рассмотрим уравнение (5.9.1) с параметрами

$$\alpha = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2, \quad \beta = -A_1x_1 - B_1y_1 - C_1,$$

которые одновременно в ноль не обращается, поскольку точка $M_1(x_1, y_1)$ не может лежать одновременно на двух различных заданных нам ранее прямых, и получим уравнение прямой

$$(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1)-$$
$$- (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Это уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, и значит совпадает с прямой l_3.

Задача 5.10. Даны уравнения сторон треугольника:

$$BC: \ x + 2y = 1, \quad AC: \ 5x + 4y = 17, \quad AB: \ x - 4y = -11.$$

Не определяя координат его вершин, составьте уравнения высот этого треугольника.

Решение. Найдём уравнение высоты CH, исходящей из вершины C. Прямая CH принадлежит пучку $\pi(C)$ с центром C (см. задачу 5.9), её уравнение можно представить в виде

$$\alpha(x+2y-1)+\beta(5x+4y-17)=0$$

или после преобразования

$$x(\alpha+5\beta)+y(2\alpha+4\beta)=\alpha+17\beta.$$

Кроме того, эта прямая перпендикулярна стороне AB, т.е. нормальные векторы $\boldsymbol{n}_{CH}=(\alpha+5\beta;2\alpha+4\beta)$ и $\boldsymbol{n}_{AB}=(1;-4)$ ортогональны, так что их скалярное произведение равно нулю:

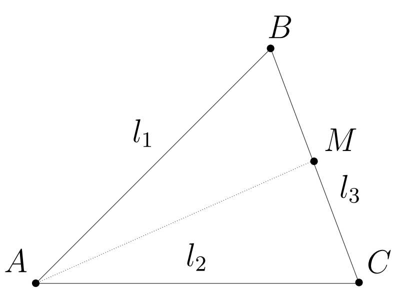
$$(\boldsymbol{n}_{CH},\boldsymbol{n}_{AB})=1\cdot(\alpha+5\beta)+(-4)\cdot(2\alpha+4\beta)=-7\alpha-11\beta=0.$$

Взяв в качестве решения этого уравнения $\alpha=-11$, $\beta=7$, получаем уравнение высоты CH: $4x+y=18$. Уравнения остальных высот треугольника находятся аналогично. Окончательный ответ: $4x+y=18$, $4x-5y=-22$, $2x-y=-1$.

Задача 5.11. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\quad A_2x+B_2y+C_2=0,\quad A_3x+B_3y+C_3=0.$$

Написать уравнение медианы, проведённой из точки пересечения первой и второй сторон.



Решение. Искомое уравнение имеет следующий вид:

$$\alpha\,(A_1x+B_1y+C_1)+\beta\,(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

Пусть $B=(x_B,y_B)$ и $C=(x_C,y_C)$. Тогда имеем

$$A_1x_B+B_1y_B+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_3x_B+B_3y_B+C_3=0;$$

$$A_2x_C+B_2y_C+C_2=0 \quad \text{и} \quad A_3x_C+B_3y_C+C_3=0.$$

Отсюда получаем следующие равенства:

$$x_C = -\frac{\begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_C = -\frac{\begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}},$$

$$x_B = -\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad y_B = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

При этом основание медианы $M = (x_M, y_M)$ и имеют место следующие равенства:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Справедливо следующее равенство:

$$\alpha\,(A_1 x_C + A_1 x_B + B_1 y_C + B_1 y_B + 2C_1) + \\ + \beta\,(A_2 x_C + A_2 x_B + B_2 y_C + B_2 y_B + 2C_2) = 0.$$

Отсюда сразу же получаем равенство

$$\alpha\,(A_1 x_C + B_1 y_C + C_1) + \beta\,(A_2 x_B + B_2 y_B + C_2) = 0. \qquad (5.11.1)$$

После подстановки в это равенство равенств для x_B, y_B, x_C и y_C получим равенство следующего вида:

$$\frac{\alpha}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} D_1 + \frac{\beta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} D_2 = 0, \qquad (5.11.2)$$

где

$$D_1 = -A_1 \begin{vmatrix} C_2 & B_2 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_2 & C_2 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$D_2 = -A_2\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_3 & B_3 \end{vmatrix} - B_2\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_3 & C_3 \end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В результате приходим к одному из решений

$$\alpha = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Итак, уравнение медианы следующее:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}(A_1x + B_1y + C_1) + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Задача 5.12. Докажите, что уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, может быть записано в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Вычтем третью строку определителя из первой и второй:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & 0 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

и теперь раскроем по элементам последнего столбца:

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = 0.$$

Получившееся уравнение есть не что иное, как каноническое уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Задача 5.13. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad A_3x + B_3y + C_3 = 0.$$

Составить уравнение высоты треугольника, опущенной из точки пересечения первых двух сторон на третью его сторону. *Система координат декартова прямоугольная.*

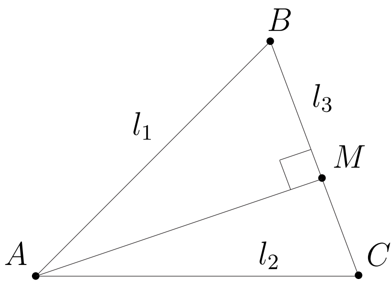


Рис. 5.1. К задаче 8.

Решение. Итак, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)\, x + (\alpha B_1 + \beta B_2)\, y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0.$$

Направляющий вектор этой прямой имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{a} = \{-\alpha B_1 - \beta B_2, \alpha A_1 + \beta A_2\}.$$

Направляющий вектор третьей стороны

$$\boldsymbol{b} = \{-B_3, A_3\}.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются ортогональными. Поэтому получим равенство

$$\alpha\,(A_1 A_3 + B_1 B_3) + \beta\,(A_2 A_3 + B_2 B_3) = 0.$$

В качестве одного из решений возьмём

$$\alpha = A_2 A_3 + B_2 B_3, \quad \beta = -A_1 A_3 - B_1 B_3.$$

Итак, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$(A_2 A_3 + B_2 B_3)\,(A_1 x + B_1 y + C_1) = (A_1 A_3 + B_1 B_3)\,(A_2 x + B_2 y + C_2).$$

Задача 5.14. Стороны треугольника заданы уравнениями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0, \quad A_3 x + B_3 y + C_3 = 0.$$

Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника, образованного первой и второй прямыми.

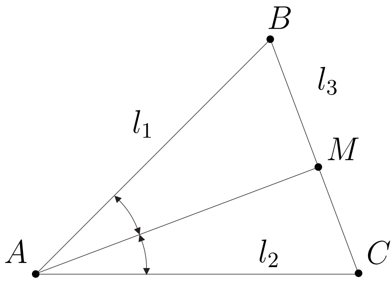


Рис. 5.2. К задаче 9.

Решение. Пусть указанная в условии задачи вершина $A = (x_0, y_0)$. Векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \{-B_1, A_1\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{a}_2 = \{-B_2, A_2\}$$

— это направляющие векторы первой и второй прямых. Тогда мы можем записать уравнения первой и второй прямых в следующих параметрических формах:

$$l_1: \quad x = x_0 - B_1 t \quad \text{и} \quad y = y_0 + A_1 t,$$

$$l_2: \quad x = x_0 - B_2 \tau \quad \text{и} \quad y = y_0 + A_2 \tau.$$

Найдём значения параметров t_0 и τ_0, соответствующих точкам пересечения прямых l_1 и l_2 с третьей прямой l_3. Справедливы следующие равенства:

$$A_3(x_0 - B_1 t_0) + (B_3 y_0 + A_1 t_0) + C_3 = 0,$$

$$A_3(x_0 - B_2 \tau_0) + (B_3 y_0 + A_2 \tau_0) + C_3 = 0,$$

$$t_0 = -\frac{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3}{\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}}, \quad \tau_0 = -\frac{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}}.$$

Пусть $B = (x_B, y_B)$ и $C = (x_C, y_C)$. Теперь находим длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_0)^2 + (y_B - y_0)^2},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2},$$

где

$$x_B = x_0 - B_1 t_0, \quad y_B = y_0 + A_1 t_0,$$

$$x_C = x_0 - B_2 \tau_0, \quad y_C = y_0 + A_2 \tau_0.$$

Итак, имеем

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \left| \frac{A_3x_0 + B_3y_0 + C_3}{\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}} \right|,$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{A_2^2 + B_2^2} \left| \frac{|A_3x_0 + B_3y_0 + C_3|}{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}} \right|.$$

Введём параметр λ:

$$\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \left| \frac{\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}} \right|.$$

Пусть Q — это точка пересечения биссектрисы с третьей стороной треугольника. Согласно результату задачи 2.1 имеем

$$x_Q = \frac{x_B + \lambda x_C}{1 + \lambda}, \quad y_Q = \frac{y_B + \lambda y_C}{1 + \lambda},$$

где $Q = (x_Q, y_Q)$ — основание биссектрисы. Уравнение искомой биссектрисы имеет следующий вид:

$$\alpha\,(A_1x + B_1y + C_1) + \beta\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Точка Q по определению лежит на биссектрисе. Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\alpha\,(A_1x_B + \lambda A_1x_C + B_1y_B + \lambda B_1y_C + (1 + \lambda)C_1) + \\ + \beta\,(A_2x_B + \lambda A_2x_C + B_2y_B + \lambda B_2y_C + (1 + \lambda)C_2) = 0.$$

Заметим, что

$$A_1x_B + B_1y_B + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x_C + B_2y_C + C_2 = 0.$$

Поэтому имеет место следующее равенство:

$$\lambda\alpha\,(A_1x_C + B_1y_C + C_1) + \beta\,(A_2x_B + B_2y_B + C_2) = 0.$$

Далее рассуждая точно также как и при решении задачи 5.11 (ср. с формулами (5.11.1) и (5.11.2)), приходим к равенствам

$$\frac{\lambda\alpha}{\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} = \frac{\beta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}\alpha = \frac{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}\beta.$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, \quad \beta = \frac{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)+$$
$$+\frac{\operatorname{sign}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2)=0.$$

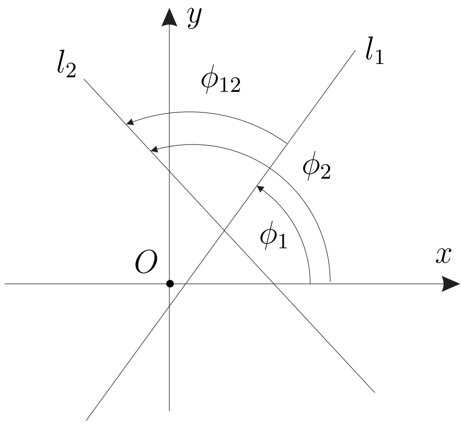
Задача 5.15. Доказать, что если три прямые, образующие треугольник ABC, занумерованы числами 1, 2, 3, то три угла ϕ_{12}, ϕ_{23}, ϕ_{31} — угол от первой прямой до второй, угол от второй прямой до третьей и угол от третьей прямой до первой — являются одновременно либо внутренними углами треугольника, либо внешними его углами.

Решение. При определении угла от первой прямой BC до второй прямой CA за направляющие векторы этих прямых возьмем векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$. Угол от второй прямой CA до третьей прямой AB определим как угол от вектора $\overrightarrow{AC}$ до вектора $\overrightarrow{AB}$. Наконец, угол от третьей прямой AB до первой прямой BC определим как угол от вектора $\overrightarrow{BA}$ до вектора $\overrightarrow{BC}$. Так как упорядоченные пары векторов $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ имеют одну и туже ориентацию, то все три угла: от $\overrightarrow{CB}$ до $\overrightarrow{CA}$, от $\overrightarrow{AC}$ до $\overrightarrow{AB}$ и от $\overrightarrow{BA}$ до $\overrightarrow{BC}$ — будут положительны, если указанные пары векторов имеют положительную ориентацию, и отрицательны в противном случае. Если рассматриваемые углы оказываются положительными, то они являются внутренними углами треугольника. Если же все три угла:

от $\overrightarrow{CB}$ до $\overrightarrow{CA}$, от $\overrightarrow{AC}$ до $\overrightarrow{AB}$ и от $\overrightarrow{BA}$ до $\overrightarrow{BC}$ — оказываются отрицательными, то положительными будут угла от $-\overrightarrow{CB}$ до $\overrightarrow{CA}$, от $-\overrightarrow{AC}$ до $\overrightarrow{AB}$ и от $-\overrightarrow{BA}$ до $\overrightarrow{BC}$, т.е. внешние углы треугольника ABC.

Задача 5.16. Найти угол ϕ_{12} между прямыми l_1 и l_2, заданные уравнениями

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2.$$



Решение. Искомый угол ϕ_{12} равен

$$\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1,$$

где углы ϕ_1 и ϕ_2 — это углы между осью абсцисс и соответствующим прямыми, отсчитываемые в одном направлении от оси абсцисс. Тогда имеем

$$\operatorname{tg}\phi_{12} = \operatorname{tg}(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\sin\phi_2\cos\phi_1 - \cos\phi_2\sin\phi_1}{\cos\phi_2\cos\phi_1 + \sin\phi_2\sin\phi_1} = \\ = \frac{\operatorname{tg}\phi_2 - \operatorname{tg}\phi_1}{1 + \operatorname{tg}\phi_1\operatorname{tg}\phi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

поскольку

$$k = \operatorname{tg}\phi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\phi_2.$$

Задача 5.17. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями

$$3x - y + 6 = 0, \quad x - y + 4 = 0, \quad x + 2y = 0.$$

Решение. Пусть первая прямая l_1 — это $3x - y + 6 = 0$, вторая прямая l_2 — это $x - y + 4 = 0$, третья l_3 — это $x + 2y = 0$. Соответствующие угловые коэффиценты

$$k_1 = 3, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -\frac{1}{2}.$$

Согласно общей формуле задачи 5.16 имеем

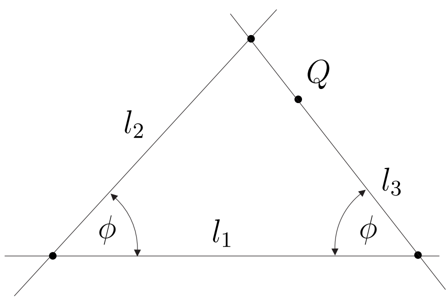
$$\operatorname{tg}\phi_{12} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\phi_{23} = \frac{k_3 - k_2}{1 + k_3 k_2} = -3,$$

$$\operatorname{tg}\phi_{31} = \frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3} = -7.$$

Все тангенсы углов отрицательны; это означает, что они все тупые, т.е. являются внешними углами треугольника. Таким образом, внутренние углы равны соответственно

$$\arctan\frac{1}{2}, \quad \arctan 3, \quad \arctan 7.$$

Задача 5.18. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $2x - 5y + 1 = 0$, а боковая сторона — на прямой $12x - y - 23 = 0$. Написать уравнение прямой, содержащей другую боковую сторону треугольника, зная, что она проходит через точку $Q(3, 1)$.



Решение. Пусть

$$l_1: \quad 2x - 5y + 1 = 0, \quad l_2: \quad 12x - y - 23 = 0, \quad l_3: \quad y = k_3 x + b_3.$$

Тогда

$$k_1 = \frac{2}{5}, \quad k_2 = 12.$$

Имеем

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = 2.$$

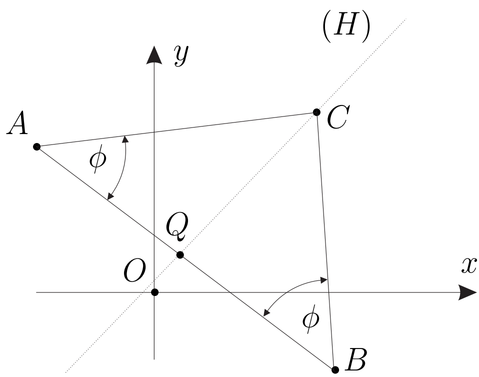
Но тогда

$$2 = \operatorname{tg}\phi = \frac{k_1 - k_3}{1 + k_1 k_3} \Rightarrow k_3 = -\frac{8}{9}.$$

С учётом условия, что $Q = (3, 1) \in l_3$ приходим к уравнению

$$9y + 8x - 33 = 0.$$

Задача 5.19. Концы основания равнобедренного треугольника находятся в точках $A = (-3, 4)$, $B = (6, -2)$; тангенс угла при основании равен $3/2$. Найти координаты вершины C, зная, что начало координат и точка C лежат по разные стороны от прямой AB.



Решение. Сначала найдём уравнение прямой AB:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \Rightarrow \quad 2x + 3y - 6 = 0.$$

Угловой коэффициент равен $k_1 = -2/3$. Будем искать уравнение прямой AC в виде $y = k_2 x + b$. Возможны два случая: либо

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{5}{12},$$

либо

$$\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \infty.$$

Поэтому уравнение прямой AC имеет вид

$$y = \frac{5}{12}x + b \quad \text{либо} \quad x + b = 0.$$

Поскольку точка $A = (-3, 4)$ принадлежит обеим прямым, то

$$y = \frac{5}{12}x + \frac{21}{4} \quad \text{либо} \quad x + 3 = 0.$$

Найдём теперь уравнение прямой (H), содержащей высоту треугольника, опущенную из точки C на основание AB. Очевидно,

$$(H): \quad -3x + 2y + c_1 = 0.$$

Пусть точка $Q = (x_Q, y_Q)$ — это основание высоты. Поскольку треугольник равнобедренный с основанием AB, то

$$x_Q = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{3}{2}, \quad y_Q = \frac{1}{2}(y_A + y_B) = 1$$

Очевидно, что $Q \in (H)$, поэтому находим

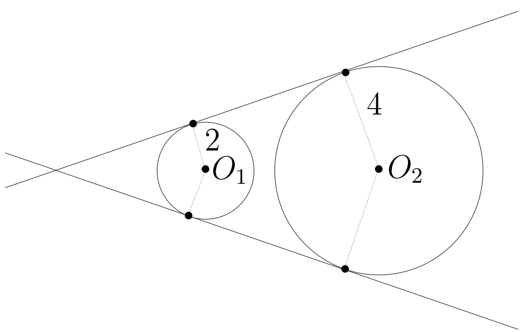
$$(H): \quad -3x + 2y + \frac{5}{2} = 0.$$

Пересечение прямых (AC) и (H) даёт искомые координаты точки C:

$$C = \left(6, \frac{31}{4}\right) \quad \text{либо} \quad C = \left(-3, -\frac{23}{4}\right).$$

Под условие задачи подходит только точка $C = \left(6, \dfrac{31}{4}\right)$.

Задача 5.20. Найти общие касательные к двум окружностям, центры которых находятся в точках $O_1(1,1)$ и $O_2(2,3)$, а радиусы соответственно равны 2 и 4.



Решение. Будем искать уравнение касательной в виде $y = kx + b$. Из условия задачи следует, что точка $O_1(1,1)$ отстоит от касательной на расстоянии 2, а точка $O_2(2,3)$ отстоит от касательной на расстоянии 4. Тогда имеем два равенства

$$2 = \frac{|1 - k - b|}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad 4 = \frac{|3 - 2k - b|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Отсюда получаем следствие

$$|3-2k-b| = 2|1-k-b|.$$

Первый случай:

$$(3-2k-b) = 2(1-k-b) \quad \Rightarrow \quad b=-1.$$

Следовательно,

$$2 = \frac{|2-k|}{\sqrt{1+k^2}} \quad \Rightarrow \quad 4(1+k^2) = (2-k)^2$$

так что

$$3k^2+4k=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=0 \quad \text{и} \quad k=-\frac{4}{3},$$

и получаем две касательные:

$$y+1=0, \quad 4x+3y+3=0.$$

Второй случай:

$$3-2k-b = 2(b+k-1) \quad \Rightarrow \quad b=\frac{5-4k}{3}.$$

Следовательно,

$$2 = \frac{\left|1-k+\dfrac{4k-5}{3}\right|}{\sqrt{1+k^2}},$$

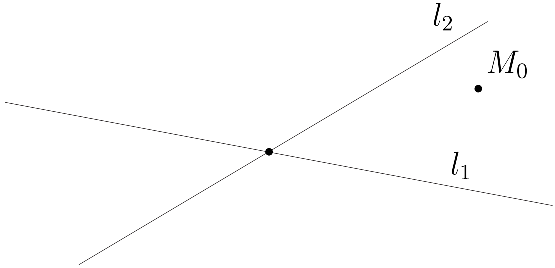
$$6\sqrt{1+k^2} = |k-2| \Rightarrow 35k^2+4k+32=0.$$

Вещественных корней у последнего квадратного уравнения нет.

Задача 5.21. Даны две пересекающиеся прямые

$$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0, \quad l_2:\ A_2x+B_2y+C_2=0$$

и точка $M_0(x_0,y_0)$, не принадлежащая ни одной из этих прямых. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит данная точка.



Решение. Биссектриса определяется как геометрическое место точек равноудаленных от двух заданных прямых. Рассмотрим два равенства

$$d_1(x_0, y_0) = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad d_2(x_0, y_0) = \frac{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Это ориентированное расстояние от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ до двух прямых, причем знак ориентированного расстояния от произвольной точки $M = (x, y)$ до тех же прямых сохраняется внутри угла, если точка $M(x, y)$ лежит в том же угле, что и точка $M_0 = (x_0, y_0)$. Имеются две биссектрисы с уравнениями

$$d_1(x, y) = d_2(x, y) \quad \text{и} \quad d_1(x, y) = -d_2(x, y),$$

в зависимости от знаков ориентированных расстояний. Итак,

$$\frac{\operatorname{sign}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1) = \\ = \frac{\operatorname{sign}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2)$$

для биссектрисы того угла, в котором лежит точка $M_0(x_0, y_0)$. Действительно, если точка $M(x, y)$ лежит в том же угле, что и точка $M_0(x_0, y_0)$ то тогда знаки следующих пар выражений одинаковые:

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1,$$
$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2,$$

поскольку точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$ лежат по одну сторону от обеих частей. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{sign}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1) = \frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},$$
$$\frac{\operatorname{sign}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2) = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

поскольку для точек биссектрисы выполнено равенство

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

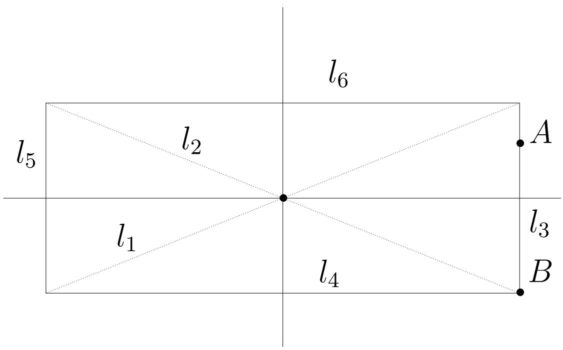
С другой стороны, для точек биссектрисы смежного угла точка $M(x, y)$ и точка $M_0(x_0, y_0)$ лежат по одну сторону от одной из прямых и по разные стороны от другой прямой и поэтому биссектриса смежного угла имеет следующий вид:

$$\frac{\operatorname{sign}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}(A_1x + B_1y + C_1) = \\ = -\frac{\operatorname{sign}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}(A_2x + B_2y + C_2).$$

Задача 5.22. Написать уравнения сторон прямоугольника, зная уравнения его диагоналей

$$l_1 : \ 7x - y + 4 = 0, \quad l_2 : \ x + y - 2 = 0$$

и внутреннюю точку $A = (3, 5)$ одной из его сторон.



Решение. Согласно результату задачи 5.21 биссектриса того угла, в котором лежит точка $A(3, 5)$, имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{50}}(7x - y + 4) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 2),$$

т.е. уравнение биссектрисы этого угла $x - 3y + 7 = 0$. Тогда уравнение взаимной биссектрисы имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{50}}(7x - y + 4) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 2) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad 6x + 2y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + y - \frac{3}{2} = 0.$$

Ищем уравнение стороны прямоугольника параллельной данной биссектрисе в виде $3x + y + c_1 = 0$. Из условия, что $A = (3, 5) \in l_3$ приходим к искомому уравнению $3x + y - 14 = 0$. Параллельную сторону l_5 прямоугольника ищем в виде

$$3x + y + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2 - 14}{2} = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 11.$$

Итак, уравнение параллельной стороны имеет вид $3x + y + 11 = 0$.

Уравнение других двух параллельных сторон прямоугольника ищем в виде $x - 3y + c_3 = 0$. Найдем одну из вершин прямоугольника:

$$B(x_B, y_B) = l_2 \cap l_3 : \quad \begin{cases} x_B + y_B - 2 = 0, \\ 3x_B + y_B - 14 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B = (6, -4).$$

Поэтому $x - 3y - 18 = 0$.

Далее, ищем точку пересечения $C = (x_C, y_C) = l_1 \cap l_3$:

$$7x_C - y_C + 4 = 0, \quad 3x_C + y_C - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = (1, 11).$$

Уравнение стороны l_6 ищем в виде $x - 3y + c_4 = 0$; так как $C(1, 11) \in l_6$, находим $c_4 = 32$. Итак, уравнение стороны l_6 имеет вид $x - 3y + 32 = 0$.

Задача 5.23. На плоскости даны две ортогональные системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(2; 3)$, а базисные векторы второй системы получены из базисных векторов первой поворотом против часовой стрелки на угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$. Прямая задана в первой системе координат уравнением $3x + 2y = 6$. Найдите уравнение этой прямой во второй системе координат.

Решение. Найдем синус и косинус угла поворота системы координат:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{9}{25}, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{16}{25};$$

поскольку $0 < \alpha < \pi/2$, имеем $\cos \alpha = 3/5$, $\sin \alpha = 4/5$, и матрица перехода от ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ к ортонормированному базису $\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2$, а также матрица обратного перехода равны

$$C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = C^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(напомним, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортогональна, т.е. $C^{-1} = C^T$).

Формулы преобразования координат имеют вид

$$X = CX' + X_0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прямой $3x + 2y = 6$ представим в виде $AX = 6$, где $A = (3; 2)$ — строка коэффициентов уравнения. В системе координат $O'\boldsymbol{e}'_1\boldsymbol{e}'_2$ уравнение будет иметь вид

$$AX = 6 \;\Leftrightarrow\; A\Big(CX' + X_0\Big) = 6 \;\Leftrightarrow\; (AC)X' + AX_0 = 6.$$

Проведём необходимые вычисления:

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$AX_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 12,$$

так что уравнение примет вид

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 12 = 6 \;\Leftrightarrow\; x' - 6y' + 30 = 0.$$

Задача 5.24. В произвольной аффинной системе координат $O\boldsymbol{E}$ на плоскости даны уравнения пересекающихся прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и точка $E(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Принимая эти прямые соответственно за ось ординат и ось абсцисс новой системы координат и считая, что в новой системе координаты точки E равны $(1; 1)$, найдите выражения новых координат (x', y') произвольной точки через её старые координаты.

Решение. Формулы, выражающие новые координаты через старые, имеют вид

$$x' = c_1^1 x + c_1^2 y + x_1, \quad y' = c_2^1 x + c_2^2 y + y_1,$$

где (x_1, y_1) — неизвестные координаты вектора параллельного переноса начала координат. Поэтому равенство $x' = 0$ выполняется, если

$$c_1^1 x + c_1^2 y + x_1 = 0.$$

С другой стороны, прямая $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ должна быть осью $O'y'$, т.е. для её точек $x' = 0$. Следовательно, уравнения

$$c_1^1 x + c_1^2 y + x_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

задают одну и ту же прямую, что возможно лишь в случае, когда

$$c_1^1 x + c_1^2 y + x_1 = k_1\Big(A_1 x + B_1 y + C_1\Big).$$

Аналогично получаем

$$c_2^1 x + c_2^2 y + y_1 = k_2\Big(A_2 x + B_2 y + C_2\Big).$$

Отсюда следует, что формулы преобразования координат имеют вид

$$x' = k_1\Big(A_1 x + B_1 y + C_1\Big), \quad y' = k_2\Big(A_2 x + B_2 y + C_2\Big).$$

Если точка E имеет в старой системе координаты $(x_0; y_0)$, а в новой — координаты $(1; 1)$, то

$$k_1 = \frac{1}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}, \quad k_2 = \frac{1}{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}.$$

Окончательный вид формул преобразования координат:

$$x' = \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1}, \quad y' = \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2}. \tag{5.24.1}$$

Задача 5.25. В терминах рангов матриц изучить взаимное расположение двух прямых на плоскости.

Решение. Пусть в общей декартовой системе координат две прямые заданы уравнениями

$$l_1: \quad A_1 x + B_1 y = C_1, \quad l_2: \quad A_2 x + B_2 y = C_2,$$

где $A_1^2 + B_1^2 > 0$, $A_2^2 + B_2^2 > 0$. Итак, рассматривается система уравнений

$$A_1 x + B_1 y = C_1, \quad A_2 x + B_2 y = C_2. \tag{5.25.1}$$

Рассмотрим две матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Случай 1: прямые пересекаются. Это означает, что система двух уравнений (5.25.1) относительно двух неизвестных — координат общей точки $M(x, y)$ — имеет единственное решение. С точки зрения теоремы Кронекера—Капелли это означает, что

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 2. \tag{5.25.2}$$

Случай 2: прямые параллельны. Это означает, что система уравнений (5.25.1) несовместна. Следовательно,

$$\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \tilde{A}.$$

Поскольку по условию $A_1^2 + B_1^2 > 0$ и $A_2^2 + B_2^2 > 0$, то $\operatorname{rang} A = 1$. Поэтому $\operatorname{rang} \tilde{A} = 2$.

Случай 3: прямые совпадают. Это означает, что уравнения прямых пропорциональны, т.е.

$$A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2$$

при некотором $\lambda \neq 0$. Это означает, что

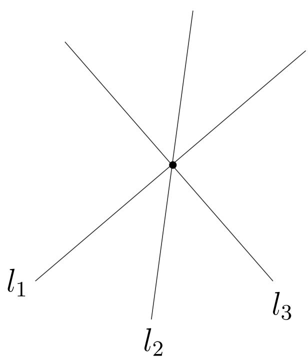
$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = 1.$$

Задача 5.26. В терминах рангов матриц изучить взаимное расположение трех прямых на плоскости.

Решение. Пусть прямые l_1, l_2 и l_3 заданы своими общими уравнениями в некоторой общей декартовой системе координат:

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3.$$

Случай 1: прямые пересекаются в единственной точке.



С одной стороны, это означает, что каждые две прямые из трех пересекаются в единственной точке, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, при этом система всех трех уравнений совместна, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

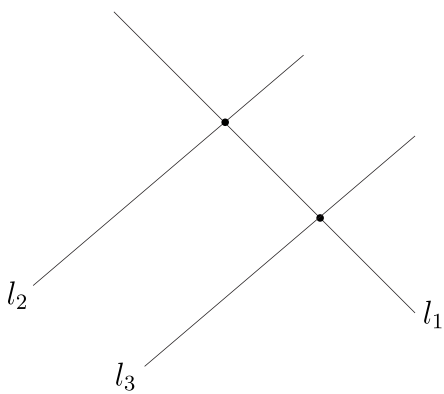
Случай 2: прямые попарно пересекаются, но все три прямые не имеют общих точек. С одной стороны, любые два уравнения из трех имеют единственное решение, что означает выполнение равенств

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система, состоящая из трех уравнений, не имеют решений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3: две прямые из трех параллельны, а третья прямая их пересекает:



Без ограничения общности можно считать, что прямые l_2 и l_3 параллельны, а прямая l_1 их пересекает. С одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют каждая единственное решение, а система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

решений не имеет. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4: две прямые совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения общности будем считать, что прямые l_2 и l_3 совпадают, а прямая l_1 их пересекает. Тогда, с одной стороны, это означает, что системы уравнений

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют каждая единственное решение, а система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеет бесконечное число решений. Итак,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 2,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

Случай 5: три прямые попарно параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из трех не имеют решений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{pmatrix} = 1,$$

но

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6: две прямые из трех совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности, пусть прямые l_2 и l_3 совпадают, а первая прямая им параллельна. С одной стороны, система уравнений

$$A_2x + B_2y = C_2, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

имеют бесконечно много решений, а, с другой стороны, каждая из систем

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_2x + B_2y = C_2$$

и

$$A_1x + B_1y = C_1, \quad A_3x + B_3y = C_3$$

не имеют решений. Поэтому

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7: все три прямые совпадают. Это означает, что совпадают прямые l_1 и l_2 и совпадают прямые l_2 и l_3, т.е.

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1.$$

ГЛАВА 6

Прямая и плоскость в пространстве

Задача 6.1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(-1;5;5)$, $M_2(-3;1;5)$, $M_3(-5;4;-4)$.

Решение. Пусть $M(x,y,x)$ — произвольная точка искомой плоскости. Так как векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z-5 \\ -3+1 & 1-5 & 5-5 \\ -5+1 & 4-5 & -4-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z-5 \\ -2 & -4 & 0 \\ -4 & -1 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение искомой плоскости:

$$18x - 9y - 7z + 98 = 0.$$

Задача 6.2. Найдите уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}, \qquad \frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$$

Решение. В качестве опорной точки искомой плоскости можно взять любую точку первой прямой, например, её опорную точку $M_0(3;0;-1)$ (см. числители в первом уравнении). Направляющими векторами искомой плоскости могут служить направляющие векторы двух данных прямых, т.е. $\boldsymbol{a} = (3;1;3)$ и $\boldsymbol{b} = (0;2;-1)$ (см. знаменатели). Если $M(x,y,z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны, и этот факт может быть записан как равенство нулю определителя, составленного из координат указанных векторов:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 7x - 3y - 6z = 27.$$

Задача 6.3. Найдите расстояние d между параллельными плоскостями $2x - 3y + 6z = 4$ и $2x - 3y + 6z = 18$.

Решение. Данные плоскости действительно параллельны, так как их нормальные векторы совпадают: $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}_2 = (2; -3; 6)$. Расстояние между параллельными плоскостями можно найти как расстояние от произвольной точки первой плоскости (возьмём в качестве таковой $(2; 0; 0)$) до другой плоскости:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{\big|(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0) - 18\big|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = 2.$$

Задача 6.4. Даны плоскость π и три прямые l_1, l_2, l_3:

$$\pi : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad l_1 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 34 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$l_2 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad l_3 : \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 26 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Для каждой из прямых выясните, пересекается ли она с плоскостью, лежит в плоскости или не имеет с ней общих точек. В случае пересечения найдите координаты общей точки плоскости и прямой.

Решение. Преобразуем уравнение плоскости π к виду

$$Ax + By + Cz = D.$$

Опорной точкой плоскости является точка $M_0(6; 3; 3)$, а направляющими векторами — $\boldsymbol{a} = (4; 6; 1)$ и $\boldsymbol{b} = (3; 4; 4)$. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ компланарны, так что определитель, составленный из их координат, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-3 & z-6 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 20x - 13y - 2z = 69;$$

нормальный вектор плоскости есть $\boldsymbol{n} = (20; -13, -2)$.

Вычислим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ с направляющим вектором прямой l_1:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 573.$$

Поскольку $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_1) \neq 0$, прямая l_1 пересекается с плоскостью π. Для нахождения их точки пересечения запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = 34 + 24s, \\ y = 2 - 7s, \\ z = 6 - s. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение плоскости $20x - 13y - 2z = 69$, находим значение параметра s, отвечающее точке пересечения:

$$20(34 + 24s) - 13(2 - 7s) - 2(6 - s) = 69 \quad \Rightarrow \quad s = -1.$$

Таким образом, координаты точки пересечения

$$\begin{cases} x = 34 + 24 \cdot (-1) = 10, \\ y = 2 - 7 \cdot (-1) = 9, \\ z = 6 - (-1) = 7. \end{cases}$$

Вычислим скалярное произведение вектора $\boldsymbol{n}$ с направляющим вектором прямой l_2:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_2) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Таким образом, векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_2$ ортогональны; это означает, что прямая либо лежит в этой плоскости, либо не имеет с ней общих точек. Проверим, лежит ли опорная точка $(9; 7; 10)$ прямой l_2 в плоскости π:

$$20 \cdot 9 - 13 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 69;$$

таким образом, прямая l_2 целиком содержится в плоскости π.

Для прямой l_3 анализ аналогичен:

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}_3) = \left(\begin{pmatrix} 20 \\ -13 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

т.е. векторы $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{a}_3$ ортогональны, и прямая параллельна плоскости (в расширенном смысле). Проверим, лежит ли опорная точка $(26; -10; 4)$ прямой l_3 в плоскости π:

$$20 \cdot 26 - 13 \cdot (-10) - 2 \cdot 4 = 642 \neq 69,$$

т.е. прямая l_3 не имеет общих точек с плоскостью π.

Задача 6.5. Найдите каноническое уравнение прямой, которая задана как пересечение двух плоскостей $y + 2z = 1$ и $x + y + z = 3$. В качестве опорной точки прямой возьмите точку, лежащую в плоскости Oxy.

Решение. Найдём опорную точку прямой, лежащую в плоскости Oxy, т.е. имеющую нулевую аппликату:

$$\begin{cases} y + 2z = 1, \\ x + y + z = 3, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

В качестве направляющего вектора возьмём векторное произведение нормальных векторов плоскостей:

$$\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

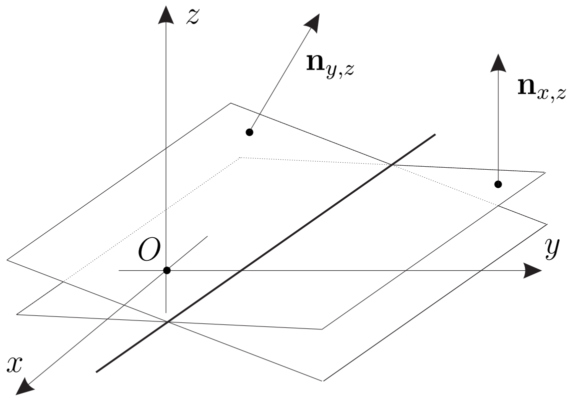
Таким образом, каноническое уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Задача 6.6. Представить прямую

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

как линию пересечения плоскостей, параллельных осям Ox и Oy. Система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ общая декартова.



Решение. Плоскости

$$\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \quad \frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$$

параллельны осям Ox и Oy соответственно. Действительно, общий вид плоскости, проходящей через точку $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ параллельно векторам

$$\boldsymbol{a}=\{a,b,c\}, \quad \boldsymbol{e}_1=\{1,0,0\}$$

следующий:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}.$$

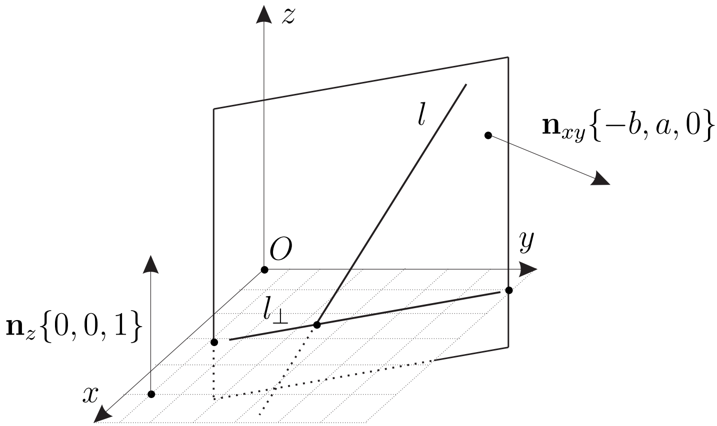
Аналогично общий вид второй плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}.$$

Задача 6.7. Найти ортогональные проекции прямой

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \tag{6.7.1}$$

на координатные плоскости Oyz, Ozx, Oxy. Система координат $\{O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ декартова прямоугольная.



Решение. Докажем, например, что ортогональная проекция заданной прямой на плоскость Oyz имеет вид

$$x = 0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Действительно, уравнение прямой (6.7.1) можно переписать в параметрическом виде:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct. \tag{6.7.2}$$

Докажем, что эта прямая лежит на плоскости

$$p_{yz}: \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \tag{6.7.3}$$

Подставив уравнения (6.7.2) в уравнение плоскости (6.7.3), получим тождество. С одной стороны, вектор нормали $\boldsymbol{n}_{yz}$ к плоскости p_{yz} имеет вид

$$\boldsymbol{n}_{yz} = \{0, c, -b\}. \tag{6.7.4}$$

С другой стороны, вектор нормали к плоскости p_x (ее уравнение $x = 0$) имеет вид $\boldsymbol{n}_x = \{1, 0, 0\}$. Векторы

$$\boldsymbol{n}_{yz}, \quad \boldsymbol{n}_x$$

ортогональны. Поэтому плоскости p_{yz} и p_x ортогональны, и плоскость p_{yz} содержит указанную в условии задачи прямую. Следовательно, ортогональная проекция этой прямой на плоскость $x = 0$ — это пересечение двух плоскостей

$$x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Аналогичным образом получаем, что ортогональная проекция прямой на плоскость Oxz имеет вид

$$y = 0, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c},$$

а на плоскость Oxy — вид

$$z = 0, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

Задача 6.8. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $M_1 = (0, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью. Система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ общая декартова.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 имеет вид

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y - y_1}{-y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Положим в этом равенстве $z = 0$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = -x_2 \frac{z_1}{z_2 - z_1}, \quad y = y_1 + y_1 \frac{z_1}{z_2 - z_1} = y_1 \frac{z_2}{z_2 - z_1}.$$

Итак,

$$M_3 = \left(-x_2 \frac{z_1}{z_2 - z_1}, y_1 \frac{z_2}{z_2 - z_1}, 0\right).$$

Задача 6.9. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $y + 2z = 0$ и пересекающей прямые

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad z = 4t$$

и

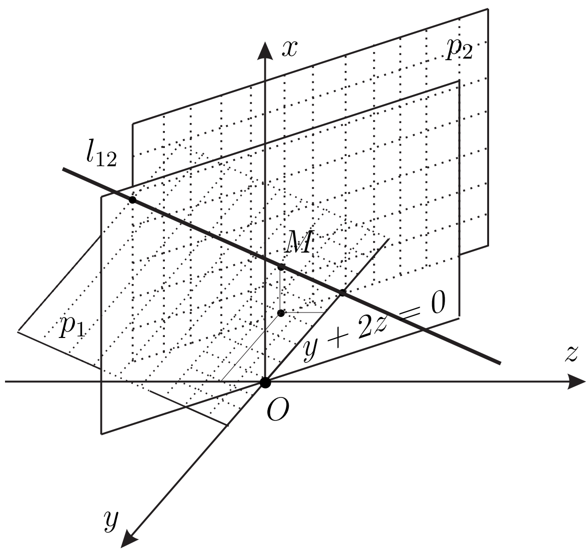
$$x = 2 - \tau, \quad y = 4 + 2\tau, \quad z = 1.$$

Система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ общая декартова.

Решение. Находим точки пересечения указанных двух прямых с плоскостью $y + 2z = 0$. Получим $M_1 = (1, 0, 0)$, $M_2 = (5, -2, 1)$. Проведём прямую через эти точки; ее уравнение

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y}{-2} = z \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 + 4s, \quad y = -2s, \quad z = s.$$

Задача 6.10. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M = (3, -1, -4)$, пересекающей ось Oy и коллинеарной плоскости $y + 2z = 0$. Система координат аффинная.



Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $M = (3, -1, -4)$ и содержащую ось Oy. Для этого достаточно написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(3, -1, -4)$ и $O(0, 0, 0)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, который коллинеарен оси Oy. Уравнение следующее:

$$p_1 : \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z+4 \\ 3-0 & -1-0 & -4-0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3z + 4x = 0. \qquad (6.10.1)$$

Заметим, что имеется общий результат: уравнение плоскости, параллельной $Ax+By+Cz+D = 0$, имеет вид $Ax+By+Cz+D_1 = 0$. Поэтому найдём плоскость, параллельную плоскости $y + 2z = 0$ и проходящую через точку $M = (3, -1, -4)$. Уравнение искомой плоскости ищем в виде

$$p_2 : \ y + 2z + 9 = 0. \qquad (6.10.2)$$

Отметим, что плоскости (6.10.1) и (6.10.2) не параллельны. Значит, они пересекаются. При этом по построению искомая прямая $l_{12} = p_1 \cap p_2$:

1. $M \in p_1 \cap p_2 = l_{12}$,

2. $l_{12} \cap Oy \neq \emptyset$. Последнее утверждение, проверяется непосредственно. Уравнение оси Oy — это пересечение двух плоскостей $x = 0$ и $z = 0$. Тогда из уравнений (6.10.1) и (6.10.2) плоскостей получим, что

$$p_1 \cap p_2 \cap Oy = M_1(0, -9, 0).$$

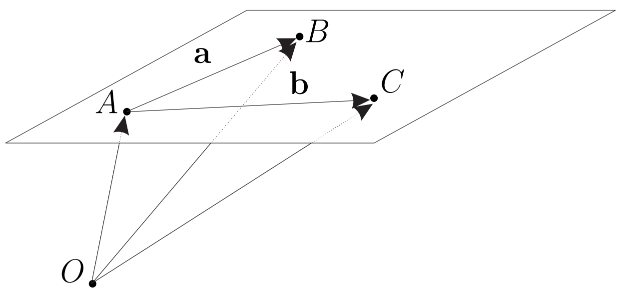
3. $l_{12} \in p_2$, а по построению плоскость p_2 параллельна плоскости $y + 2z = 0$. Значит, прямая l_{12} коллинеарна плоскости.

Итак, уравнение искомой прямой можно записать в виде $3z + 4x = 0$, $y + 2z + 9 = 0$.

Задача 6.11. В плоскости, проходящей через точки

$$A = (2, 1, 3), \quad B = (2, 4, 0), \quad C = (-3, 0, 4),$$

выбрана аффинная система координат с началом в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти: (1) пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u = 5$, $v = 3$; (2) плоскостные координаты (u, v) точки пересечения данной плоскости с осью Oz. Система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ общая декартова.



Решение. Пусть

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{AB} = \{2, 4, 0\} - \{2, 1, 3\} = \{0, 3, -3\},$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = \{-3, 0, 4\} - \{2, 1, 3\} = \{-5, -1, 1\}.$$

Тогда векторное параметрическое уравнение плоскости следующее:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}.$$

Решение первого задания следующее:

$$\boldsymbol{r} = \{2, 1, 3\} + 5\{0, 3, -3\} + 3\{-5, -1, 1\} = \{-13, 13, -9\}.$$

Решение второго задания такое. Произвольный радиус–вектор точки лежащей на оси Oz имеет вид $\boldsymbol{r} = \{0, 0, z\}$. Поэтому справедливы следующие уравнения:

$$0 = 2 + u \cdot 0 + v \cdot (-5) \quad \text{и} \quad 0 = 1 + u \cdot 3 + v \cdot (-1) \Rightarrow u = -\frac{1}{5}, \quad v = \frac{2}{5},$$

$$z = 3 + u \cdot (-3) + v \cdot 1 = 4.$$

Задача 6.12. В плоскости $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ выбрана общая декартова система координат $\{C, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы базисных векторов соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy. 1. Найти пространственные координаты (x, y, z) точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $u = 1$, $v = 1$. 2. Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых (AB), (BC) и (CA). 3. Написать в плоскостной системе координат уравнение прямой пересечения данной плоскости с плоскостью $5x + 3z - 8 = 0$.

Решение. Точки C, A и B имеют следующие координаты:

$$C = (0, 0, 3), \quad A = (-6, 0, 0), \quad B = (0, -4, 0).$$

Пусть

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{CA} = \{-6, 0, -3\}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{CB} = \{0, -4, -3\}.$$

Уравнение плоскости следующее:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_C + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}. \tag{6.12.1}$$

Решение первого задания:

$$\boldsymbol{r}_E = \{0, 0, 3\} + \{-6, 0, -3\} + \{0, -4, -3\} = \{-6, -4, -3\}.$$

Решение для второго задания. Точки A, B и C имеют следующие плоскостные координаты:

$$A = (u_A, v_A) = (1, 0), \quad B = (u_B, v_B) = (0, 1), \quad C = (0, 0).$$

Уравнение (AB) следующее:

$$\frac{u - u_A}{u_B - u_A} = \frac{v - v_A}{v_B - v_A} \Leftrightarrow u + v - 1 = 0.$$

Уравнение (BC) следующее:

$$(BC): \quad \frac{u - u_B}{u_C - u_B} = \frac{v - v_B}{v_C - v_B} \Rightarrow u = 0.$$

Уравнение (CA) следующее:

$$(CA): \quad \frac{u-u_C}{u_A-u_C} = \frac{v-v_C}{v_A-v_C} \Rightarrow v=0.$$

Решение третьего задания. Распишем параметрическое уравнение плоскости, заданной уравнением (6.12.1):

$$x=-6u, \quad y=-4v, \quad z=3-3u-3v.$$

Подставим эти равенства в уравнение плоскости $5x+3z-8=0$ и получим искомое плоскостное уравнение прямой

$$39u+9v-1=0.$$

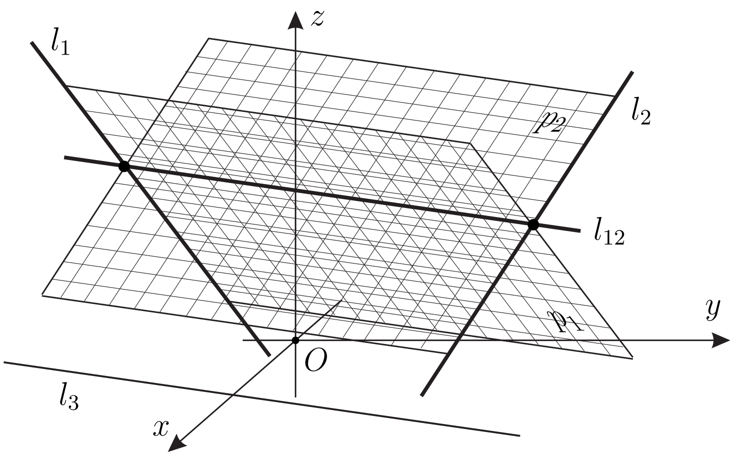
Задача 6.13. Даны три прямые:

$$l_1: \quad x=3+t, \quad y=-1+2t, \quad z=4t,$$

$$l_2: \quad x=-2+3\tau, \quad y=-1, \quad z=4-\tau,$$

$$l_3: \quad x-3y+z=0, \quad x+y-z+4=0.$$

Написать уравнение прямой, пересекающей первые две из данных прямых и параллельной третьей прямой. Система координат $\{O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ общая декартова.



Решение. Сначала для удобства перепишем все три уравнения прямых l_1, l_2 и l_3 в векторной параметрической форме.

□ Действительно, первые прямые примут следующий вид:

$$l_1: \quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1 t, \quad \boldsymbol{r}_1=\{3,-1,0\}, \quad \boldsymbol{a}_1=\{1,2,4\};$$

$$l_2: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2\tau, \quad \boldsymbol{r}_2 = \{-2, -1, 4\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \{3, 0, -1\}.$$

Рассмотрим третью прямую l_3. Найдём какую либо точку прямой l_3. Для этого подставим в уравнения плоскостей, определяющих эти прямые, $z = 0$ и получим следующую систему уравнений:

$$x - 3y = 0 \quad \text{и} \quad x + y = -4 \Leftrightarrow y = -1, \quad x = -3.$$

Итак, точка $M_3(-3, -1, 0) \in l_3$. Теперь найдём направляющий вектор $\boldsymbol{a}_3$ прямой l_3. Его можно выбрать равным

$$\boldsymbol{a}_3 = l\boldsymbol{e}_1 + m\boldsymbol{e}_2 + n\boldsymbol{e}_3 \tag{6.13.1}$$

как нетривиальное решение следующей системы уравнений

$$l - 3m + n = 0 \quad \text{и} \quad l + m - n = 0. \tag{6.13.2}$$

Действительно, вектор нормали $\boldsymbol{n}_1$ к первой плоскости $x-3y+z = 0$ равен

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{f}_1 - 3\boldsymbol{f}_2 + \boldsymbol{f}_3,$$

а вектор нормали $\boldsymbol{n}_2$ ко второй плоскости $x + y - z + 4 = 0$ равен

$$\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2 - \boldsymbol{f}_3,$$

где $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Тогда направляющий вектор прямой пересечения этих двух плоскостей

$$\boldsymbol{a} = l\boldsymbol{e}_1 + m\boldsymbol{e}_2 + l\boldsymbol{e}_3$$

должен быть коллинеарным к обеим плоскостям. Значит, направляющий вектор $\boldsymbol{a}$ должен быть ортогональным обеим нормалям

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_1) = 0, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}_2) = 0, \quad \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}.$$

Из этих равенств приходим к уравнениям (6.13.2). ⊠

Например, нетривиальное решение

$$l = m = \frac{1}{2}, \quad n = 1. \tag{6.13.3}$$

Итак, приходим к следующему векторному параметрическому уравнению прямой l_3 :

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{a}_3 s, \quad \boldsymbol{r}_3 = \{-3, -1, 0\}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Заметим, что *прямые* l_1, l_2 *и* l_3 *не коллинеарны.*

Проведём плоскость через прямую l_1 параллельно прямой l_3. Уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$p_1: \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2y - z + 2 = 0.$$

Проведём теперь плоскость через прямую l_2 параллельно прямой l_3. Уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$p_2: \quad \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 3z - 17 = 0.$$

Искомая прямая является прямой, по которой пересекаются плоскости

$$2y - z + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x - 7y + 3z - 17 = 0.$$

Действительно, прямая l_{12}, по которой пересекаются эти две плоскости

1. параллельны прямой l_3;

2. пересекает прямые l_1 и l_2, поскольку направляющий вектор $\boldsymbol{a}_3$ прямой $l_{12} \| l_3$ не коллинеарен направляющим векторам $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых l_1 и l_2.

Задача 6.14. Показать, что прямые

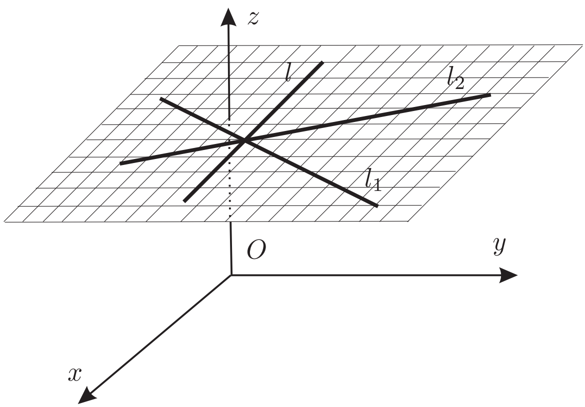
$$l_1: \quad x = 1 + 2t, \quad y = 2t, \quad z = t,$$
$$l_2: \quad x = 11 + 8\tau, \quad y = 6 + 4\tau, \quad z = 2 + \tau$$

пересекаются, и написать уравнение биссектрисы тупого угла между ними. Система координат $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ прямоугольная.

Решение. Перепишем уравнения прямых l_1 и l_2 в векторной параметрической форме. Имеем

$$l_1: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t, \quad \boldsymbol{r}_1 = \{1, 0, 0\}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \{2, 2, 1\},$$

$$l_2: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 \tau, \quad \boldsymbol{r}_2 = \{11, 6, 2\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \{8, 4, 1\}.$$



Ясно, что направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны. Прямые пересекаются если векторы $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \{10, 6, 2\}$ $\boldsymbol{a}_1 = \{2, 2, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2 = \{8, 4, 1\}$ компланарны,, т. е. если следующий определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

но это действительно так:

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10(2-4) - 6(2-8) + 2(8-16) = -20 + 36 - 16 = 0. \quad \boxtimes$$

Найдём координаты точки A пересечения этих двух прямых:

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{a}_1 t - \boldsymbol{a}_2 \tau \Leftrightarrow \{10, 6, 2\} = \{2, 2, 1\}t - \{8, 4, 1\}\tau \Rightarrow \tau = -1, \quad t = 1.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}_A = \{1, 0, 0\} + \{2, 2, 1\} = \{3, 2, 1\}.$$

Следовательно, $A = (3, 2, 1)$. $\boxtimes$

Угол между векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ острый. Значит тупой угол — это угол между векторами $-\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Будем искать направляющий вектор биссектрисы в следующем виде:

$$\boldsymbol{a}_3 = -\lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2,$$

причём

$$-\frac{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_3|}=\frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_3||\boldsymbol{a}_2|}\Leftrightarrow -\frac{(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)}{|\boldsymbol{a}_1|}=\frac{(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_2|}.$$

После подстановки в это равенство координат векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ приходим к следующему равенству:

$$\frac{9\lambda-25\mu}{3}=\frac{-25\lambda+81\mu}{9}\Rightarrow\lambda=3\mu.$$

□ Действительно, имеем

$$|\boldsymbol{a}_1|^2=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)=9\Rightarrow|\boldsymbol{a}_1|=3,$$

$$|\boldsymbol{a}_2|^2=(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)=81\Rightarrow|\boldsymbol{a}_1|=9,$$

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3)=-\lambda(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_1)+\mu(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)=-9\lambda+25\mu,$$

$$(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_2)=-\lambda(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)+\mu(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2)=-25\lambda+81\mu.\quad\boxtimes$$

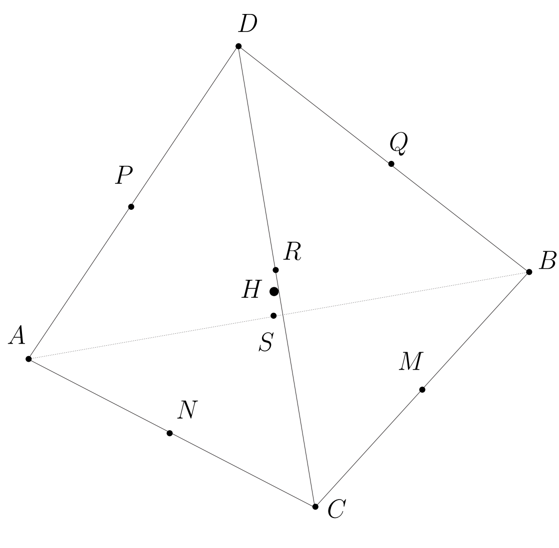
Поэтому имеем

$$\boldsymbol{a}_3=\mu\left(-3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2\right),\quad -3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=2\{1,-1,-1\}=2\boldsymbol{a}_4.$$

Итак искомое уравнение биссектрисы следующее:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{a}_4 s,\quad \boldsymbol{r}_A=\{3,2,1\},\quad \boldsymbol{a}_4=\{1,-1,-1\}.$$

Задача 6.15. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра $ABCD$ и через середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.



Решение. Введём общую декартову систему координат $\{D, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$, где

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \boldsymbol{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \boldsymbol{c} = \overrightarrow{DC}.$$

Пусть

$$M \in BC, \quad N \in AC, \quad S \in AB, \quad P \in AD, \quad Q \in DB, \quad R \in DC$$

— это середины соответствующих рёбер тетраэдра $ABCD$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) = 0 \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{b} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c},$$
$$\overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = 0 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{c}.$$

Тогда в указанной системе координат

$$D = (0,0,0), \quad A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1),$$
$$M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad N = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$
$$P = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad Q = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \quad R = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right).$$

По условию задачи нужно рассмотреть следующие шесть плоскостей:

$$(ADM), \quad (DBN), \quad (DCS), \quad (PBC), \quad (QAC), \quad (RAB).$$

Их уравнения следующие:

$$(ADM): \quad y - z = 0, \quad (DBN): \quad x - z = 0, \quad (DCS): \quad x - y = 0,$$
$$(PBC): \quad x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0, \quad (QAC): \quad \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0,$$
$$(RAB): \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

Действительно, плоскость (ADM) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A \\ x_M-x_A & y_M-y_A & z_M-z_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y-z=0;$$

плоскость (DBN) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_N & y-y_N & z-z_N \\ x_B-x_N & y_B-y_N & z_B-z_N \\ x_D-x_N & y_D-y_N & z_D-z_N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y & z-\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z-x=0;$$

плоскость (DCS) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_S & y-y_S & z-z_S \\ x_C-x_S & y_C-y_S & z_C-z_S \\ x_D-x_S & y_D-y_S & z_D-z_S \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{1}{2} & z \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}-\left(y-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x-y=0;$$

плоскость (PBC) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C & z_B - z_C \\ x_P - x_C & y_P - y_C & z_P - z_C \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

плоскость (QAC) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ x_A - x_C & y_A - y_C & z_A - z_C \\ x_Q - x_C & y_Q - y_C & z_Q - z_C \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

плоскость (RAB) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B & z - z_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ x_R - x_B & y_R - y_B & z_R - z_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z - \frac{1}{2} = 0. \quad \boxtimes$$

Заметим, что плоскости (ADM), (DBN) и (DCS) пересекаются по прямой $x = y = z$. После подстановки этих равенств в любое из уравнений плоскостей (PBC), (QAC) или (RAB) мы получим равенства

$$x = y = z = \frac{1}{4}.$$

Отдельно рассмотрим систему уравнений плоскостей (PBC), (QAC) и (RAB):

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = \frac{1}{2}.$$

Определитель матрицы этой системы равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Поэтому эти три плоскости пересекаются в единственной точке

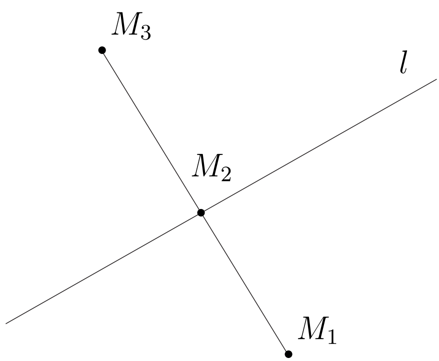
$$H = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

в которой пересекаются и все шесть плоскостей.

Задача 6.16. Найти основание $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикуляра, опущенного из точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ на прямую

$$l: \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

а также точку $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, симметричную точке M_1 относительно прямой l.



Решение. Напишем уравнение плоскости p, проходящей через точку M_1 и перпендикулярно прямой l :

$$p: \ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Напишем параметрические уравнения в координатах прямой

$$l: \ x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$$

Основание перпендикуляра — это точка пересечения $M_2 = p \cap l$:

$$t_0 = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Поэтому имеем

$$x_2 = x_0 + \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} a,$$

$$y_2 = x_0 + \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} b,$$

$$z_2 = x_0 + \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} c.$$

Найдём точку $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, симметричную точке M_1 относительно прямой l :

$$\overrightarrow{M_2 M_1} = \overrightarrow{M_3 M_2}.$$

Из этого равенства имеем

$$x_3 = 2x_2 - x_1 = 2x_0 + 2\frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} a - x_1,$$

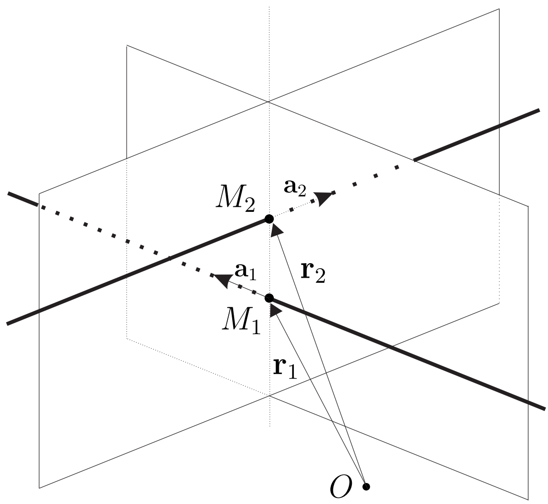
$$y_3 = 2y_2 - y_1 = 2y_0 + 2\frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} b - y_1,$$

$$z_3 = 2z_2 - z_1 = 2z_0 + 2\frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} c - z_1.$$

Задача 6.17. Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым:

$$l_1: \quad \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}, \quad l_2: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

и найти расстояние d между этими прямыми. Система координат $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ — правая декартова прямоугольная.



Решение. Направляющие векторы этих двух прямых

$$\boldsymbol{a}_1 = \{8, 4, 1\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \{2, -2, 1\}.$$

Направляющий вектор $\boldsymbol{b}$ искомого перпендикуляра можно записать в следующем виде:

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) = 6\{1, -1, -4\}.$$

Проведём плоскость p_1 через прямую l_1 параллельно вектору $\boldsymbol{b}$:

$$p_1 : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 11y + 4z + 5 = 0.$$

Проведём плоскость через прямую l_2 параллельно вектору $\boldsymbol{b}$:

$$p_2 : \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0.$$

Искомый перпендикуляр к обеим прямым — это $p_1 \cap p_2$. Действительно, это пересечение прямая, которая параллельна вектору $\boldsymbol{b}$ и проходит через обе прямые.

Задача 6.18. К непересекающимся диагоналям граней куба, имеющих общее ребро, провести общий перпендикуляр. В каком отношении точки пересечения диагоналей с их общим перпендикуляром делят эти диагонали?

Решение. Без ограничения общности можно считать длину ребра куба равной 1. Тогда координаты точек, указанных на рисунке следующие:

$$O = (0, 0, 0), \quad A = (0, 0, 1), \quad C = (0, 1, 0), \quad B = (1, 0, 1).$$

Тогда

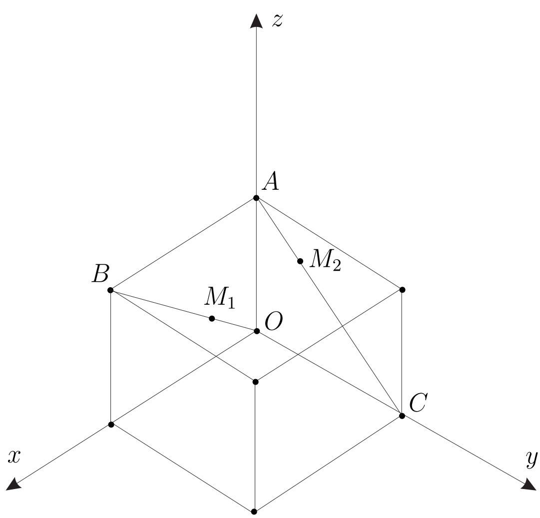
$$l_1 = (OB): \quad x = t, \quad y = 0, \quad z = t;$$

$$l_2 = (AC): \quad x = 0, \quad y = \tau, \quad z = 1 - \tau.$$

Действительно, имеем

$$l_1: \ \frac{x - x_O}{x_B - x_O} = \frac{y - y_O}{y_B - y_O} = \frac{z - z_O}{z_B - z_O} \Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1},$$

$$l_2: \ \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} = \frac{z - z_A}{z_C - z_A} \Leftrightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1}.$$



Направляющие векторы прямых l_1 и l_2 — это векторы

$$\boldsymbol{a}_1 = \{1, 0, 1\}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \{0, 1, -1\}.$$

Вектор $\boldsymbol{b}$, перпендикулярный этим векторам, имеет вид

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, 1, 1\}.$$

Пусть p_1 — плоскость, проходящая через прямую l_1 параллельно $\boldsymbol{b}$:

$$p_1 : \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0.$$

Пусть p_2 — это плоскость, проходящая через прямую l_2 параллельно $\boldsymbol{b}$:

$$p_2 : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 1 = 0.$$

Искомый перпендикуляр — пересечение плоскостей p_1 и p_2 :

$$x + 2y - z = 0 \quad \text{и} \quad 2x + y + z - 1 = 0.$$

Найдём точку $M_2 = p_1 \cap l_2$:

$$3\tau - 1 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{3}, \quad M_2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Найдём точку $M_1 = p_2 \cap l_1$:

$$3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, \quad M_1 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right).$$

Тогда имеем

$$\overrightarrow{OM_1} = \lambda \overrightarrow{M_1B}, \quad \overrightarrow{AM_2} = \mu \overrightarrow{M_2C}$$

и справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OM_1} = \left\{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \quad \overrightarrow{M_1B} = \left\{\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right\},$$

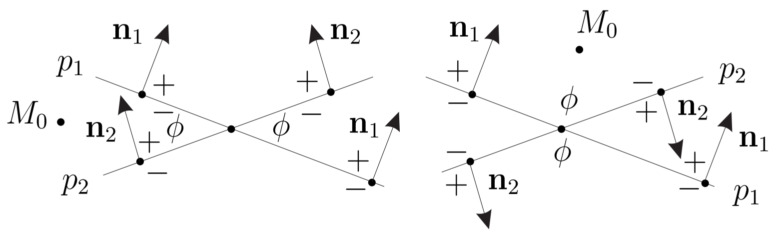
$$\overrightarrow{AM_2} = \left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \quad \overrightarrow{M_2C} = \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

Следовательно, $\lambda = \mu = 2$.

Задача 6.19. Найти тот угол между плоскостями

$$8x + 4y + z + 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 1 = 0,$$

в котором лежит точка $M = (1, 1, 1)$.



Решение. Прежде всего нужно воспользоваться тем, что вектор $\boldsymbol{n} = \{A, B, C\}$ направлен в то полупространство из двух, на которые делит плоскость

$$p: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

пространство, в котором $Ax + By + Cz + D > 0$. Теперь убедимся в том, что угол между векторами $\boldsymbol{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ соответствует тем двум областям, для точек $M(x_0, y_0, z_0)$ которых выполнено неравенство

$$(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)\,(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0.$$

Теперь мы можем перейти к решению данной задачи. Векторы нормали к плоскостям имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{n}_1 = \{8, 4, 1\}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \{2, -2, 1\}.$$

Угол между нормалями $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ соответствует тому углу между соответствующими плоскостями, в котором

$$(8x + 4y + z + 1)(2x - 2y + z + 1) < 0.$$

Заметим, что

$$8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 > 0 \quad \text{и} \quad 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 > 0.$$

Поэтому искомый угол равен

$$\cos\phi = -\frac{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = -\frac{1}{3}.$$

Задача 6.20. Даны прямые l_1, l_2, l_3, l_4:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1},$$
$$l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Для каждой из шести возможных пар прямых выясните, являются они скрещивающимися, параллельными (совпадающими или нет) либо пересекающимися. Для пересекающихся прямых найдите координаты точки пересечения, уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и угол между ними. Для несовпадающих параллельных прямых найдите уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и расстояние между ними. Для скрещивающихся прямых найдите расстояние между ними, уравнения двух параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые, и каноническое уравнение их общего перпендикуляра (в качестве опорной точки возьмите точку пересечения этого общего перпендикуляра с одной из скрещивающихся прямых).

Решение. 1. Рассмотрим прямые l_1 и l_2:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Очевидно, их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4;2;1)$ и $\boldsymbol{a}_2 = (5;4;1)$ не коллинеарны, т.е. прямые не параллельны. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий опорные точки M_1 и M_2 данных прямых:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, эти три вектора компланарны, так что прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости и пересекаются. Найдём их точку пересечения. Для этого перепишем канонические уравнения прямых в параметрическом виде:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1} = t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3+4t, \\ y = 3+2t, \\ z = 5+t; \end{cases}$$

$$l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1} = s \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4+5s, \\ y = 5+4s, \\ z = 5+s. \end{cases}$$

Приравнивая выражения для одноимённых координат, получим переопределённую систему уравнений (которая, как нам заранее известно — ибо прямые пересекаются — имеет единственное решение)

$$\begin{cases} 3+4t = 4+5s, \\ 3+2t = 5+4s, \\ 5+t = 5+s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-5s = 1, \\ 2t-4s = 2, \\ t-s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1, \\ s = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

Чтобы составить уравнение плоскости, в которой лежат прямые l_1 и l_2, найдём её нормальный вектор как векторное произведение направляющих векторов прямых l_1 и l_2:

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

В качестве опорной точки плоскости можно взять любую из опорных точек прямых l_1 или l_2 либо их точку пересечения (возьмём точку пересечения); в результате получаем

$$-2(x+1) + 1(y-1) + 6(z-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 27 = 0.$$

Наконец, найдём угол между прямыми:

$$\varphi = \arccos \frac{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_1|} = \arccos \frac{29}{42}\sqrt{2}.$$

2. Рассмотрим прямые l_1 и l_3:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; 2; 1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (5; 4; 1)$ не коллинеарны, т.е. прямые не параллельны. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$, соединяющий опорные точки M_1 и M_3 данных прямых:

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$, для чего вычислим их смешанное произведение:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_3}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\right) = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0;$$

стало быть, векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны, так что прямые l_1 и l_3 скрещиваются.

Составим уравнения параллельных плоскостей, в которых лежат эти прямые. Искомые плоскости имеют общий нормальный вектор

$$\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

В качестве опорных точек этих плоскостей возьмём опорные точки соответствующих прямых. В результате получаем уравнение плоскости π_1, содержащей прямую l_1:

$$-2(x-3) + 1(y-3) + 6(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 27 = 0,$$

и уравнение плоскости π_3, содержащей прямую l_3:

$$-2(x-0) + 1(y-2) + 6(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 6z + 32 = 0.$$

Общий перпендикуляр m к скрещивающимся прямым представляет собой пересечение двух плоскостей σ_1 и σ_3, каждая из которых содержит соответствующую прямую l_1 или l_3 и перпендикулярна к параллельным плоскостям π_1, π_3, содержащим данные скрещивающиеся прямые. Ясно, что направляющий вектор общего перпендикуляра совпадает с общим нормальным вектором плоскостей π_1 и π_3. Чтобы найти точки пересечения общего перпендикуляра m с самими скрещивающимися прямыми, составим уравнения плоскостей σ_1 и σ_3.

Плоскость σ_1 проходит через прямую l_1 перпендикулярно плоскости π_1; в качестве её опорной точки возьмём опорную точку

$M_1(3;3;5)$ прямой l_1, а в качестве направляющих векторов — направляющий вектор $\boldsymbol{a}_1 = (4;2;1)$ прямой l_1 и общий нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (2;-1;-6)$ плоскостей π_1 и π_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad 11x - 26y + 8z + 5 = 0.$$

Аналогично составляем уравнение плоскости σ_3: она проходит через прямую l_3 перпендикулярно плоскости π_3; в качестве её опорной точки возьмём опорную точку $M_3(0;2;5)$ прямой l_3, а в качестве направляющих векторов — направляющий вектор $\boldsymbol{a}_3 = (5;4;1)$ прямой l_3 и общий нормальный вектор $\boldsymbol{n} = (2;-1;-6)$ плоскостей π_1 и π_3:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad 23x - 32y + 13z - 1 = 0.$$

Точка пересечения общего перпендикуляра m с прямой l_1 представляет собой точку пересечения плоскостей π_1, σ_1, σ_3:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 27 = 0, \\ 11x - 26y + 8z + 5 = 0, \\ 23x - 32y + 13z - 1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = -25/41, \\ y = 49/41, \\ z = 168/41. \end{cases}$$

Аналогично, точка пересечения общего перпендикуляра с прямой l_3 представляет собой точку пересечения плоскостей π_3, σ_1, σ_3:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 32 = 0, \\ 11x - 26y + 8z + 5 = 0, \\ 23x - 32y + 13z - 1 = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x = -35/41, \\ y = 54/41, \\ z = 198/41. \end{cases}$$

Таким образом, каноническое уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым l_1 и l_3 можно записать в одной из следующих форм:

$$\frac{x + \frac{25}{41}}{-2} = \frac{y - \frac{49}{41}}{1} = \frac{z - \frac{168}{41}}{6} \quad \text{или} \quad \frac{x + \frac{35}{41}}{-2} = \frac{y - \frac{54}{41}}{1} = \frac{z - \frac{198}{41}}{6}.$$

В первом из этих уравнений в качестве опорной точки взята точка пересечения общего перпендикуляра с прямой l_1, а во втором — с l_3.

Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\big|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3]\big| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41}.$$

Таким образом,

$$d = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

3. Рассмотрим прямые l_1 и l_4:

$$l_1: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Поскольку направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1 = (4; 2; 1)$ и $\boldsymbol{a}_4 = (5; 4; 1)$ не коллинеарны, прямые l_1 и l_4 не параллельны. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4$ и

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

компланарны, что подтверждается вычислением определителя, составленного из координат этих векторов:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ -9 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

прямые l_1 и l_4 лежат в одной плоскости и пересекаются в единственной точке. Как и выше, можно найти уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые, и их точку пересечения (далее будет показано, что прямые l_2 и l_4 совпадают, так что рассматриваемый случай фактически совпадает со случаем прямых l_1 и l_2, рассмотренным выше).

4. Рассмотрим прямые l_2 и l_3:

$$l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

Поскольку направляющие векторы $\boldsymbol{a}_2 = (5;4;1)$ и $\boldsymbol{a}_3 = (5;4;1)$ этих прямых равны, прямые параллельны. Так как векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2 = (-4;-3;0)$ не коллинеарны, прямые l_2 и l_3 параллельны, но не совпадают. Составим уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые; в качестве опорной точки возьмём опорную точку $M_2(4;5;5)$ прямой l_2, в качестве направляющих векторов — векторы $\boldsymbol{a}_2 = (5;4;1)$ и $\overrightarrow{M_2M_3} = (-4;-3;0)$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-5 & z-5 \\ 5 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - 4y + z + 3 = 0.$$

Коэффициенты при x, y, z в этом уравнении — это координаты вектора нормали плоскости, равного $[\boldsymbol{a}_2, \overrightarrow{M_2M_3}]$ (этот факт понадобится чуть позже).

Найдем расстояние d между параллельными прямыми l_2 и l_3:

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{M_2M_3}, \boldsymbol{a}_2]\right|}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 1^2}}{\sqrt{5^2 + 4^2 + 1^2}} = \sqrt{\frac{13}{21}}.$$

5. Рассмотрим прямые l_2 и l_4:

$$l_2: \ \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Направляющие векторы $\boldsymbol{a}_2 = (5;4;1)$ и $\boldsymbol{a}_4 = (5;4;1)$ этих прямых совпадают, так что прямые параллельны. Поскольку векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_4} = \boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_2 = (-10;-8;-2)$ коллинеарны, прямые l_2 и l_4 совпадают. Факт коллинеарности достаточно очевиден, поскольку векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\overrightarrow{M_2M_4}$ пропорциональны, но его можно установить, вычисляя векторное произведение этих векторов:

$$[\boldsymbol{a}_2, \overrightarrow{M_2M_4}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 4 & 1 \\ -10 & -8 & -2 \end{vmatrix} = bfo.$$

6. Наконец, рассмотрим прямые l_3 и l_4:

$$l_3: \ \frac{x}{5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{1}, \qquad l_4: \ \frac{x+6}{5} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-3}{1}.$$

Поскольку $l_2 = l_4$, задача тождественна рассмотрению прямых l_2 и l_3, которое было проведено выше.

Задача 6.21. В терминах рангов матриц рассмотреть все случаи взаимного расположения двух плоскостей в пространстве.

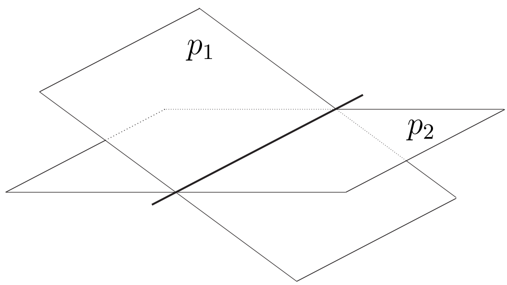
Решение. Пусть две плоскости заданы своими общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

в некоторой общей декартовой системе координат, причем

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Случай 1: плоскости пересекаются:



Это означает, что система уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \tag{6.21.1}$$

имеет решение, но плоскости не совпадают. Значит,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 2: плоскости параллельны. Это означает, что система уравнений (6.21.1) не имеет решений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3: плоскости совпадают. Это означает, что система уравнений (6.21.1) имеет бесконечно много решений, но это не случай 1, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

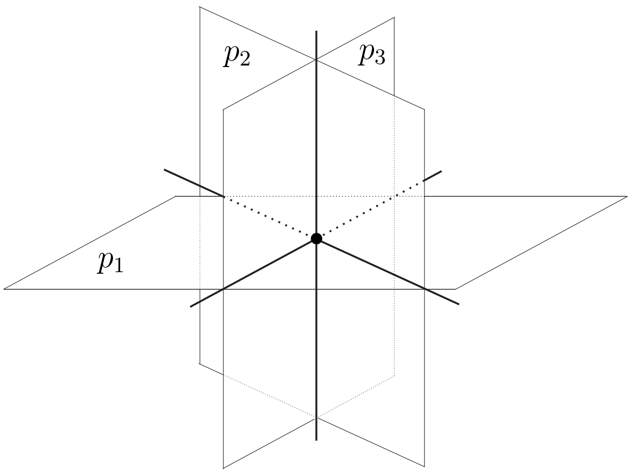
Задача 6.22. В терминах рангов матриц описать все случаи взаимного расположения трех плоскостей в пространстве.

Решение. Пусть три плоскости заданы своими общими уравнениями

$$A_k x + B_k y + C_k z = D_k, \quad k = 1, 2, 3, \qquad (6.22.1)$$

в некоторой общей декартовой системе координат.

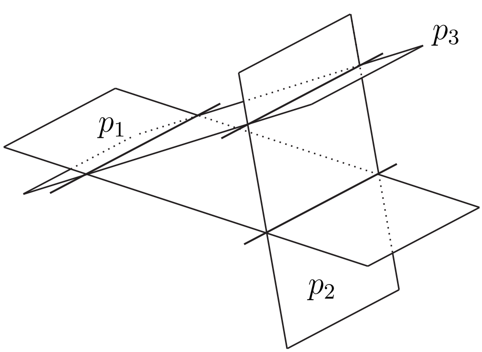
Случай 1: три плоскости пересекаются в единственной точке:



Это означает, что система трех уравнений (6.22.1) имеет единственное решение. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 3, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Случай 2: плоскости попарно пересекаются, но три плоскости не имеют общих точек:



Это означает, что любые два уравнения из трех в системе (6.22.1) имеют решения, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2,$$

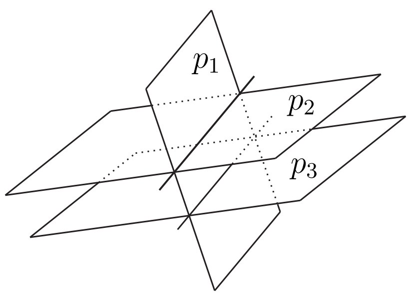
и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны, система трех уравнений (6.22.1) не имеет решений. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Случай 3: две плоскости параллельны параллельны, а третья их пересекает:



Без ограничения общности будем считать, что плоскости p_2 и p_3 параллельны, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что система уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

не имеет решений, а системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решения, но соответствующие плоскости не совпадают. Итак, с одной стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

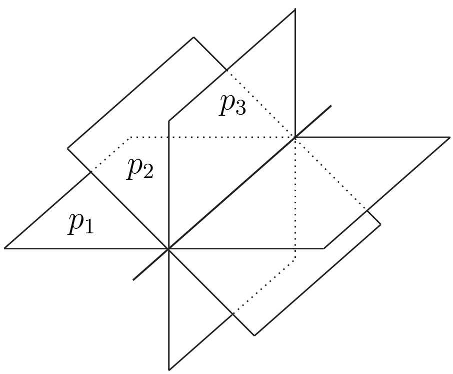
С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 4: три плоскости пересекаются по прямой:



Это означает, что каждые две плоскости из двух пересекаются по прямой, т.е. каждые два уравнения из системы (6.22.1) имеют решение — прямую. Стало быть, с одной стороны, имеем

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 2,$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \\ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 5: две плоскости совпадают, а третья их пересекает. Без ограничения будем считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 их пересекает. Это означает, что в системе уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

одно уравнение является следствием другого, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

С другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

имеют решение — прямую (пересекаются, но не совпадают). Тогда

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Очевидно, что при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 6: три плоскости параллельны. Это означает, что каждые два уравнения из трех в системе (6.22.1) не имеют решений, т.е.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{pmatrix} = 1$$

и при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 7: две плоскости из трех совпадают, а третья им параллельна. Без ограничения общности можно считать, что плоскости $p_2 = p_3$, а плоскость p_1 им параллельна. Действительно, равенство $p_2 = p_3$ означает, что в системе уравнений

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

одно уравнение является следствием другого, т.е., с одной стороны,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1,$$

а с другой стороны, системы уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

и

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \quad A_3x + B_3y + C_3z = D_3$$

несовместны. Следовательно,

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

но при этом

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 8: три плоскости совпадают. Это означает, что каждое уравнение из трех является следствием любого из оставшихся уравнений, т.е.

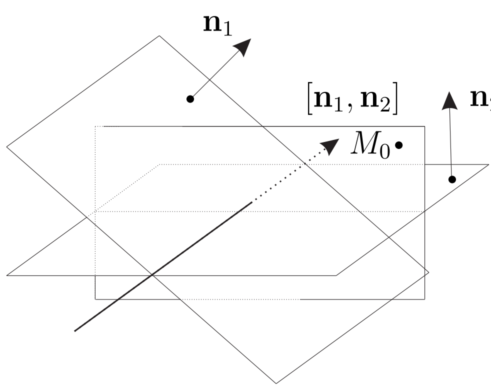
$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1.$$

ГЛАВА 7

Векторные уравнения прямых и плоскостей

Задача 7.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и перпендикулярной к прямой пересечения двух плоскостей

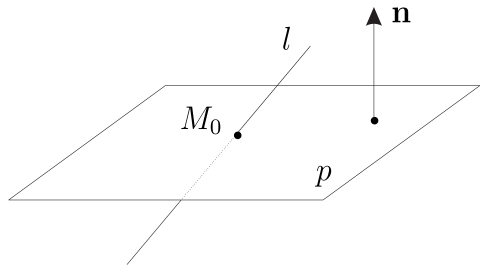
$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2.$$



Решение. Очевидно, векторы нормалей $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ данных плоскостей параллельны искомой плоскости. Поэтому вектор нормали искомой плоскости можно взять в виде $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$; тогда нормальное уравнение искомой плоскости имеет вид $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) = D$. Величина D находится из условия, что точка $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ принадлежит искомой плоскости. Следовательно, $D = (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}_0)$. Окончательно

$$([\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2], \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = 0.$$

Задача 7.2. Найти точку пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ с плоскостью $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u\boldsymbol{b} + v\boldsymbol{c}$.



Решение. Переписав уравнение плоскости в виде

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=0,$$

решим систему уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{a}t,\\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])=0.\end{cases}$$

Подставив выражение для $\boldsymbol{r}$ из первого уравнения во второе, находим значение параметра t_0, соответствующего точке пересечения плоскости с прямой:

$$t_0=\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

Радиус-вектор точки пересечения равен

$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}_0+\frac{(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0,[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.3. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две прямые

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t,\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2\tau:$$

(1) скрещивались; (2) были компланарны; (3) пересекались; (4) были параллельны; (5) совпадали.

Решение. Рассмотрим равенство

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}_1t=\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{a}_2\tau. \tag{7.3.1}$$

(1) *Скрещивающиеся прямые* не коллинеарны, т.е. $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]\neq\mathbf{0}$, и уравнение (7.3.1) не имеет решений, т.е. векторы $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не компланарны. Итак, условие скрещивания следующее:

$$(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\neq 0.$$

(2) *Прямые компланарны*, если они лежат в одной плоскости. Условие, очевидно, следующее вектор $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, соединяющий начальные точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ и $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ прямых, лежит в одной плоскости с направляющими векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ прямых, т.е.

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0.$$

(3) *Прямые пересекаются*, если они лежат в одной плоскости, а значит в одной плоскости лежат векторы $\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, но направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ не коллинеарны, т.е. выполнены следующие два условия:

$$(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0, \quad [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \mathbf{0}.$$

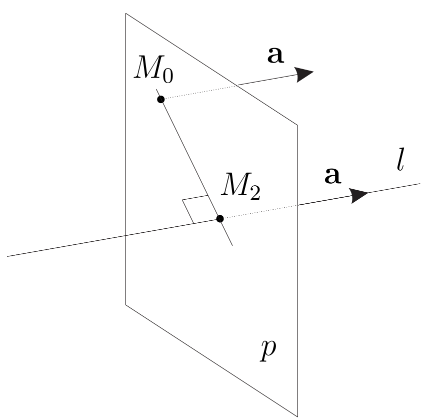
(4) *Прямые параллельны*, если направляющие векторы прямых $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны, но вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ не коллинеарен прямым, т.е. если

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = 0, \quad [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1] \neq \mathbf{0}.$$

(5) *Прямые совпадают*, если их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ коллинеарны и вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ лежит на обеих прямых, т.е.

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1] = \mathbf{0}.$$

Задача 7.4. Найти ортогональную проекцию $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t$.

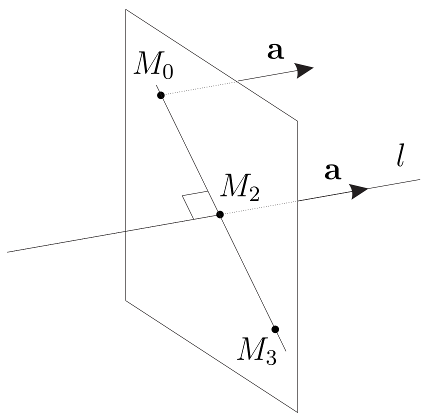


Решение. Проведем плоскость через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, перпендикулярно прямой: $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$. Подставим в это уравнение параметрическое уравнение прямой и получим, что для точки пересечения $M_0(t_0)$ прямой и плоскости имеет место следующее равенство:

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.5. Найти точку $M_3(\boldsymbol{r}_3)$, симметричную точке $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ относительно прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t.$$



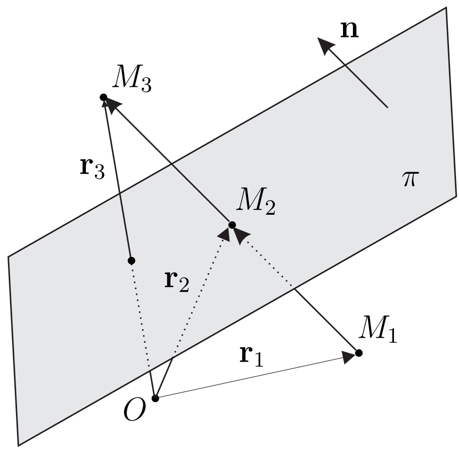
Решение. Пусть $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ — это ортогональная проекция точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{M_0M_2} = \overrightarrow{M_2M_3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2.$$

Для радиус-вектора $\boldsymbol{r}_3$ искомой точки M_3 имеем равенство

$$\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0 = 2\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 + 2\frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.6. Найти ортогональную проекцию точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) + D = 0$.



Решение. Проведем прямую через точку $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, перпендикулярную к указанной плоскости: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{n}t$. Стандартным образом получим радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ искомой точки M_2:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) + D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Задача 7.7. Найти точку, симметричную точке $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ относительно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) + D = 0$.

Решение. Для искомой точки $M_3(\boldsymbol{r}_3)$ имеем

$$\boldsymbol{r}_3 = 2\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1 - 2\frac{(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) + D}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Задача 7.8. Найти ортогональную проекцию точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ на плоскость $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$.

Решение. Воспользуемся результатом задачи . Уравнение плоскости можно переписать в следующей форме:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) + D = 0, \quad \boldsymbol{n} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \quad D = -(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}).$$

Тогда справедлива формула

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 - \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|^2}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Задача 7.9. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три плоскости

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k) + D_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

имели единственную общую точку.

Решение. Три плоскости пересекаются в единственной точке тогда и только тогда, когда их нормальные векторы попарно не коллинеарны, т.е. не компланарны. Этот факт может быть выражен необходимым и достаточным условием

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) \neq 0.$$

Задача 7.10. Найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки пересечения трех плоскостей

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k) + D_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Решение. Поскольку по условию $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) \neq 0$, то можно ввести взаимный базис $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3\}$ к базису $\{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3\}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{f}_1 = \frac{[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{[\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)}, \quad \boldsymbol{f}_3 = \frac{[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)}.$$

Будем искать искомую точку в виде

$$\boldsymbol{r} = \alpha \boldsymbol{f}_1 + \beta \boldsymbol{f}_2 + \gamma \boldsymbol{f}_3.$$

Нетрудно убедиться, что

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = \alpha, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = \beta, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_3) = \gamma.$$

Поэтому радиус-вектор искомой общей точки равен

$$\boldsymbol{r} = -D_1 \boldsymbol{f}_1 - D_2 \boldsymbol{f}_2 - D_3 \boldsymbol{f}_3.$$

Задача 7.11. Дана прямая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ и плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) + D = 0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: (1) пересекала плоскость; (2) была параллельна ей; (3) лежала в плоскости.

Решение. После подстановки уравнения прямой в уравнение плоскости получим следующее равенство:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})t = -(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) - D. \tag{7.11.1}$$

(1) *Прямая пересекает плоскость.* Уравнение (7.11.1) имеет единственное решение, что возможно при необходимом и достаточном условии $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$.

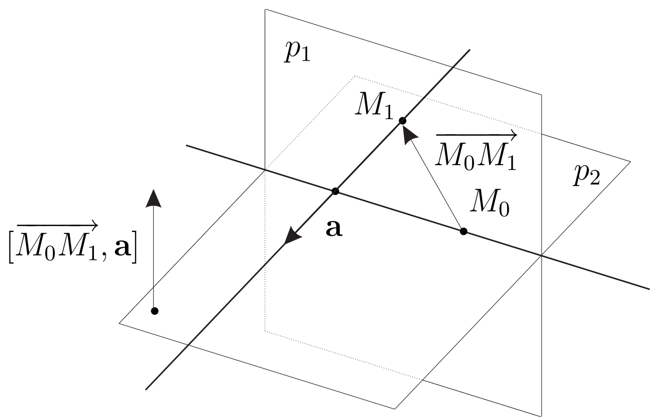
(2) *Прямая параллельна плоскости.* Уравнение (7.11.1) не имеет решений;

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0, \quad (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) + D \neq 0.$$

(3) *Прямая лежит в плоскости.* Уравнение (7.11.1) имеет бесконечно много решений:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0, \quad (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) + D = 0.$$

Задача 7.12. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t$.



Решение. Проведем плоскость p_1 через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно прямой:

$$p_1: \ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0.$$

Теперь проведем плоскость p_2 через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и прямую:

$$p_2: \ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0.$$

Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ не коллинеарны, если M_0 не лежит на прямой, и поэтому вектор нормали плоскости p_2 можно взять равным

$$\boldsymbol{n} = [\overrightarrow{M_0M_1}, \boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}].$$

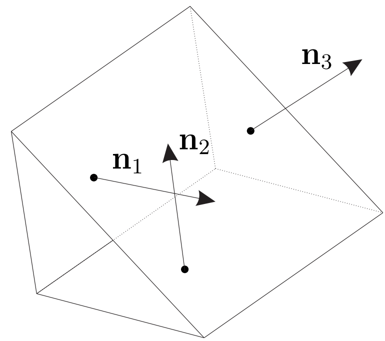
Искомые уравнения перпендикуляра — это $p_1 \cap p_2$:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0 \quad \text{и} \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0.$$

Задача 7.13. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три плоскости

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k) + D_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

образовывали призму.



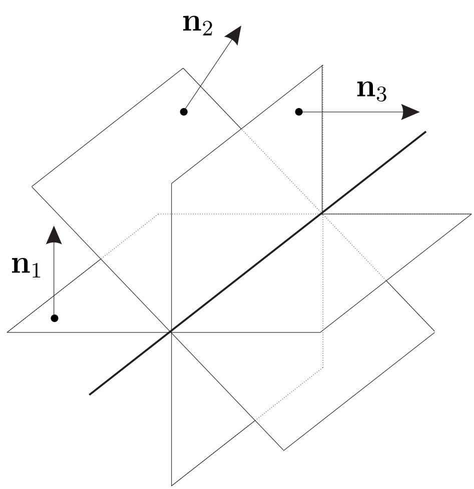
Решение. *Первое условие* — три плоскости попарно не совпадают

$$[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \neq \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3] \neq \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1] \neq \mathbf{0}. \tag{7.13.1}$$

Второе условие — это требование, чтобы три прямые, образованные попарным пересечением плоскостей, были параллельны, т.е. векторы нормали к трём плоскостям были компланарны (а следовательно, параллельны одной плоскости, перпендикулярной боковым сторонам призмы):

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) = 0. \tag{7.13.2}$$

Нужно исключить случай, когда призма вырождается в одну прямую, т.е. когда все три различные плоскости пересекаются по одной прямой:



Докажем, что это третье требование сводится к условию

$$D_1[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3] + D_2[\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1] + D_3[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \neq \boldsymbol{0}. \tag{7.13.3}$$

Предположим, что выполнено равенство

$$D_1[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3] + D_2[\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1] + D_3[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}. \tag{7.13.4}$$

Согласно условиям (7.13.1) и (7.13.2) без ограничения общности можно считать, что

$$\boldsymbol{n}_3 = \alpha\boldsymbol{n}_1 + \beta\boldsymbol{n}_2. \tag{7.13.5}$$

Подставив это равенство в (7.13.4), получим

$$(D_1\alpha + D_2\beta - D_3)[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_1] = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad D_3 = \alpha D_1 + \beta D_2.$$

В совокупности с равенством (7.13.5) это означает, что плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_3) + D_3 = 0$ принадлежит к пучку плоскостей

$$\alpha[(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) + D_1] + \beta[(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) + D_2] = 0,$$

т.е. все три плоскости проходят через одну прямую. Следовательно, третье условие (7.13.3) доказано.

Задача 7.14. Найти условие, необходимые и достаточные для того, чтобы три плоскости

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k) + D_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

имели единственную общую прямую.

Решение. Из решения задачи 7.13 следует, что эти условия таковы:

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) = 0,$$
$$D_1[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3] + D_2[\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1] + D_3[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0},$$
$$|[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]|^2 + |[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3]|^2 + |[\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1]|^2 > 0.$$

Задача 7.15. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы четыре плоскости

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_k) + D_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

образовывали тетраэдр.

Решение. *Первое требование* — это требование, чтобы каждые три различные плоскости из четырёх пересекались в одной точке, т.е. каждые три различных векторов нормалей к плоскостям были не компланарны:

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) \neq 0, \quad (\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_4) \neq 0,$$

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4) \neq 0, \quad (\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4) \neq 0.$$

Второе требование — это требование, чтобы все четыре плоскости не пересекались в одной точке. Пусть

$$\boldsymbol{r}_0 = -\frac{D_1[\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3] + D_2[\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1] + D_3[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]}{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)}$$

— это общая точка трех плоскостей (см. задачу 7.10). Тогда эта точка не должна принадлежать четвёртой плоскости:

$$(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_4) + D_4 \neq 0,$$

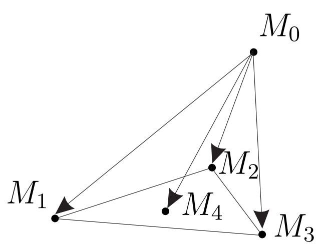
т. е.

$$D_1(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_4) - D_2(\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_4) + \\ + D_3(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_4) - D_4(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3) \neq 0.$$

Задача 7.16. Вершины треугольника находятся в точках $M_1(\boldsymbol{r}_1)$, $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ и $M_3(\boldsymbol{r}_3)$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$$

пересекала плоскость треугольника в его внутренней точке.



Решение. Без ограничения общности считаем, что точка $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ не лежит в плоскости треугольника. Тогда необходимое и достаточное условие, чтобы точка $M_4(\boldsymbol{r}_4)$ лежала во внутренней области треугольника — это то, чтобы тройки векторов

$$\{\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_4}\}, \quad \{\overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_3}, \overrightarrow{M_0M_4}\},$$
$$\{\overrightarrow{M_0M_3}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_4}\}.$$

были одинаковой ориентации, т.е. знаки чисел

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_4}\right), \quad \left(\overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_3}, \overrightarrow{M_0M_4}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{M_0M_3}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_4}\right).$$

совпадали. Заметим, что

$$\boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t_4, \quad t_4 \neq 0,$$

так что имеем равенства

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_4}\right) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, t_4\boldsymbol{a}) = \\ = t_4\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{M_0M_2}, \overrightarrow{M_0M_3}, \overrightarrow{M_0M_4}\right) = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0, t_4\boldsymbol{a}) = \\ = t_4\left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{M_0M_3}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_4}\right) = (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, t_4\boldsymbol{a}) = \\ = t_4\left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}\right).$$

Поэтому числа

$$\left(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}\right), \quad \left(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}\right), \\ \left(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}\right)$$

должны быть одного знака.

Задача 7.17. Даны две плоскости

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) + D_1 = 0, \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) + D_2 = 0. \tag{7.17.1}$$

Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости: (1) пересекались; (2) были параллельны; (3) совпадали.

Решение. Для того чтобы плоскости *пересекались*, необходимо и достаточно, чтобы векторы нормалей к плоскостям были неколлинеарны: $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] \neq \boldsymbol{0}$. Для того, чтобы *плоскости были параллельны*, необходимо и достаточно, чтобы, с одной стороны, векторы нормалей были коллинеарны, т.е.

$$[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0}, \tag{7.17.2}$$

а с другой стороны, система уравнений (7.17.1) не имела решений. Из равенства (7.17.2) вытекает, что

$$\boldsymbol{n}_2 = \lambda \boldsymbol{n}_1, \quad \lambda \neq 0. \tag{7.17.3}$$

Но тогда справедливы следующие выражения:

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) + D_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) + D_2 = 0.$$

Тогда для того, чтобы система уравнений (7.17.1) не имела решений, нужно потребовать, чтобы

$$D_2 \neq \lambda D_1 \quad \Leftrightarrow \quad D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2 \neq \boldsymbol{0}.$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы плоскости *совпадали* — это условия

$$[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = \boldsymbol{0} \quad \text{и} \quad D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{0}.$$

Задача 7.18. Найти расстояние от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до плоскости

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) + D = 0.$$

Решение. Уравнение перпендикуляра к плоскости, проходящего через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, имеет вид $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{n}t$. Тогда значение параметра t, соответствующее точке пересечения прямой с плоскостью, равно

$$t = -\frac{D + (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})},$$

и радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ точки пересечения равен

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 - \frac{D + (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Тогда

$$d = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0| = \frac{|(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) + D|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Задача 7.19. Найти расстояние от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до прямой

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t.$$

Решение. Плоскость p, проходящая через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярно данной прямой l, имеет уравнение $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0$. Находим точку пересечения $M_2(t_2) = p \cap l$:

$$t_2 = \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Тогда радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки $M_2(\boldsymbol{r}_2) = p \cap l$ равен

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a},$$

и далее $d = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0|$. Но

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Обозначив временно для краткости $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$, упростим последнее выражение, используя формулу двойного векторного произведения:

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x} - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Таким образом, искомое расстояние равно

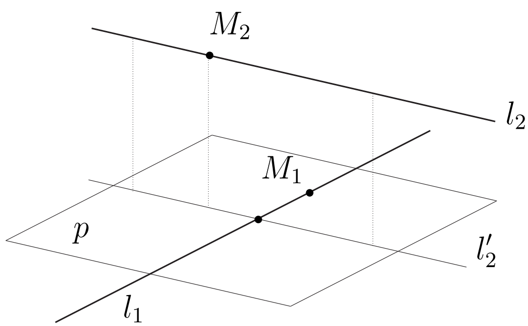
$$d = \left| \frac{[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}]]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \right|.$$

Задача 7.20. Найти расстояние d между двумя прямыми

$$l_1 : \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t, \quad l_2 : \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 \tau$$

при условии, что (1) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] \neq \mathbf{0}$; (2) $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \mathbf{0}$.

Решение. Условие (1) означает, что данные прямые — скрещивающиеся:



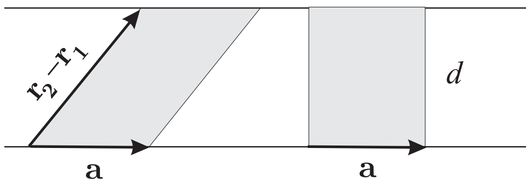
Проведем плоскость p через прямую l_1 параллельно прямой l_2:

$$p : \ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = 0.$$

Тогда расстояние d между прямыми l_1 и l_2 равно в точности расстоянию между точкой $M_2(\boldsymbol{r}_2) \in l_2$ и плоскостью p:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)|}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|}.$$

При выполнении условия (2) прямые параллельны, так что $\boldsymbol{a}_1 = \lambda \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}$:



Из чертежа ясно, что выделенные площади равны, так что

$$\bigl|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\bigr| = d \cdot |\boldsymbol{a}|,$$

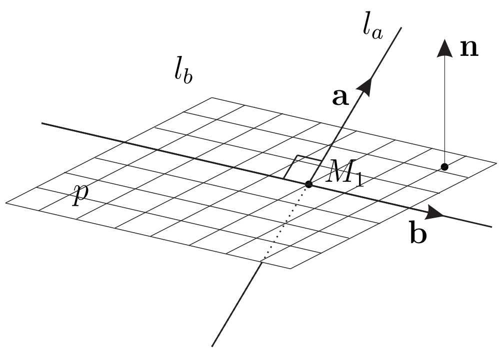
откуда искомое расстояние

$$d = \frac{\bigl|[\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]\bigr|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Задача 7.21. Составить уравнения прямой l_b, лежащей в плоскости

$$p: \quad (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) + D = 0,$$

пересекающей прямую $l_a: \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ и перпендикулярно к этой прямой, при условии, что $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$.



Решение. Прежде всего найдем точку пересечения плоскости p и прямой l_a. Это точка с радиус-вектором

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 - \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) + D}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}.$$

Направляющий вектор $\boldsymbol{b}$ по условию задачи должен быть ортогонален как вектору $\boldsymbol{n}$ (поскольку искомая прямая лежит в плоскости с вектором нормали $\boldsymbol{n}$), так и вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому можно взять $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{a}]$. Таким образом, имеем

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b}\tau.$$

Задача 7.22. Составьте уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$, не лежащую ни на одной из этих прямых.

Решение. *Первый способ.* Будем искать уравнение искомой прямой в векторной форме $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \tau\boldsymbol{b}$. Из условия, что искомая прямая проходит через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и пересекает первую прямую, приходим к выводу о том, что найдутся такие числа t_1 и τ, что

$$\boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \tau\boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 = \tau\boldsymbol{b} - t_1\boldsymbol{a}_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_1]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0]) = 0.$$

Аналогичным образом получим равенство для второй прямой

$$(\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0]) = 0.$$

Таким образом, в качестве направляющего вектора $\boldsymbol{b}$ искомой прямой можно взять вектор

$$\boldsymbol{b} = [[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0], [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0]].$$

Второй способ. Проведем плоскость p_1 через первую прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{a}_1$ и точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$:

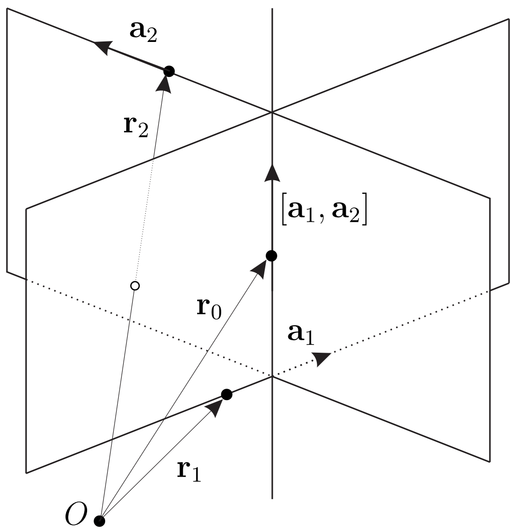
$$p_1 : \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_1]) = 0.$$

Затем проведем плоскость p_2 через вторую прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{a}_2$ и точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$:

$$p_2 : \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}_2]) = 0.$$

Искомое уравнение прямой — это $p_1 \cap p_2$.

Задача 7.23. Составьте уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{a}_2$ под прямыми углами (т.е. уравнение общего перпендикуляра к этим прямым).



Решение. Будем искать уравнение искомого перпендикуляра в следующем виде:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{b}\tau, \quad \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2].$$

Составим уравнение плоскости, проходящей через первую прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{a}_1$ и искомую прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{b}\tau$:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}]) = 0.$$

Аналогично уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t_2\boldsymbol{a}_2$ и общий перпендикуляр, имеет вид

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2, [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}]) = 0.$$

Найдем радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ какой-нибудь точки, лежащей на общем перпендикуляре. Будем искать этот радиус-вектор как пересечение уже указанных двух плоскостей и плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к первым двум. Итак, имеет место следующая система уравнений:

$$(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad \boldsymbol{n}_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}], \quad D_1 = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}_1),$$
$$(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_2) = D_2, \quad \boldsymbol{n}_2 = [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}], \quad D_2 = (\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}_2),$$
$$(\boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]) = 0.$$

Заметим, что

$$[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = A[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2], \quad A = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \\ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) \end{vmatrix}.$$

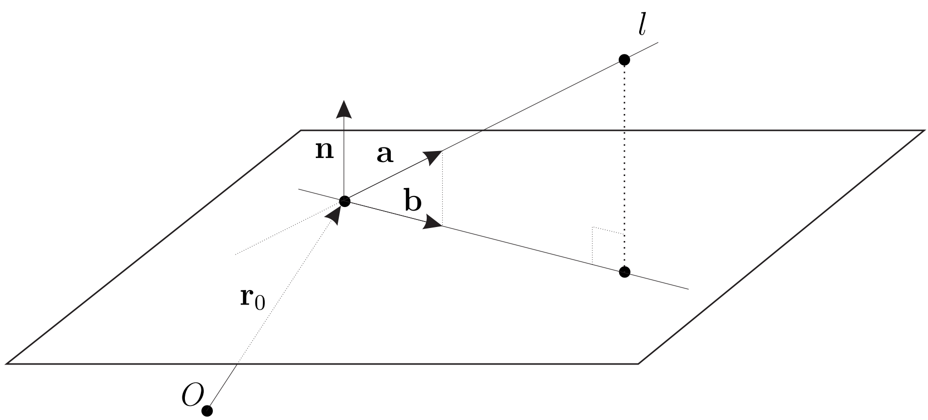
Действительно, имеем

$$[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = [[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}]] = -\boldsymbol{b}([\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{a}_2) =$$
$$= -[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\left([\boldsymbol{a}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]], \boldsymbol{a}_2\right) = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\left[(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)^2\right].$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{D_1[\boldsymbol{n}_2, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]] + D_2[[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2], \boldsymbol{n}_1]}{|[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]|^2} = \frac{[[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2], D_2\boldsymbol{n}_1 - D_1\boldsymbol{n}_2]}{|[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]|^2}.$$

Задача 7.24. Найти ортогональную проекцию прямой $[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}] = 0$ на плоскость $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$.



Решение. Будем искать уравнение ортогональной проекции в виде $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{b}t$. Найдем сначала радиус-вектор $\boldsymbol{r}_1$ точки пересечения прямой и плоскости:

$$(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) = D, \quad \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + t_0\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a} \quad \text{при} \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0.$$

Найдем теперь направляющий вектор $\boldsymbol{b}$ как ортогональную проекцию на плоскость вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{n}, \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = \lambda(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}),$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r_0},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{a} - \frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{n}\right)t.$$

Задача 7.25. Прямая задана как пересечение двух плоскостей $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}_2) = D_2$. Запишите векторное параметрическое уравнение этой прямой, т.е. уравнение вида $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{a}$.

Решение. Направляющий вектор искомой прямой можно взять равным $\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2]$. Будем искать радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ как пересечение трех плоскостей:

$$(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n}_2) = D_2, \quad (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{a}) = 0.$$

Решение этой системы уравнений согласно задаче 7.10 имеет вид

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{D_1[\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{a}] + D_2[\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}_1]}{|[\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2]|^2}.$$

Задача 7.26. Найдите радиус-вектор точки пересечения прямой $[\boldsymbol{r},\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ с плоскостью $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = D$.

Решение. Перепишем уравнение прямой в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r}_0 = \frac{[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}.$$

Поскольку прямая и плоскость пересекаются, то $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) \neq 0$. Поэтому после подстановки векторного параметрического уравнения прямой в уравнение плоскости получим

$$t_0 = \frac{D - (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}.$$

Итак,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.27. Найдите проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = D$ параллельно прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ при условии $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}) \neq 0$.

Решение. Заметим, что нужно найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}t$ и плоскости $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = D$:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{D - (\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.28. Найдите проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ параллельно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ при условии $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) \neq 0$.

Решение. Нужно найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}_2$ точки пересечения плоскости $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})$ и прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{n})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.29. Найдите ортогональную проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Решение. Пусть $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ — это искомая точка ортогональной проекции точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую. Тогда выполнено следующее условие:

$$\left(\overrightarrow{M_0M_2}, \boldsymbol{a}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}) = 0. \tag{7.29.1}$$

Уравнение прямой в форме Плюккера имеет вид

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Тогда при некотором t_0 эта прямая пересечет плоскость (7.29.1). Справедливо следующее равенство:

$$t_0 = \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} = \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Задача 7.30. Найдите ортогональную проекцию точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на плоскость $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$.

Решение. Нужно найти точку $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ пересечения прямой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и плоскости $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) = 0$:

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_0 + \frac{(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|^2}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

Задача 7.31. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$.

Решение. Общая формула для вычисления расстояния от точки $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ до плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D$ имеет следующий вид:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}) - D|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Исходя из этой формулы получаем

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}])|}{|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]|},$$

поскольку $\boldsymbol{n}$ — вектор нормали к плоскости можно выбрать равным $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Задача 7.32. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = D_2$.

Решение. В соответствии с задачей 7.31 имеем

$$d = \frac{|(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{n}) - D_1|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|D_2 - D_1|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

Задача 7.33. Найдите расстояние от точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ до прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Решение. Запишем уравнение прямой $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$ в векторной параметрической форме

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Пусть $M_2(\boldsymbol{r}_2)$ — это ортогональная проекция точки $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ на прямую. Тогда в силу задачи 30 имеем

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_1 + \frac{(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}\boldsymbol{a}.$$

Таким образом, имеем

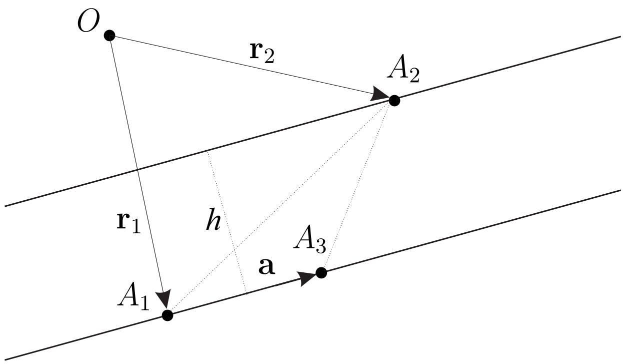
$$d = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0| = \left|\frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] + (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} - \boldsymbol{r}_0\right|.$$

Задача 7.34. Составьте уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}$.

Решение. Очевидно, уравнение следующее:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1, [\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{a}]) = 0.$$

Задача 7.35. Найдите расстояние между параллельными прямыми $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + t\boldsymbol{a}$.



Решение. С одной стороны, площадь треугольника $\triangle A_1A_2A_3$ равна

$$S_{A_1A_2A_3} = |[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}]|\,,$$

с другой стороны —

$$S_{A_1A_2A_3} = h|\boldsymbol{a}|,$$

где h — искомое расстояние. Таким образом,

$$h = \frac{|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Задача 7.36. Найдите расстояние между параллельными прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}_2$.

Решение. Запишем уравнения этих прямых в векторной параметрической форме:

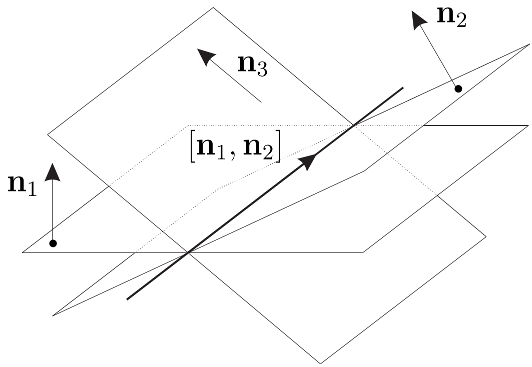
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})},$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r}_2 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Тогда в соответствии с задачей 7.35 получим

$$h = \frac{|[\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{|\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Задача 7.37. Составьте уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_1) = D_1$ и $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_2) = D_2$ перпендикулярно плоскости $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_3) = D_3$.



Решение. По условию задачи векторы $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]$ и $\boldsymbol{n}_3$ параллельны плоскости. Предположим, что $[\boldsymbol{n}_3, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]] \neq \mathbf{0}$. Тогда уравнение искомой плоскости имеет следующий вид:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}) = 0, \quad \boldsymbol{n} = [\boldsymbol{n}_3, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]].$$

Осталось найти радиус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ какой-нибудь точки M_0, лежащей на плоскости. Будем искать эту точку как точку пересечения трех плоскостей:

$$(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_1) = D_1, \quad (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_2) = D_2, \quad (\boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]) = 0.$$

Таким образом (см. задачу 7.10), имеем

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{D_1[\boldsymbol{n}_2[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]] + D_2[[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2], \boldsymbol{n}_1]}{|[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2]|^2}$$

Задача 7.38. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ и прямую $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$.

Решение. Запишем уравнение прямой в векторной параметрической форме:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}t, \quad \boldsymbol{r}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}.$$

Тогда уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0, [\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{a}]) = 0.$$

Задача 7.39. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_1] = \boldsymbol{b}_1$ и $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{a}_2] = \boldsymbol{b}_2$.

Решение. Запишем уравнения прямых в векторной параметрической форме

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{a}_1 t, \quad \boldsymbol{r}_1 = \frac{[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1]}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)};$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{a}_2 t, \quad \boldsymbol{r}_2 = \frac{[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_2]}{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)}.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$h = \frac{|(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2])|}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|}.$$

Справедливы следующие равенства:

$$(\boldsymbol{r}_1, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = \frac{1}{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)} ([\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1], [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2),$$

$$(\boldsymbol{r}_2, [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]) = -(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2).$$

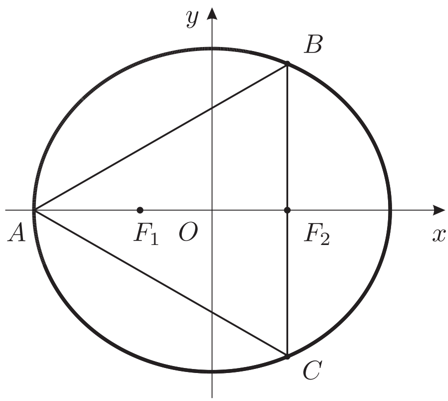
В результате приходим к формуле

$$h = \frac{|(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2)|}{|[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]|}.$$

ГЛАВА 8

Эллипс, гипербола и парабола

Задача 8.1. Найдите эксцентриситет эллипса, если известно, что в эллипс можно вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого лежит на большой оси, а противолежащая этой вершине сторона проходит через фокус эллипса.



Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник ABC, вписанный в эллипс, который задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Предположим, что вершина A совпадает с левой вершиной эллипса $(-a; 0)$, а противолежащая ей сторона BC проходит через фокус F_1 или F_2 эллипса (какой именно, пока не известно, так что будем писать просто F). Ясно, что отрезок BC перпендикулярен фокальной оси эллипса. Имеем

$$|BF| = p = \frac{b^2}{a} = \frac{(a+c)(a-c)}{a};$$

с другой стороны,

$$|BF| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AF|.$$

Мы должны рассмотреть два случая в зависимости от того, через какой фокус — ближайший к вершине A или далёкий от неё — проходит сторона $[BC]$.

В первом случае имеем $|AF| = |AF_1| = a - c$, так что

$$|BF| = |BF_1| = \frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a-c),$$

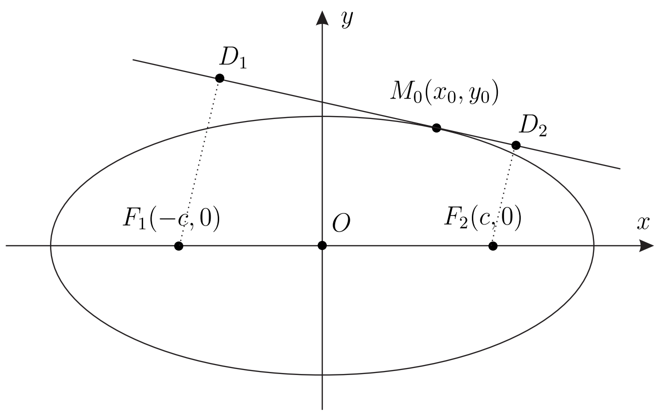
$$1 + \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 < 0,$$

что невозможно. Следовательно, сторона BC не может проходить через фокус, ближайший к вершине A.

Во втором случае $|AF| = |AF_2| = a + c$, так что

$$|BF| = |BF_2| = \frac{(a+c)(a-c)}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+c) \Rightarrow \varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Задача 8.2. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему есть величина постоянная, и найдите её.



Решение. Уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проходящей через лежащую на нем точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Расстояния до указанной касательной от фокуса $F_1(-c,0)$ и от фокуса $F_2(c,0)$ равны соответственно

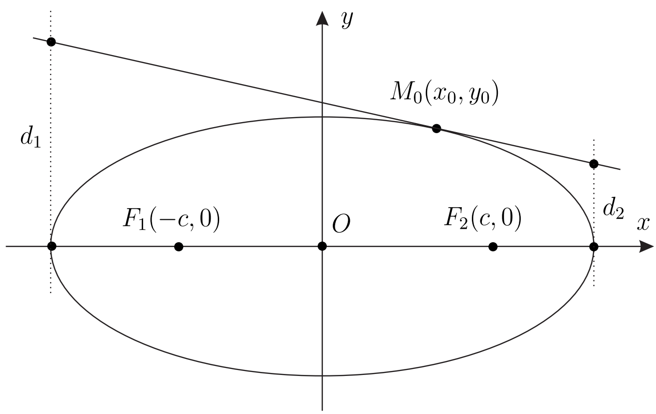
$$d_1 = |F_1D_1| = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}+1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}, \quad d_2 = |F_2D_2| = \frac{\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Произведение этих величин равно

$$d_1d_2 = \frac{1-\frac{c^2x_0^2}{a^4}}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}} = \left\{\frac{y_0^2}{b^2} = 1-\frac{x_0^2}{a^2}\right\} =$$

$$= \frac{1-\frac{c^2}{a^4}x_0^2}{\frac{x_0^2}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{b^2}} = \left\{c^2 = a^2-b^2\right\} = b^2\frac{1-\frac{c^2}{a^4}x_0^2}{1-\frac{c^2}{a^4}x_0^2} = b^2.$$

Задача 8.3. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведенных в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.



Решение. Уравнения касательных к эллипсу, проведенных через вершины, лежащие на большой оси, имеют вид

$$x=-a, \quad x=a.$$

Нетрудно найти координаты точек пересечения этих прямых с касательной к эллипсу, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Действительно, точка $M_1(x_1, y_1)$ пересечения первой прямой с указанной касательной имеет координаты

$$x_1 = -a, \quad y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right);$$

аналогично, вторая точка пересечения $M_2(x_2, y_2)$ имеет координаты

$$x_2 = a, \quad y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

Очевидно, что соответствующие расстояния равны

$$d_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right), \quad d_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right),$$

а их произведение —

$$d_1 d_2 = \frac{b^4}{y_0^2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{y_0^2}\frac{y_0^2}{b^2} = b^2.$$

Задача 8.4. Выведите параметрические уравнения эллипса.

Решение. Поскольку сумма квадратов выражений x/a и y/b равна единице, эти выражения представляют собой соответственно косинус и синус некоторого угла, который мы и возьмём в качестве параметра:

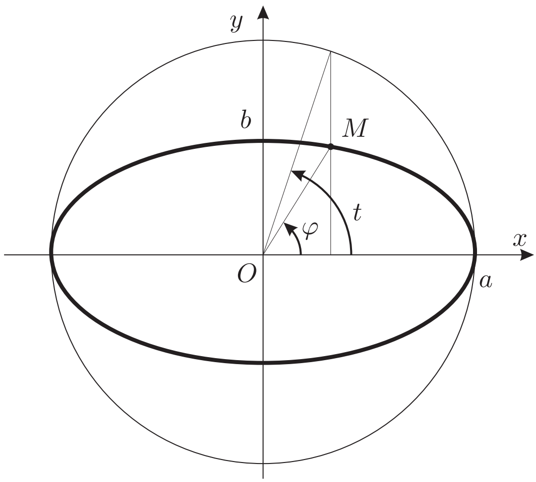
$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leqslant t < 2\pi \pmod{2\pi}.$$

В случае $a = b$ эллипс превращается в окружность, а параметр t имеет геометрический смысл угла между радиус-вектором соответствующей точки окружности и положительным направлением оси Ox.

В случае $a \neq b$ параметр t не равен углу φ между осью Ox и радиус-вектором точки эллипса. Действительно, для точек первой четверти тангенс указанного угла равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{b\sin t}{a\cos t} = \frac{b}{a}\operatorname{tg} t.$$

Параметр t называется *эксцентрическим* параметром; его геометрический смысл проиллюстрирован на следующем чертеже:



Задача 8.5. Получите параметрические уравнения гиперболы.

Решение. Запишем каноническое уравнение гиперболы в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1.$$

Отсюда ясно, что

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0.$$

Положим

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = t;$$

тогда $t \neq 0$ и в силу уравнения гиперболы

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{t}.$$

Разрешая полученную систему двух линейных уравнений относительно x и y, получим

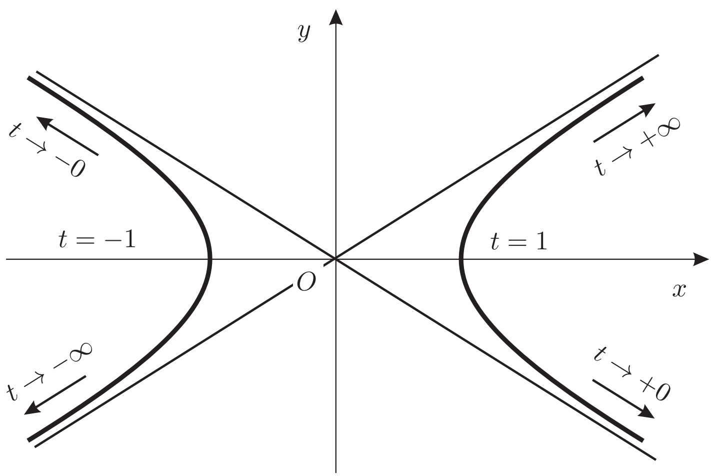
$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Мы доказали, что координаты любой точки гиперболы можно представить в указанном виде, где $t \neq 0$. Обратно, при любом $t \neq 0$ точка с найденными координатами лежит на гиперболе, в чём легко убедиться, поставляя полученные выражения в каноническое уравнение гиперболы.

Если точка $M(x, y)$ лежит на правой ветви гиперболы, то

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \geqslant a \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2}\frac{t^2+1}{t} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad t > 0.$$

Обратно, если $t > 0$, то $x \geqslant a$. При изменении t в промежутке $(0;1]$ значение x убывает от $+\infty$ до a, а значение y возрастает от $-\infty$ до 0. При изменении t в промежутке $[1;+\infty)$ значение x возрастает от a до $+\infty$, а значение y возрастает от 0 до $+\infty$. При $t = 1$ получается правая вершина гиперболы. Значения $-\infty < t < 0$ отвечают левой ветви гиперболы: если $\infty < t \leqslant -1$, то x возрастает от $-\infty$ до $-a$, а y возрастает от $-\infty$ до 0; если же $-1 \leqslant t < 0$, то x убывает от $-a$ до $-\infty$, а y возрастает от 0 до $+\infty$.



Часто гиперболу (вернее, одну её ветвь) параметризуют с помощью гиперболических функций. Положим $t = e^u$, где e — основание натурального логарифма; тогда, очевидно, $1/t = e^{-u}$. При изменении u на всей числовой оси, $-\infty < u < +\infty$, параметр t принимает значения в промежутке $(0;+\infty)$, отвечающем правой ветви гиперболы. Таким образом, при помощи гиперболических функций

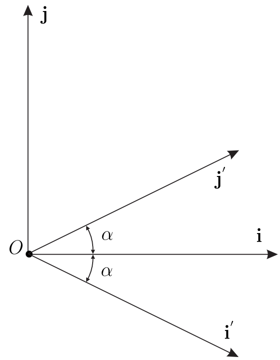
$$\operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \quad \operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

правая ветвь гиперболы может быть задана соотношениями

$$x = a \operatorname{ch} u, \ y = b \operatorname{sh} u, \quad u \in (-\infty; +\infty),$$

похожими на параметрические уравнения эллипса (см. задачу 8.4).

Задача 8.6. Составьте уравнение гиперболы в системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы.



Решение. Сначала рассмотрим исходный правый ортонормированный репер $\{O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ и новый правый нормированный репер $\{O, \boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\}$, векторы которого направлены по асимптотам гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Уравнения асимптот

$$y = \pm x \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Общая линейная связь базисов $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ и $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}')$ следующая:

$$(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}') = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) R, \quad R = \begin{pmatrix} r_1^1 & r_2^1 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{pmatrix}$$

или в развернутом виде

$$\boldsymbol{i}' = r_1^1 \boldsymbol{i} + r_1^2 \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{j}' = r_2^1 \boldsymbol{i} + r_2^2 \boldsymbol{j}.$$

Используя свойства скалярного произведения получим следующие равенства:

$$r_1^1 = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{i}) = \cos\alpha, \quad r_1^2 = (\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$r_2^1 = (\boldsymbol{j}', \boldsymbol{i}) = \cos\alpha, \quad r_2^2 = (\boldsymbol{j}', \boldsymbol{j}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

Итак, имеем

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Итак, в новых координатах

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad X = RX', \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

исходное уравнение гиперболы

$$X^T A X = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}$$

примет следующий вид:

$$X'^T A' X' = 1, \quad A' = R^T A R.$$

Вычислим матрицу A':

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha \\ -\sin\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} & \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} \\ \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} + \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} & \dfrac{\cos^2\alpha}{a^2} - \dfrac{\sin^2\alpha}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X'^T A' X' =$$

$$= \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \right) \left[(x')^2 + (y')^2 \right] + 2 \left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} \right) x'y'.$$

Заметим, что

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}.$$

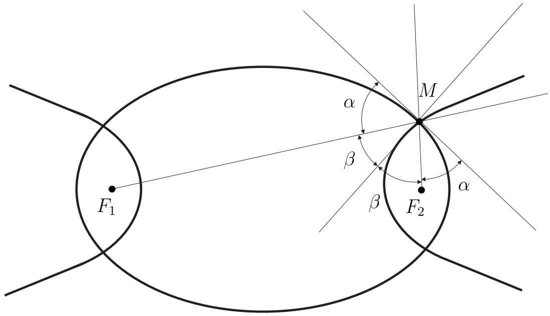
Поэтому

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = 0, \quad \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{2}{a^2 + b^2}.$$

Итак, уравнение в новой системе координат пример следующий вид:

$$x'y' = \frac{1}{4} \left(a^2 + b^2 \right).$$

Задача 8.7. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).



Решение. *Геометрическое решение.* В силу оптических свойств эллипса и гиперболы касательные в точках пересечения эллипса и гиперболы пересекаются под углом $2(\alpha+\beta)=\pi$, а угол между касательными равен $\alpha+\beta=\pi/2$.

Аналитическое решение. Уравнения эллипса и гиперболы в канонической декартовой системе координат имеют вид

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\quad \frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1,$$

где

$$c^2=a_1^2-b_1^2,\quad c^2=a_2^2+b_2^2.$$

Уравнения касательных, проведенных в общей точке $M_0(x_0,y_0)$ эллипса и гиперболы,

$$\frac{xx_0}{a_1^2}+\frac{yy_0}{b_1^2}=1,\quad \frac{xx_0}{a_2^2}-\frac{yy_0}{b_2^2}=1.$$

Нормали к этим касательным

$$\boldsymbol{n}_1=\left\{\frac{x_0}{a_1^2},\frac{y_0}{b_1^2}\right\},\quad \boldsymbol{n}_2=\left\{\frac{x_0}{a_2^2},-\frac{y_0}{b_2^2}\right\}.$$

Докажем, что $(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=0$. Действительно, с одной стороны, имеем

$$(\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2)=\frac{x_0^2}{a_1^2a_2^2}-\frac{y_0^2}{b_1^2b_2^2}.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$\frac{x_0^2}{a_1^2}+\frac{y_0^2}{b_1^2}=1=\frac{x_0^2}{a_2^2}-\frac{y_0^2}{b_2^2},$$

из которого приходим к равенству

$$\frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2}(a_2^2 - a_1^2) + \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2}(b_1^2 + b_2^2) = 0,$$

причем

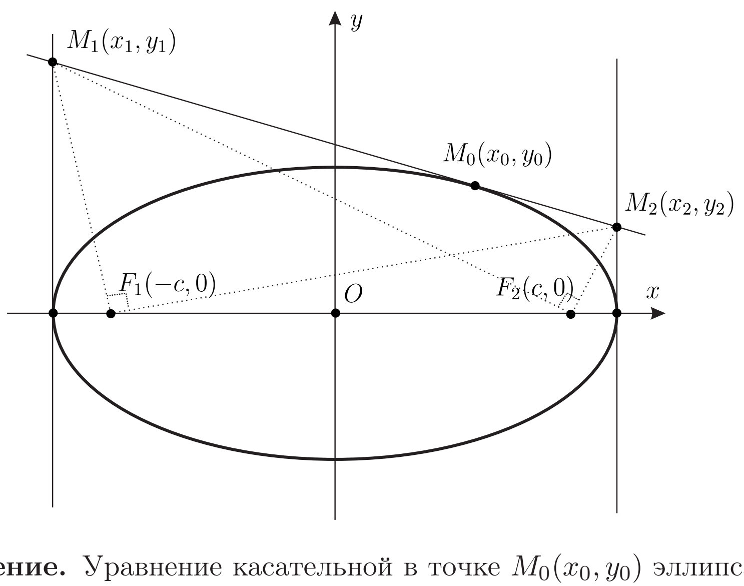
$$a_2^2 - a_1^2 = c^2 - b_2^2 - b_1^2 - c^2 = -b_1^2 - b_2^2.$$

Итак,

$$\frac{x_0^2}{a_1^2 a_2^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2 b_2^2} = 0.$$

Следовательно, $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = 0$.

Задача 8.8. Докажите, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключенный между касательными, проведенными в концах большой оси, виден из любого фокуса под прямым углом.



Решение. Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Уравнения касательных в точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ имеют вид $x = \mp a$. Найдем точки пересечения этих касательных с касательной в точке

$M_0(x_0, y_0)$. Итак, это точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ с координатами

$$x_1 = -a, \quad y_1 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 + \frac{x_0}{a}\right),$$

$$x_2 = a, \quad y_2 = \frac{b^2}{y_0}\left(1 - \frac{x_0}{a}\right).$$

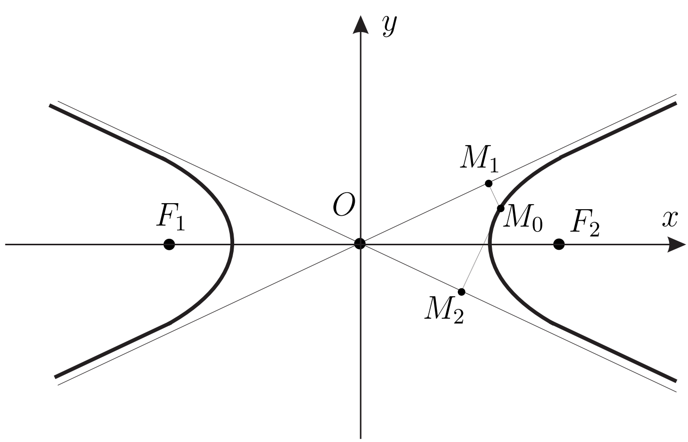
Уравнения прямых l_1 и l_2, проходящих через фокус $F_1(-c, 0)$ и точку $M_1(x_1, y_1)$ и через фокус $F_1(-c, 0)$ и точку $M_2(x_2, y_2)$, имеют вид

$$\frac{x+a}{-c+a} = \frac{y-y_1}{-y_1}, \quad \frac{x-a}{-c-a} = \frac{y-y_2}{-y_2}.$$

Докажем, что направляющие векторы этих прямых ортогональны. Действительно,

$$(-c-a)(-c+a)+y_1y_2 = -a^2+c^2+\frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right) = \{c^2 = a^2-b^2\} =$$
$$= -b^2 + \frac{b^4}{y_0^2}\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right) = -\frac{b^4}{y_0^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} - 1 + \frac{x_0^2}{a^2}\right) = 0.$$

Задача 8.9. Докажите, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная, и найдите эту величину.



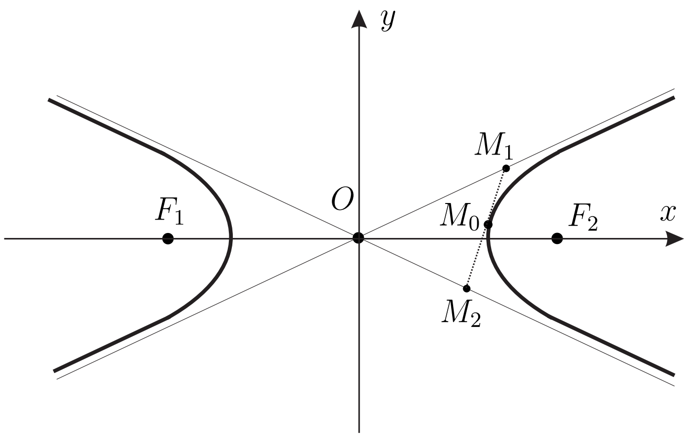
Решение. Уравнения асимптот гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ имеют вид $y = \pm bx/a$. Расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ гиперболы до асимптот $y = bx/a$ и $y = -bx/a$ равны соответственно

$$d_1 = \frac{\left|y_0 - \dfrac{b}{a}x_0\right|}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}, \quad d_2 = \frac{\left|y_0 + \dfrac{b}{a}x_0\right|}{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}.$$

Таким образом,

$$d_1 d_2 = \frac{\left|\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2 - y_0^2\right|}{1+\dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{b^2}{1+\dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Задача 8.10. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, заключенный между ее асимптотами, делится точкой касания пополам.



Решение. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — это точки пересечения касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

к гиперболе $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$, с асимптотами

$$y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Требуется доказать, что

$$\overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}\right) \text{ или } x_0 = \frac{1}{2}\left(x_1 + y_1\right), \quad y_0 = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2\right).$$

Найдем координаты точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$y_1 = \frac{b}{a}x_1,\ \frac{x_1x_0}{a^2} - \frac{y_1y_0}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{ba^2}{x_0b - y_0a},\ y_1 = \frac{b^2a}{x_0b - y_0a};$$

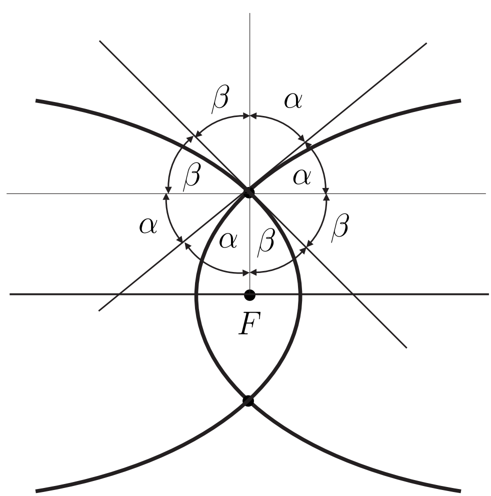
$$y_2 = -\frac{b}{a}x_2,\ \frac{x_2x_0}{a^2} - \frac{y_2y_0}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{ba^2}{x_0b + y_0a},\ y_2 = -\frac{b^2a}{x_0b + y_0a}.$$

Таким образом,

$$y_1 + y_2 = \frac{b^2a}{x_0b - y_0a} - \frac{b^2a}{x_0b + y_0a} =$$
$$= \frac{b^2a}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2}\,(x_0b + y_0a - x_0b + y_0a) = 2y_0\frac{b^2a^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2} = 2y_0;$$

$$x_1 + x_2 = \frac{ba^2}{x_0b - y_0a} + \frac{ba^2}{x_0b + y_0a} =$$
$$= \frac{ba^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2}\,(x_0b + y_0a + x_0b - y_0a) = 2x_0\frac{b^2a^2}{x_0^2b^2 - y_0^2a^2} = 2x_0.$$

Задача 8.11. Докажите, что две параболы с общим фокусом и противоположно направленными осями пересекаются под прямым углом (т.е. касательные в точке пересечения взаимно перпендикулярны).



Решение. *Геометрическое решение.* В силу оптического свойства параболы оба смежных угла между касательными равны $\alpha + \beta$. Таким образом, имеем

$$2(\alpha + \beta) = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, угол между касательными равен $\pi/2$.

Аналитическое решение. Уравнения парабол имеют следующий вид:

$$y^2 = 2px, \quad y^2 = -2p(x - p).$$

Найдем координаты точек пересечения парабол:

$$M_1(x_0, y_0), \quad M_2(x_0, -y_0), \quad x_0 = \frac{p}{2}, \quad y_0 = p.$$

Уравнение касательной к первой параболе, проведенной в точке $M_1(x_0, y_0)$, имеет вид

$$yy_0 - p(x + x_0) = 0.$$

Найдем уравнение касательной к второй параболе, проведенной в точке $M_1(x_0, y_0)$:

$$F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0, \quad F(x, y) = y^2 + 2p(x - p).$$

После преобразований получим следующее уравнение:

$$yy_0 + p(x + x_0) - 2p^2 = 0.$$

Векторы нормалей к точке $M_1(x_0, y_0)$ этих касательных равны

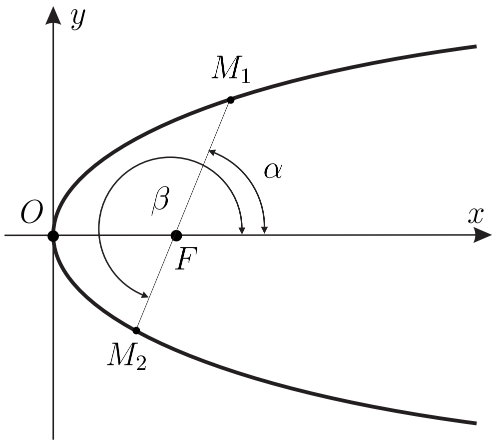
$$\boldsymbol{n}_1 = \{y_0, -p\}, \quad \boldsymbol{n}_2 = \{y_0, p\}.$$

Поэтому

$$(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2) = y_0^2 - p^2 = 0.$$

Аналогично для точки $M_2(x_0, -y_0)$.

Задача 8.12. Докажите, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна.



Решение. В полярной системе координат с полюсом в фокусе F параболы и с полярной осью, совпадающей с осью параболы, уравнение параболы имеет вид

$$r = \frac{p}{1-\cos\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi).$$

Проведем произвольную хорду через фокус параболы. Тогда в полярной системе координат точки пересечения хорды с параболой имеют следующие координаты: $M_1(r_1, \alpha)$ и $M_2(r_2, \beta)$, причем

$$\beta = \alpha + \pi, \quad r_1 = \frac{p}{1-\cos\alpha}, \quad r_2 = \frac{p}{1-\cos\beta}.$$

Тогда

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1-\cos\alpha}{p} + \frac{1+\cos\alpha}{p} = \frac{2}{p},$$

где $r_1 = |FM_1|$, $r_2 = |FM_2|$.

Задача 8.13. Докажите, что если оси двух парабол взаимно перпендикулярны, то четыре точки их пересечения лежат на одной окружности.

Решение. Если за оси прямоугольной системы координат принять оси данных парабол, то их уравнения в этой системе координат будут

$$y^2 = 2p(x+a), \quad x^2 = 2q(y+b), \quad a, b, p, q > 0.$$

Складывая эти уравнения, получим

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy - 2ap - 2bq = 0.$$

Выделяя полные квадраты, приведём это уравнение к виду

$$(x-p)^2+(y-q)^2=p^2+q^2+2ap+2bq;$$

это уравнение окружности с центром в точке (p,q). Если координаты некоторой точки A удовлетворяют уравнениям обеих парабол, то они удовлетворяют и полученному уравнению окружности, а это и означает, что точки пересечения парабол лежат на найденной окружности.

ГЛАВА 9

Приведение к каноническому виду уравнений линий второго порядка

Основные понятия и факты

Уравнение линии второго порядка. Рассмотрим уравнение второй степени от двух переменных

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0; \qquad (9.1)$$

многочлен в левой части этого уравнения обозначим $F(x, y)$. Пусть на плоскости Oxy задана некоторая прямоугольная декартова система координат. Линия, точки которой (точнее, координаты точек) и только они являются решениями уравнения (9.1), называется *линией второго порядка*, или *квадрикой*. При преобразовании системы координат уравнение квадрики изменяется. Поставим задачу найти такую систему координат, в которой уравнение квадрики имеет по возможности наиболее простой вид.

Введём матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_{12} = a_{21}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (9.1) можно записать в виде

$$X^T AX + 2BX + c = 0. \qquad (9.2)$$

Введём также матрицы

$$D = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & c \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & c \end{array}\right\| \quad Z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left\|\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right\|;$$

тогда уравнение квадрики можно записать в виде

$$Z^T DZ = 0. \qquad (9.3)$$

Ортогональные преобразования уравнения квадрики. Ортогональные инварианты уравнения. Осуществим преобразование прямоугольной декартовой системы координат по формулам (3.9.6) (см. с. 50)

$$Z = PZ', \quad Z' = P^{-1}Z,$$

где

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\|\begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\|,$$

$$P^{-1} = \left\|\begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array}\right\| = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\alpha & \sin\alpha & x_0' \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & y_0' \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(см. формулы (3.9.5) и (3.9.7), с. 50). При таком преобразовании координат уравнение квадрики $Z^T DZ = 0$ (см. (9.3)) принимает вид

$$Z'^T D' Z' = 0,$$

где

$$D' = P^T DP = \left\|\begin{array}{c|c} R^T AR & R^T(AX_0 + B^T) \\ \hline (X_0^T A + B)R & X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c \end{array}\right\|, \tag{9.4}$$

т.е. при преобразовании координат матричные коэффициенты уравнения квадрики (9.2) преобразуются по формулам

$$A' = R^T AR, \quad B' = (X_0^T A + B)R, \quad c' = X_0^T AX_0 + 2BX_0 + c. \tag{9.5}$$

Обратите внимание, что матрица A изменяется только при повороте, а свободный член c уравнения — только при переносе начала координат. Матрица B, содержащая коэффициенты линейных слагаемых уравнения квадрики, меняется и при повороте, и при переносе.

Теорема 9.1. *При ортогональных преобразованиях системы координат величины*

$$S = \operatorname{tr} A, \quad \delta = \det A, \quad \Delta = \det D$$

не изменяются. Эти величины называют ортогональными инвариантами уравнения квадрики.

Упрощение уравнения квадрики: уничтожение слагаемого $2a_{12}xy$ при помощи поворота.

Теорема 9.2. *Для уничтожения слагаемого $2a_{12}xy$ в уравнении квадрики (9.1) нужно перейти к новой системе координат, оси которой повёрнуты относительно осей исходной системы. Столбцы координат R_1, R_2 ортов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ новой системы координат являются нормированными (т.е. имеющими единичную длину). решениями однородных систем линейных уравнений*

$$(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения[1]

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \iff \det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0. \tag{9.6}$$

Угол α поворота координатных осей определяется соотношением

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{9.7}$$

Определение 9.3. Корни λ_1 и λ_2 уравнения $\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$ называются *собственными значениями* матрицы A, а ненулевые столбцы R_1, R_2, являющиеся решениями однородных систем $(A - \lambda_k\mathbb{1})R_k = 0$, $k = 1, 2$, — *собственными векторами*, принадлежащими собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно.

Упрощение уравнения квадрики: уничтожение линейных слагаемых $2b_1x + 2b_2y$ при помощи переноса начала координат. Для уничтожения линейных слагаемых нужно выбрать вектор переноса X_0, удовлетворяющий системе уравнений

$$AX_0 = -B^T. \tag{9.8}$$

Однако полученное уравнение не всегда разрешимо, так что уничтожение линейных слагаемых в уравнении квадрики возможно не во всех случаях.

Случай $\delta = \det A \neq 0$: центральные квадрики. Если $\det A \neq 0$, то уравнение $AX_0 = -B^T$ имеет единственное решение

[1] Легко доказать (сделайте это самостоятельно!), что характеристическое уравнение всегда имеет вещественные корни.

$X_0 = -A^{-1}B^T$, и матрица преобразования координат определяется однозначно:

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} R & -A^{-1}B^T \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|,$$

где R — матрица поворота координатных осей (см. теорему 9.2). После такого преобразования координат в уравнении квадрики исчезают слагаемые вида $2a_{12}xy$ и $2b_1x + 2b_2y$, т.е. оно приводится к «полуканоническому» виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \tag{9.9}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (9.6), а c' — свободный член преобразованного уравнения, определяемый по формуле (9.5), в которой X_0 — решение уравнения (9.8). Матрица D' коэффициентов уравнения квадрики в полуканонической системе координат имеет вид

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array} \right). \tag{9.10}$$

Коэффициент c' можно найти при помощи любого из следующих трёх выражений:

$$c' = X_0^T A X_0 + 2BX_0 + c = BX_0 + c = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{9.11}$$

Начало канонической системы координат $O'x'y'$ является центром симметрии линии, определяемой уравнением (9.9), а координатные оси $O'x'$ и $O'y'$ — её осями симметрии. Действительно, если точка с координатами (x', y') является решением уравнения (9.9), то решениями являются также и точки $(-x', y')$, $(x', -y')$, $(-x', -y')$. По этой причине квадрики данного типа называют *центральными* (даже в случае, когда уравнение квадрики не имеет ни одного вещественного решения).

С помощью алгебраических преобразований полученное полуканоническое уравнение можно привести к каноническому виду.

Случай $\delta = \det A = 0$: нецентральные квадрики. Условие $\det A = 0$ эквивалентно тому, что один из корней характеристического уравнения (9.6) равен нулю; будем считать, что $\lambda_1 = 0$; в этом случае $\lambda_2 = S = \operatorname{tr} A$, а матрица D' коэффициентов уравнения квадрики после поворота осей координат имеет вид

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & b_1' \\ 0 & S & b_2' \\ \hline b_1' & b_2' & c \end{array}\right), \quad \Delta = \det D' = -b_1'^2 S. \tag{9.12}$$

Если $\det A = 0$, то система уравнений (9.8) может либо оказаться несовместной, либо иметь бесконечно много решений.

Невырожденный параболический тип: $\Delta \neq 0$. Согласно теореме Кронекера—Капелли система (9.8) несовместна, если ранг матрицы A меньше ранга матрицы $\left[A \mid -B^T\right]$. В этом случае после поворота координатных осей уравнение квадрики примет вид

$$Sy'^2 + 2b_1'x' + 2b_2'y' + c' = 0,$$

где $b_1' \neq 0$, и его можно привести к каноническому уравнению параболы, выделяя полные квадраты.

Величина фокального параметра параболы в каноническом уравнении также может быть выражена через инварианты:

$$p = \left|\frac{b_1'}{S}\right| = \left|\frac{\sqrt{-\Delta/S}}{S}\right| = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}.$$

Вырожденный параболический тип: $\Delta = 0$. В случае, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $\left[A \mid -B^T\right]$, система (9.8) имеет бесконечно много решений. Выбрав любое из них, получаем следующую матрицу коэффициентов уравнения квадрики в преобразованной системе координат

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ \hline 0 & 0 & c' \end{array}\right), \tag{9.13}$$

т.е. само уравнение принимает полуканонический вид

$$Sy'^2 + c' = 0. \tag{9.14}$$

Теорема 9.4. *При помощи ортогональных преобразований координат (т.е. поворота осей координат и переноса начала координат) уравнение квадрики* (9.1) *может быть приведено к одному из девяти канонических типов, перечисленных в таблице на с.* 192.

Полуинвариант K. Тип и каноническое уравнение квадрики может быть получено с помощью инвариантов во всех случаях, кроме вырожденного параболического случая, когда $\delta = \Delta = 0$. Вырожденные параболические квадрики можно различать (и составлять их канонические уравнения) при помощи дополнительной величины

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix},$$

которая в указанном случае, т.е. при $\delta = \Delta = 0$, также является ортогональным инвариантом уравнения квадрики.

Полуканоническое уравнение (9.14), которое получается в вырожденном параболическом случае, приводится к каноническому виду следующим образом:

$$y'^2 + \frac{K}{S^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y'^2 = a^2, & \text{где } a^2 = -\dfrac{K}{S^2}, \text{ если } K < 0, \\ y'^2 = -a^2, & \text{где } a^2 = \dfrac{K}{S^2}, \text{ если } K > 0, \\ y'^2 = 0, & \text{если } K = 0. \end{cases}$$

Задачи

Задача 9.1. Приведите уравнение линии второго порядка

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 + 32x - 56y + 80 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 16 & -28 \end{pmatrix}, \; c = 80, \; D = \left(\begin{array}{rr|r} 5 & -2 & 16 \\ -2 & 8 & -28 \\ \hline 16 & -28 & 80 \end{array}\right).$$

Найдём ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = 13, \quad \delta = \det A = 36 > 0, \quad \Delta = \det D = -1296.$$

Так как $\delta > 0$, квадрика является эллиптической, и её уравнение может быть преобразовано к полуканоническому виду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0,$$

Классификация квадрик на плоскости

	Невырожденные линии: $\Delta \neq 0$	Вырожденные линии: $\Delta = 0$
Эллиптический тип: $\delta > 0$	$S\delta < 0$: эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}},\ b = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}},\ \lvert\lambda_1\rvert < \lvert\lambda_2\rvert$	Пара мнимых пересекающихся прямых $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ $a = \sqrt{\lvert\lambda_1\rvert},\ b = \sqrt{\lvert\lambda_2\rvert}$
	$S\delta > 0$: мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ $a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}},\ b = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$	
Гиперболический тип: $\delta < 0$	Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_1}},\ b = \sqrt{\dfrac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$	Пара вещественных пересекающихся прямых $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ $a = \sqrt{\lvert\lambda_1\rvert},\ b = \sqrt{\lvert\lambda_2\rvert}$
Параболический тип $\delta = 0$	Парабола $y^2 = 2px$ $p = \sqrt{-\dfrac{\Delta}{S^3}}$	$K < 0$: пара веществ. паралл. прямых $y^2 = a^2,\ a = \sqrt{-\dfrac{K}{S^2}}$
		$K > 0$: пара мнимых паралл. прямых $y^2 = -a^2,\ a = \sqrt{\dfrac{K}{S^2}}$
		$K = 0$: пара совпад. прямых $y^2 = 0$

а поскольку $S\Delta < 0$ — это эллипс.

Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются собственными значениями (корнями характеристического многочлена) матрицы A:

$$f_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

Свободный член c' полуканонического уравнения найдем по формуле (9.11):

$$c' = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{-1296}{36} = -36.$$

Итак, получаем полуканоническое уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$$

и далее каноническое

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Определяемый этим уравнением эллипс имеет полуоси $a = 3$, $b = 2$, линейный эксцентриситет $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/3$, фокусы $F_1(-\sqrt{5}; 0)$ и $F_2(\sqrt{5}; 0)$ (в канонической системе координат $O'x'y'$) и директрисы $\sqrt{5}x' + 9 = 0$ (левая директриса, соответствующая фокусу F_1) и $\sqrt{5}x' - 9 = 0$ (правая директриса, соответствующая фокусу F_2).

Базисные векторы $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ канонической системы координат являются собственными векторами матрицы A; для нахождения их координат (столбцов R_1, R_2) требуется решить однородные системы $(A - \lambda_k \mathbb{1})R_k = 0$, $k = 1, 2$:

$$\lambda_1 = 4: \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 9: \quad \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при нормировке решений линейных систем знаки нормирующих множителей c_1 и c_2 выбирались так, чтобы базис $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ получился правым. Матрица поворота имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Угол α поворота координатных осей определяется условиями

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

т.е. равен $\operatorname{arctg}(1/2) \approx 26{,}6^\circ$. Этот же результат может быть получен и по формуле (9.7):

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5-8}{-4} = \frac{3}{4} \ \Rightarrow\ 2\alpha = \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} \ \Rightarrow\ \alpha \approx 26{,}6^\circ.$$

Для нахождения координат X_0 вектора переноса $\boldsymbol{r}_0$ начала координат в системе Oxy решим неоднородную систему $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 16 \\ -28 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итак, преобразование координат, приводящее уравнение квадрики к полуканоническому виду, есть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Обозначим матрицу этого преобразования через P:

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -2 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} R & X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|;$$

для удобства запишем также

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array} \right)$$

Обратная матрица вычисляется по формуле (3.9.7) (см. с. 50):

$$P^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} R^T & -R^T X_0 \\ \hline O & 1 \end{array} \right\|.$$

Поскольку

$$-R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix},$$

получаем

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{8}{\sqrt{5}} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array} \right).$$

Обратное преобразование координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{5} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (9.2)$$

Каноническая система координат $O'x'y'$ рассматриваемой квадрики получается из исходной системы координат Oxy параллельным переносом координатных осей на вектор $\boldsymbol{r}_0 = (-2; 3)^T$ и поворотом на угол $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 26{,}6^\circ$.

Отметим, что свободный член c' полуканонического уравнения может быть вычислен также по второй из формул (9.11):

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} 16 & -28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 80 = -36,$$

а матрица D' коэффициентов преобразованного уравнения — по формуле (9.4):

$$D' = P^T D P = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -36 \end{array}\right).$$

Найдём координаты фокусов эллипса в системе координат Oxy по формулам (9.1):

$$F_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2\sqrt{5} \\ 1 & 2 & 3\sqrt{5} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $F_1(-4; 2)$, $F_2(0; 4)$ в системе координат Oxy.

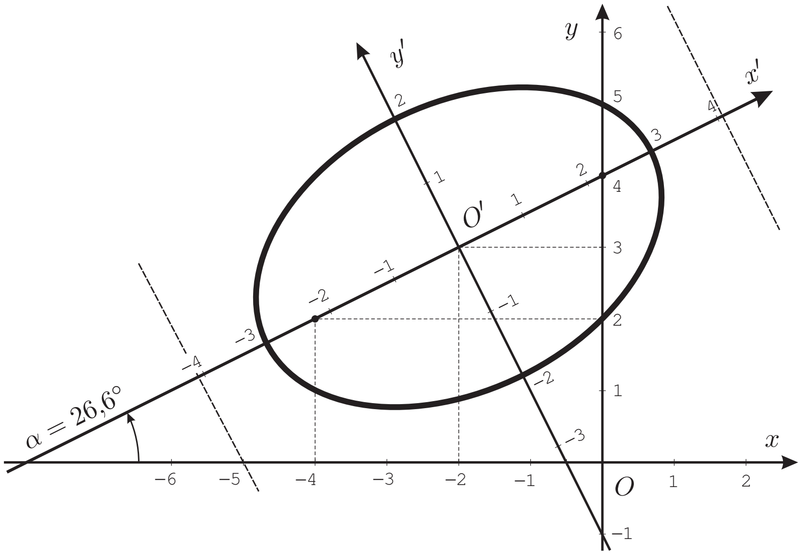
Для нахождения уравнений директрис в системе Oxy нужно подставить в их канонические уравнения[1] $\sqrt{5}x' \pm 9 = 0$ выражения для x' и y' через x и y из преобразования (9.2), т.е. $Z' = P^{-1}Z$:

$$\sqrt{5}x' + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x + y + 10 = 0,$$

[1]Здесь термин «каноническое уравнение» означает «уравнение относительно канонической системы координат».



$$\sqrt{5}x' - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x + y - 8 = 0.$$

Аналогичным образом находим уравнения канонических осей координат:

ось Ox' $(y' = 0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{5}\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y + \frac{8}{5}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow\; x - 2y + 8 = 0,$$

ось Oy' $(x'=0)$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^T P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=\sqrt{5}\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{5}\right)=0 \qquad \Leftrightarrow\ 2x+y+1=0.$$

Задача 9.2. Приведите уравнение линии второго порядка

$$5x^2-2xy+5y^2-22x+14y+29=0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A=\begin{pmatrix}5&-1\\-1&5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-11\ 7\end{pmatrix},\quad c=29,\quad D=\left(\begin{array}{rr|r}5&-1&-11\\-1&5&7\\\hline -11&7&29\end{array}\right).$$

Поскольку $\det A=24>0$, квадрика имеет эллиптический тип; её полуканоническое уравнение

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+c'=0.$$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического многочлена матрицы A:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}5-\lambda&-1\\-1&5-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-10\lambda+24 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1=4,\\ \lambda_2=6.\end{array}\right.$$

Для отыскания столбцов координат R_1, R_2 базисных векторов $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ канонической системы координат требуется решить однородные системы $(A-\lambda_k\mathbb{1})R_k=O$:

$$\lambda_1{=}4:\ \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}{=}c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad R_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\lambda_2{=}6:\ \begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}{=}c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ R_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$$

Матрица поворота

$$R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix};$$

очевидно, эта матрица описывает поворот на угол $\alpha=\pi/4=45^\circ$.

Чтобы найти столбец координат X_0 вектора переноса начала, нужно решить неоднородную систему $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица полного преобразования, канонизирующего данную квадрику, имеет вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Найдем свободный член полуканонического уравнения:

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} -11 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 29 = 0.$$

Таким образом, данная квадрика имеет полуканоническое уравнение

$$4x'^2 + 6y'^2 = 0$$

и представляет собой пару мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке, координаты которой в канонической системе координат $(0; 0)$, а в исходной системе координат — $(2; -1)$.

Так как координаты вектора $\overrightarrow{O'O}$ в системе координат $O'x'y'$ равны

$$X_0' = -R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

имеем

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y - 1), \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x + y + 3), \end{cases}$$

так что исходное уравнение можно представить в виде

$$2\,(x + y - 1)^2 + 3\,(-x + y + 3)^2 = 0.$$

Задача 9.3. Приведите уравнение линии второго порядка

$$13x^2 + 30xy - 27y^2 + 18x + 198y + 117 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Матрицы коэффициентов данной квадрики

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 15 & -27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 99 \end{pmatrix}, \quad c = 117, \quad D = \left(\begin{array}{cc|c} 13 & 15 & 9 \\ 15 & -27 & 99 \\ \hline 9 & 99 & 117 \end{array}\right).$$

Найдём ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = -14, \quad \delta = \det A = -576, \quad \Delta = \det D = -165888.$$

Поскольку $\delta < 0$, квадрика имеет гиперболический тип, а поскольку $\Delta \neq 0$ — это гипербола. Полуканоническое уравнение гиперболы

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0$$

можно получить с помощью инвариантов: коэффициенты λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 + 14\lambda - 576 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -32, \\ \lambda_2 = 18, \end{array}\right.$$

а свободный член c' вычисляется по формуле (9.11)

$$c' = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{-165888}{-576} = 288,$$

так что получаем полуканоническое уравнение

$$-32x'^2 + 18y'^2 + 288 = 0$$

и далее каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 1$$

гиперболы с полуосями $a = 3$ и $b = 4$, линейным эксцентриситетом $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, эксцентриситетом $\varepsilon = 5/3$, фокусами $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$ (координаты фокусов указаны в канонической системе координат $O'x'y'$), директрисами $x' = \pm 9/5$ и асимптотами

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{16} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} 4x' - 3y' = 0, \\ 4x' + 3y' = 0. \end{array}\right.$$

Найдём ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение квадрики.

Сначала определим поворот, уничтожающий слагаемое $30xy$ в уравнении квадрики. Для этого найдём собственные векторы матрицы A:

$$\lambda_1 = -32: \quad \begin{pmatrix} 45 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 18: \quad \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 15 & -45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

нормировочные коэффициенты выбраны так, чтобы матрица

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \ R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

имела определитель $\det R = +1$, т.е. описывала поворот. Угол поворота координатных осей равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-3) \approx -1{,}249 = -71{,}6^\circ.$$

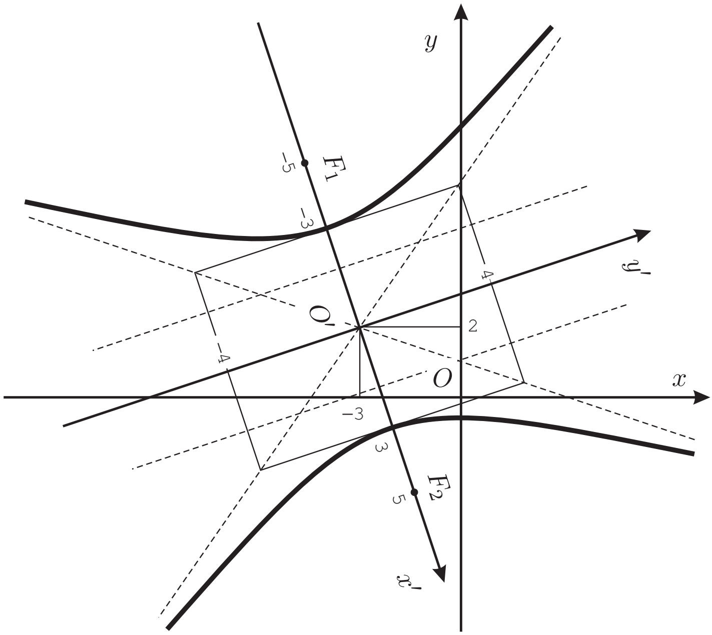
Для определения вектора переноса начала координат решим неоднородную систему уравнений $AX_0 = -B^T$:

$$\begin{pmatrix} 13 & 15 \\ 15 & -27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -99 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что свободный член c' полуканонического уравнения может быть вычислен также по второй из формул (9.11):

$$c' = BX_0 + c = \begin{pmatrix} 9 & 99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 117 = 288,$$

что, разумеется совпадает с результатом, полученным ранее при помощи инвариантов.



Матрица ортогонального преобразования, канонизирующего данную квадрику, имеет вид

$$P = \left(\begin{array}{rr|r} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & -3 \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & -3\sqrt{10} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{10} \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{10} \end{array}\right),$$

т.е. преобразование осуществляется по формулам

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') - 3, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x' + y') + 2. \end{cases} \tag{9.1}$$

Чтобы найти обратное преобразование P^{-1} (оно потребуется для нахождения уравнений асимптот и директрис), воспользуемся формулой (3.9.7) (см. с. 50):

$$X_0' = -R^T X_0 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 9 \\ 3 & 1 & 7 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{10} \end{array}\right), \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Найдём координаты фокусов гиперболы в исходной системе координат Oxy:

$$F_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{10} - 3 \\ \frac{3}{2}\sqrt{10} + 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$F_2: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{10} - 3 \\ 2 - \frac{3}{2}\sqrt{10} \\ 1 \end{pmatrix};$$

итак, $F_1 \left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{10} - 3,\ 2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{10}\right)$, $F_2 \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{10} - 3,\ 2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{10}\right)$ в исходной системе координат Oxy.

Найдём уравнения канонических осей координат. Уравнения этих осей в канонической системе координат суть $y' = 0$ и $x' = 0$; чтобы получить их уравнения в исходной системе координат, воспользуемся формулами преобразования (9.2):

$$O'x'\ (y' = 0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y + 7) = 0,$$

$$O'y'\ (x' = 0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}(x - 3y + 9) = 0,$$

Итак, уравнения осей канонической системы координат имеют вид

$$O'x':\ 3x + y + 7 = 0, \quad O'y':\ x - 3y + 9 = 0.$$

Аналогично преобразуем уравнения асимптот:

$$4x' + 3y' = 0: \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad 13x - 9y + 57 = 0,$$

$$4x' - 3y' = 0: \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad x + 3y - 3 = 0,$$

и уравнения директрис:

$$5x' + 9 = 0: \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad x - 3y + \frac{9}{5}\sqrt{10} + 9 = 0,$$

$$5x' - 9 = 0: \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad x - 3y - \frac{9}{5}\sqrt{10} + 9 = 0.$$

Задача 9.4. Приведите уравнение линии второго порядка

$$27x^2 - 48xy + 13y^2 - 72x + 114y - 27 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 27 & -24 \\ -24 & 13 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -36 & 57 \end{pmatrix}, \ c = -27, \ D = \left(\begin{array}{rr|r} 27 & -24 & -36 \\ -24 & 13 & 57 \\ \hline -36 & 57 & -27 \end{array}\right)$$

и вычислим его ортогональные инварианты:

$$S = \operatorname{tr} A = 40, \quad \delta = \det A = -225, \quad \Delta = 0.$$

Линия имеет вырожденный ($\Delta = 0$) гиперболический ($\delta < 0$) тип, т.е. представляет собой пару пересекающихся прямых.

Найдём собственные значения и собственные векторы матрицы A:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda^2 - 40\lambda - 225 = 0 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -5, \\ \lambda_2 = 45, \end{array}\right.$$

$$\lambda_1 = 45: \quad \begin{pmatrix} -18 & -24 \\ -24 & -32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -5: \quad \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Как обычно, выбор нормировочных констант осуществляется так, чтобы матрица $R = [R_1\ R_2]$ имела определитель $+1$, т.е. соответствовала бы повороту системы координат; в нашем случае матрица поворота

$$R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

описывает вращение на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}(3/4) \approx -36{,}9^\circ$.

Вектор переноса начала координат определяется из уравнения $AX_0 = -B^T$:

$$X_0 = -A^{-1}B^T = -\begin{pmatrix} 27 & -24 \\ -24 & 13 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -36 \\ 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

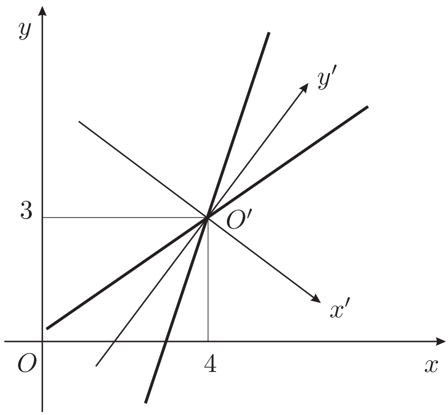
Итак, полуканоническое уравнение рассматриваемой квадрики имеет вид

$$45x'^2 - 5y'^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ 9x'^2 - y'^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \left[\begin{aligned} &3x' - y' = 0, \\ &3x' + y' = 0. \end{aligned}\right.$$

Матрица P ортогонального преобразования, канонизирующего уравнение, и обратная к ней[1] P^{-1} равны

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 4 \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{24}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[1] Матрица P^{-1} вычисляется по формуле (3.9.7) (см. с. 50).



Уравнения прямых, образующих рассматриваемую квадрику, в системе координат Oxy:

$$3x' - y' = 0: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{5}x - \frac{13}{5}y + \frac{3}{5} = 0,$$

$$3x' + y' = 0: \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 3x - y - 9 = 0,$$

т.е.

$$9x - 13y = -3, \quad 3x - y = 9.$$

Уравнения осей канонической системы координат:

$$Ox' \ (y' = 0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{24}{5} = 0, \quad 3x + 4y = 24,$$

$$Oy' \ (x' = 0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{7}{5} = 0, \quad 4x - 3y = 7.$$

Задача 9.5. Приведите уравнение линии второго порядка

$$x^2 - 2xy + y^2 + 16x + 8y - 92 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = -92, \quad D = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 8 \\ -1 & 1 & 4 \\ \hline 8 & 4 & -92 \end{array}\right)$$

и вычислим ортогональные инварианты:

$$S = \operatorname{tr} A = 2, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = -144.$$

Так как $\delta = 0$, квадрика имеет параболический тип; поскольку $\Delta \neq 0$ — это парабола с каноническим уравнением $y''^2 = 2px''$. Фокальный параметр можно определить с помощью инвариантов:

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} = \sqrt{-\frac{-144}{2^3}} = 3\sqrt{2}.$$

Итак, каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y''^2 = 6\sqrt{2}x'',$$

её фокус имеет в канонической системе $O''x''y''$ координаты $F(3/\sqrt{2}; 0)$, а директриса — уравнение $x'' = -3/\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}x'' + 3 = 0$.

Займёмся поиском ортогонального преобразования, канонизирующего рассматриваемое уравнение. Собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = S = 2$; найдём собственные векторы:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

нормировочные коэффициенты выбраны так, чтобы новый базис $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'$ получился правым, т.е. чтобы матрица поворота

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имела определитель $+1$.

Матрицы коэффициентов уравнения квадрики после поворота координатных осей примут вид

$$B' = BR = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \\ \hline 6\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -92 \end{array}\right);$$

стало быть, полуканоническое уравнение квадрики имеет вид

$$2y'^2 + 12\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y' - 92 = 0$$

Коэффициент при x' имеет тот же знак, что и коэффициент при y', так что алгебраическими преобразованиями полученное уравнение не удастся свести к каноническому уравнению параболы $y''^2 = 2py''$, где $p > 0$. Для того, чтобы знаки коэффициентов при x' и y' стали противоположными, требуется изменить направления осей Ox' и Oy' на противоположные, что достигается изменением знака матрицы поворота R или, что то же самое, дополнительным поворотом на $180°$. Итак, матрицу поворота возьмём в виде

$$R = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

эта матрица описывает поворот на угол $\alpha = 135°$. Матрицы коэффициентов уравнения квадрики примут вид

$$B' = BR = \begin{pmatrix} 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

и

$$D' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 2\sqrt{2} \\ \hline -6\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & -92 \end{array}\right),$$

а полуканоническое уравнение квадрики — вид

$$2y'^2 - 12\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' - 92 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y'^2 - 6\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 46 = 0.$$

Перегруппировывая слагаемые, получим

$$y'^2 + 2\sqrt{2}y' = 6\sqrt{2}x' + 46$$

или, выделяя полный квадрат,

$$\left(y' + \sqrt{2}\right)^2 = 6\sqrt{2}\left(x' + 4\sqrt{2}\right).$$

Введя переменные

$$\begin{cases} y'' = y' + \sqrt{2}, \\ x'' = x' + 4\sqrt{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x'' - 4\sqrt{2}, \\ y'' = y' - \sqrt{2}, \end{cases}$$

получим уже известное нам каноническое уравнение $y''^2 = 6\sqrt{2}x''$ параболы с фокальным параметром $p = 3\sqrt{2}$.

Начало O'' канонической системы координат $O''x''y''$ относительно системы $Ox'y'$ имеет координаты

$$X_0' = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Найдём его координаты в системе Oxy:

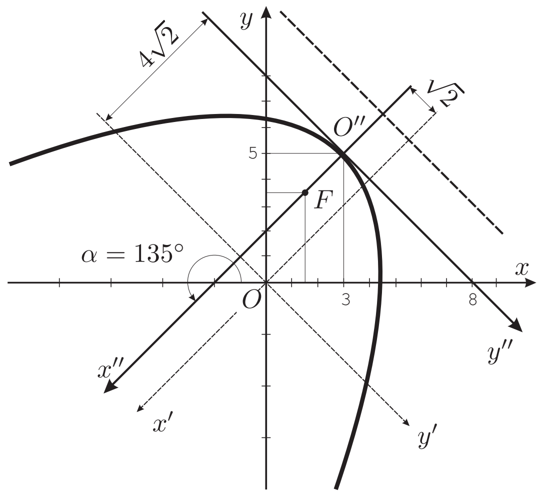
$$X_0 = RX_0' = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полное ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение данной квадрики, и обратное преобразование имеют матрицы

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 4\sqrt{2} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Координаты фокуса в системе Oxy:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$



т.е. $F(3/2; 7/2)$. Уравнение директрисы:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 11 - y - x = 0,$$

т.е. $x + y = 11$.

Уравнения осей канонической системы координат:

$$\text{ось } Ox\ (y=0):\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1\right) = 0,$$

$$\text{ось } Oy\ (x=0):\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 4\right) = 0,$$

т.е. оси канонической системы координат имеют уравнения $x - y + 2 = 0$ (ось Ox) и $x + y - 8 = 0$ (ось Oy).

Задача 9.6. Приведите уравнение линии второго порядка

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 - 36x - 54y + 72 = 0$$

к каноническому виду. Найдите координаты фокусов, уравнения канонических осей координат, директрис и асимптот (при наличии).

Решение. Запишем матрицы коэффициентов уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -18; & -27 \end{pmatrix},\ c = 72,\ D = \left(\begin{array}{rr|r} 4 & 6 & -18 \\ 6 & 9 & -27 \\ \hline -18 & -27 & 72 \end{array}\right).$$

Вычислим ортогональные инварианты уравнения:

$$S = \operatorname{tr} A = 13, \quad \delta = \det A = 0, \quad \Delta = \det D = 0.$$

Таким образом, это вырожденная параболическая квадрика, и для определения её типа требуется ещё вычислить полуинвариант K:

$$K = \begin{vmatrix} 4 & -18 \\ -18 & 72 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -27 \\ -27 & 72 \end{vmatrix} = -117.$$

Полуканоническое уравнение $Sy'^2 + K/S = 0$, т.е.

$$13y'^2 - 9 = 0,$$

которому соответствует матрица коэффициентов

$$D' = \left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 \end{array}\right),$$

распадается в пару уравнений параллельных прямых

$$\sqrt{13}y' - 3 = 0, \quad \sqrt{13}y' + 3 = 0.$$

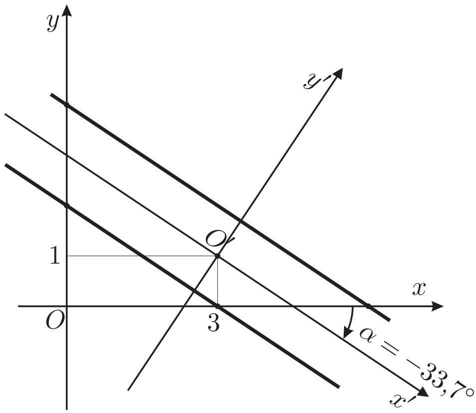
Определим ортогональное преобразование, канонизирующее уравнение рассматриваемой квадрики. Собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 13$ матрицы A, являющиеся корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 13\lambda = 0$, были найдены ранее; найдём собственные векторы матрицы A:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 13: \quad \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Матрица поворота

$$R = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

описывает вращение на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}(2/3) \approx -33{,}7^\circ$.

Для определения вектора параллельного переноса нужно решить неоднородную систему $AX_0 = -B^T$, которая в рассматриваемом случае имеет бесконечно много решений. Воспользуемся методом Гаусса—Жордана:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 18 \\ 6 & 9 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

общее решение системы описывается формулой

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где a — произвольная константа. Матрица P канонизирующего ортогонального преобразования и обратная к ней P^{-1} имеют вид

$$P = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{2}(9-3a) \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} & a \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{13}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & \frac{1}{2}(13a-27) \\ 2 & 3 & -9 \\ \hline 0 & 0 & \sqrt{13} \end{array}\right).$$

Найдём уравнения прямых линий, составляющих рассматриваемую квадрику, в системе координат Oxy:

$$\sqrt{13}y' - 3 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \\ -3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 3y - 12 = 0,$$

$$\sqrt{13}y' + 3 = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 2x + 3y - 6 = 0,$$

таким образом, уравнение данной квадрики может быть представлено в виде

$$(2x + 3y - 6)(2x + 3y - 12) = 0.$$

Уравнения осей канонической системы координат:

$$\text{ось } Ox' \ (y' = 0): \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x + 3y - 9) = 0,$$

$$2x + 3y = 9,$$

$$\text{ось } Oy' \ (x' = 0): \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} \left(3x - 2y + \frac{1}{2}(13a - 27) \right) = 0,$$

$$3x - 2y = \frac{1}{2}(27 - 13a),$$

где a — произвольная постоянная.

Список литературы

1. *Александров П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979. — 512 с.
2. *Александров П. С.* Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми сведениями из алгебры. — М.: Наука, 1968. — 912 с.
3. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2005. — 304 с.
4. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Физматлит, 2004. — 496 с.
5. *Бортаковский А. С., Пантелеев А. В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2005. — 496 с.
6. *Ефимов Н. В.* Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Физматлит, 2005. — 240 с.
7. *Ильин В. А., Ким Г. Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 320 с.
8. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 224 с.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 296 с.
10. *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2003. — 160 с.
11. *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Т. I. — М.: Планета знаний, 2007. — 469 с.
12. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980. — 240 с.
13. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во МГУ, 1967. — 698 с.
14. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1976. — 384 с.

15. *Овчинников А. В.* Алгебра и геометрия в вопросах и задачах. Кн.1: Основы алгебры и аналитической геометрии. — М.: ЛЕНАНД, 2016. — 288 с.
16. *Овчинников А. В.* Алгебра и геометрия для студентов-физиков. Лекционный курс. Семестр 1. — М.: Физический ф-т МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016. — 360 с.
17. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979. — 336 с.
18. *Цубербиллер О. Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Лань, 2003. — 336 с.

Учебное издание

Корпусов Максим Олегович,
Овчинников Алексей Витальевич

Аналитическая геометрия.
Методы решения задач

Подписано в печать 20.05.2019 г.
Формат 60x90/16. Объем 13,5 п.л. Тираж 300 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-8279-0170-9

9 785827 901709 >