МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Г.Н. Медведев

35 ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.
Практическое пособие

Москва
Физический факультет МГУ
2019

М е д в е д е в Г. Н. **35 задач по аналитической геометрии. Практическое пособие** / Учебное пособие.
М.: Физический факультет МГУ, 2019.

Учебное пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса физического факультета МГУ. Рассмотрены основные типы задач, возникающих при рассмотрении прямой на плоскости и прямых и плоскостей в пространстве. Задачи решены в общем виде и сопровождаются примерами. Пособие также будет полезно преподавателям, ведущим семинарские занятия по аналитической геометрии.

Медведев Герман Николаевич

**35 ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.
ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора

Принято считать аналитическую геометрию самым простым разделом курса высшей математики. Она вызывает у студентов даже некоторое пренебрежение к ней. В самом деле, все эти прямые, плоскости, векторы знакомы из курса средней школы. Автор пособия тоже считает аналитическую геометрию простым предметом и хочет помочь читателям укрепиться в этом мнении.

В пособие вошли основные задачи для прямых на плоскости и прямых и плоскостей в пространстве. На примерах этих 35 задач автор показывает, что в идейном плане решение большинства из них укладывается в одну или две строчки. Остается подставить конкретные числовые данные и, не ошибаясь в выкладках, получить ответ.

Для этого требуется овладеть главным навыком — умением выбрать наиболее подходящий и выгодный способ задания объектов задачи. Конечно, исходная задача может не иметь этого удобного вида. Значит, его надо сначала получить. В большинстве задач это векторное задание прямых и плоскостей.

Важнейшим помощником в решении является чертеж, причем общий чертеж ситуации, не привязанный к конкретным числовым данным. Поэтому и формулировки задач даются в общем виде, а не для конкретных прямых и плоскостей.

Автор надеется, что эти два полезных совета помогут читателю овладеть курсом аналитической геометрии — первой ступенькой курса высшей математики.

Я приношу благодарность всем сотрудникам кафедры математики Физического факультета МГУ, с которыми приходилось обсуждать математические и методические вопросы. Компьютерный набор текста выполнили В.А. Васильченко, С.В. Матросов, Н.Е. Шапкина и И.Е. Могилевский, за что я им очень благодарен.

В работе над текстом книги неоценимую помощь профессиональными и методическими советами оказали Н.Е. Шапкина и И.Е. Могилевский. Я искренне благодарю их за постоянную дружескую поддержку.

Г.Н. Медведев

Понятия и обозначения

В книге будут использоваться следующие понятия и обозначения. При выбранном полюсе O (он же — начало координат системы Oxy или $Oxyz$) через

$$\vec{r} = \{x; y\} \quad \text{или} \quad \vec{r} = \{x; y; z\}$$

будет обозначаться радиус-вектор точки с координатами $(x; y)$ или $(x; y; z)$.

Это же обозначение мы будем использовать и для точки — конца радиуса-вектора, ограничиваясь кратким «точка $\vec{r}$» вместо длинного «точка с радиусом-вектором $\vec{r}$».

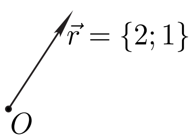

Рис. 0.1.

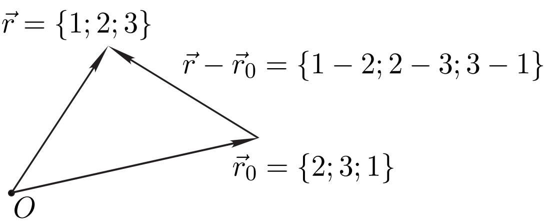

Рис. 0.2.

Из контекста всегда понятно, что через $\vec{r} - \vec{r}_0$ обозначается не «разность точек», а разность радиусов-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}_0$. Но разность $\vec{r} - \vec{r}_0$ вполне можно (и удобно) называть вектором, направленным из точки $\vec{r}_0$ в точку $\vec{r}$.

Вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ назовем *текущим вектором*, направленным из точки $\vec{r}_0$ в точку $\vec{r}$, и будем обозначать его так: $\vec{r}_0 \rightsquigarrow \vec{r}$ (точка $\vec{r}$ «бегает» по прямой или плоскости).

Ортогональной проекцией вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$ на ось, задаваемую единичным вектором $\vec{e}$, будем называть вектор

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{e})\vec{e}.$$

Такое определение удобно для проекции вектора на координатную ось или на координатную плоскость. Проекция вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$ на координатную ось Ox (рис. 0.3) есть вектор

$$\vec{r_1} - \vec{r}_0 = (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{i})\vec{i} = (x - x_0)\vec{i}.$$

Проекция вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$ на координатную плоскость Oxy (рис. 0.4) есть вектор

$$\vec{r_1} - \vec{r}_0 = (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{i})\vec{i} + (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{j})\vec{j} = (x - x_0)\vec{j} + (y - y_0)\vec{j}.$$

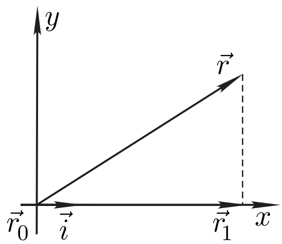

Рис. 0.3. Проекция вектора на ось Ox

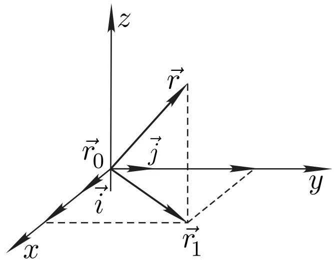

Рис. 0.4. Проекция вектора на плоскость Oxy

Векторы будут обозначаться буквами со стрелочками:

$$\vec{r},\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k},\ \vec{a},\ \vec{N} \text{ и т. д.}$$

Прямые будут обозначаться буквами L, а плоскости буквами P с соответсвующими индексами.

Рекомендуемый план решения любой задачи (как на плоскости, так и в пространстве):

1. Общий чертеж ситуации задачи (не привязывая его к конкретным числовым данным задачи).
2. Выбор наиболее подходящего способа задания «участников» — прямых или плоскостей. В большинстве задач векторное задание позволяет принципиально решить задачу в одну или две строки в общем виде.
3. Реализация полученного общего решения для конкретных условий задачи.

Понятно, что получение «наиболее подходящего способа задания участников» требует свободного владения переходами от одного способа задания объекта к другому. Например, прямая, заданная как линия пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_1 = 0, \end{cases}$$

должна «с легкостью» преобразовываться к виду

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t,$$

где $\vec{r}_0$ — начальная точка на этой прямой, а $\vec{a}$ — направляющий вектор.

Из заданных уравнений нужно получить и точку $\vec{r}_0$ и вектор $\vec{a}$.

Глава 1

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

ЗАДАЧА 1. Различные способы задания прямой на плоскости. Переход от одного способа задания к другому.

В задачах на плоскости, прежде всего, надо преодолеть школьную привычку к уравнению $y = kx + b$, которое не описывает прямую $x = x_0$ и поэтому не может считаться общим уравнением прямой на плоскости.

Общим уравнением, задающим любую прямую на плоскости, является уравнение

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Если точка (x_0, y_0) лежит на этой прямой, то имеем

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \tag{2}$$

Вычитая уравнения (1) и (2) одно из другого, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{3}$$

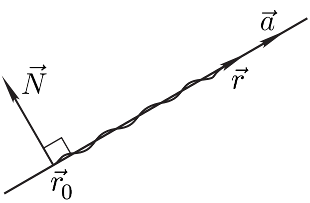

Рис. 1.1. К задаче 1

Равенство (3) означает ортогональность вектора $\vec{N} = \{A; B\}$ и текущего вектора $\vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0; y - y_0\}$ нашей прямой

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Значит, вектор $\vec{N} = \{A; B\}$ — это вектор нормали к прямой $Ax + By + C = 0$. *Направляющий вектор* $\vec{a}$, ортогональный вектору $\vec{N}$, т.е. удовлетворяющий условию $(\vec{a}, \vec{N}) = 0$, легко получить в виде (рис. 1.1)

$$\vec{a} = \{-B; A\}.$$

Если кому-то нравится $\vec{a} = \{B; -A\}$ — пожалуйста.

Данный рисунок (рис. 1.1), согласно упомянутой выше договоренности эквивалентен более подробному рис. 1.2 с изображением радиусов-векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$.

Постепенно надо приучать себя лишь мысленно представлять радиусы-векторы, исходящие из начала координат O и заканчивающиеся в точках $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$.

Для работы с текущим вектором $\vec{r} - \vec{r}_0$ в этой задаче вполне достаточно точек $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ на данной прямой.

Сами обозначения $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ со стрелочками напоминают, что эти точки — концы радиусов-векторов, обозначаемых так же $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$.

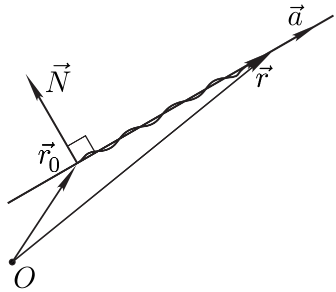

Рис. 1.2. К задаче 1

Условие коллинеарности вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$ и вектора $\vec{a}$ дает *векторное уравнение прямой*

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{a}t,$$

где t — произвольный числовой параметр. Естественно, что это уравнение обычно записывают в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t. \qquad (4)$$

В дальнейшем направляющий вектор $\vec{a}$ прямой на плоскости будем в координатах писать в виде $\vec{a} = \{l; m\}$.

Если вектор $\vec{r} - \vec{r}_0 = \{x - x_0; y - y_0\}$ коллинеарен вектору $\vec{a} = \{l; m\}$, то условие $\vec{r} - \vec{r}_0 \| \vec{a}$ в координатах выглядит так:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называют *каноническим уравнением прямой.*

Важное замечание. Направляющий вектор прямой — это любой вектор, лежащий на этой прямой или на прямой, параллельной ей. Поэтому его нельзя связывать с какой-то точкой, как мы делаем, сохраняя для конечных точек радиусов-векторов обозначения радиусов-векторов.

Добавление параметра t дает два уравнения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t, \qquad (6)$$

называемые *параметрическими уравнениями прямой.*

Замечание. К сожалению, иногда не только говорят, но и пишут про два уравнения (6) «параметрическое уравнение прямой».

Итак, мы познакомились с четырьмя видами (1), (4), (5) и (6) уравнений прямой на плоскости, и время решения конкретных задач зависит от выбора наиболее подходящего способа задания прямой.

Далее мы увидим, что в большинстве задач, как на плоскости, так и в пространстве, краткий и быстрый путь решения обеспечивается векторной формой уравнений.

ЗАДАЧА 2. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и параллельную данной прямой.

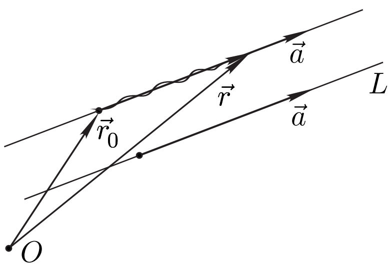

Рис. 1.3. К задаче 2

Решение. Пусть дана точка $\vec{r}_0$. Каким бы образом в условии ни была задана данная прямая L, мы находим ее направляющий вектор $\vec{a}=\{l,m\}$. Остается дописать условие коллинеарности текущего вектора $\vec{r}-\vec{r}_0$ исходной прямой и вектора $\vec{a}$:

$$\vec{r}-\vec{r}_0 \| \vec{a},$$

откуда

$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$ — векторное уравнение исходной прямой,

или в координатах $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$ — каноническое уравнение,

или $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=t$ — параметрические уравнения.

Так что, хотя в задаче спрашивали про «уравнение», но в последнем случае прямую задают «уравнения». В любом варианте нам помогает векторная модель задачи.

Пример к Задаче 2. Пусть заданы прямая L уравнением $2x+3y+4=0$ и точка $\vec{r}_0=\{1;2\}$.

Находим нормальный к прямой L вектор $\vec{N}=\{2;3\}$ и направляющий вектор прямой $\vec{a}=\{-3;2\}$.

Векторное уравнение исходной прямой есть $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$. Это же уравнение в координатах выглядит так

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}t,$$

или (7)

$$x=1-3t,$$
$$y=2+2t.$$

Исключая в (7) параметр t, получаем каноническое уравнение

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2}.$$

Оставляя параметр t, получаем параметрические уравнения

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = t.$$

ЗАДАЧА 3. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

Решение. Направляющим вектором искомой прямой является вектор $\vec{N}$ нормали к данной прямой L (см. рис. 1.4). Опять, каким бы образом ни была задана прямая L, мы находим ее вектор нормали $\vec{N}$, а значит векторное уравнение искомой прямой есть

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{N}t. \qquad (8)$$

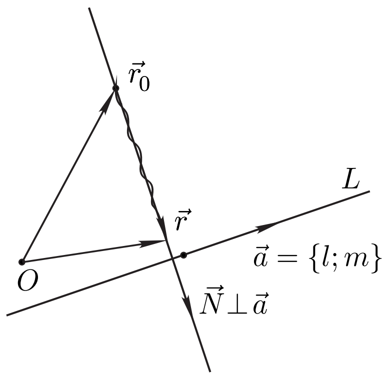

Рис. 1.4. К задаче 3

Пример к Задаче 3. Пусть опять заданы прямая L уравнением $2x + 3y + 4 = 0$ и точка $\vec{r_0} = \{1; 2\}$.

Находим нормальный к прямой L вектор $\vec{N} = \{2; 3\}$. Векторное уравнение (8) искомой прямой, коллинеарной вектору $\vec{N}$, в координатах выглядит как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t,$$

или

$$x = 1 + 2t,$$
$$y = 2 + 3t.$$

Исключая параметр t, получаем каноническое уравнение

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}.$$

Оставляя параметр t, получаем параметрические уравнения

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = t.$$

ЗАДАЧА 4. Найти проекцию данной точки на данную прямую.

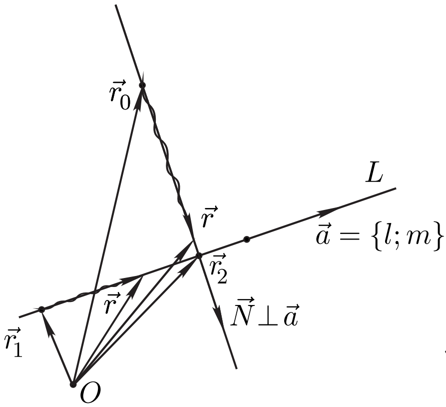

Рис. 1.5. К задаче 4

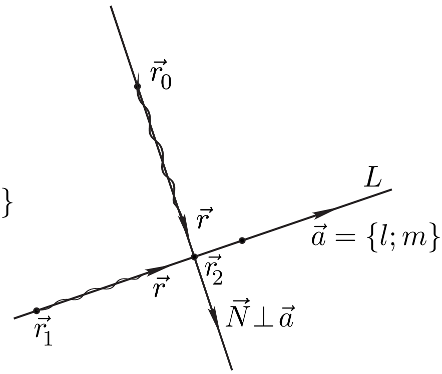

Рис. 1.6. К задаче 4

Глядя на рис. 1.5, понимаешь, что невозможно (причем даже на плоскости, а не в пространстве) пунктуально изображать все радиусы-векторы, начинающиеся в точке O. Автор не пощадил читателя, чтобы дать ему почувствовать, что начало координат и радиусы-векторы должны лишь виртуально присутствовать на рисунке (рис. 1.6).

Автор надеется, что на рис. 1.5 закончится изображение радиусов-векторов, и в дальнейшем обозначение радиуса-вектора будет с успехом использоваться для изображения его конца — точки.

Решение. Искомая проекция $\vec r_2$ точки $\vec r_0$ на прямую L с направляющим вектором $\vec a = \{l; m\}$ и точкой $\vec r_1$ может быть найдена из системы условий (лучше см. рис. 1.6)

$$\begin{cases} \vec r - \vec r_0 \| \vec N, \\ \vec r - \vec r_1 \| \vec a, \end{cases}$$

что в координатах имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{-m} = \dfrac{y-y_0}{l}, \\ \dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m}. \end{cases} \tag{9}$$

Отметим, что если $\vec{a} = \{l; m\}$, то $\vec{N} = \{-m; l\}$. Решением этой системы будет точка $\vec{r}_2 = \{x_2; y_2\}$. Понятно, что лихому началу решения с вектором $\vec{a}$ и точкой $\vec{r}_1$ должно предшествовать отыскание этого вектора $\vec{a}$ и точки $\vec{r}_1$, если в условии задачи прямая L не имела вида $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$.

Внимательный взгляд на чертеж обнаруживает, что вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ это проекция вектора $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ на прямую L с единичным направляющим вектором $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, т.е. (см. «Понятия и обозначения»)

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1; \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \tag{10}$$

Задача решена. Остается подставить конкретные данные в явные формулы (10) для координат точки $\vec{r}_2$:

$$x_2 = x_1 + \left((x_0 - x_1)\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}} + (y_0 - y_1)\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},$$

$$y_2 = y_1 + \left((x_0 - x_1)\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}} + (y_0 - y_1)\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\right)\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}},$$

или, раскрывая скобки,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \left((x_0 - x_1)\frac{l^2}{l^2+m^2} + (y_0 - y_1)\frac{ml}{l^2+m^2}\right), \\ y_2 &= y_1 + \left((x_0 - x_1)\frac{lm}{l^2+m^2} + (y_0 - y_1)\frac{m^2}{l^2+m^2}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

В первом варианте решения на пути от понимания того, что задача решена (получена система (9)), до получения ответа надо еще решить эту систему.

Во втором варианте «внимательный взгляд» позволил получить сразу явные выражения для ответа.

Пример к Задаче 4. Пусть опять данная прямая задана уравнением $2x + 3y + 4 = 0$, а данная точка $\vec{r}_0 = \{1; 2\}$.

Вектор нормали $\vec{N} = \{2; 3\}$, вектор $\vec{a} = \{-3; 2\}$. Точка $\vec{r}_1$ на прямой, например, $(-2; 0)$ (выбор $x = 0$ дает дробное y). Система (9) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-3}, \\ \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-0}{2}, \end{cases}$$

откуда $x = x_2 = -\dfrac{11}{13}$, $y = y_2 = -\dfrac{10}{13}$.

Формулы (10) дают

$$x_2 = -2 + 3 \cdot \frac{9}{13} + 2 \cdot \frac{-6}{13} = -\frac{11}{13},$$
$$y_2 = 0 + 3 \cdot \frac{-6}{13} + 2 \cdot \frac{4}{13} = -\frac{10}{13}.$$

Скептический читатель может, конечно, заметить, что вместо получения ответа по красивым явным векторным формулам (10) или (11) он предпочтет решить простенькую линейную систему (9). Вполне вероятно, он прав. Так что выбор — за каждым.

ЗАДАЧА 5. Найти точку, симметричную данной точке относительно данной прямой.

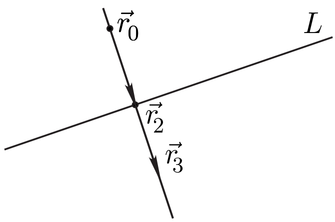

Рис. 1.7. К задаче 5

Решение. Найдем точку $\vec{r}_2$ — проекцию данной точку $\vec{r}_0$ на прямую L (Задача 4). Искомая точка $\vec{r}_3$ находится на том же перпендикуляре к прямой L (см. рис. 1.7). Расстояние от $\vec{r}_3$ до $\vec{r}_0$ в два раза больше расстояния от $\vec{r}_2$ до $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + 2\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_0\right).$$

Пример к Задаче 5. Если, как в Задаче 4, прямая задана уравнением $2x + 3y + 4 = 0$, а данная точка $\vec{r}_0 = \{1; 2\}$, то в Задаче 4 точка $\vec{r}_2$ имеет вид

$$\vec{r}_2 = \left\{-\frac{11}{13}; -\frac{10}{13}\right\}.$$

Для вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$ получаем

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \left\{-\frac{11}{13} - 1;\ -\frac{10}{13} - 2\right\} = \left\{-\frac{24}{13}; -\frac{36}{13}\right\}.$$

Добавляя к точке $\vec{r}_0$ удвоенный вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$, находим искомую точку $\vec{r}_3$:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\dfrac{24}{13} \\ -\dfrac{36}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{35}{13} \\ -\dfrac{46}{13} \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 6. Найти уравнение прямой, проходящей через данную точку и составляющей данный угол с данной прямой (угол считать острым, исключая перпендикуляр).

Решение. Пусть данная прямая L (см. рис. 1.8) задана уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Уравнение искомой прямой, проходящей через точку $\vec{r}_0$, будем искать в виде

$$A_1(x - x_0) + B_2(y - y_0) = 0,$$

понятно, при $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$.

Угол φ между прямыми равен углу между их нормалями $\vec{N} = \{A; B\}$ и $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1\}$. Поэтому

$$\frac{(\vec{N}, \vec{N}_1)}{|\vec{N}| \cdot |\vec{N}_1|} = \cos\varphi,$$

или в координатах

$$\frac{AA_1 + BB_1}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \cos\varphi. \quad (12)$$

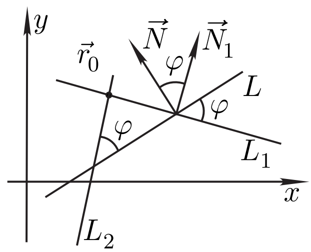

Рис. 1.8. К задаче 6

Угол φ острый, поэтому $\cos\varphi > 0$, так что нормали должны обеспечивать $(\vec{N}, \vec{N}_1) > 0$.

Для уменьшения «количества букв» удобно перейти к угловым коэффициентам

$$-k = \frac{A}{B}, \quad -k = \frac{A_1}{B_1}$$

(что на руку школьным привычкам).

Ценой за это удобство будет необходимость отдельного рассмотрения случаев $B = 0$ и $B_1 = 0$, приводящих к прямым, параллельным оси Ox.

1. Пусть $BB_1 \neq 0$. Деля числитель и знаменатель (12) на BB_1, получаем

$$\frac{k_1 k + 1}{\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{k_1^2 + 1}} = \cos\varphi. \quad (13)$$

Обе части уравнения положительны, поэтому, возводя (13) в квадрат, получаем квадратное уравнение для k_1, равносильное (13):

$$(k_1 k + 1)^2 = \left(k_1^2 + 1\right)\left(k^2 + 1\right)\cos^2\varphi$$

или

$$k_1^2\left(k^2 - \left(k^2+1\right)\cos^2\varphi\right) + 2kk_1 + \left(1 - \left(k^2+1\right)\cos^2\varphi\right) = 0. \quad (14)$$

Если $k^2 - \left(k^2+1\right)\cos\varphi \neq 0$, то уравнение (14) определяет две прямые. Отмечаем, что дискриминант уравнения (14)

$$\frac{D}{4} = \left(k^2+1\right)^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi > 0.$$

Если $k^2 - \left(k^2+1\right)\cos\varphi = 0$, то уравнение (14) определяет одну прямую.

Вторую прямую надо искать при $B_1 = 0$, т.е. фактически проверять, что второй прямой будет прямая $x = x_0$, параллельная оси Oy.

2. Пусть $B_1 = 0$. Ищем прямую $A_1(x - x_0) = 0$. Уравнение (12) в этом случае принимает вид

$$\frac{AA_1}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot|A_1|} = \cos\varphi. \quad (15)$$

Отметим, что искомая и данная прямые не могу быть обе параллельны оси Oy, поэтому, если $B_1 = 0$, то $B \neq 0$ и наоборот.

После деления числителя и знаменателя на $-B \neq 0$ и вспоминая, что $-\dfrac{A}{B} = k$, получаем

$$\frac{k\cdot A}{\sqrt{k^2+1}\cdot|A_1|} = \cos\varphi,$$

или $A_1^2 k^2 = A_1^2\left(k^2+1\right)\cos^2\varphi$, откуда

$$A_1\left(k^2 - \left(k^2+1\right)\cos^2\varphi\right) = 0.$$

Видно, что если

$$k^2 - \left(k^2+1\right)\cos^2\varphi \neq 0,$$

то $A_1 = 0$ и прямой вида $x = x_0$.

Последнее неравенство означает, что уравнение (14) является квадратным и определяет две прямые.

Если
$$k^2-\left(k^2+1\right)\cos^2\varphi=0,$$
то уравнение (14) определяет одну прямую, а в уравнении (15) A_1 любое (положительное в силу уравнения), и таким образом определяется вторая прямая $A_1(x-x_0)=0$, т.е. $x=x_0$.

3. Пусть $B=0$, т.е. данная прямая параллельна оси Oy:
$$Ax+C=0.$$

Выше уже отмечалось, что если $B=0$, то $B_1\neq 0$. Уравнение (12) примет вид
$$\frac{AA_1}{|A|\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\cos\varphi, \tag{16}$$
откуда, деля числитель и знаменатель на $-B_1\neq 0$, находим
$$Ak_1=|A|\sqrt{k_1^2+1}\cdot\cos\varphi.$$
Возводя равенство в квадрат, опять получаем квадратное уравнение для двух значений k_1:
$$k_1^2=\left(k_1^2+1\right)\cos^2\varphi,$$
откуда получаем две прямые.

Пример 1 к Задаче 6. Пусть даны прямая $x+y=1$, точка $\vec{r}_0=\{0;0\}$ и угол φ, равный 60° (см. рис. 1.9). Считая $BB_1\neq 0$, получаем уравнение (13):

$$\frac{k_1(-1)+1}{\sqrt{1^2+1}\cdot\sqrt{k_1^2+1}}=\frac{1}{2},$$
$$-k_1+1=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{k_1^2+1},$$
$$2\left(k_1^2-2k_1+1\right)=k_1^2+1,$$
$$k_1^2-4k_1+1=0,$$

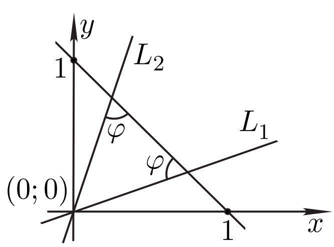

Рис. 1.9.

откуда $k_1=2-\sqrt{3}$ или $k_1=2+\sqrt{3}$,

где $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}$. Вспоминая, что искомое уравнение имело вид
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0,\quad \text{где}\quad x_0=0,\quad y_0=0,$$

находим две прямые

$$L_1: \quad y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x, \quad \text{и} \quad L_2: \quad y = \left(2 + \sqrt{3}\right)x.$$

Ясно, что в этом случае $B_1 \neq 0$.

Проверка. Для прямой L_1

$$k_1 = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ}{1 + \operatorname{tg}45^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}\,.$$

Второе значение k_1 проверьте самостоятельно.

Пример 2 к Задаче 6. Пусть даны прямая $x + y = 1$, точка $\vec{r}_0 = \{0; 0\}$ и угол φ, равный 45° (см. рис. 1.10).

Считая $BB_1 \neq 0$, получаем уравнение (13):

$$\frac{k_1(-1) + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{k_1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

или

$$-k_1 + 1 = \sqrt{k_1^2 + 1} \Longleftrightarrow k_1^2 - 2k_1 + 1 = k_1^2 + 1.$$

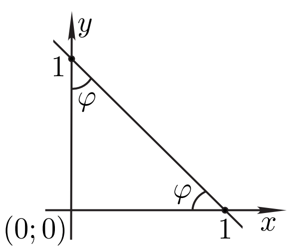

Рис. 1.10.

Значит, уравнение дает единственное значение $k_1 = 0$ и единственную прямую $y = 0$. Для прямой $x + y = 1$ $B = 1 \neq 0$. Поэтому остается рассмотреть случай $B_1 = 0$, т.е. искать прямую вида $A_1 x = 0$. Уравнение (15) имеет вид

$$\frac{1 \cdot A_1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot |A_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Оно верно при любых A_1 (положительных в силу приведенного выше равенства). Значит, уравнение $A_1 x = 0$, дает вторую прямую $x = 0$. Итак, найдены обе прямые, удовлетворяющие условиям задачи: $y = 0$ и $x = 0$.

Пример 3 к Задаче 6. Пусть даны прямая $x = 1$, точка $\vec{r}_0 = \{0; 1\}$ и угол φ, равный 45° (см. рис. 1.11). В данном случае $B = 0$. Уравнение (16) имеет вид

$$\frac{1 \cdot A_1}{1 \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Выше уже отмечалось, что если $B = 0$, то $B_1 \neq 0$. Деля числитель и знаменатель на $-B_1 \neq 0$ получаем

$$k_1 = 1 \cdot \sqrt{k_1^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

или

$$k_1^2 = \frac{1}{2}\left(k_1^2 + 1\right),$$

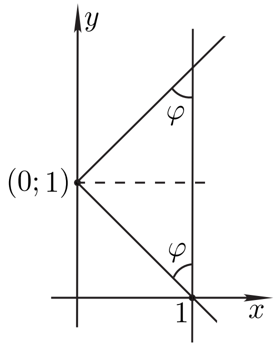

Рис. 1.11.

откуда $k_1 = \pm 1$, что дает обе прямые

$$(\pm 1)(x - 0) + (y - 1) = 0, \quad \text{т.е.} \quad y = 1 \pm x.$$

ЗАДАЧА 7. Найти расстояние от данной точки до данной прямой, используя нормированное уравнение прямой.

Решение. Пусть даны прямая L и точка $\vec{r}_1$ (см. рис. 1.12). Нормированное уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$(\vec{r}, \vec{n}) = d, \tag{17}$$

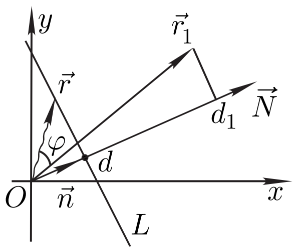

Рис. 1.12. К задаче 7

где $\vec{r}$ — текущий радиус-вектор точки прямой, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к прямой из начала координат, d — расстояние прямой от начала координат. Так как угол между вектором $\vec{r}$ и нормалью $\vec{n}$ острый, то $(\vec{r}, \vec{n}) > 0$, а значит $d > 0$ — расстояние от начала координат до прямой L. Для любой точки $\vec{r}_1$ получаем $(\vec{r}_1, \vec{n}) = d_1$ — проекцию точки $\vec{r}_1$ на нормаль $\vec{n}$. На рис. 1.12 $\vec{N}$ — нормаль произвольной длины. Величина

$$\delta_1 = d_1 - d = (\vec{r}_1, \vec{n}) - d$$

называется отклонением точки $\vec{r}_1$ от прямой L. Отклонение начала координат от прямой l равно $-d < 0$.

Если точка $\vec{r}_1$ и начало координат расположены по разные стороны от прямой (как на рис. 1.12), то $\delta_1 > 0$, а если по одну — то $\delta_1 < 0$ (напоминает об этом само начало координат, для которого $\delta_1 = -d < 0$).

Расстояние точки $\vec{r}_1$ от прямой L есть

$$\rho_1 = |\delta_1|.$$

Если $\vec{r}_0$ — любая точка на прямой L, то по нормированному уравнению прямой L

$$(\vec{r}_0, \vec{n}) = d.$$

Для точки $\vec{r}_1$

$$(\vec{r}_1, \vec{n}) = d_1.$$

Отклонение точки $\vec{r}_1$ от прямой L есть

$$\delta_1 = d_1 - d = (\vec{r}_1, \vec{n}) - (\vec{r}_0, \vec{n}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{n})\,.$$

Расстояние от точки $\vec{r}_1$ до прямой L есть

$$\rho_1 = |\delta_1| = |d_1 - d| = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{n})|\,.$$

Чтобы привести общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ к нормированному виду

$$(\vec{r}, \vec{n}) = d,$$

надо умножить его на нормирующий множитель μ для получения единичного вектора нормали n и положительной правой части $d > 0$. Тогда общее уравнение $Ax + By + C = 0$ примет вид

$$(\mu A)x + (\mu B)y + (\mu C) = 0,$$

где

$$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 = 1, \quad \text{и} \quad d = -\mu C > 0.$$

Итак, нормирующий множитель μ по модулю равен $\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, а его знак противоположен знаку свободного члена C, т.е.

$$\mu = \frac{-\mathrm{sgn}(C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Выше было введено понятие отклонения δ_1 точки $\vec{r}_1 = \{x_1, y_1\}$ от прямой $(\vec{r}, \vec{n}) = d$:

$$\delta_1 = d_1 - d = (\vec{r}_1, \vec{n}) - d.$$

Для уравнения $Ax + By + C = 0$ с учетом единичного вектора $\vec{n} = \{\mu A, \mu B\}$ и $d = (-\mu C) > 0$ отклонение δ_1 примет вид

$$\delta_1 = (x_1 \cdot \mu A + y_1 \cdot \mu B) - (-\mu C),$$

или

$$\delta_1 = \mu(Ax_1 + By_1 + C) = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}(-\mathrm{sgn}(C)). \tag{18}$$

Для расстояния $\rho_1 = |\delta_1|$ от точки $\vec{r}_1$ до прямой $Ax + By + C = 0$ получаем формулу

$$\rho = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{19}$$

Пример к Задаче 7. Для уравнения $2x + 3y + 4 = 0$ получаем нормирующий множитель

$$\mu = (-\mathrm{sgn}(4)) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = -\frac{1}{\sqrt{13}},$$

а нормированное уравнение имеет вид

$$(\vec{r}, \vec{n}) = d,$$

где

$$\vec{n} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right\} \quad \text{и} \quad d = \frac{4}{\sqrt{13}},$$

т.е.

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Отклонение точки $(1; 3)$ от прямой $2x + 3y + 4 = 0$ находим по формуле (18):

$$\delta_1 = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4}{\sqrt{13}} \cdot (-1) = -\frac{15}{\sqrt{13}}.$$

Полезно нарисовать точку $(1; 3)$ и прямую $2x + 3y + 4 = 0$ и убедиться, что точка $(1; 3)$ и начало координат лежат по одну сторону от этой прямой, что соответствует результату $\delta_1 < 0$.

Расстояние от точки $(1;3)$ до прямой $2x+3y+4=0$ находим по формуле (19):

$$\rho=|\delta_1|=\frac{1}{\sqrt{13}}|(2\cdot 1+3\cdot 3+4)(-1)|=\frac{15}{\sqrt{13}}.$$

Замечание. Все разговоры о начале координат, находящемся в одной из полуплоскостей относительно данной прямой и об уравнении $(\vec r,\vec n)=d$, относятся, конечно, к тем прямым, для которых $d\neq 0$. Для них направление нормали к прямой «из начала координат» вполне определенное.

Если же прямая проходит через начало координат, то $d=0$ и можно выбирать нормаль ($\vec n_1$ или $\vec n_2$ на рис. 1.13). Если в уравнении $Ax+By+C=0$ $C=0$, то знак нормирующего множителя μ произволен. В этом случае положительные отклонения от прямой будут иметь точки той полуплоскости, куда направлена выбранная нормаль.

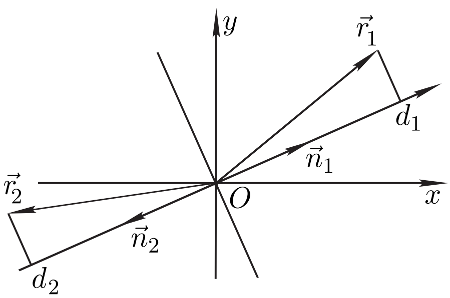

Рис. 1.13.

Для нормали $\vec n_1$ на рисунке будет $\delta_1=d_1-0=$ $=d_1>0$, для нормали $\vec n_2$ получим $\delta_2=d_2-0=d_2>$ >0. Поэтому, если стремиться к максимально общему описанию ситуации, следует исключить начало координат из разговоров о знаке отклонения, а использовать направление нормали к прямой. Еще раз подчеркнем, что если прямая не проходит через начало координат, то нормаль из начала координат вполне определенная, а если начало координат лежит на прямой, то нормаль выбирается.

Приведенные выше разговоры о «нормали из начала координат к прямой» относятся к большинству прямых, когда $d\neq 0$, и поэтому часто используются. Более редкую ситуацию с $d=0$ следует конечно иметь ввиду, для чего и сделано это Замечание.

Понятно, что на формуле расстояния произвольной точки r_1 от прямой $Ax+By+C=0$

$$\rho_1=|\delta_1|=\frac{|Ax_1+By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

выбор нормали никак не отразится.

ЗАДАЧА 8. Найти условия, при которых данная прямая пересекает данный отрезок.

Решение. Нормированное уравнение прямой данной прямой позволяет найти отклонение δ_1 и δ_2 точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от этой прямой. Одна из данных точек находится в одной полуплоскости с началом координат, значит, ее отклонение будет отрицательным. Соответственно, отклонение другой точки от прямой будет положительным (см. рис. 1.14).

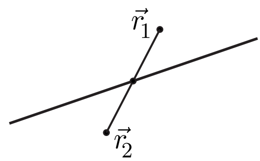

Рис. 1.14. К задаче 8

Итак, условием пересечения данной прямой данного отрезка является

$$\delta_1\delta_2 < 0.$$

Пример к Задаче 8. Пусть дана прямая $2x + 3y + 4 = 0$ и точки $\vec{r}_1 = \{1;3\}$ и $\vec{r}_2 = \{-3;0\}$ — концы отрезка. По формуле (18) находим отклонения δ_1 и δ_2 точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от данной прямой:

$$\delta_1 = -\frac{1}{\sqrt{13}}(2\cdot 1 + 3\cdot 3 + 4) = -\frac{15}{\sqrt{13}},$$
$$\delta_2 = -\frac{1}{\sqrt{13}}(2\cdot(-3) + 3\cdot 0 + 4) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Так как $\delta_1\delta_2 < 0$, то данная прямая пересекает данный отрезок.

ЗАДАЧА 9. Найти уравнение биссектрисы острого угла, образованного двумя данными прямыми.

Решение. Угол между биссектрисой B и любой из прямых L_1 и L_2 острый. Если он меньше 45°, то B — биссектриса острого угла (как на рис. 1.15).

Пусть $\vec{N}(B)$ — нормаль к биссектрисе B, а $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — нормали соответственно к прямым L_1 и L_2. Угол между $\vec{N}(B)$ и $\vec{N}_i$, если $\vec{N}(B)$ и $\vec{N}_i$ выбраны как на рис. 1.15, тоже острый и равен углу между биссектрисой B и прямой L_i (углы с перпендикулярными сторонами).

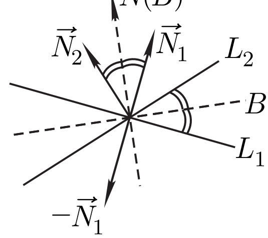

Рис. 1.15. К задаче 9

Если этот угол меньше 45°, то

$$\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_i\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если одна из нормалей, например, как на рисунке, к прямой L_1 выбрана противоположной, т.е. $-\vec{N}_1$, то предыдущее условие замениться на

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\left(-\vec{N}_i\right)\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Наличие модуля охватывает все возможные случаи выбора нормали, как к прямым L_1 и L_2, так и к биссектрисе B, если вместо $\vec{N}(B)$ выбрать $-\vec{N}(B)$.

Итак, если

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_i\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то B — биссектриса острого угла.

Если

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_i\right)\right| < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то B — биссектриса тупого угла.

Пример к Задаче 9. Пусть даны прямые $2x + 3y + 4 = 0$ и $2x - 3y - 4 = 0$. Найти биссектрису острого угла, образованного этими прямыми.

Замечание. Длинное выражение «острые углы, образованные этими прямыми» приходится употреблять, т.к. «углом между прямыми» называют острый угол.

Можно заметить, что автор, жалея себя и читателя, выбрал прямые с одинаковыми по модулю нормирующими множителями. Равенство расстояний от точки биссектрисы до данных прямых запишем с помощью формулы (19), дающей расстояние от точки до прямой:

$$\frac{1}{\sqrt{13}}|2x + 3y + 4| = \frac{1}{\sqrt{13}}|2x - 3y - 4|,$$

откуда получим две биссектрисы

$$\begin{aligned} B_1: &\quad 2x + 3y + 4 = -2x + 3y + 4, \\ B_2: &\quad 2x + 3y + 4 = 2x - 3y - 4, \end{aligned}$$

или

$$B_1: \quad x = 0, \quad B_2: \quad y = -\frac{4}{3}.$$

(Перпендикулярность их очевидна).

Выбираем биссектрису B_1 с нормалью $\vec{N}(B_1) = \{1; 0\}$ и прямую L_1 $2x + 3y + 4 = 0$ с нормалью $\vec{N}_1 = \{2; 3\}$. Угол между

$\vec{N}(B_1)$ и $\vec{N}_1$ равен углу между биссектрисой B_1 и любой из прямых L_1 и L_2. На рис. 1.16 отмечены эти углы с перпендикулярными сторонами. Для выбранных биссектрисы B_1 и прямой L_1 получаем

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B_1)^\wedge\vec{N}_1\right)\right| = \frac{\left|\left(\vec{N}(B_1)\right., \vec{N}_1)\right|}{\left|\vec{N}(B_1)\right|\cdot\left|\vec{N}_1\right|} = \frac{1\cdot 2 + 0\cdot 3}{1\cdot\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Выражение с модулем дает тот же результат при выборе $\vec{N}(B_1) = \{-1; 0\}$ или $\vec{N}_1 = \{-2; -3\}$.

Если $\left|\cos\left(\vec{N}(B_1)^\wedge\vec{N}_1\right)\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, то угол между B_1 и L_1 больше 45° и B_1 — биссектриса тупого угла.

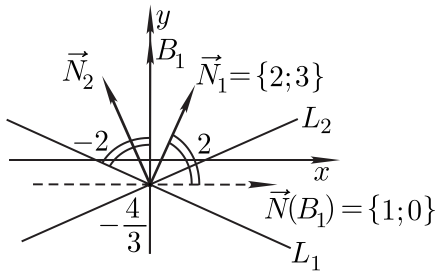

Рис. 1.16.

Следовательно, биссектрисой острого угла будет биссектриса B_2 $y = -\frac{4}{3}$. Рис. 1.16 это подтверждает.

Работа с выражением $\left|\cos\left(\vec{N}(B_1)^\wedge\vec{N}_1\right)\right|$, как мы уже отметили, не зависит от выбора нормали $\vec{N}(B_1)$ или $-\vec{N}(B_1)$, $\vec{N}_1$ или $-\vec{N}_1$. Также результат не зависит от выбора вместо L_1 другой прямой L_2.

В этих вариантах может меняться только знак стоящего под модулем косинуса.

ЗАДАЧА 10. Найти, при каких условиях две данные точки лежат в одном, в смежных или в вертикальных углах, образованных двумя данными прямыми.

Решение. Рис. 1.17 передает поведение знаков отклонений точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от прямых L_1 и L_2 (в указанном порядке: первый знак — знак отклонения от L_1, второй — от L_2. Пусть в угле 1 знаки такие, как показано на рис. 1.17. При переходе через каждую прямую меняется пара знаков, соответ-

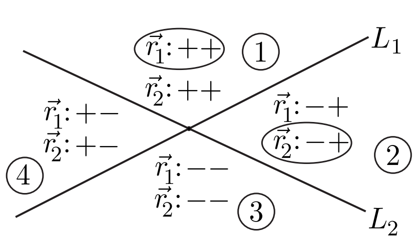

Рис. 1.17. К задаче 10

ствующая этой прямой. На рис. 1.17 представлены все возможные комбинации, отличающиеся по углам. Остается «снять» с рисунка возможные ответы:

1) если все четыре отклонения $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от L_1 и L_2 одного знака, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в одном угле;

2) если для точки $\vec{r}_2$ изменился знак одного отклонения по сравнению с $\vec{r}_1$, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в смежных углах, как для выделенных овалами на рисунке $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$;

3) если для точки $\vec{r}_2$ знаки обоих отклонений противоположны знакам отклонений $\vec{r}_1$, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в вертикальных углах.

Пример к Задаче 10. Рассмотрим более редкий случай прямых, проходящих через начало координат (см. Замечание к Задаче 7). Пусть даны прямые $x + y = 0$, $x - y = 0$ и точки $\vec{r}_1 = \{0; 1\}$ и $\vec{r}_2 = \{1; 0\}$ (см. рис. 1.18). Найти, находятся ли эти точки в одном, смежных или вертикальных углах, образованных данными прямыми. Ответ ясен из рис. 1.18. Остается получить его из общих соображений.

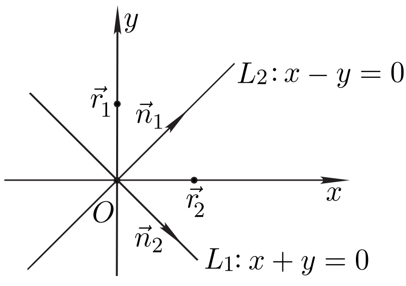

Рис. 1.18.

Как было сказано в Замечании к Задаче 7, если прямая проходит через начало координат, то выбор нормали к ней — «дело хозяйское». Пусть нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ к прямым L_1 и L_2 выбраны, как на рисунке: $\vec{n}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1; 1\}$, $\vec{n}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1; -1\}$. Находим отклонение точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от L_1 и L_2. Отклонения $\vec{r}_1$ от L_1 и L_2 (напоминаем, что в общей формуле $\delta_1 = (\vec{r}_1, \vec{n}_1) - d$, здесь $d = 0$):

$$\delta_1 = (\vec{r}_1, \vec{n}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\delta_2 = (\vec{r}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отклонения $\vec{r}_2$ от L_1 и L_2:

$$\delta_1 = (\vec{r}_2, \vec{n}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\delta_2 = (\vec{r}_2, \vec{n}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В обозначениях рисунка к общему решению Задачи 10 мы находим для знаков отклонений случай

$$\vec{r}_1: \quad + \quad -, \quad \vec{r}_2: \quad + \quad +,$$

который соответствует второму варианту общей схемы: «если для точки $\vec{r}_2$ изменился знак одного отклонения по сравнению с $\vec{r}_1$, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в смежных углах».

Мы это уже давно видели на рисунке, но теория не подвела.

Полезные технические замечания. Внимательный читатель давно уже порывается заметить нам, что для определения знака отклонения вовсе не нужно аккуратно выписывать нормирующий множитель и делать нормаль единичной.

Внимательный читатель, конечно, прав, мы благодарим его и в дальнейшем в такой задаче можем пользоваться нормалями любой длины.

Для полного овладения ситуацией читателю рекомендуется «по-хозяйски» выбрать нормаль $-\vec{n}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{-1; 1\}$, повторить рассуждения и получить, разумеется, тот же результат.

Внимательный читатель улыбнется и посоветует читателю не слушать автора, а просто заменить в уже проделанных автором выкладках $\vec{n}_2$ на $-\vec{n}_2$ и посмотреть, что получится.

Глава 2

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

ЗАДАЧА 11. Различные способы задания плоскости в пространстве. Переход от одного способа задания плоскости к другому.

Общим уравнением, задающим любую плоскость в пространстве, является уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1}$$

Если точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит этой плоскости, то имеем

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{2}$$

Вычитая уравнения (1) и (2) одно из другого, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Равенство (3) означает ортогональность вектора $\vec{N} = \{A, B, C\}$ и текущего вектора $\vec{r} - \vec{r}_0$ нашей плоскости

$$(\vec{N}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Значит, вектор $\vec{N} = \{A; B; C\}$ это вектор нормали к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

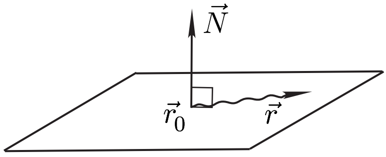

Рис. 2.1. К задаче 11

Точка $\vec{r}_0$ найдется из уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ в простейшем случае, лежащая на одной из координатных осей, например: $Ax + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0$, откуда $\vec{r}_0 = \left\{-\dfrac{D}{A}; 0; 0\right\}$ (см. рис. 2.1).

Аналогом векторного уравнения прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ с направляющим вектором $\vec{a}$ является *векторное уравнение плоскости*.

Если есть два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то векторным уравнением плоскости называется уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t + \vec{b}s,$$

где t и s — произвольные числовые параметры.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *направляющими векторами плоскости* (см. рис. 2.2).

Рис. 2.2. К задаче 11

Если $D \neq 0$, то после деления общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ на $-D$ получим так называемое уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$, $c = -\dfrac{D}{C}$ — отрезки, отсекаемые плоскостью от осей координат (см. рис. 2.3).

ЗАДАЧА 12. Найти условие пересечения трех плоскостей в единственной точке.

Решение. С точки зрения системы уравнений, задающих три плоскости

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3, \end{cases}$$

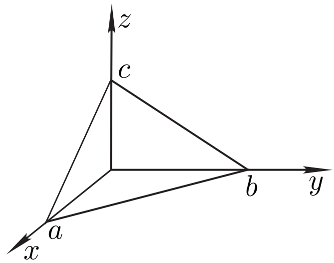

Рис. 2.3. К задаче 12

условием существования единственного решения этой системы – точки (x, y, z) — является условие отличия от нуля определителя системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

С векторной точки зрения существование единственной общей точки трех плоскостей обеспечивается условием некомпланарности векторов нормалей $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\vec{N}_3$, критерием которого является отличие от нуля смешанного произведения этих векторов

$$\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3\right) \neq 0.$$

В координатах это условие имеет вид

$$\left(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3\right) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

что совпадает с (4).

Пример к Задаче 12. Опять возьмем пример с заранее очевидным результатом. Самостоятельно проверьте с помощью условия (4), что три координатные плоскости пересекаются в одной точке.

ЗАДАЧА 13. Найти расстояние от данной точки до данной плоскости, используя нормированное уравнение плоскости (см. рис. 2.4).

Пусть даны плоскость P и точка $\vec{r}_1$. Нормированное уравнение плоскости имеет вид

$$(\vec{r}, \vec{n}) = d, \tag{5}$$

где $\vec{r}$ — текущий радиус-вектор точки плоскости, $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к плоскости, идущий из начала координат, d — расстояние от плоскости до начала координат. Так как угол φ между вектором $\vec{r}$ и нормалью $\vec{n}$ острый, то $(\vec{r}, \vec{n}) > 0$, а, значит, $d > 0$.

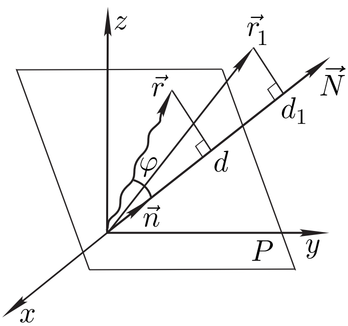

Рис. 2.4. К задаче 13

Для любой точки $\vec{r}_1$ получаем $(\vec{r}_1, \vec{n}) = d_1$, — проекцию точки $\vec{r}_1$ на нормаль $\vec{n}$ (на рис. 2.4 $\vec{N}$ — нормаль произвольной длины).

Величина $\delta = d_1 - d = (\vec{r}_1, \vec{n}) - d$ называется отклонением точки $\vec{r}_1$ от плоскости P. Отклонение начала координат от плоскости равно $-d < 0$.

Если точка $\vec{r}_1$ и начало координат расположены по разные стороны плоскости (как на рисунке), то $\delta_1 > 0$, а если по одну — то $\delta_1 < 0$ (напоминает об этом само начало координат, для которого $\delta = -d < 0$.

Расстояние точки $\vec{r}_1$ от плоскости есть

$$\rho_1 = |\delta_1|.$$

Если $\vec{r}_0$ — любая точка на плоскости P, то по нормированному уравнению плоскости P

$$(\vec{r}_0, \vec{n}) = d,$$

для точки $\vec{r}_1$

$$(\vec{r}_1, \vec{n}) = d_1.$$

Отклонение точки $\vec{r_1}$ от плоскости P есть

$$\delta_1 = d_1 - d = (\vec{r_1}, \vec{n}) - (\vec{r_0}, \vec{n}) = (\vec{r_1} - \vec{r_0}, \vec{n}).$$

Расстояние от точки $\vec{r_1}$ до плоскости P есть

$$\rho_1 = |\delta_1| = |d_1 - d| = |(\vec{r_1} - \vec{r_0}, \vec{n})|.$$

Чтобы привести общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к нормированному виду

$$(\vec{r}, \vec{n}) = d,$$

надо умножить его на нормирующий множитель μ для получения единичного вектора $\vec{n}$ и положительной правой части $d > 0$. Тогда общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

примет вид

$$(\mu A)x + (\mu B)y + (\mu C)z = -(\mu)D,$$

где

$$(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1 \text{ и } d = -\mu D > 0.$$

Итак, нормирующий множитель μ по модулю равен $\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, а его знак противоположен знаку свободного члена D, то есть

$$\mu = \frac{-\operatorname{sgn}(D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Выше было введено понятие отклонения δ_1 точки $\vec{r_1} = \{x_1; y_1\}$ от плоскости, заданной уравнением $(\vec{r}, \vec{n}) = d$.

$$\delta_1 = d_1 - d = (\vec{r_1}, \vec{n}) - d.$$

Для уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ с учетом единичного вектора $\vec{n} = \{\mu A; \mu B; \mu C\}$ и $d = -\mu D$ отклонение δ_1 примет вид

$$\delta_1 = (\mu A x_1 + \mu B y_1 + \mu C z_1) - (-\mu D),$$

или
$$\delta_1 = \mu\,(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = \\ = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(-\mathrm{sgn}(D)). \tag{6}$$

Для расстояния $\rho_1 = |\delta_1|$ от точки $\vec{r}_1$ до плоскости получаем формулу
$$\rho_1 = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7}$$

Пример к Задаче 13. Для уравнения $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ получаем нормирующий множитель
$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{29}},$$
а нормированное уравнение имеет вид
$$(\vec{r}, \vec{n}) = d,$$
где
$$\vec{n} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{29}}; -\frac{3}{\sqrt{29}}; -\frac{4}{\sqrt{29}}\right\} \text{ и } d = \frac{5}{\sqrt{29}},$$
то есть
$$-\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y - \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$
Отклонение точки $(1; 3; -5)$ от плоскости $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ находим по формуле (6):
$$\delta_1 = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 3 - 4\cdot 5}{\sqrt{29}}\cdot(-1) = \frac{9}{\sqrt{29}}.$$

Опять, аналогично задаче 7, полезно нарисовать точку $(1; 3; -5)$ и плоскость $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ и убедиться, что точка $(1; 3; -$ $-5)$ и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, что соответствует результату $\delta_1 > 0$.

Здесь рисунок менее очевиден, чем в Задаче 7. Автор предлагает нарисовать треугольник, соответствующий уравнению в отрезках для плоскости $2x + 3y + 4z + 5 = 0$, и продолжить его до пересечения с плоскостями $x = 0$, $y = 0$ и плоскостью $z = -5$, содержащей точку $(1; 3; -5)$. Расстояние от этой точки до плоскости $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ находим по формуле (7):
$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{29}}|(2\cdot 1 + 3\cdot 3 - 4\cdot 5)(-1)| = \frac{9}{\sqrt{29}}.$$

Замечание. Повторять подробные рассуждения о плоскости, проходящей через начало координат, аналогичные Замечанию к задаче 7, нет необходимости.

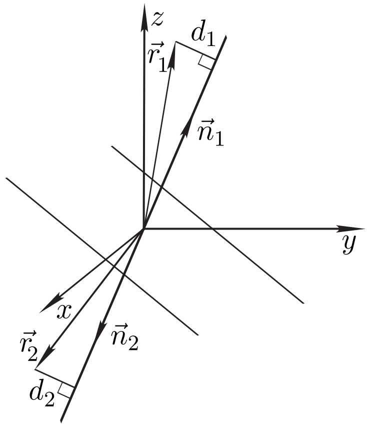

Рис. 2.5.

Если читатель внимательно прочитал Замечание к Задаче 7, то он согласится, что для плоскости, проходящей через начало координат, выбор вектора нормали $\vec{n}_1$ или $\vec{n}_2$ (см. рис. 2.5) — опять «дело хозяйское».

Положительными будут отклонения от данной плоскости точек того полупространства, куда направлена выбранная нормаль. Для нормали $\vec{n}_1$ и точки $\vec{r}_1$ на рис. 2.5 будет $\delta_1 = d_1 - 0 = d_1 > 0$, для нормали $\vec{n}_2$ и точки $\vec{r}_2$ получим $\delta_2 = d_2 - 0 = d_2 > 0$.

Приведенные выше рассуждения о «нормали из начала координат к плоскости» относятся к большинству плоскостей, когда $d \neq 0$, и поэтому часто используются. Более редкую ситуацию с $d = 0$ следует, конечно, иметь в виду, для чего и сделано это Замечание.

Понятно, что на формуле расстояния произвольной точки $\vec{r}_1$ от плоскости $Ax + By + Cz = 0$

$$\rho_1 = |\delta_1| = \frac{Ax + By + Cz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

выбор нормали не отразится.

ЗАДАЧА 14. Найти условия, при которых данная плоскость не пересекает данный отрезок.

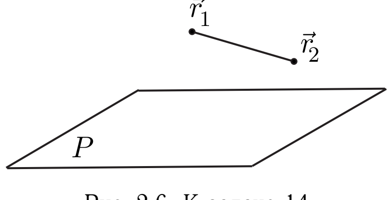

Рис. 2.6. К задаче 14

Решение. опять решение этой задачи почти дословно повторяет решение Задачи 8 для отрезка и прямой на плоскости. Нормированное уравнение данной плоскости позволяет найти отклонения δ_1 и δ_2 точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от этой плоскости (см. рис. 2.6). Если отрезок, соединяющий точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, не пересекает данную плоскость, то отклонения δ_1 и δ_2 одного знака. Если начало координат находится в том же полупространстве, что и точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то оба отклонения будут отрицательными. Если начало координат в другом полупространстве, то оба отклонения положительны.

Значит, условием того, что данный отрезок не пересекает плоскость, является

$$\delta_1 \cdot \delta_2 > 0.$$

Пример к Задаче 14. Пусть дана плоскость $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ и точки $\vec{r}_1 = \{1; 2; -4\}$ и $\vec{r}_2 = \{1; -2; -3\}$. По формуле (6) находим отклонения δ_1 и δ_2 точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от данной плоскости:

$$\delta_1 = -\frac{1}{\sqrt{29}}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 5) = \frac{3}{\sqrt{29}},$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{\sqrt{29}}(2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 5) = \frac{11}{\sqrt{29}}.$$

Так как $\delta_1 \cdot \delta_2 > 0$, то данный отрезок не пересекает данную плоскость.

ЗАДАЧА 15. Найти расстояние между данными параллельными плоскостями.

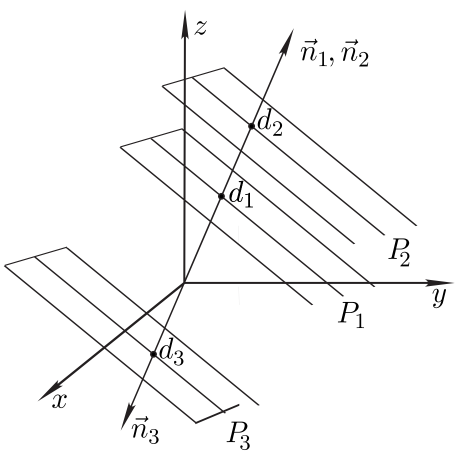

Рис. 2.7. К задаче 15

Решение. Нормированные уравнения данных плоскостей P_1 и P_2 позволяют найти расстояния d_1 и d_2 от начала координат. Если нормали $\vec{n}_1$ $\vec{n}_2$ для плоскостей совпадают и $d_2 > d_1$, то расстоянием между плоскостями будет $d_2 - d_1$ (см. рис. 2.7).

Если $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$ для плоскостей P_1 и P_3 противоположно направлены (разных знаков), то искомым расстоянием будет $d_1 + d_3$. Напомним, что здесь речь идет о вполне определенных нормалях к плоскости, проведенных из начала координат.

Пример к Задаче 15. Пусть даны плоскости

$$P_1 : 2x - 3y + 4z + 5 = 0 \text{ и } P_2 : 4x - 6y + 8z + 5 = 0.$$

Прежде всего убедимся в их параллельности:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{4}{8}.$$

Находим для них нормали $\vec{n}_1$ $\vec{n}_2$ и расстояния d_1 и d_2:

$$\vec{n}_1 = -\frac{1}{\sqrt{29}}\{2; -3; 4\},$$

$$\vec{n}_2 = -\frac{1}{\sqrt{116}}\{4; -6; 8\} = \vec{n_1},$$

$$d_1 = \frac{5}{\sqrt{29}}, d_2 = \frac{5}{\sqrt{116}}.$$

Единичные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ совпадают, $d_1 > d_2$, значит расстояние между плоскостями есть

$$d_1 - d_2 = \frac{5}{\sqrt{29}} - \frac{5}{\sqrt{116}} = \frac{5}{\sqrt{29}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2\sqrt{29}}.$$

Пусть даны плоскости

$$P_1 : 2x - 3y + 4z + 5 = 0 \text{ и } P_3 : -4x + 6y - 8z + 5 = 0.$$

Находим для них нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_3$ и расстояния d_1 и d_3. В том, что их расстояния от начала координат будут уже знакомыми $d_1 = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$ и $d_3 = \dfrac{5}{\sqrt{116}}$, мы уже не сомневаемся.

Но находя опять для P_1 и P_3 нормирующие множители $\mu_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ и $\mu_3 = -\dfrac{1}{\sqrt{116}}$, получаем, что единичные нормальные векторы

$$\vec{n}_1 = -\frac{1}{\sqrt{29}}\{2; -3; 4\}$$

и

$$\vec{n}_3 = -\frac{1}{\sqrt{116}}\{-4; 6; -8\} = \frac{1}{\sqrt{29}}\{2; -3; 4\} = -\vec{n}_1$$

противоположны. Значит, расстояние между плоскостями равно

$$d_1 + d_3 = \frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{5}{\sqrt{116}} = \frac{5}{\sqrt{29}}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2\sqrt{29}}$$

Полушутя-полусерьезно полезно продумать ситуацию с двумя плоскостями

$$x + y + z + 1 = 0$$
$$-x - y - z - 1 = 0$$

Как у них обстоят дела с нормалями и расстоянием между плоскостями?

Замечание. В задачах для прямых на плоскости не было аналога этой трехмерной задачи. Читателю вполне под силу практически переписать приведенное выше решение для двух параллельных прямых на плоскости. Даже чертеж пригодится. Надо только убрать из него (и из уравнений Примера!) третью координату.

ЗАДАЧА 16. Найти уравнение биссектральной плоскости тупого двугранного угла, образованного двумя данными плоскостями.

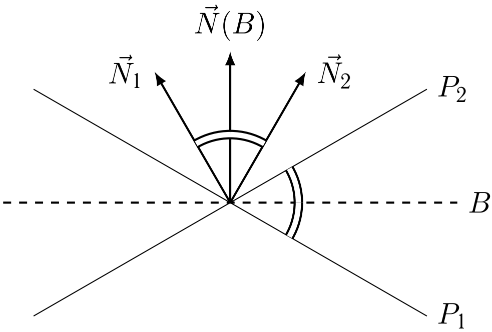

Рис. 2.8. К задаче 16

Решение. Идейная близость этой трехмерной задачи к Задаче 9 на плоскости позволяет не только воспользоваться решением Задачи 9, точно переписав его, но даже применить рис. 1.15 Задачи 9, не мудрствуя с изображением пересекающихся плоскостей.

Достаточно посмотреть на эти пересекающиеся плоскости вдоль линии их пересечения (см. рис. 2.8). Тогда «с ребра» и данные плоскости, и биссектральные будут выглядеть прямыми, а двугранные углы их линейными углами.

Опять отметим, что двугранный угол между биссектральной плоскостью B и любой из плоскостей P_1 и P_2 острый. Если он меньше $45°$, то B — биссектральная плоскость острого двухгранного угла (как на рис. 2.8).

Пусть $\vec{N}(B)$ — нормаль к биссектральной плоскости B, а $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — нормали соответственно к плоскостям P_1 и P_2. Угол между $\vec{N}(B)$ и любой из $\vec{N}_i$, если $\vec{N}(B)$ и $\vec{N}_i$ выбраны как на рис. 2.8, тоже острый и равен углу между биссектральной плоскостью B и плоскостью P_i (понятно, что аккуратно нужно говорить о линейном угле двугранного угла). Если этот угол меньше $45°$, то

$$\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_i\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Повторяя далее рассуждения Решения Задачи 9 о возможных выборах нормалей $\vec{N}(B)$ или $-\vec{N}(B)$, $\vec{N}_i$ или $-\vec{N}_i$, получаем знакомый результат, что выражение

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_i\right)\right| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

охватывает все возможные случаи выбора этих нормалей и обеспечивает тот факт, что B — биссектральная плоскость острого двугранного угла. Если

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_i\right)\right| < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

то B — биссектральная плоскость тупого двугранного угла.

Пример к Задаче 16. Пусть даны плоскости $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ и $2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Найти биссектральную плоскость тупого двугранного угла, образованного этими плоскостями.

Замечание. Опять избегаем выражения «угол между плоскостями», так как он считается острым.

Как и в Задаче 9, можно заметить, что автор, жалея себя и читателя, выбрал плоскости с одинаковыми по модулю нормирующими множителями.

Равенство расстояний от точки биссектральной плоскости до данных плоскостей запишем с помощью формулы (7), дающей расстояние от точки до плоскости:

$$\frac{1}{\sqrt{29}}\left|2x + 3y + 4z + 5\right| = \frac{1}{\sqrt{29}}\left|2x - 3y + 4z - 5\right|,$$

откуда получаем две биссектральные плоскости

$$B_1 : 2x + 3y + 4z + 5 = -2x + 3y - 4z + 5,$$
$$B_2 : 2x + 3y + 4z + 5 = 2x - 3y + 4z - 5,$$

или

$$B_1 : x + z = 0,$$
$$B_2 : y = -\frac{5}{3}$$

(убедитесь в их перпендикулярности).

Выбираем биссектральную плоскость B_1 с нормалью $\vec{N}(B_1) = \{1; 0; 1\}$ и плоскость P_1: $2x + 3y + 4z + 5 = 0$ с нормалью $\vec{N}_1 = \{1; 3; 4\}$.

Угол между $\vec{N}(B_1)$ и $\vec{N}_1$ равен линейному углу двугранного угла между плоскостью B_1 и любой из плоскостей P_1 и P_2.

Воспользоваться вторым рисунком из Задачи 9 (рис. 1.16) мы уже не можем, так как в плоскость B_1 «вмешалась» третья координата z. Для выбранных биссектральной плоскости B_1 и плоскости P_1 получаем

$$\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_1\right)\right| = \frac{\left|\left(\vec{N}(B_1), \vec{N}_1\right)\right|}{\left|\vec{N}(B_1)\right| \cdot \left|\vec{N}_1\right|} =$$

$$\frac{|1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{29}} = \frac{6}{\sqrt{58}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Если $\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_1\right)\right| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то угол между B_1 и P_1 меньше 45° и B_1 — биссектральная плоскость острого двугранного угла.

Следовательно, биссектральной плоскость тупого двугранного угла будет биссектриса B_2 $y = -\dfrac{5}{3}$.

Опять отметим, что работа с выражением $\left|\cos\left(\vec{N}(B)^\wedge\vec{N}_1\right)\right|$ делает результат не зависящим от выбора нормали $\vec{N}_1$ или $-\vec{N}_1$.

Также результат не зависит от выбора вместо P_1 другой плоскости P_2.

В двух вариантах может меняться только знак стоящего под модулем косинуса.

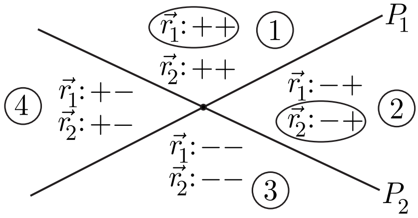

Рис. 2.9. К задаче 17

ЗАДАЧА 17. Найти, при каких условиях две данные точки лежат в одном, в смежных или в вертикальных двухгранных углах, образованных двумя данными плоскостями.

Решение. Это последняя из нескольких, приведенных выше задач, допускающих прямые аналогии с задачами для прямых на плоскости. Рис. 2.9 повторяет рис. 1.17 Задачи 10. Теперь мы смотрим «вдоль» линии пересечения двух плоскостей P_1 и P_2 и опять пользуемся возможностями нормированных уравнений. Рис. 2.9 передает поведение знаков отклонений точек r_1 и r_2 от плоскостей P_1 и P_2 в указанном порядке: первый знак — знак отклонения от P_1, второй — от P_2. При переходе через каждую плоскость меняется пара знаков, соответствующих этой плоскости. На рис. 2.9 представлены все возможные комбинации, отличающиеся по двугранным углам. Остается «снять» с рис. 2.9 возможные ответы:

1. если все четыре отклонения $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от P_1 и P_2 одного знака, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в одном двугранном угле;
2. если для точки $\vec{r}_2$ изменился знак одного отклонения по сравнению с $\vec{r}_1$, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — в смежных двугранных углах, как для выделенных овалами на рисунке $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$;
3. если для точки $\vec{r}_2$ знаки обоих отклонений противоположны знакам отклонений $\vec{r}_1$, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ в вертикальных двугранных углах.

Пример к Задаче 17. Рассмотрим опять более редкий случай плоскостей, проходящих через начало координат (см. замечание к Задаче 13).

Возьмем аналогично примеру к Задаче 10, плоскости и точки с очевидным ожидаемым ответом. В качестве плоскостей, образующих двугранные углы мы возьмем плоскости, параллельные оси Oz и проходящие через саму ось Oz.

$$P_1 : x + y = 0$$
$$P_2 : x - y = 0$$

а точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ выберем из координатной плоскости Oxy: $\vec{r}_1 = \{0; 1; 1\}$ и $\vec{r}_2 = \{1; 0; 2\}$.

Читатели с воображением сразу скажут, что при нормалях с нулевой z-координатой отклонения точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от плоскостей $x + y = 0$ и $x - y = 0$ будут теми же самыми, что и в примере к Задаче 10 (см. рис. 2.10).

Предоставим читателям рисовать плоскости $x + y = 0$ и $x - y = 0$, проходящие не только через начало координат $\{0; 0; 0\}$, но и через ось Oz, и мы, глядя вдоль оси Oz, увидим рис. 1.18 к Примеру к Задаче 10 с проекциями точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ на плоскости Oxy.

Выберем нормали к плоскостям P_1 и P_2 так:

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1; 1; 0\},$$

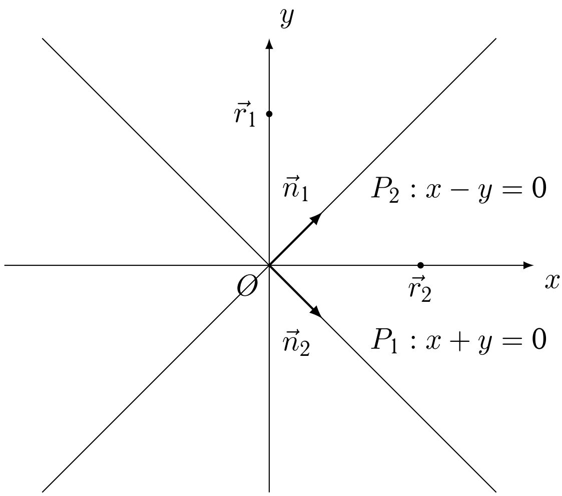

Рис. 2.10.

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1; -1; 0\}.$$

Находим отклонения точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от плоскостей P_1 и P_2.

Отклонения от $\vec{r}_1$ от P_1 и P_2 (напоминаем, что в общей формуле $\delta_1 = (\vec{r}_1, \vec{n}_1) - d$, а здесь $d = 0$):

$$\delta_1 = (\vec{r}_1, \vec{n}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\delta_1 = (\vec{r}_1, \vec{n}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отклонения от $\vec{r}_2$ от P_1 и P_2 :

$$\delta_1 = (\vec{r}_2, \vec{n}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\delta_1 = (\vec{r}_2, \vec{n}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В обозначениях рис. 2.9 к общему решению Задачи 17 мы нашли для знаков отклонений случай:

$$\vec{r}_1 : +-$$
$$\vec{r}_2 : ++,$$

который соответствует второму варианту общей схемы: если для точки $\vec{r}_2$ изменился знак <u>одного</u> отклонения по сравнению с $\vec{r}_1$, то $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — в смежных двугранных углах. Это очевидно даже без рисунка, но теория не подвела.

Опять Внимательный читатель скажет, что тащить за собой множители $1/\sqrt{2}$ единичного вектора нормали для определения лишь знака отклонения совершенно не нужно. Мы, как всегда, согласимся с Внимательным читателем.

Опять мы посоветуем читателю выбрать для плоскости P_2 противоположный вектор нормали $-\vec{n}_2$ и повторить выкладки.

Опять Внимательный читатель удержит простого читателя от этого задания и посоветует ему заменить в выкладках автора $\vec{n}_2$ на $-\vec{n}_2$ и получить, разумеется, тот же результат, а автора попросит не писать «опять» три раза подряд. Мы с удовольствием возьмем Внимательного читателя в соавторы, поскольку его советы всегда творческие и полезные.

Глава 3

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ЗАДАЧА 18. Различные способы задания прямой в пространстве. Переход от одного способа задания прямой к другому.

Во многих задачах, как мы увидим ниже, удобным является векторное задание прямой в пространстве в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t \tag{1}$$

где $\vec{r}_0$ — некоторая точка, $\vec{a}$ — направляющий вектор прямой, t — произвольный числовой параметр.

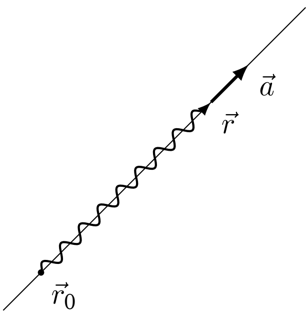

Рис. 3.1. К задаче 18

Уравнение (1) равносильно условию

$$\vec{r} - \vec{r}_0 || \vec{a}$$

которое в координатах, если $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$, $\vec{a} = \{l; m; n\}$, выглядит так:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \tag{2}$$

Эти два уравнения называются *каноническими уравнениями прямой в пространстве*. Добавление параметра t дает три уравнения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t \tag{3}$$

— *параметрические уравнения прямой в пространстве*.

Замечание. К сожалению, не только в устную речь, но и в печать проникают для (2) или (3) жаргонные «каноническое уравнение прямой» или «параметрическое уравнение прямой», хотя этих уравнений два или три.

Для всех трех указанных способов задания прямой в пространстве нужно при любом способе задания прямой находить точку $\vec{r}_0$ и направляющий вектор $\vec{a}$.

Наиболее общим является способ задания прямой двумя пересекающимися плоскостями

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right.$$

при условии наличия при неизвестных хотя бы одного минора второго порядка, отличного от нуля.

Пусть например,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда, полагая $z_0 = 0$, из системы

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y = -D_1 \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{array}\right.$$

находим остальные координаты x_0 и y_0 точки $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; 0\}$.

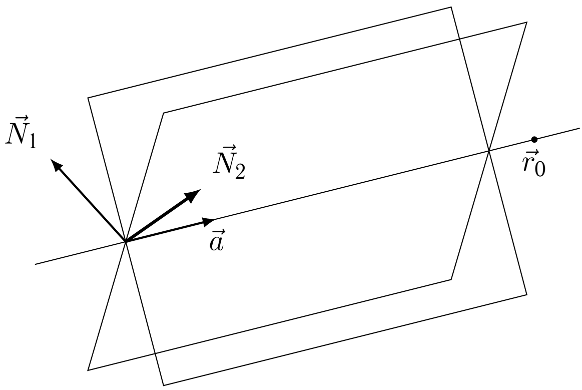

Рис. 3.2. К задаче 18

Направляющий вектор $\vec{a}$ находится как векторное произведение нормальных векторов $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ пересекающихся плоскостей (см. рис. 3.2):

$$\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right].$$

Повторим, теперь уже в приложении к задачам на прямую и плоскость в пространстве, основной совет: задача решается в наиболее удобных видах задания прямых и плоскостей. Переход к ним осуществляется «с легкостью» от любых исходных условий.

Пример к Задаче 18. Пусть прямая задана двумя плоскостями

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x + 3y + 4z + 5 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Видно, что

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0.$$

Точку $\vec{r}_0 = \{0; y_0; z_0\}$ находим, полагая $x_0 = 0$, из системы

$$\begin{cases} 3y - 4z = -5, \\ 3y + 4z = -5, \end{cases}$$

откуда $y_0 = -\dfrac{5}{3}$, $z_0 = 0$ (повезло!).

Итак, $\vec{r}_0 = \left\{0; -\dfrac{5}{3}; 0\right\}$

Направляющий вектор $\vec{a}$ получаем как векторное произведение векторов нормалей $\vec{N}_1 = \{2; 3; -4\}$ и $\vec{N}_2 = \{2; 3; 4\}$:

$$\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 16\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

или $\vec{a} = \{3; -2; 0\}$

В координатах векторное уравнение прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, задаваемое системой (4), выглядит так

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

Читателю рекомендуется получить другую точку $\vec{r}_0$, полагая $y_0 = 0$ и находя x_0 и z_0.

ЗАДАЧА 19. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

Решение. Пусть начальной точкой будет точка $\vec{r}_1$ (см. рис. 3.3). Направляющим вектором будет $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Векторное уравнение искомой прямой

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\, t. \tag{5}$$

Канонические уравнения получаются из эквивалентного (5) условия

$$\vec{r} - \vec{r}_1 || \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

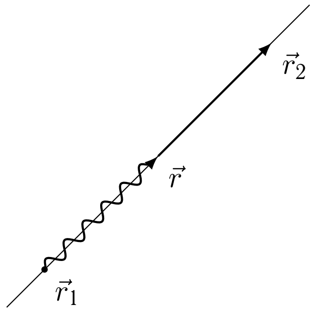

Рис. 3.3. К задаче 19

что в координатах для $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{r}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$ дает

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

— канонические уравнения. Добавляя параметр t, получаем параметрические уравнения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t.$$

Пример к Задаче 19. Пусть даны точки $\vec{r}_1 = \{1; 2; 3\}$ и $\vec{r}_2 = \{3; -2; -1\}$. Направляющий вектор $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ в координатах

$$\vec{a} = \{3 - 1; -2 - 2; 1 - 3\} = \{2; -4; -2\},$$

что позволяет выбрать направляющий вектор $\vec{a}$ в виде $\vec{a} = \{1; -2; 1\}$ и получить канонические уравнения:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Параметрические уравнения этой прямой:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 3}{-1} = t,$$

или

$$\begin{aligned} x &= 1 + t, \\ y &= 2 - 2t, \\ z &= 3 - t. \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 20. Найти канонические и параметрические уравнения прямой, по которой пересекаются две данные плоскости.
Решение. Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

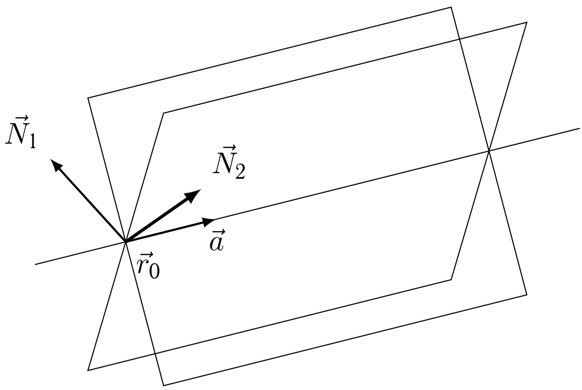

Рис. 3.4. К задаче 20

Плоскости пересекаются (см. рис. 3.4), если среди коэффициентов при неизвестных хотя бы один минор второго порядка не равен нулю. Пусть, например:

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Тогда, полагая $x_0 = 0$ и решая систему:

$$\begin{cases} B_1 y + C_1 z = -D_1 \\ B_2 y + C_2 z = -D_2 \end{cases}$$

находим остальные две координаты точки $\vec{r}_0 = \{0; y_0; z_0\}$. Напрявляющий вектор $\vec{a}$ прямой получаем как векторное произведение векторов нормалей $\vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$:

$$\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}.$$

Канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x-0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}.$$

Добавляя произвольный параметр t, получаем параметрические уравнения

$$\frac{x-0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t,$$

или

$$\begin{aligned} x &= 0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}$$

Пример к Задаче 20. Пусть плоскости заданы уравнениями

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5 = 0, \\ 2x - 3y + 4z + 5 = 0. \end{cases}$$

Плоскости пересекаются, так как есть минор

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Полагая $z_0 = 0$ и решая систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = -5, \\ 2x - 3y = -5, \end{cases}$$

находим остальные координаты $x_0 = -\dfrac{5}{2}$ и $y_0 = 0$ точки $\vec{r}_0 = \left\{-\dfrac{5}{2}; 0; 0\right\}$.

Направляющий вектор $\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right]$ в координатах имеет вид:

$$\vec{a} = \left[\vec{N}_1, \vec{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 0 \cdot \vec{j} - 12\vec{k},$$

или $\vec{a} = \{24; 0; -12\}$.

Направляющий вектор может быть любой длины, поэтому выберем его в виде

$$\vec{a} = \{2; 0; -1\}.$$

Итак, получаем канонические уравнения искомой прямой

$$\frac{x + 5/2}{2} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{-1}$$

и параметрические уравнения

$$\frac{x + 5/2}{2} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{-1} = t.$$

Поставленная задача решена. Обсудим полученные результаты. Нули в знаменателях канонических и параметрических уравнений не означают деление на нули, а представляют нулевой множитель после приведения к общему знаменателю:

$$\begin{cases} -x - 5/2 = 2z, \\ y = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + 2z + 5/2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

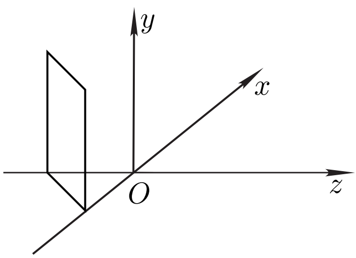

Рис. 3.5.

Полезно задуматься, что опять прямая получилась как линия пересечения двух плоскостей, только уже в более наглядном виде как прямая $x + 2z + 5/2 = 0$, лежащая в координатной плоскости $y = 0$ (см. рис. 3.5). Плоскость $x + 2z + 5/2 = 0$, не содержащая y, параллельна оси Oy.

Внимательный читатель мог, конечно, получить последний результат просто складывая и вычитая исходные уравнения. Но ему была поставлена задача получить канонические и параметрические уравнения.

Глава 4

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

ЗАДАЧА 21. Найти условия принадлежности данной прямой к данной плоскости.

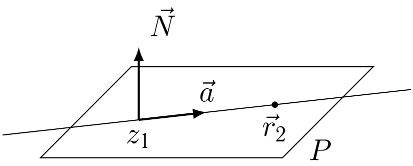

Рис. 4.1. К задаче 21

Решение. Решение «напролом» означает, что координаты двух точек прямой, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{r}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$ удовлетворяют уравнению данной плоскости P: $Ax + By + Cz + D = 0$, то есть обращают в тождество уравнения

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Этот факт тоже можно считать условиями принадлежности данной прямой к данной плоскости (см. рис. 4.12).

Другая возможность: если прямая задана в векторном виде $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$, то проверяем ортогональность направляющего вектора $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и вектора нормали $\vec{N} = \{A; B; C\}$ плоскости P, а также принадлежность точки $\vec{r}_1$ плоскости P:

$$\begin{cases} \left(\vec{N}, \vec{a}\right) = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Видно, что система (1) равносильна системе (2), так как, если вектор $\vec{a}$ для двух точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ имеет вид $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, то переходя от системы (1) к равносильной системе (заменяя одно из уравнений (1) их разностью)

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \end{cases}$$

мы получаем систему (2). Так что выбор способа проверки указанных свойств прямой зависит от ее задания.

Пример к Задаче 21. Рассмотрим в примере самый общий способ задания прямой в виде двух пересекающихся плоскостей

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{array}\right. \qquad (3)$$

где хотя бы один из миноров второго порядка при неизвестных не равен нулю. Пусть уравнение плоскости P — еще одно уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (4)$$

Прямая (3) принадлежит плоскости P, если любое решение (3) удовлетворяет (4), то есть (4) есть следствие (3). Этот факт тоже может быть ответом на вопрос, поставленный в задаче. Пусть прямая задана уравнениями

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + 1 = 0, \\ x - y + z + 1 = 0, \end{array}\right. \qquad (5)$$

где есть минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

а плоскость задана уравнением

$$3x - y + 3z + 3 = 0. \qquad (6)$$

Не касаясь сейчас общих признаков существования неединственного решения системы из этих трех уравнений (наша прямая), просто проверим, не является ли последнее уравнение линейной комбинацией первых двух. Умножая первое уравнение в (5) на α, а второе на β и складывая, приравниваем полученные коэффициенты коэффициентам уравнения (6):

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 3, \\ \alpha - \beta = -1, \\ \alpha + \beta = 3, \\ \alpha + \beta = 3. \end{array}\right.$$

Получаем $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Значит, уравнение плоскости есть следствие уравнений прямой, и прямая принадлежит плоскости.

ЗАДАЧА 22. Найти уравнения прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной плоскости.

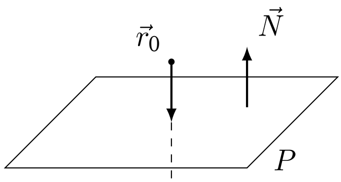

Рис. 4.2. К задаче 22

Решение. Для искомой прямой направляющим вектором является нормальный вектор $\vec N = \{A; B; C\}$ к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Векторное уравнение искомой прямой имеет вид

$$\vec r = \vec r_0 + \vec N t$$

В координатах, записывая условие $\vec r - \vec r_0 || \vec N$ для векторов $\vec r = \{x; y; z\}$ и $\vec r = \{x_0; y_0; z_0\}$, получаем канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \tag{7}$$

Пример к Задаче 22. Пусть задана плоскость $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ и точка $\vec r_0 = \{1; -2; 3\}$. Уравнение прямой, проходящей через точку $\vec r_0$ и перпендикулярной к данной плоскости имеет вид

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}.$$

ЗАДАЧА 23. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

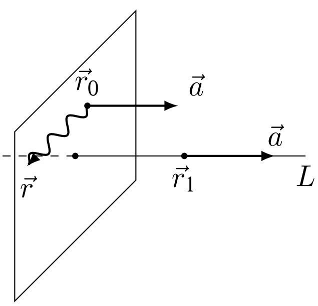

Рис. 4.3. К задаче 23

Решение. Для искомой плоскости вектором нормали является направляющий вектор $\vec a$ данной прямой (см. рис. 4.14). Поэтому уравнение плоскости получаем из условия ортогональности вектора $\vec r - \vec r_0$ плоскости и вектора $\vec a$:

$$(\vec r - \vec r_0, \vec a) = 0$$

что в координатах для векторов $\vec r = \{x; y; z\}$, $\vec r_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ и $\vec a = \{l; m; n\}$ дает

$$(x - x_0)l + (y - y_0)m + (z - z_0)n = 0$$

Раскрывая скобки, получаем искомое уравнение

$$lx + my + nz - (lx_0 + my_0 + nz_0) = 0.$$

Пример к Задаче 23. Пусть задана прямая

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}$$

и точка $\vec{r}_0=\{5;6;-7\}$.

От уравнений прямой нам нужен только направляющий вектор $\vec{a}=\{2;3;-4\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку r_0 и перпендикулярной к данной прямой, по условию

$$(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{a})=0$$

имеет вид

$$(x-5)\cdot 2+(y-6)\cdot 3+(z+7)\cdot(-4)=0$$

или

$$2x+3y-4z-56=0.$$

ЗАДАЧА 24. Найти проекцию данной точки: на данную плоскость (а) или на данную прямую (б).

Решение Задачи 24(а). После решения Задачи 22 о прямой, проходящей через точку $\vec{r}_0$ и перпендикулярной к плоскости P, проекцией точки $\vec{r}_0$ на плоскость P будет точка пересечения этой прямой с плоскостью P, то есть решение системы, состоящей из уравнений найденной прямой и уравнений данной плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

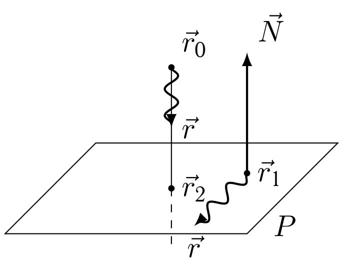

Рис. 4.4. К задаче 24(а)

Полезно отслеживать баланс числа уравнений и числа неизвестных. В данном случае три уравнения с тремя неизвестными действительно дают точку — проекцию точки $\vec{r}_0$ на плоскость P. Можно рассмотреть векторный вариант отыскания проекции точки $\vec{r}_0$ на плоскость P (см. рис. 4.4). Пусть прямая и плоскость заданы векторными уравнениями (напомним, что направляющим вектором прямой является вектор $\vec{N}$)

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{N}t \text{ (прямая)}, \\ (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}) = 0 \text{ (плоскость)}. \end{cases} \tag{8}$$

Ясно, что текущая точка $\vec{r}$ в каждом уравнении «бегает» независимо от другого (как и обычные неизвестные в уравнениях системы). Подставляя $\vec{r}$ из первого уравнения (8) во второе, получаем уравнение, определяющее t:

$$\left(\vec{r}_0 + \vec{N}t - \vec{r}_1, \vec{N}\right) = 0$$

или

$$\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{N}\right) + \left|\vec{N}\right|^2 t = 0,$$

откуда

$$t = \frac{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{N}\right)}{\left|\vec{N}\right|^2}.$$

Подставляя t в первое из уравнений (8), получаем искомую проекцию точки $\vec{r}_0$ на плоскость, точку $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \frac{\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{N}\right)}{\left|\vec{N}\right|} \cdot \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}$$

или, внося множитель $1/\left|\vec{N}\right|$ в скалярное произведение, имеем

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}\right) \cdot \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} \tag{9}$$

Последнему уравнению специально придан такой вид, в котором уже нетрудно усмотреть, что вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$ есть проекция вектора $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ (где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_0$ — фиксированные точки на плоскости или прямой) на нашу перпендикулярную плоскости прямую. Поэтому при определенном воображении, представив себе последний рисунок, можно сразу записать результат (9) как готовую явную формулу для искомой точки $\vec{r}_2$.

Пример к Задаче 24(а). Пусть даны точка $r_0 = \{1; -2; 1\}$ и плоскость $x + y + z + 1 = 0$. Найти проекцию точки $\vec{r}_0$ на эту плоскость.

Согласно формуле (7) решения Задачи 22, прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0 = \{1; -2; 1\}$ и перпендикулярная к плоскости $x + y + z + 1 = 0$ задается каноническими уравнениями

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Добавляя уравнение плоскости

$$x + y + z + 1 = 0,$$

получаем систему

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ y - z = -3, \\ x + y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы есть искомая точка $\vec{r}_2 = \left\{\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right\}$.

В векторном варианте в формуле (9)

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\right) \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

требуется точка $\vec{r}_1$ на плоскости. Пусть она будет $\vec{r}_1 = \left\{-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$. Находим $\frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\{1; 1; 1\}$ — единичный вектор нормали,

$$\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(-\frac{1}{3} - 1\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3} + 2\right) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \cdot 1\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

и, наконец,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Пожалуй, решение простенькой системы предпочтительнее.

Решение Задачи 24(б). Переходим ко второму вопросу задачи — проекции данной точки на данную прямую. После решения Задачи 23 о плоскости, проходящей через данную точку $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ и перпендикулярной к прямой L, проекцией точки $\vec{r}_0$ на прямую L будет точка пересечения этой плоскости с прямой L, то есть решение системы, состоящей из уравнений данной прямой с направляющим вектором $\vec{a} = \{l; m; n\}$ и начальной точкой $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$ и уравнения найденной плоскости:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}, \\ (x - x_0)l + (y - y_0)m + (z - z_0)n = 0. \end{cases}$$

Решением этих трех уравнений с тремя неизвестными будет точка $\vec{r}_2$ — проекция $\vec{r}_0$ на прямую L. Как и для Задачи 24(а), рассмотрим векторный вариант отыскания проекции точки $\vec{r}_0$ на прямой L.

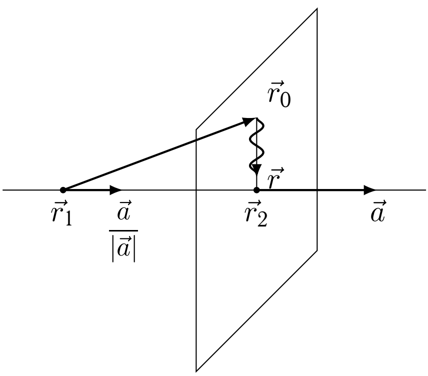

Рис. 4.5. К задаче 24 (б)

Пусть прямая и плоскость (см. рис. 4.5) заданы векторными уравнениями

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t \text{ (прямая)}, \\ (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0 \text{ (пл-ть)}. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя $\vec{r}$ из первого уравнения (10) во второе, получаем уравнение, определяющее t:

$$(\vec{r}_1 + \vec{a}t - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0,$$

или

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{a}) + |\vec{a}|^2 t = 0$$

откуда

$$t = \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a})}{|\vec{a}|^2}$$

Подставляя t в первое из уравнений (10), получаем решение системы (10) — искомую проекцию $\vec{r}_0$ на прямую, точку $\vec{r}_2$:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a})}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

или, внося множитель $1/|\vec{a}|$ в скалярное произведение, имеем

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{11}$$

Последнему уравнению опять придан специальный вид, в котором можно усмотреть, что вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ это проекция вектора $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ (с двумя фиксированными точками на плоскости и прямой) на данную прямую.

Опять заметим, что Внимательный читатель мог представить себе последний рисунок и сразу записать результат как готовую формулу для искомой точки $\vec{r}_2$.

Пример к задаче 24(б). Пусть даны точка $\vec{r}_0 = \{1; -2; 1\}$ и прямая

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}. \tag{12}$$

Если прямая была задана по-другому, то точку $\vec{r}_1$ на ней (в нашем случае $\{-1; 2; -1\}$) и направляющий вектор $\vec{a}$ (в нашем случае $\{1; 2; 1\}$) надо было найти.

Понятно, что для получения системы уравнений для искомой проекции $\vec{r}_2$ точки $\vec{r}_0$ на прямую канонические уравнения предпочтительнее (вспомним советы насчет решения задачи в удобных формах задания обьектов).

Добавив к уравнениям прямой (12) уравнение плоскости

$$(x-1) \cdot 1 + (y+2) \cdot 2 + (z-1) \cdot 1 = 0,$$

которая проходит через точку $\vec{r}_0$ и перпендикулярна к прямой. Получаем систему

$$\begin{cases} 2x - y = -4, \\ y - 2z = 4, \\ x + 2y + z = -2, \end{cases}$$

решением которой будет проекция $\vec{r}_0$ на прямую — точка $\vec{r}_2 = \left\{-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$ В векторном варианте, вспоминая полученную формулу (11)

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

где $\vec{r}_0 = \{1; -2; 1\}$ — данная точка, $\vec{r}_1 = \{-1; 2; -1\}$ — точка на данной прямой, $\vec{a} = \{1; 2; 1\}$ — направляющий вектор этой прямой, находим:

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{1; 2; 1\},$$
$$\left(\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left((1+1)\cdot 1 + (-2-2)\cdot 2 + (1+1)\cdot 1\right) = -\frac{4}{\sqrt{6}}$$

и, наконец,

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{\sqrt{6}}\right)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 25. Найти расстояние от данной точки до данной прямой как высоту параллелограмма.

Решение. Ясно, что после решения Задачи 24(б), давшего точку $\vec{r}_2$ — проекцию точки $\vec{r}_0$ на прямую, расстояние от $\vec{r}_0$ до $\vec{r}_2$ — это длина отрезка $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$. Но предлагаемый далее способ избавляет нас от плоскости, перпендикулярной данной прямой. Используется числовое значение модуля векторного произведения, равного площади параллелограмма, построенного на сомножителях. Если прямая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$, то, деля площадь параллелограмма (см. рис. 4.6), построенного на векторах $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ и $\vec{a}$, на длину $|\vec{a}|$ основания, получаем искомое расстояние d как высоту этого параллелограмма

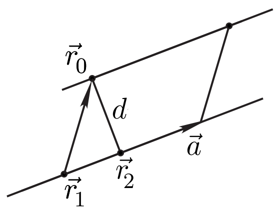

Рис. 4.6. К задаче 25

$$d = \frac{|\,[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}]\,|}{|\vec{a}|}.$$

Пример к Задаче 25. Пусть дана прямая $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$, где $\vec{r}_1 = \{1; 2; 3\}$, $\vec{a} = \{3; 2; 1\}$ и точка $\vec{r}_0 = \{-1; -2; -3\}$.

Расстояние от точки $\vec{r}_0$ до прямой

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

находим по формуле

$$d = \frac{|\,[\vec r_0 - \vec r_1, \vec a]\,|}{|\vec a|},$$

для чего получаем:

$$[r_0 - r_1, a] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -2 & -4 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec i - 16\vec j + 8\vec k,$$

$$|[\vec r_0 - \vec r_1, \vec a]| = \sqrt{64+256+64} = 8\sqrt{6}$$

$$|\vec a| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

и, наконец, $d = \dfrac{8\sqrt{6}}{\sqrt{14}}$.

ЗАДАЧА 26. Найти точку, симметричную данной точке относительно данной плоскости (а), или данной прямой (б).

Эта задача — полный аналог Задачи 5 для точки и прямой на плоскости. Можно даже рисунок 1.7 не менять. Для плоскости достаточно смотреть на ситуацию «с ребра» плоскости.

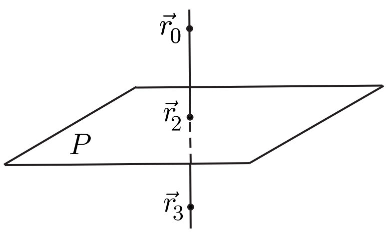

Рис. 4.7. К задаче 26(а)

Решение Задачи 26(а). Следуя сначала решению Задачи 24(а), находим точку $\vec r_2$ — проекцию точки $\vec r_0$ на плоскость P (см. рис. 4.7). Искомая точка $\vec r_3$ находится на том же перпендикуляре к плоскости P. Расстояние от точки $\vec r_3$ до $\vec r_0$ в два раза больше расстояния от $\vec r_2$ до $\vec r_0$:

$$\vec r_3 = \vec r_0 + 2(\vec r_2 - \vec r_0).$$

Пример к Задаче 26(а). Пусть даны точка $\vec r_0 = \{1; 2; 1\}$ и плоскость $x - y + z + 1 = 0$.

Согласно решению Задачи 24(а) получаем точку $\vec r_2$ — проекцию $\vec r_0$ на плоскость P:

$$\vec r_2 = \left\{\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right\}.$$

Для вектора $\vec r_2 - \vec r_0$ имеем:

$$\vec r_2 - \vec r_0 = \left\{\frac{2}{3} - 1; \frac{7}{3} - 2; \frac{2}{3} - 1\right\} = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right\}.$$

Добавляя к точке $\vec{r}_0$ удвоенный вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$, находим искомую точку $\vec{r}_3$:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Решение Задачи 26(б). Следуя сначала решению Задачи 24(б), находим точку $\vec{r}_2$ — проекцию точки $\vec{r}_0$ на прямую L. Искомая точка $\vec{r}_3$ находится на том же перпендикуляре к прямой L. Расстояние от $\vec{r}_3$ до $\vec{r}_0$ в два раза больше расстояния от $\vec{r}_2$ до $\vec{r}_0$:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_0).$$

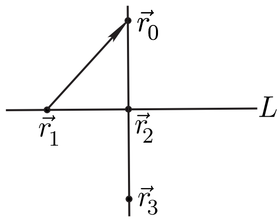

Рис. 4.8. К задаче 26(б)

Пример к Задаче 26(б). Пусть даны точка $r_0 = \{1; 2; 1\}$ и прямая

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Согласно решению Задачи 24(б) получаем точку $\vec{r}_2$ — проекцию точки $\vec{r}_0$ на прямую L:

$$\vec{r}_2 = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}.$$

Для вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$ имеем

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \left\{-\frac{1}{3} - 1; \frac{2}{3} - 2; -\frac{1}{3} - 1\right\} = \left\{-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right\}.$$

Добавляя к точке $\vec{r}_0$ удвоенный вектор $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$, находим искомую точку $\vec{r}_3$:

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_0 + 2(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 27. Найти условия принадлежности двух данных прямых к одной данной плоскости.

Решение. Три вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ лежат в одной плоскости, то есть компланарны, если их смешанное произведение равно нулю:

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0 \qquad (13)$$

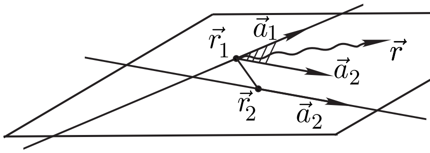

Рис. 4.9. К задаче 27

Для проверки этого факта опять нужно привести обе прямые к векторному заданию, дающему точки $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ и векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Итак, если выполнено условие (13), то эти векторы, а значит, и данные прямые лежат в некоторой (!) плоскости, задаваемой уравнением

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$$

где $\vec{r}-\vec{r}_1$ — текущий вектор этой плоскости (см. рис. 4.9). В кординатах, если $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$ уравнение этой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получаем уравнение плоскости, содержащей наши прямые:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \tag{14}$$

Если уравнение заданной плоскости P имело вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{15}$$

то условием совпадения этих плоскостей, обеспечивающим принадлежность данных прямых именно плоскости P, будет пропорциональность коэффициентов уравнений (14) и (15):

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \frac{D_1}{D}.$$

Подводя итог всем рассуждениям, соберем все условия принадлежности прямой $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$ к заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (плоскость P):

1. Принадлежность этих прямых некоторой (!) плоскости проверяется условием

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$$

2. Эта плоскость задается уравнением
$$(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{a}_1,\vec{a}_2)=0$$
3. Если коэффициенты полученного уравнения плоскости, содержащей данные прямые, пропорциональны коэффициентам заданной плоскости P, то данные прямые лежат именно в плоскости P.

Пример к Задаче 27. Сразу берем данные прямые в векторной форме $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t$ и $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2t$, где $\vec{r}_1=\{1;1;1\}$, $\vec{a}_1=\{1;2;2\}$, $\vec{r}_2=\{5;6;7\}$, $\vec{a}_2=\{2;1;2\}$. Надо проверить, принадлежат ли они плоскости $4x+4y-6z-2=0$.

Проверяем, что данные прямые лежат в некоторой плоскости, для чего должно выполняться условие
$$(\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\begin{vmatrix}4&5&6\\1&2&2\\2&1&2\end{vmatrix}=4\cdot 2-5\cdot(-2)+6\cdot(-3)=0.$$
Условие выполнено. Прямые лежат в плоскости
$$(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\begin{vmatrix}x-1&y-1&z-1\\1&2&2\\2&1&2\end{vmatrix}=$$
$$=(x-1)\cdot 2-(y-1)\cdot(-2)+(z-1)\cdot(-3)=2x+2y-3z-1=0.$$
Коэффициенты уравнения полученной плоскости пропорциональны коэффициентам заданной плоскости:
$$\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{-3}{-6}=\frac{-1}{-2}.$$
Значит это одна и та же плоскость, которой принадлежат обе данные прямые.

Замечание. В отличие от примеров многих других задач, здесь взять с потолка две прямые, лежащие в одной плоскости, невозможно. За исключением, конечно, тривиального случая, когда $\vec{r}_1=\vec{r}_2$. Если три вектора $\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ лежат в одной плоскости, то $\vec{r}_2-\vec{r}_1$ — линейная комбинация векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Автор взял с потолка векторы $\vec{a}_1=\{1;2;2\}$ и $\vec{a}_2=\{2;1;2\}$, умножил первый на 2, а второй на 1, сложил и получил вектор $\vec{r}_2-\vec{r}_1=\{4;5;6\}$. Затем надо было получить плоскость, содержащую эти прямые. Ее уравнение оказалось $2x+2y-3z-1=0$. Для уравнения плоскости P вполне подходило $4x+4y-6z-2=0$.

ЗАДАЧА 28. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку, не лежащую на этой прямой.

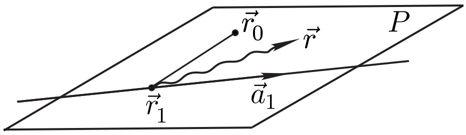

Рис. 4.10. К задаче 28

Решение. Пусть даны прямая $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и точка $\vec{r}_0$. Плоскость проходит через данную прямую и точку $\vec{r}_0$, если текущий вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$ плоскости лежит в плоскости, задаваемой векторами $\vec{r}_0 - \vec{r}_1$ и $\vec{a}_1$. Критерий компланарности указанных векторов — это равенство нулю их смешанного произведения

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}_1) = 0 \tag{16}$$

что и является уравнением искомой плоскости. Если $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{a} = \{l; m; n\}$, то в координатах уравнение (16) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

с числовыми второй и третьей строками определителя. Раскрывая определитель по элементам первой строки, получаем уравнение искомой плоскости. Опять наблюдаем выгодную векторную форму задания прямой, позволяющую рещить задачу в одну строчку.

Пример к Задаче 28. Пусть прямая задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$, где $\vec{r}_1 = \{1; 2; 3\}$ и $\vec{a} = \{1; -2; 1\}$. Дана точка $\vec{r}_0 = \{2; 1; 2\}$.

Искомая плоскость по формуле (16) задается уравнением

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_0 - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0,$$

что в координатах согласно (17) выглядит так:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 - 1 & 1 - 2 & 2 - 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем уравнение искомой плоскости

$$(x - 1) \cdot (-3) - (y - 2) \cdot 2 + (z - 3) \cdot (-1) = 0$$

или, окончательно,

$$-3x - 2y - z + 10 = 0.$$

Внимательный читатель бегло проверит на всякий случай принадлежность этой плоскости точки $\vec{r}_1 = \{1; 2; 3\}$ (что очевидно) и точки $\vec{r}_0 = \{2; 1; 2\}$.

Автор на это заметит, что если уж проверять, так проверять: ортогональны ли вектор $\vec{a} = \{1; -2; 1\}$ и вектор нормали к плоскости $\vec{N} = \{-3; -2; -1\}$. Вроде бы все в порядке!

ЗАДАЧА 29. Найти уравнение плоскости, проходящей через две данные параллельные прямые.

Решение. Если данные параллельные прямые (см. рис. 4.11) заданы векторными уравнениями с одинаковыми направляющими векторами $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_1 t$, то после решения Задачи 28 решение этой задачи мгновенно выписывается опять в одну строчку:

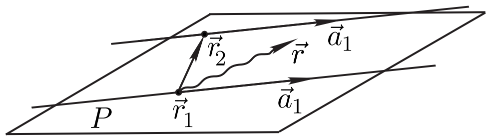

Рис. 4.11. К задаче 29

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1) = 0. \tag{18}$$

Формула (18) означает компланарность текущего вектора $\vec{r} - \vec{r}_1$ искомой плоскости и векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{a}$. В роли точки $\vec{r}_0$ в Задаче 28 выступает теперь $\vec{r}_2$. Если $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{r}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{a}_1 = \{l; m; n\}$, то в координатах уравнение (18) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

с числовыми второй и третьей строками определителя. Раскрывая определитель по элементам первой строки, получаем уравнение искомой плоскости. Векторная форма задания участников опять обеспечивает возможность решения в одну строчку.

Пример к Задаче 29. Автор, щадя себя и читателя, использует в буквальном смысле числовые данные примера к предыдущей Задаче 28.

Пусть данные параллельные прямые заданы уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_1 t$, где $\vec{r}_1 = \{1; 2; 3\}$, $\vec{a}_1 = \{1; -2; 1\}$, $\vec{r}_2 = \{2; 1; 2\}$ (бывшая в Примере к Задаче 28 точка $\vec{r}_0$).

Искомая плоскость по формуле (18) задается уравнением

$$(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_2-\vec{r}_1, \vec{a}_1)=0,$$

что в координатах выглядит так:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 2-3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

откуда получаем уже знакомое уравнение

$$(x-1)\cdot(-3)-(y-2)\cdot 2+(z-3)\cdot(-1)=0$$

или, окончательно,

$$-3x-2y-z+10=0.$$

Совет. Если каждая из двух данных прямых задана была пересечением двух плоскостей, то приведите эти прямые сначала к векторному виду и убедитесь в их параллельности, то есть совпадении направляющих векторов.

После этих «невидимых миру слез» вы завоевали право на решение задачи в одну строчку.

ЗАДАЧА 30. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и параллельную другой данной прямой.

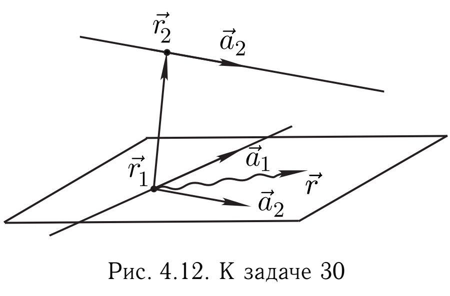

Рис. 4.12. К задаче 30

Решение. Исключим из рассмотрения случай двух параллельных прямых, когда искомая плоскость оказывается неединственной, а также случай двух пересекающихся прямых. Итак, пусть даны две скрещивающиеся прямые, заданные векторными уравнениями $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1 t$ и $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2 t$, и надо найти плоскость, проходящую через первую из двух прямых параллельно второй прямой (см рис. 4.12). Если $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$, то прямые непараллельны, а то, что они не пересекаются, обеспечивается некомпланарностью векторов $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, для этого смешанное произведение этих векторов должно быть отлично от нуля.

Прямая $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_2 t$, проходящая через точку $\vec{r}_1$ с направляющим вектором $\vec{a}_2$, параллельна прямой $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$, $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$. Значит, прямая $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$ параллельна плоскости, задаваемой векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, приложенными к точке $\vec{r}_1$.

Текущий вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$ этой плоскости компланарен векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, условием чего будет равенство нулю смешанного произведения этих векторов:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0. \tag{19}$$

Это уравнение и есть уравнение искомой плоскости. Если $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$, то в координатах уравнение (19) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

с числовыми второй и третьей строками определителя. Раскрывая определитель по элементам первой строки, получаем уравнение искомой плоскости. Опять векторная форма задания участников обеспечила возможность решения в одну строку.

Пример к Задаче 30. Пусть скрещивающиеся прямые заданы уравнениями $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$, где $\vec{r}_1 = \{1; 1; 1\}$, $\vec{r}_2 = \{2; 2; 2\}$, $\vec{a}_1 = \{1; 0; 0\}$, $\vec{a}_2 = \{0; 1; 0\}$. Легко представить себе эти прямые, параллельные координатным осям (см рис. 4.13).

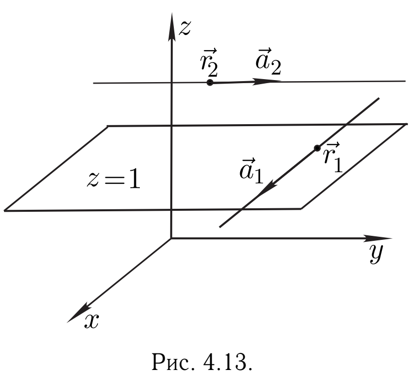

Рис. 4.13.

Пусть надо найти плоскость, проходящую через первую из этих прямых и параллельную второй прямой. Очевидно, что $\vec{a}_1 \neq \neq \vec{a}_2$. Проверяем, что данные прямые скрещиваются:

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = \begin{vmatrix} 2-1 & 2-1 & 2-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Уравнение искомой плоскости получаем по формуле (20):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или $z = 1$. Рис. 4.13 подтверждает этот результат.

ЗАДАЧА 31. Найти уравнение плоскости, проходящей через данную прямую и перпендикулярной к данной плоскости.

Решение. Пусть данная прямая L задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + + \vec{a}t$, а данная плоскость P имеет нормаль $\vec{N}$ (больше нам от нее ничего не нужно).

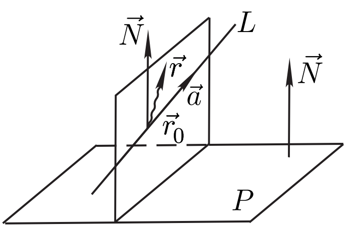

Рис. 4.14. К задаче 31

Искомая плоскость проходит через прямую L и перпендикулярна плоскости P (см рис. 4.14). Значит, она содержит и вектор $\vec{N}$. Текущий вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ компланарен векторам $\vec{N}$ и $\vec{a}$, что обеспечивается условием равенства нулю их смешанного произведения

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}, \vec{a}\right) = 0. \tag{21}$$

Это и является уравнением искомой плоскости.

Если $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$, $\vec{N} = \{A; B; C\}$, $\vec{a} = = \{l; m; n\}$, то в координатах уравнение (21) имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

с числовыми второй и третьей строками определителя.

Раскрывая определитель по элементам первой строки, получаем уравнение искомой плоскости.

Опять векторная форма уравнения прямой позволила нам решить задачу в одну строчку.

Пример к Задаче 31. Пусть прямая L задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, где $\vec{r}_0 = \{1; 2; 3\}$, $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$, а плоскость P задана уравнением $x + y + z - 1 = 0$. Тогда плоскость, проходящая через прямую L и перпендикулярная к плоскости P, по формуле (22) задается уравнением

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(x-1)\cdot 3 - (y-2)\cdot 0 + (z-3)\cdot(-3) = 0,$$

откуда получаем

$$3x - 3z + 6 = 0 \Longleftrightarrow x - z + 2 = 0.$$

Может быть полезен и более наглядный пример с заранее очевидным ответом. Например, заданная прямая L — это биссектриса координатного угла xOy, а плоскость P — это координатная плоскость $z = 0$ (см рис. 4.15).

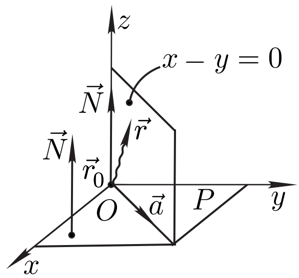

Рис. 4.15.

Ясно, что искомой плоскостью будет плоскость $x - y = 0$. Остается аккуратно записать все данные в координатах и получить этот ответ из общих соображений.

Заданная прямая L имеет вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, где $\vec{r}_0 = \{0; 0; 0\}$, $\vec{a} = \{1; 1; 0\}$, а нормалью к плоскости P является вектор $\vec{N} = \{0; 0; 1\}$. По формуле (22)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$x\cdot(-1) - y\cdot(-1) + z\cdot 0 = 0,$$

откуда находим для искомой плоскости давно ожидаемое уравнение

$$x - y = 0.$$

В следующих трех задачах будут разыскиваться прямые. Они будут получаться пересечением плоскостей, поэтому, в отличие от нескольких предыдущих задач, решение будет состоять не из одной, а из двух строчек.

ЗАДАЧА 32. Найти уравнения проекции данной прямой на данную плоскость.

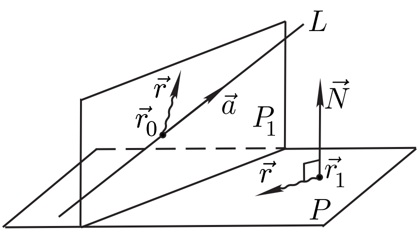

Рис. 4.16. К задаче 32

Решение. Задача 31 позволила нам найти плоскость P_1, проходящую через данную прямую L и перпендикулярную к данной плоскости P. Линия пересечения этой проектирующей плоскости P_1 с плоскостью P и будет проекцией прямой L на плоскость P (см рис. 4.16).

Значит, дело сводится к решению системы уравнений, состоящей из уравнения проектирующей плоскости P_1 и уравнения плоскости P, например, $Ax + By + Cz + D = 0$ с нормалью $\vec{N}$. Уравнение проектирующей плоскости (21) берем из решения задачи 31 (проще, конечно, не вспоминать, а «снимать» с рисунка):

$$\begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}, \vec{a}) = 0, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Внимательный читатель (в который уже раз мы ему благодарны) упрекнет нас в смеси векторного и координатного описания. Внимательный читатель, конечно, прав, и мы можем, идя ему навстречу, заменить второе уравнение в (23) уравнением плоскости

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}\right) = 0,$$

где $\vec{r}_1$ — некоторая точка плоскости P, а $\vec{r}$ — текущий вектор.

Как и показано выше, решение задачи свелось к системе, то есть к двум строчкам.

Примирить нас с Внимательным читателем может следующий этап решения уравнений уже в координатах для конкретно заданных участников. Пусть $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{N} = \{A; B; C\}$, $\vec{a} = \{l; m; n\}$. Тогда система

$$\begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}, \vec{a}) = 0, \\ \left(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{N}\right) = 0 \end{cases}$$

принимает вид

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \\ (x-x_1)A+(y-y_1)B+(z-z_1)C=0. \end{cases} \tag{24}$$

Теперь уже в координатах видны уравнения двух плоскостей, дающих при пересечении искомую прямую. Если первое и второе уравнения системы (24) мы приведем к виду

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases} \tag{25}$$

с нормалями $\vec{N}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ в первом уравнении и во втором — $\vec{N}=\{A;B;C\}$, то для любителей векторного уравнения прямой дальнейшие действия будут следующими.

Две перпендикулярные плоскости обязаны пересечься, значит, найдется минор второго порядка, отличный от нуля, например, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$. Он поможет нам найти точку $\vec{r}_2$ на этой прямой в виде $\vec{r}_2=\{x_2;y_2;0\}$.

Направляющий вектор $\vec{a}_2$ искомой прямой мы найдем как векторное произведение $\vec{N}_1$ и $\vec{N}$:

$$\vec{a}_2=\left[\vec{N}_1,\vec{N}\right].$$

Итак, результатом нашего решения окажется векторное уравнение искомой прямой

$$\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2t$$

— проекция прямой L на плоскость P.

Замечание. «Нелюбители» векторных уравнений могут работать с системой (25), только не хаотическими действиями, как часто приходится видеть, с подстановкой неизвестных из одного уравнения в другое, в надежде, что все как-то само собой образуется.

Если вы нашли минор $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A & B \end{vmatrix} \neq 0$, то идите уже организованно на получение параметрических уравнений прямой. Системе с ненулевым определителем и третьей переменной z следует придать вид

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1t-D_1, \\ Ax+By=-Ct-D, \\ z=t, \end{cases}$$

откуда, выражая x и y через t, вы получите параметрические уравнения искомой прямой

$$\begin{cases} x = \alpha_1 t + \beta_1, \\ y = \alpha_2 t + \beta_2, \\ z = t. \end{cases}$$

Поклонники канонических уравнений без труда, исключая t, получат и канонические уравнения. Сначала

$$\frac{x-\beta_1}{\alpha_1} = t, \quad \frac{y-\beta_2}{\alpha_2} = t, \quad z = t,$$

а затем

$$\frac{x-\beta_1}{\alpha_1} = \frac{y-\beta_2}{\alpha_2} = \frac{z}{1}. \tag{26}$$

Поклонникам векторных уравнений вы можете из уравнений (26) подарить точку $\vec{r}_2 = \{\beta_1; \beta_2; 0\}$ и направляющий вектор $\vec{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; 1\}$.

Пример к Задаче 32. Пусть прямая L задана уравнением $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$, где $\vec{r}_0 = \{0; 0; 1\}$, $\vec{a} = \{1; 1; -1\}$, и плоскость P задана уравнением $z = 0$ с нормалью $\vec{N} = \{0; 0; 1\}$.

Уравнение плоскости, проходящей через прямую L и перпендикулярной к плоскости P, находим из условия компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$ (текущий вектор искомой плоскости), $\vec{N}$, $\vec{a}$:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}, \vec{a}) = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot (-1) - y \cdot (-1) + (z-1) \cdot 0 = 0,$$

откуда $x - y = 0$. Получили проектирующую плоскость P_1 (см. рис. 4.17).

Таким образом, проекция прямой L на плоскость $z = 0$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = y, \\ z = 0. \end{cases}$$

Повторим для этой системы приведенные выше общие рассуждения.

В системе (25)

$$\begin{cases} x - y + 0 \cdot z = 0, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + z = 0 \end{cases}$$

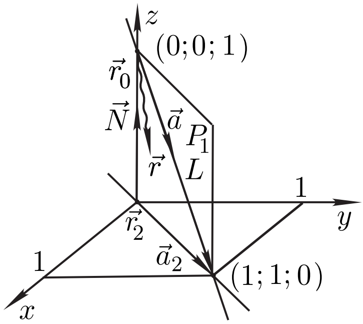

Рис. 4.17.

находим (при x и z) минор, отличный от нуля

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

который позволяет выразить x и z через $y = t$:

$$\begin{cases} x = 1 \cdot t + 0, \\ y = 1 \cdot t + 0, \\ z = 0 \cdot t + 0, \end{cases}$$

то есть получить параметрические уравнения.

Исключая t, получаем

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$$

— канонические уравнения, предоставляющие любителям векторных уравнений точку $\vec r_2 = \{0;0;0\}$, направляющий вектор $\vec a_2 = \{1;1;0\}$ и векторное уравнение $\vec r = \vec r_2 + \vec a_2 t$ (см. рис. 4.17).

ЗАДАЧА 33. Найти уравнение перпендикуляра к данной прямой, пересекающего ее и проходящего через данную точку.

Решение. Попробуем при нашем уже немалом опыте начать, как всегда, с рисунка (см. рис. 4.18) и системы, дающей искомую прямую:

$$\begin{cases} (\vec r - \vec r_1, \vec r_0 - \vec r_1, \vec a_1) = 0, \\ (\vec r - \vec r_0, \vec a_1) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Возможно, что многие читатели скажут, что они уже все поняли, и им этого достаточно. Других деликатно, «под ручку», проведем по фактам, которые «шустрые» уже осознали.

В самом деле, первое уравнение было результатом Задачи 28 — плоскостью P_1, проходящей через данную прямую L и точку $\vec{r}_0$ вне этой прямой. Автор никоим образом не призывает запоминать готовые формулы. Гораздо проще, глядя на рисунок, (желательно нарисованный аккуратно) «считать» с него полезные факты. В нашем случае — это компланарность векторов $\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_0-\vec{r}_1$ и $\vec{a}_1$.

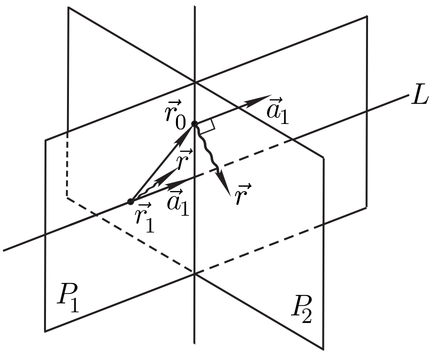

Рис. 4.18. К задаче 33

Если плоскость P_1 пересечь плоскостью P_2, проходящей через точку $\vec{r}_0$ и перпендикулярной к прямой L, то линия пересечения P_1 и P_2 и будет искомым перпендикуляром к прямой L, проходящим через заданную точку.

Плоскость P_2 мы получали в Задаче 23, где требовалось построить плоскость, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой. Опять, не призывая вспоминать готовую формулу, автор просит посмотреть на рис. 4.18 и увидеть ортогональность текущего вектора $\vec{r}-\vec{r}_0$ плоскости P_2 и вектора нормали к P_2 — направляющего вектора $\vec{a}_1$ прямой L.

Теперь уже все всем понятно, и осталось перейти к координатной реализации системы (27). Пусть $\vec{r}=\{x;y;z\}$, $\vec{r}_0 = \{x_0;y_0;z_0\}$, $\vec{a}_1=\{l;m;n\}$. Тогда система (27) принимает вид

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \\ (x-x_0)l+(y-y_0)m+(z-z_0)n=0 \end{array}\right.$$

с числовыми второй и третьей строками определителя.

Раскрывая определитель по элементам первой строки, мы получаем уравнение плоскости. Второе уравнение тоже уравнение плоскости. Если эти уравнения приведены к виду

$$\left\{\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{array}\right.$$

то дальнейшие технические действия обсуждались для такой системы в Замечании к Задаче 32. В зависимости от личных предпочтений, эти действия вели к векторному уравнению прямой, параметрическим или каноническим уравнениям прямой.

Пример к Задаче 33. Пусть дана точка $\vec{r}_0 = \{1; 0; 0\}$ и прямая $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$, где $\vec{r}_1 = \{0; 1; 0\}$ и $\vec{a}_1 = \{0; -1; 1\}$.

Плоскость P_1, проходящая через данную прямую и точку r_0 и определится уравнением (16) Задачи 28

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}_1) = \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 1-0 & 0-1 & 0-0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot (-1) - (y-1) \cdot 1 + z \cdot (-1) = 0,$$

или

$$x + y + z = 1 \text{ (см. рис. 4.19)}.$$

Плоскость P_2, проходящая через точку r_0 и перпендикулярная к данной прямой, задается уравнением

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}_1) = (x-1) \cdot 0 + (y-1) \cdot (-1) + (z-0) \cdot 1 = 0,$$

$$\text{или } -y + z = 0.$$

Прямая, являющаяся пересечением P_1 и P_2, проходящая через точку $\vec{r}_0$ и перпендикулярная к данной прямой, есть решение системы

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

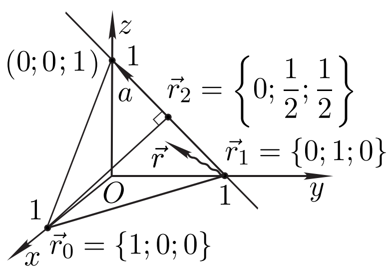

Рис. 4.19.

Полагая $z = t$, получаем параметрические уравнения этой прямой

$$\begin{cases} x = -2t + 1, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases}$$

или, исключая t, канонические уравнения:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Для любителей векторного уравнения видны начальная точка $\vec{r}_0 = \{1; 0; 0\}$ и направляющий вектор $\vec{a}_2 = \{-2; 1; 1\}$ для уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}_2 t$, что в координатах выглядит так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Видно, что при $t = \dfrac{1}{2}$ мы получаем точку $\vec{r}_2 = \left\{0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$ пересечения построенного перпендикуляра и данной прямой, проходящей через точки $(0; 1; 0)$ и $(0; 0; 1)$.

ЗАДАЧА 34. Найти уравнения общего перпендикуляра к двум данным скрещивающимся прямым.

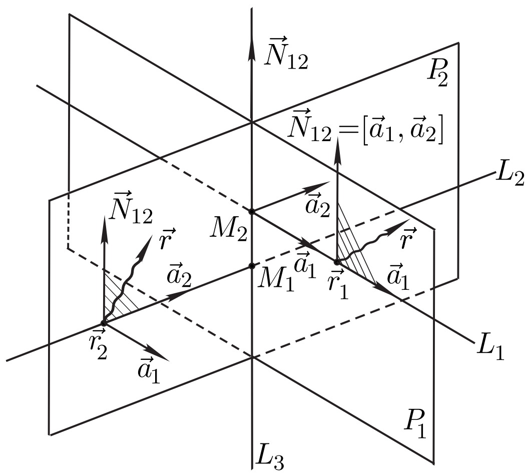

Рис. 4.20. К задаче 34

Решение. Пусть даны скрещивающиеся прямые $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ и $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$. То, что они скрещивающеся, проверяется условиями $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$ (не параллельны) и $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0$ (не пересекаются). Последнее условие означает некомпланарность вектора $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и направляющих векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (см. рис. 4.20).

Общий перпендикуляр L_3 находим как линию пересечения плоскостей P_1 и P_2. Обе эти плоскости содержат вектор $\vec{N}_{12}$, нормальный к прямым L_1 и L_2. Таким вектором является векторное произведение векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$

$$\vec{N}_{12} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]\,.$$

Плоскость P_1 задается векторами $\vec{N}_{12} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и $\vec{a}_1$:

$$P_1: \quad (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}_1, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]) = 0.$$

Аналогично, плоскость P_2 задается векторами $\vec{N}_{12} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и $\vec{a}_2$:

$$P_2: \quad (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{a}_2, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]) = 0.$$

Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения плоскостей P_1 и P_2 соответственно с прямыми L_2 и L_1. Точка M_1 принадлежит как плоскости P_1, так и плоскости P_2 (как точка прямой L_2). Аналогично, точка M_2 принадлежит как плоскости P_2, так и плоскости P_1 (как точка прямой L_1). Значит, прямая L_3, содержащая точки M_1 и M_2, — линия пересечения плоскостей P_1 и P_2.

Плоскости P_1 и P_2 перпендикулярны к плоскости векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. значит, их линия пересечения L_3 также перпендикулярна к этой плоскости, то есть L_3 — общий перпендикуляр к L_1 и L_2.

Таким образом, уравнения общего перпендикуляра L_3 к двум скрещивающимся прямым L_1 и L_2 получаются решением системы

$$\begin{cases} (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{a}_1, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]) = 0, \\ (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{a}_2, [\vec{a}_1, \vec{a}_2]) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Пусть $\vec{r} = \{x; y; z\}$, $\vec{r}_1 = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{r}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{a}_1 = \{l_1; m_1; n_1\}$, $\vec{a}_2 = \{l_2; m_2; n_2\}$. Тогда в координатах получаем

$$\vec{N}_{12} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = l_{12}\vec{i} + m_{12}\vec{j} + n_{12}\vec{k},$$

или

$$\vec{N}_{12} = \{l_{12}; m_{12}; n_{12}\}.$$

Обозначения несколько громоздкие, но они все время напоминают нам, что это нормаль к $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Система (28) в координатах приобретает вид

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_{12} & m_{12} & n_{12} \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

с числовыми второй и третьей строками каждого определителя. Раскрывая определители по элементам первых строк, получаем для L_3, как для всякой прямой, систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{30}$$

На самом деле от системы (30) нам нужна только точка $\vec{r}_3$ на прямой L_3, так как направляющим вектором общего перпендикуляра является вектор $\vec{N}_{12} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$. Когда найдена точка $\vec{r}_3$, векторным уравнением общего перпендикуляра L_3 к прямым L_1 и L_2 будет уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{N}_{12}t.$$

Пример к Задаче 34. Рассмотрим пример с наглядным ожидаемым результатом. Такие примеры повышают доверие к теории.

Пусть заданы прямые

$$L_1: \ \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1t,$$

$$L_2: \ \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2t,$$

где $\vec{r}_1 = \{-1; -1; 0\}$, $\vec{r}_2 = \{0; -1; 1\}$, $\vec{a}_1 = \{1; 1; 0\}$, $\vec{a}_2 = \{0; 1; 0\}$ (см. рис. 4.21). Очевиден результат

$$l_3: \ \vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{N}_{12}t,$$

где $\vec{r}_3 = \{0; 0; 0\}$, $\vec{N}_{12} = \{0; 0; 1\}$, то есть ось Oz.

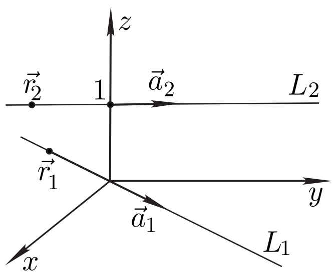

Рис. 4.21.

Получим его из общих формул. Вектор $\vec{N}_{12}$ нормали к векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ есть

$$\vec{N}_{12} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot 0 + \vec{k}\cdot 1 = \vec{k},$$

или
$$\vec{N}_{12} = \{0; 0; 1\}.$$
Система (29) для двух плоскостей, проходящих через вектор $\vec{N}_{12}$:
$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0. \end{array} \right. \iff \tag{31}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1)\cdot 1 - (y+1)\cdot 1 + (z-0)\cdot 0 = 0, \\ (x-0)\cdot 1 - (y+1)\cdot 0 + (z-1)\cdot 0 = 0. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0, \\ x = 0. \end{array} \right. \tag{32}$$
Таким образом, для общего перпендикуляра L_3 к прямым L_1 и L_2 получена система уравнений, которая дает решение $x = 0$, $y = 0$ — ожидаемая прямая L_3, ось Oz (линия пересечения координатных плоскостей $x = 0$ и $y = 0$).

На зачете такой результат вполне может сойти, но ради пунктуальности запишем систему из (32) в виде
$$\left\{ \begin{array}{l} x\cdot 1 - y\cdot 1 + z\cdot 0 = 0, \\ x\cdot 1 - y\cdot 0 + z\cdot 0 = 0, \end{array} \right. \tag{33}$$
усматривая при x и y минор
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$
допускающий в системе (33) выражение x и y через $z = t$:
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0\cdot t + 0, \\ y = 0\cdot t + 0, \\ z = 1\cdot t + 0, \end{array} \right. \tag{34}$$
или
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$
Любители векторных уравнений получили векторное уравнение $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{N}_{12}t$ оси Oz с $\vec{r}_3 = \{0; 0; 0\}$ и уже знакомым направляющим вектором $\vec{N}_{12} = \{0; 0; 1\}$. Это векторное уравнение полностью совпадает с параметрическими уравнениями (34) оси Oz.

Наконец, канонические уравнения оси Oz с помощью (34) после исключения t выглядят так:

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1}.$$

ЗАДАЧА 35. Найти расстояние между двумя скрещивающимися прямыми (как высоту параллелепипеда).
Решение. После решения предыдущей задачи 34 и отыскания общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым можно, конечно, найти точки пересечения его с данными прямыми и длину отрезка, соединяющего их. Количество вычислений на этом пути угнетает.

Короткий путь решения напоминает Задачу 25, где расстояние от точки до прямой удалось найти, не прибегая к плоскости, перпендикулярной к данной прямой. Там нас выручил модуль векторного произведения, равный площади параллелограмма, построенного на известных векторах. Пусть заданы две скрещивающиеся прямые $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{a}_1t$ и $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{a}_2t$ (уже отмечалось, что если они скрещиваются, то $\vec{a}_1\neq\vec{a}_2$ и векторы $\vec{r}_1-\vec{r}_2, \vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не компланарны, то есть $(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\ \vec{a}_1,\vec{a}_2)\neq 0$.)

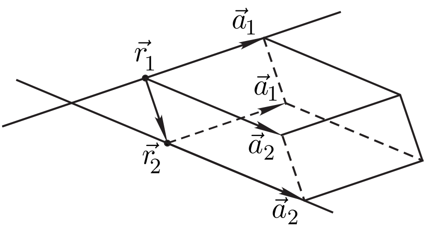

Рис. 4.22. К задаче 35

На рис. 4.22 изображен параллелепипед, построенный на известных векторах $\vec{r}_2-\vec{r}_1,\ \vec{a}_1,\vec{a}_2$. Его объем равен модулю смешанного произведения, построенного на этих векторах:

$$V=\left|(\vec{r}_1-\vec{r}_2,\ \vec{a}_1,\vec{a}_2)\right|.$$

Площадь S основания этого параллелепипеда равна модулю векторного произведения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$S=\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\right|.$$

Деля V на S, получаем высоту построенного параллелепипеда, равную расстоянию между данными скрещивающимися прямыми:

$$d=\frac{V}{S}.$$

В заключение еще раз поблагодарим векторную форму уравнений прямых, представившую нам всех участников: $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Пример к Задаче 35. Рассмотрим опять наглядный пример. Пусть заданы прямые

$$l_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$$

и

$$l_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t,$$

где $\vec{r}_1 = \{0; -1; 1\}$, $\vec{r}_2 = \{-1; -1; 0\}$, $\vec{a}_1 = \{0; 2; 0\}$, $\vec{a}_2 = \{1; 1; 0\}$.

Расстояние между L_1 и L_2, очевидно, равно 1. Находим это расстояние как высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. Вычисляем объем этого параллелепипеда:

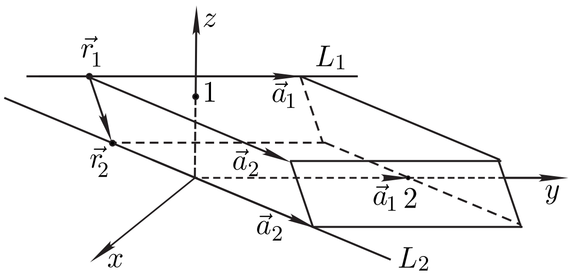

Рис. 4.23.

$$V = |(\vec{r}_2 - \vec{r}_1,\ \vec{a}_1, \vec{a}_2)| = \left| \begin{vmatrix} -1-0 & -1-(-1) & 0-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= |-1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)| = 2.$$

Площадь основания параллелепипеда — площадь параллелограмма, постоенного на векторах $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$:

$$S = |[\vec{a}_1, \vec{a}_2]| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = |\vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (-2)| = 2.$$

Искомое расстояние между прямыми L_1 и L_2 есть

$$d = \frac{V}{S} = \frac{2}{2} = 1.$$

Результат был ожидаем. Теория не подвела!