Семинар–Лекция 11

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ. ОБСУЖДЕНИЕ

§ 1. Некоторые понятия и факты теории аналитических банаховозначных функций

Пусть B_1 — банахово пространство. В частности, в качестве B_1 может выступать произвольная банахова алгебра $\mathcal{A}$ [1] или банахова алгебра ограниченных линейных операторов $L(B, B)$. Будем говорить о свойствах функций комплексного аргумента со значениями в B_1. Не оговаривая особо, все рассматриваемые функции считаем однозначными.

1. Аналитическая функция. *Функция $f(\lambda)$ называется аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, если она дифференцируема всюду в D. Функция $f(\lambda)$ называется аналитической в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, если она аналитична в некоторой окрестности этой точки.*

Как было сказано в лекции 10, аналитичность функции $f(\lambda)$ (при $\lambda \in D \subset \mathbb{C}$) со значениями в банаховой алгебре $\mathcal{A}$ равносильна следующему требованию:

$$\forall w^* \in \mathcal{A}^* \text{ числовая функция } \varphi(\lambda) \equiv \langle w^*, f(\lambda) \rangle \text{ аналитична в } D.$$

Более того, если $T(\lambda)$ — операторнозначная функция, $T(\lambda) : D \to \to L(B, B)$, то она аналитична тогда и только тогда, когда

$$\forall w^* \in B^*, \forall x \in B \text{ числовая функция } \psi(\lambda) \equiv \langle w^*, T(\lambda)x \rangle \text{ аналитична в } D.$$

Последнее также равносильно условию

$$\forall x \in B \text{ функция } \chi(\lambda) \equiv T(\lambda)x : D \to B \text{ аналитична в } D.$$

Замечание 1. Необходимость приведённых выше условий очевидна. Нетривиальным утверждением является их достаточность (которую мы здесь не доказываем).

2. Теорема Коши об обращении в ноль интеграла по замкнутому контуру: если l — замкнутый кусочно гладкий контур, ограничиваю-

[1] Здесь и далее всюду подразумевается банахова алгебра с единицей.

щий область G (возможно, многосвязную или несвязную), причём $\overline{G} \subset \subset D$ и функция f аналитична в D, то

$$\int\limits_l f(\lambda)\, d\lambda = \vartheta,$$

где ϑ — нулевой элемент пространства B_1. В дальнейшем, говоря «контур», мы всюду будем иметь в виду замкнутую кусочно гладкую кривую.

3. Формула Коши. Если функция $f(\lambda)$ аналитична в точке λ_0, то для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ верна формула

$$f^{(n)}(\lambda_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \tag{1.1}$$

где замкнутый контур l охватывает некоторую окрестность точки λ_0, целиком лежащую в области аналитичности функции $f(\lambda)$, и проходится в положительном направлении.

4. Разложение в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки. Пусть функция $f(\lambda)$ аналитична в некоторой проколотой круговой окрестности точки λ_0. Тогда в этой окрестности для неё верно представление

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n, \text{ где } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda, \quad a_n \in B_1. \tag{1.2}$$

В частности, если функция $f(\lambda)$ аналитична в точке λ_0, то в некоторой окрестности последней верно представление (ряд Тейлора)

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n, \tag{1.3}$$

где с учётом (1.2) и (1.1) имеем

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}.$$

Замечание 2. Не следует путать ряды (1.2), (1.3) с банаховозначными коэффициентами по степеням числа $\lambda - \lambda_0$, которые имеют смысл для любой банаховозначной функции, с рядом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n, \quad \alpha_n \in \mathbb{C},$$

с числовыми коэффициентами по степеням элемента банаховой алгебры. Примером последнего является, скажем, ряд Неймана.

Отметим здесь же нужные нам свойства интеграла Бохнера по кусочно гладкой кривой l конечной длины (в частности, замкнутой):

1) возможность вынести постоянный числовой множитель за знак интеграла:

$$\int_l \lambda_0 f(\lambda)\, d\lambda = \lambda_0 \int_l f(\lambda)\, d\lambda, \quad f(\lambda) : D \to B_1; \tag{1.4}$$

2) возможность вынести постоянный банаховозначный множитель за знак интеграла:

$$\int_l g(\lambda) a\, d\lambda = \left(\int_l g(\lambda)\, d\lambda \right) a, \quad a \in B_1, g : D \to \mathbb{C}, \tag{1.5}$$

а также для случая банаховой алгебры (порядок банаховозначных сомножителей менять нельзя!)

$$\int_l g(\lambda) a\, d\lambda = \left(\int_l g(\lambda)\, d\lambda \right) a, \quad a \in \mathcal{A}, g : D \to \mathcal{A},$$

и

$$\int_l a g(\lambda)\, d\lambda = a \left(\int_l g(\lambda)\, d\lambda \right), \quad a \in \mathcal{A}, g : D \to \mathcal{A};$$

3) возможность почленно интегрировать равномерно сходящийся ряд;

4) оценка

$$\left\| \int_l f(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant L(l) \sup_{\lambda \in l} \|f(\lambda)\|, \quad f(\lambda) : D \to B_1,$$

где $L(l)$ — длина контура l.

§ 2. Теорема об отображении рядов

Теорема 1. Ряд переходит в ряд. *Пусть $a \in \mathcal{A}$ и степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n \tag{2.1}$$

имеет радиус сходимости $r > \|a\|$. Тогда отображение $\mathcal{O}_a$, задаваемое интегралом Данфорда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_l \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda, \tag{2.2}$$

переводит функцию, равную сумме ряда (2.1), *в элемент*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n \in \mathcal{A}, \tag{2.3}$$

причём ряд в (2.3) *сходится.*

Замечание 3. Здесь и далее, если не оговорено особо, в интеграле Данфорда берётся произвольный кусочно гладкий контур, охватывающий спектр элемента a и проходимый в положительном направлении. Кроме того, в (2.2) контур должен лежать целиком в круге сходимости ряда (2.1). Эти условия не противоречат друг другу, как мы увидим в доказательстве.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма 1. Степень переходит в степень. *При всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *верно равенство*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda = a^n.$$

Доказательство.

1. Заменим прежде контур l на контур $l' = \{\lambda \mid \lambda = (\|a\| + \varepsilon)e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi],\ \varepsilon > 0\}$, также проходимый в положительном направлении. Пусть (для простоты рассуждений) ε выбрано столь большим, что контур l целиком лежит в области, охватываемой контуром l'. Тогда между этими контурами заключена область, свободная от точек спектра элемента a, откуда в силу теоремы Коши следует равенство интегралов по рассматриваемым контурам.

2. Но поскольку на контуре l' имеем

$$|\lambda| = \|a\| + \varepsilon, \tag{2.4}$$

можно записать резольвенту в виде ряда Неймана и получить представление

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l'} \lambda^n R(\lambda, a)\, d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l'} \lambda^n \cdot \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l'} \lambda^{n-(k+1)} d\lambda = a^n.$$

Здесь мы сначала заметили, что в силу (2.4) ряд в подынтегральном выражении сходится равномерно по λ на контуре l', а поэтому его можно интегрировать почленно; затем в каждом слагаемом вынесли из-под знака интеграла постоянный множитель a^k; далее воспользовались известной формулой теории функций комплексной переменной

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c_\delta}\lambda^l\,d\lambda=\begin{cases}1, & l=-1,\\ 0, & l\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\},\end{cases}$$

где c_δ — окружность произвольного радиуса $\delta>0$ с центром в начале координат, проходимая в положительном направлении.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы.

1. Аналогичной заменой контура можем перейти к контуру l'', представляющему собой окружность с центром в начале координат и радиусом $r'=\frac{r+\|a\|}{2}$. Тогда, очевидно, $\|a\|<r'<r$. Это гарантирует:
1) что контур целиком охватывает спектр элемента a,
2) равномерную по λ сходимость ряда (2.1) на контуре l'', а следовательно, и возможность почленного интегрирования в (2.2).

2. Такая замена контура возможна, потому что контур l уже охватывает весь спектр, а следовательно, область, ограниченная контурами l и l'', свободна от точек спектра. Но почленное интегрирование приводит нас (благодаря лемме) к ряду (2.3). Его сходимость уже гарантирована возможностью почленного интегрирования.

Теорема доказана.

§ 3. Обратимость элементов банаховой алгебры

Пусть a — некоторый элемент банаховой алгебры $\mathcal{A}$, e — её единица.

Определение 1. *Будем называть элемент $b\in\mathcal{A}$ левым обратным к элементу a, если $ba=e$.*

Определение 2. *Будем называть элемент $c\in\mathcal{A}$ правым обратным к элементу a, если $ac=e$.*

Определение 3. *Будем называть элемент $d\in\mathcal{A}$ обратным к элементу a, если $ad=da=e$. Элемент a, имеющий обратный, называется обратимым.*

«Сокращения» вида

$$xa=ya\Rightarrow x=y,\quad ax=ay\Rightarrow x=y$$

суть не что иное, как домножения на соответствующий обратный элемент (с учётом ассоциативности умножения): в первом случае — на правый, во втором — на левый обратный. Хотелось бы предостеречь от сокращения на элемент, не имеющий нужного обратного!

Легко видеть, что если существуют левый и правый обратный элементы к a, то они равны другу другу:

$$b=be=b(ac)=(ba)c=ec=c. \tag{3.1}$$

Тем самым, существование левого и правого элементов гарантирует обратимость элемента a. Более того, из (3.1) сразу следует, что элемент, обратный к данному элементу a, единствен (если вообще существует). Действительно, если d_1 и d_2 суть два обратных к a элемента, то, в частности, d_1 является левым обратным, а d_2 — правым обратным. Но тогда они равны. (Отсюда же следует корректность определения резольвенты.)

Элемент, обратный к a, обозначается a^{-1}. Обратимый элемент допускает сокращение с любой стороны.

§ 4. Спектральное разложение, соответствующее замкнутым компонентам спектра

Пусть спектр оператора $A \in L(B, B)$ можно разбить на непересекающиеся замкнутые компоненты σ_j:

$$\sigma(A) = \cup_{j=1}^{n} \sigma_j, \quad \rho\{\sigma_j, \sigma_k\} > 0 \text{ при } j \neq k.$$

Пусть $O(\sigma_j)$ — это окрестности спектральных компонент, причём

$$O(\sigma_j) \cap O(\sigma_k) = \varnothing, \quad j \neq k.$$

Выберем D так, чтобы $\sigma_j \subset D_j \subset O(\sigma_j)$, и рассмотрим интегралы Данфорда

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, A)\, d\lambda. \tag{4.1}$$

Тогда каждый из операторов (4.1) является проектором, т. е. $P_j^2 = P_j$, причём банахово пространство B разлагается в прямую сумму:

$$B = \oplus \sum_{j=1}^{n} P_j B, \quad P_j P_k = \Theta, \quad j \neq k, \quad P_j^2 = P_j,$$

где $\Theta \in L(B, B)$ — нулевой оператор.

Докажем эти утверждения. Введём функцию $\chi_j(\lambda)$, равную единице в окрестности $O(\sigma_j)$ компоненты σ_j и нулю при остальных λ. Заметим, что такая функция принадлежит алгебре функций, аналитичных в окрестности спектра. Далее, $\chi_j^2(\lambda) = \chi_j(\lambda)$. Тогда для интеграла Данфорда по контуру ∂D, охватывающему весь спектр и проходимому в положительном направлении, имеем с учётом того факта, что $\mathcal{O}_A$ есть гомоморфизм:

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} R(\lambda, a)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \chi_j(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda,$$

$$P_j^2 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \chi_j^2(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \chi_j(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda = P_j.$$

Далее,

$$P_j P_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D_j} \chi_j(\lambda)\chi_k(\lambda)R(\lambda, a)\, d\lambda = \Theta$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \chi_j(\lambda) = 1$$

в некоторой (несвязной!) окрестности спектра (конечно, не на всей комплексной плоскости), поэтому $\sum_{j=1}^{n} P_j = E$.

§ 5. Вычисление операторных норм. Примеры

ПРИМЕР 1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор, задаваемой этой матрицей, действует в пространстве столбцов высоты 2:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

Норму в этом пространстве можно ввести различными способами. Мы рассмотрим для примера l^{∞}-, l^1- и l^2-нормы. Будем рассматривать точную верхнюю грань правой части на единичной сфере.

1) Имеем

$$\sup_{\max(|x|,|y|)=1} \max(|x + 2y|, |2x + y|) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\max(|x|,|y|)=1} \max(|x| + 2|y|, 2|x| + |y|) = 3.$$

Очевидно, что значение 3 достигается, например, на $(x; y)^T = (1; 1)^T$.

2) Имеем

$$\sup_{|x|+|y|=1} (|x + 2y| + |2x + y|) \leqslant \sup_{\max(|x|+|y|)=1} (3|x| + 3|y|) = 3.$$

Очевидно, что значение 3 достигается, например, на $(x; y)^T = (1; 0)^T$.

3) Имеем

$$\sup_{\sqrt{|x|^2+|y|^2}=1} (\sqrt{|x + 2y|^2 + |2x + y|^2}\,) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\sqrt{|x|^2+|y|^2}=1} (\sqrt{5|x|^2 + 5|y|^2 + 8|xy|}\,) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\sqrt{|x|^2+|y|^2}=1} (\sqrt{9(|x|^2 + 9|y|^2)}\,) = 3.$$

(Оценка следует из неравенства Коши, являющегося частным случаем неравенства Юнга при $p = q = 1/2$.) Очевидно, что значение 3 достигается, например, на $(x; y)^T = (1/\sqrt{2}\,; 1/\sqrt{2}\,)^T$. Однако для случая l^2 можно было искать не норму, а собственные значения. Как известно (см. лекции по интегральным уравнениям), самосопряжённый оператор обладает собственным значением, равным по модулю его норме. Осталось лишь выбрать наибольшее собственное значение. Оно равно 3. С другой стороны, для пространств l^∞, l^1, не являющихся евклидовыми, так рассуждать уже нельзя.

Важное замечание. Как мы и ожидали согласно общей теории, спектр данного оператора $\sigma(A) = \{-1; 3\}$ лежит внутри круга $\{\lambda \in \in C \mid |\lambda| \leqslant \|A\| = 3\}$. В то же время, на линейном пространстве операторов, заданных 2×2-матрицами, можно было бы задать норму

$$\left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\| = \max(|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|).$$

Однако в нашем случае такая норма была бы равна 2, а круг радиуса 2 уже не содержит всего спектра. Дело в том, что требования на норму элемента, накладываемые определением банаховой алгебры, более сильные, чем в случае линейного пространства (какое требование добавляется?). Поэтому не всякая норма, которую можно ввести на банаховой алгебре, рассматриваемой как банахово пространство, является нормой на банаховой алгебре. С другой стороны, операторная норма автоматически удовлетворяет всем условиям нормы на банаховой алгебре (почему?).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичными рассуждениями нетрудно установить, что нормы этого оператора в l^∞ и l^1 равны 2. На каких векторах это значение достигается?

§ 6. Функции от оператора. Примеры

ПРИМЕР 3. Пусть, как и в предыдущем примере,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$R(\lambda, A) = (\lambda E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - 1} & \frac{1}{(\lambda-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda - 1} \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Отметим, что:
1) резольвента оператора в конечномерном пространстве в качестве особых точек может иметь лишь полюсы (в точках спектра, т. е. — для оператора в конечномерном пространстве — в собственных значениях), причём максимальный порядок полюса не превосходит размерность пространства (может и не достигать её);
2) максимальное собственное значение не превосходит норму оператора, но может её и не достигать (в случае неэрмитовой матрицы).

В силу (6.2) ясно, что интеграл Данфорда, соответствующий данной матрице A, отображает всякую функцию, аналитичную в окрестности точки $\lambda_0 = 1$, в оператор (матрицу) по формуле

$$\mathcal{O}_A(f) \equiv f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_c f(\lambda)\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-1} & \frac{1}{(\lambda-1)^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-1}\end{pmatrix} d\lambda = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) \\ 0 & f(1)\end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где при вычислении интеграла по контуру c, обходящему точку $\lambda_0 = 1$ в положительном направлении, мы воспользовались формулой Коши (1.1) (покомпонентно для числовых функций) при $n = 0; 1$.

Подсчитаем теперь $f(A)$ в конкретном случае $f(\lambda) = e^{\lambda}$. Очевидно, эта функция, являющаяся целой, заведомо удовлетворяет условию аналитичности в окрестности спектра. Имеем в силу (6.3)

$$e^A = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e\end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Этот же результат можно получить и другим способом, а именно, подставив A в ряд для экспоненты. (См. теорему «ряд переходит в ряд».) Доказав предварительно по индукции (это элементарно), что

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

имеем

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1\end{pmatrix}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0\end{pmatrix}}{n!} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}{(n-1)!} =$$

$$= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e\end{pmatrix}.$$

Ещё на примере этой же матрицы поучительно заметить, что спектральный радиус, который мы определили в лекции 11 как максимум модуля точек спектра, может быть вычислен по формуле $r(A) =$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$ (как и обещает общая теория; нередко эту формулу и рассматривают как определение спектрального радиуса). В данном случае спектр состоит из единственного числа $\lambda_0 = 1$, а спектральный радиус в нормах пространств l^∞ и l^1 можно вычислить так:

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\| \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

ПРИМЕР 4. Вычислим

$$\sin \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Имеем, действуя аналогично предыдущему примеру,

$$\sin \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda-\pi} & \frac{\pi}{(\lambda-\pi)^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda-\pi} \end{pmatrix} \sin\lambda \, d\lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\pi & \pi\sin'\pi \\ 0 & \sin\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве иллюстрации небезынтересно провести численный расчёт, например на MathCAD'e.

$$\mathrm{A} := \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad \sum_{\mathrm{n}=0}^{17} \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{(2\cdot\mathrm{n}+1)!}\cdot \mathrm{A}^{2\cdot\mathrm{n}+1} = \begin{pmatrix} 0 & -3.1415927 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Численное значение синуса матрицы, полученное с помощью MathCAD'a

ПРИМЕР 5. Рассмотрим интегральный оператор Вольтерра с непрерывным по совокупности переменных ядром $K(x,s)$ в пространстве $C[0;l]$:

$$(Ay)(x) = \int\limits_0^x K(x,s)y(s)\,ds.$$

По индукции нетрудно доказать (см. лекции по интегральным уравнениям), что при всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;l]$ верна оценка

$$|(A^n)y(x)| \leqslant M\frac{x^n}{n!},$$

где $M = \max_{0\leqslant s\leqslant x\leqslant l} |K(x,s)|$, откуда $\|A^n\| \leqslant M^n \frac{l^n}{n!}$ и, с учётом $\sqrt[n]{n!} \to \to \infty$, имеем $r(A) = 0$. В силу непустоты спектра произвольного элемента банаховой алгебры отсюда можно сделать вывод, что $\sigma(A) = \{0\}$.

Заметим, что при этом $\lambda = 0$ не может быть собственным значением. В самом деле, в противном случае из тождества

$$\int_0^x K(x,s)y(s)\,ds = 0 \cdot y(x)$$

дифференцированием по x получили бы, что $K(x,x)y(x) \equiv 0$, что, по крайней мере в случае $K(x,s) \neq 0$ нигде на диагонали квадрата $[0;l] \times \times [0;l]$, означало бы: $y(x) \equiv 0$, т. е. не является собственным вектором. С другой стороны, очевидно, что в область значений оператора A входят лишь те функции, которые обращаются в нуль в точке $x = = 0$ (и при этом непрерывно дифференцируемые!). Поскольку $C[0;l]$ такими функциями не исчерпывается, для любого ограниченного линейного оператора B имеем $R(AB) \subsetneq C[0;l]$. Значит, оператор A не может иметь правого обратного, а следовательно, и обычного обратного (см. § 3). Таким образом, в случае бесконечномерного пространства спектр может состоять не только из собственных значений или даже не содержать ни одного собственного значения (но, как следует из общей теории, не может быть пустым). Развитие данной темы мы увидим в следующих примерах, а также в задачах.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим в пространстве $C[0;10]$ оператор умножения на независимую переменную:

$$(Ax)(t) = tx(t).$$

Очевидно, что оператор $(\lambda E - A)^{-1}$, если он существует, может задаваться лишь выражением $(\lambda E - A)^{-1}y = \frac{y(t)}{\lambda - t}$. Ясно, что принадлежность $(\lambda E - A)^{-1}y \in C[0;10]$ для всех $y(t) \in C[0;10]$ можно гарантировать при всех $t \notin [0;10]$ и только при них. Таким образом, $\sigma(A) = = [0;10]$. Это вполне согласуется со значением спектрального радиуса:

$$\|A^n\|_{C[0;10]} = \sup_{\|x(t)\|_{C[0;10]}=1} \sup_{t\in[0;10]} \|t^n x(t)\| = 10^n, \quad r(A) = 10.$$

(Значение нормы, равное 10, достигается на $x(t) = 1$.) Однако, как и в предыдущем примере, оператор A не имеет собственных значений! В самом деле, если предположить, что для некоторого $\lambda_0 \in \sigma(A) = [0;10]$ и некоторой функции $x(t) \in C[0;10]$ выполнено тождество

$$\forall t \in [0;10] \quad tx(t) = \lambda_0 x(t),$$

то приходим к условию $x(t) = 0$ при $t \neq \lambda_0$, а в силу непрерывности $x(t)$ имеем $x(t) \equiv 0$. Следовательно, λ_0 не является собственным значением.

ПРИМЕР 7.. (Внимание! Рассуждение содержит ошибку. Её поиск составит одну из задач.) Рассмотрим в пространстве l^2 последовательностей оператор правого сдвига:

$$A_{\to}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots). \tag{6.5}$$

Прежде чем обсуждать его резольвенту и спектр, заметим, что оператор $A_{\rightarrow}$ имеет левый обратный, но не имеет правого обратного. В самом деле, из (6.5) следует, что левый обратный с необходимостью имеет вид (оператор левого сдвига)

$$B_{\leftarrow}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, y_3, y_4, \ldots). \tag{6.6}$$

Если бы существовал правый обратный, то он в силу общей теории (см. выше) совпадал бы с $B_{\leftarrow}$. Но последний имеет ненулевое ядро $\ker B_{\leftarrow} = \{(x_1, 0, 0, \ldots)\}$. Тем самым, ненулевое ядро с необходимостью имеет и оператор $A_{\rightarrow}B_{\leftarrow}$. Поэтому $A_{\rightarrow}B_{\leftarrow} \neq E$ и $B_{\leftarrow}$ не является правым обратным к $A_{\rightarrow}$. Таким образом, $A_{\rightarrow}$ не имеет правого обратного (отсюда, в частности, следует, что $0 \in \sigma(A_{\rightarrow})$).

Аналогично тому, как это было сделано в примере 4, нетрудно получить формальное выражение для резольвенты оператора $A_{\rightarrow}$. Для этого запишем вначале:

$$(\lambda E - A_{\rightarrow})(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\lambda x_1, \lambda x_2 - x_1, \lambda x_3 - x_2, \ldots). \tag{6.7}$$

Решая последовательно каждое уравнение бесконечной системы

$$\begin{cases} \lambda x_1 = y_1, \\ \lambda x_2 - x_1 = y_2, \\ \lambda x_3 - x_2 = y_3, \\ \ldots, \end{cases} \tag{6.8}$$

находим выражение для левого обратного к $(\lambda E - A_{\rightarrow})$:

$$C(y_1, y_2, y_3, \ldots) \equiv$$

$$\equiv (\lambda E - A_{\rightarrow})^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = \left(\frac{y_1}{\lambda}, \frac{y_2 + \frac{y_1}{\lambda}}{\lambda}, \frac{y_3 + \frac{y_2 + \frac{y_1}{\lambda}}{\lambda}}{\lambda}, \ldots \right). \tag{6.9}$$

Заметим, что система (6.8) разрешима при любой правой части (в случае $\lambda \neq 0$), а ядро оператора (6.9) тривиально. Поэтому мы не встречаемся ни с проблемой из предыдущего примера, когда применение резольвентного оператора могло привести к разрывной функции, ни с проблемой вырожденности левого обратного. Наконец, подставив правую часть (6.9) в (6.7), мы получим

$$(\lambda E - A_{\rightarrow})C(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

т. е. оператор C оказался не только левым, но и правым обратным к $\lambda E - A_{\rightarrow}$, поэтому последний обратим при всех $\lambda \neq 0$. Итак, спектр оператора $A_{\rightarrow} : l^2 \rightarrow l^2$ состоит из одной точки $\lambda = 0$.

Однако посмотрим на ситуацию с другой стороны, а именно, попытаемся вычислить $r(A_{\rightarrow})$. Легко сообразить, что при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\|A_{\rightarrow}{}^n\|=1$, откуда $r(A_{\rightarrow}) = 1$. Таким образом, помимо точки $\lambda = 0$ (принадлежность которой спектру оператора $A_{\rightarrow}$ установлена выше), $\sigma(A_{\to})$ содержит ещё некоторые точки. В чём же дело? Где в рассуждении мы допустили ошибку?

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что для операторов $Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds$, $Bx(t) = tx(t)$, действующих в $C[0;1]$, по крайней мере одно из неравенств $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$, $\|BA\| \leqslant \|B\|\|A\|$ выполняется как строгое неравенство.

Задача 2. Найти нормы в пространствах l^∞, l^1, вычислить значение $f(A)$, $\sin A$, $\cos A$, e^A для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3*. Обратим ли оператор $\sin(\pi A_{\to})$?

Задача 4. Доказать, что для любого элемента a банаховой алгебры верно соотношение

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a.$$

Задача 5*. Пусть матрица A подобна диагональной, т. е. существует такая обратимая матрица U, что матрица UAU^{-1} диагональна:

$$UAU^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Получить в явном виде матрицу $f(A)$, где $f(\lambda)$ — функция, аналитическая в окрестности спектра матрицы A.

Задача 6. Для каких элементов a банаховой алгебры определена функция $\operatorname{tg} a$?

Задача 7*. Вычислить операторную норму матрицы из примера 2 § 5 в пространстве l^2.

Задача 8. 1) Вычислить операторную норму произвольной квадратной матрицы в пространстве l^∞.
2) Получить оценки для её норм в пространствах l^1 и l^2.

Задача 9. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Описать геометрический смысл данной матрицы. Вычислить A^2, A^4, A^5 и объяснить полученный результат. Вычислить A^n при произвольном $n \in \mathbb{N}$.
2) Найти её спектр и объяснить связь полученного результата с п. 1) этой задачи.
3) Вычислить $f(A)$, если

$$f(\lambda) = 1; \lambda; \lambda^4; \lambda^5; \sin\lambda; e^\lambda.$$

Задача 10*. Ответить на «вопрос на засыпку» в последнем примере.

Задача 11. Доказать, что всякий линейный оператор в конечномерном пространстве (при любом способе введения в последнем нормы) ограничен.

Задача 12. Оператор A называется нильпотентным, если при некотором $n \in \mathbb{N}$ верно $A^n = \Theta$. Оператор A называется квазинильпотентным, если $r(A) = 0$.
1) Доказать, что всякий нильпотентный оператор является квазинильпотентным.
2*) Привести пример квазинильпотентного (возможно, нильпотентного) оператора с нормой $\|A\| = 10$.
3) Доказать, что формула ряда Неймана

$$(E - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

верна для всякого квазинильпотентного оператора (а не только для операторов с нормой меньше 1).
4*) При каких более слабых условиях она ещё верна?

Задача 13. Верно ли, что спектральный радиус:
1) задаёт норму, удовлетворяющую всем условиям на норму в банаховой алгебре?
2) задаёт операторную норму в $L(B, B)$, если только норму в B выбрать подходящим образом?
Может ли для данного оператора спектральный радиус быть больше конкретной операторной нормы? меньше её?

Задача 14. Рассмотрим оператор левого сдвига $B_{\leftarrow}$ (см. (6.6)).
1) Существует ли у него левый обратный?
2) Указать какой-либо правый обратный к $B_{\leftarrow}$.
3*) Показать, что правый обратный к $B_{\leftarrow}$ не единствен. (Предостережение.) Не забудьте, что оператор должен быть линейным!
4) Найти спектр оператора $B_{\leftarrow}$.

Задача 15*. 1) Пусть $A \in L(B, B)$, $C \in L(B, B)$ — его правый обратный. Доказать, что если $C(B) = B$, то $C = A^{-1}$.
2) Пусть $A \in L(B, B)$, $D \in L(B, B)$ — его левый обратный. Доказать, что если $\ker D = \{\vartheta\}$, то $D = A^{-1}$.

Задача 16*. Показать, что спектр оператора правого сдвига состоит из всех точек круга $|\lambda| \leqslant 1$.

Задача 17*. Опишем классификацию спектра операторов в банаховом пространстве B. Говорят, что число λ_0 принадлежит:
1) точечному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, если λ_0 — собственное значение оператора A, т. е. если существует такое $x \in B$, $x \neq \vartheta$, что $Ax = \lambda_0 x$;
2) непрерывному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, если резольвента $R(\lambda_0, A)$ не существует (как ограниченный оператор, определённый на всём B) и при этом замыкание образа оператора $(\lambda_0 E - A)$ совпадает с B;
3) остаточному спектру $\sigma_p(A)$ оператора A, если резольвента $R(\lambda_0, A)$

не существует (как ограниченный оператор, определённый на всём B) и при этом замыкание образа оператора $(\lambda_0 E - A)$ не совпадает с B. Иногда говорят, что в случаях 2), 3) резольвента существует, но, конечно, уже не как элемент $L(B, B)$: она определена (как?) не на всём пространстве (почему?) и неограничена (почему?).

Провести классификацию спектра для следующих примеров, рассмотренных ранее:
1) оператор в конечномерном пространстве;
2) операторы правого и левого сдвига в l^2;
3) оператор домножения на независимую переменную в $C[0; 10]$ и $L^2[0; 10]$;
4) оператор Вольтерра $(Ay)(x) = \int_0^x K(x, s)y(s)\, ds$ с непрерывным по совокупности переменных ядром, действующий в $C[0; l]$, при условии $K(x, x) \neq 0$.

Задача 18. Показать, что условие равномерной сходимости функционального ряда (или функциональной последовательности) в теореме о почленном переходе к пределу под знаком интеграла существенно.