Лекция 8

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ПРОДОЛЖЕНИЕ

§ 1. Открытые отображения

Пусть $(\mathbb{B}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{B}_2, \|\cdot\|_2)$ — банаховы пространства.

Определение 1. *Отображение* $T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *называется открытым, если образ всякого открытого множества в* $\mathbb{B}_1$ *открыт в* $\mathbb{B}_2$.

ПРИМЕР 1. Примером не открытого отображения является следующее:

$$T : \quad \forall x \in \mathbb{B}_1 \quad Tx = \vartheta.$$

В самом деле, ведь $\{\vartheta\}$ — замкнутое множество.

Образом отображения T называется множество

$$\operatorname{Im} T \overset{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{B}_2 : \ y = T(x), \ \forall \, x \in \mathbb{B}_1\}.$$

Справедлива следующая теорема об открытом отображении:

Теорема 1. *Пусть* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ *и* $\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$, *тогда* T *— открытое отображение.*

Доказательство.

Доказательству теоремы предпошлём две леммы.

Символом $b_i(x_0, r)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x_0 и радиуса $r > 0$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}_i$ при $i = \overline{1, 2}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы об открытом отображении. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon))}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2$, то

$$\mathbb{B}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(b_1(\vartheta, n))}.$$

В силу теоремы Бэра о категориях (теорема 7 лекции 4) найдётся такое $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{B}_1$ и $r > 0$, что

$$b_2(x_0, r) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, n_0))}.$$

Заметим, что множество
$$\overline{T(b_1(\vartheta, n_0))}$$
симметрично относительно нуля и выпукло, что следует из абсолютной выпуклости $b_1(\vartheta, n_0)$ и линейности оператора T.

Шаг 2. Имеет место вложение при $\alpha \in [0, 1]$
$$M \stackrel{\text{def}}{=} \{y : \; y = \alpha z + (1-\alpha)(-z) = (2\alpha - 1)z, \; z \in b_2(x_0, r)\} \subset \\ \subset \overline{T(b_1(\vartheta, n_0))},$$
поскольку $b_2(x_0, r) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, n_0))}$, а множество $\overline{T(b_1(\vartheta, n_0))}$ уравновешенно и выпукло.

Но M — открытое множество, содержащее ϑ, поскольку при $\alpha = 1/2$ имеем $\vartheta \in M$. Следовательно, найдётся такая окрестности нуля, что
$$b_2(\vartheta, \varepsilon) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, n_0))},$$
но тогда и
$$\lambda b_2(\vartheta, \varepsilon) = b_2(\vartheta, \lambda\varepsilon) \subset \lambda\overline{T(b_1(\vartheta, n_0))} = \overline{T(b_1(\vartheta, \lambda n_0))}. \tag{1.1}$$

Шаг 3. Пусть
$$\lambda = \frac{\varepsilon}{n_0}, \quad \delta = \frac{\varepsilon^2}{n_0} \Rightarrow \lambda\varepsilon = \delta, \quad \lambda n_0 = \varepsilon,$$
тогда из (1.1) получим
$$b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon)) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon))}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Легко видеть по ходу доказательства этой леммы, что n_0 не зависит от ε, а зависит только от пространств $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ и отображения T.

Докажем теперь вторую вспомогательную лемму

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия теоремы об открытом отображении, тогда для любого $\varepsilon > 0$ верно вложение*
$$b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon)) \subset T(b_1(\vartheta, 3\varepsilon)),$$
где ε и $\delta(\varepsilon)$ связаны соотношением предыдущей леммы.

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и при всех $n \geqslant 2$
$$\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2^{n-1}} \Rightarrow \delta(\varepsilon_n) = \frac{\varepsilon_n^2}{n_0} = \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{n_0}\frac{1}{2^{2n-2}} \leqslant \frac{\varepsilon_{n-1}^2}{n_0}\frac{1}{2} = \frac{\delta(\varepsilon_{n-1})}{2},$$
где для каждого ε_n величина $\delta(\varepsilon_n)$ — соответствующая величина в смысле предыдущей леммы и, напомним, n_0 не зависит от ε.

Шаг 2. Итак,
$$b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_1)) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon_1))}.$$

Пусть
$$y \in b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_1)) \Rightarrow y \in \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon_1))}$$
— произвольное фиксированное. Докажем, что найдётся $x \in b_1(\vartheta, 3\varepsilon)$ такое, что
$$y = Tx.$$

□ Действительно, рассмотрим шар
$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2).$$
Поскольку
$$y \in \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon_1))},$$
то в силу определения замыкания множества
$$b_2(y, \delta(\varepsilon_2)/2) \bigcap T(b_1(\vartheta, \varepsilon_1)) \neq \varnothing.$$
Следовательно, найдётся такое $x_1 \in b_1(\vartheta, \varepsilon_1)$, что
$$\|y - Tx_1\|_2 < \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_2).$$
Следовательно,
$$z \stackrel{\text{def}}{=} y - Tx_1 \in b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_2)/2) \subset b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_2)) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon_2))}.$$
Значит, в силу определения замыкания множества
$$b_2(z, \delta(\varepsilon_3)/2) \bigcap T(b_1(\vartheta, \varepsilon_2)) \neq \varnothing.$$
Следовательно, найдётся такое $x_2 \in b_1(\vartheta, \varepsilon_2)$, что
$$z - Tx_2 = y - Tx_1 - Tx_2 \in b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_3)/2) \subset b_2(\vartheta, \delta(\varepsilon_3)) \subset \overline{T(b_1(\vartheta, \varepsilon_3))}.$$
И так далее по индукции.

Шаг 3. Итак, в итоге получим
$$\|x_n\|_1 \leqslant \varepsilon_n, \quad \|y - T(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon_{n+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$
Пусть
$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$
тогда
$$y = T(x), \quad \|x\|_1 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) < 3\varepsilon. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Пусть $A \subset \mathbb{B}_1$ — открыто.
$$x_0 \in A, \quad y_0 = T(x_0).$$

Поскольку A открыто, то найдётся такой шар с центром в нуле

$$b_1(\vartheta, \varepsilon) \subset \mathbb{B}_1,$$

что

$$x_0 + b_1(\vartheta, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} b_1(x_0, \varepsilon) \subset A.$$

По предыдущей лемме найдётся такое $\widetilde{\delta}(\varepsilon) := \delta(\varepsilon/3) > 0$, что

$$b_2(\vartheta, \widetilde{\delta}(\varepsilon)) \subset T(b_1(\vartheta, \varepsilon)).$$

Но тогда

$$b_2(y_0, \widetilde{\delta}(\varepsilon)) \stackrel{\text{def}}{=} y_0 + b_2(\vartheta, \widetilde{\delta}(\varepsilon)) \subset \\ \subset Tx_0 + T(b_1(\vartheta, \varepsilon)) = T(x_0 + b_1(\vartheta, \varepsilon)) \subset T(A).$$

Стало быть, множество $T(A)$ вместе с каждой своей точкой содержит некоторый шар. Следовательно, это множество открыто.

Теорема доказана.

§ 2. Обратное отображение

Необходимое и достаточное условие существования обратного отображения — это

$$\operatorname{Im} T = \mathbb{B}_2, \quad \operatorname{Ker} T = \{\vartheta\}. \tag{2.1}$$

Теорема 2. *Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и выполнены указанные условия. Тогда обратное отображение $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_1)$.*

Доказательство.

Прежде всего заметим, что условия (2.1) гарантируют существования (некоторого) обратного отображения. Нетрудно проверить, что оно является линейным (сделайте это самостоятельно!). Осталось проверить его непрерывность.

Пусть A — произвольное открытое множество в $\mathbb{B}_1$. Тогда в силу теоремы об открытом отображении

$$T(A) \quad \text{открыто в } \mathbb{B}_2,$$

или

$$(T^{-1})^{-1}(A) = T(A) \quad \text{открыто в } \mathbb{B}_2.$$

Таким образом, при отображении $T^{-1} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_1$ прообраз $T(A)$ всякого открытого множества $A \in \mathbb{B}_1$ открыт в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, отображение T^{-1} непрерывно.

Теорема доказана.

§ 3. Замкнутый график

Пусть $\mathbb{B}_i$, $i = 1, 2$, — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_i$ соответственно и дано линейное отображение

$$T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2. \tag{3.1}$$

Полезно ввести понятие графика отображения (3.1). Для этого введём в рассмотрение линейное пространство

$$\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{B}_1, x_2 \in \mathbb{B}_2\}. \tag{3.2}$$

На этом пространстве можно ввести норму

$$\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2. \tag{3.3}$$

При этом пространство (3.2) станет нормированным (проверьте, что это действительно норма!) и, более того, банаховым (тоже проверьте!).

Определение 2. *Графиком линейного отображения* (3.1) *называется множество*

$$Gr(T) := \{(x, Tx) :\ x \in \mathbb{B}_1\} \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2.$$

Утверждение 1. *Если отображение T непрерывно, то $Gr(T)$ есть замкнутое подмножество в $\mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$.*

Доказательство.

Пусть $\{x_n\} \subset \mathbb{B}_1$ и $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ в $Gr(T)$ при $n \to +\infty$. Это означает:

$$\|x_n - x\|_1 + \|Tx_n - y\|_2 \to 0,$$

откуда

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \tag{3.4}$$

и

$$\|Tx_n - y\|_2 \to 0. \tag{3.5}$$

Но оператор T непрерывен, поэтому из (3.4) следует, что

$$\|Tx_n - Tx\|_2 \to 0. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) в силу отделимости банахова пространства получаем: $y = Tx$. Следовательно, $(x, y) \in Gr(T)$ и $Gr(T)$ замкнуто.

Утверждение доказано.

Теорема 3. *Если график линейного отображения*

$$T : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

замкнут, то T — непрерывное отображение.

Доказательство.

Если подмножество

$$Gr(T) \subset \mathbb{B}_1 \oplus \mathbb{B}_2$$

замкнуто, то оно есть банахово пространство относительно введённой ранее нормы (3.3). Отображения

$$P_1 : (x, Tx) \mapsto x, \quad P_2 : (x, Tx) \mapsto Tx$$

есть линейные непрерывные отображения банахова пространства $Gr(T)$ на банаховы пространства $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$, соответственно, причём

$$\operatorname{Im} P_1 = \mathbb{B}_1, \quad \operatorname{Ker} P_1 = (\vartheta_1, \vartheta_2).$$

□ Действительно, пусть $y = (x, Tx)$.

$$P_1 y = x = \vartheta_1 \Rightarrow Tx = T\vartheta_1 = \vartheta_2 \Rightarrow y = (\vartheta_1, \vartheta_2). \quad \boxtimes$$

В силу теоремы Банаха об обратном отображении отображение

$$P_1^{-1} : \mathbb{B}_1 \to Gr(T) : x \mapsto (x, Tx)$$

непрерывно. Следовательно, отображение

$$T = P_2 P_1^{-1} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 : x \mapsto (x, Tx) \mapsto Tx$$

как композиция непрерывных отображений P_1^{-1} и проекции P_2 является непрерывным отображением.

Теорема доказана.

§ 4. Свойства слабой и $*$-слабой сходимостей

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства слабой и $*$-слабой сходимостей.

Теорема 4. *Справедливы следующие два утверждения*:

(i) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{u_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}$ *ограничена, причём*

$$\text{если} \quad u_n \rightharpoonup u_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|u_\infty\| \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|u_n\|;$$

(ii) *Всякая $*$-слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n\}$ *из банахова пространства* $\mathbb{B}^*$ *ограничена, причём*

$$\text{если} \quad f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \text{то} \quad \|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_*.$$

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что случай (i) полностью сводится к случаю (ii). В самом деле, рассмотрим (см. § 7 лекции 7) оператор вложения

$$J : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**},$$

ставящий в соответствие каждому элементу $u \in \mathbb{B}$ функционал $Ju \in J\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^{**}$ по закону

$$\langle Ju, f \rangle_* \overset{\text{def}}{=} \langle f, u \rangle \quad \forall f \in \mathbb{B}^*.$$

Как мы знаем, $\|Ju\|_{**} = \|u\|$. Тогда вместо последовательности $u_n \rightharpoonup u_\infty$ в $\mathbb{B}$ можно рассмотреть последовательность $\{Ju_n\} \subset \mathbb{B}^{**}$, которая, очевидно, $*$-слабо сходится к Ju_∞.

Шаг 2. Докажем п. (ii). Очевидно, последовательность $\{f_n\} \subset \subset \mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — поле, над которым рассматривается пространство $\mathbb{B}$) удовлетворяет условиям теоремы 10 лекции 7 (первая теорема Банаха—Штейнгауза). В самом деле, если для любого $u \in \mathbb{B}$ последовательность $\langle f_n, u\rangle$ сходится, то

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, u\rangle| \leqslant c(u) < +\infty.$$

Тогда из теоремы 10 лекции 7 получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_* < +\infty.$$

Шаг 3. Итак, доказана ограниченность норм $\|f_n\|$ в совокупности. Однако требуется дать конкретную оценку:

$$\|f_\infty\|_* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_*. \tag{4.1}$$

С этой целью вспомним, что

$$\|f\|_* = \sup_{u\in\mathbb{B},\ \|u\|=1} |\langle f, u\rangle|, \tag{4.2}$$

а поэтому для каждого $u \in \mathbb{B}$ с $\|u\| = 1$ верно

$$\|f_n\|_* \geqslant |\langle f_n, u\rangle|.$$

Перейдя в левой части этого неравенства к нижнему пределу (см. замечание 2 ниже), а в правой — к обычному пределу (ведь $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty$!), получаем

$$\liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_* \geqslant |\langle f_\infty, u\rangle|.$$

Взяв теперь в последнем неравенстве точную верхнюю грань по $u \in \mathbb{B}$, $\|u\| = 1$, с учётом (4.2) имеем окончательно оценку (4.1).

Теорема доказана.

Замечание 2. В вышеприведённом доказательстве мы применили операцию перехода к нижнему пределу в неравенстве, не описанную в прослушанном вами курсе математического анализа. Остановимся на её обосновании подробно.

Лемма 3. Пусть $\{a_n\}$ — ограниченная, $b_n \to b$ — сходящаяся последовательности и

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant b_n.$$

Тогда существует $a = \liminf_{n\to+\infty} a_n$ и верно неравенство

$$a \geqslant b. \tag{4.3}$$

Доказательство.

Существование верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности известно из курса математического анализа. Более того, известно, что нижний предел есть наименьшая предельная точка последовательности и поэтому существует подпоследовательность $a_{n_k} \to \to a$. Теперь для получения (4.3) достаточно перейти к обычному пределу в неравенстве

$$a_{n_k} \geqslant b_{n_k}.$$

Лемма доказана.

Прежде чем переходить к следующей теореме, необходимо обсудить следующий вопрос. Для этого напомним определения слабой и $*$-слабой сходимости:

$$u_n \rightharpoonup u \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall f \in \mathbb{B}^* \;\; \langle f, u_n \rangle \to \langle f, u \rangle,$$

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{B} \;\; \langle f_n, u \rangle \to \langle f, u \rangle,$$

Возникает вопрос: а может быть так, что для каждого $f \in \mathbb{B}^*$ в первом случае и для каждого $u \in \mathbb{B}$ во втором пределы

$$u_n \rightharpoonup u \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall f \in \mathbb{B}^* \;\; \langle f, u_n \rangle \to a(f) \tag{4.4}$$

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall u \in \mathbb{B} \;\; \langle f_n, u \rangle \to b(u) \tag{4.5}$$

существуют (в этом случае последовательности $\{u_n\}$ и $\{f_n\}$ естественно называть слабо и $*$-слабо фундаментальными соответственно), но таких элементов $u \in \mathbb{B}$ (соответственно $f \in \mathbb{B}^*$), что

$$a(f) = \langle f, u \rangle \quad (\text{соответственно } b(u) = \langle f, u \rangle),$$

нет?

Оказывается, это невозможно во втором случае и, вообще говоря, возможно в первом. Пространства, для которых невозможно и первое, называются слабо полными. Почему во втором случае такое f всегда существует? Легко видеть, что это непосредственное следствие второй теоремы Банаха—Штейнгауза (теорема 11 лекции 7). В самом деле, достаточно положить $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$, $\mathbb{B} = \mathbb{K}$, $T_n = f_n$. Далее, отсюда получаем важное следствие, которое понадобится нам ниже:

Лемма 4. Всякое рефлексивное банахово пространство является слабо полным.

Доказательство.

В самом деле, слабой фундаментельности элементов $\{u_n\}$ соответствует $*$-слабая фундаментальность последовательности $\{Ju_n\}$. Пусть $v \in \mathbb{B}^{**}$ — $*$-слабый предел последовательности $\{Ju_n\}$. Тогда $u_n \rightharpoonup J^{-1}v$.

Лемма доказана.

Теперь мы готовы доказать следующую важную теорему, которую можно называть в некотором смысле достаточным условием слабой сходимости (точнее следовало бы говорить о слабой секвенциальной предкомпактности ограниченных множеств).

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\{u_n\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства* $\mathbb{B}$. *Тогда из* $\{u_n\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $\mathbb{B}$ *подпоследовательность* $\{u_{n_n}\}$:

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Для простоты докажем эту теорему для случая *сепарабельного* банахова пространства $\mathbb{B}$.

Шаг 1. Поскольку пространство $\mathbb{B}$ рефлексивно, мы можем отождествить пространство $\mathbb{B}$ с дважды сопряжённым $\mathbb{B}^{**}$. Стало быть, имеем $\mathbb{B}^{**} = \mathbb{J}(\mathbb{B})$, а так как $\mathbb{B}$ сепарабельно, то сепарабельно и пространство $\mathbb{B}^{**}$, но это пространство является сопряжённым к банахову пространству $\mathbb{B}^*$. Значит, в силу леммы 4 пространство $\mathbb{B}^*$ является сепарабельным.

Шаг 2. Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — это счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Поскольку последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ ограничена по норме, то числовая последовательность

$$\langle f_1, u_n \rangle$$

ограниченная, и поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_1, u_{n_1} \rangle .$$

Числовая последовательность

$$\langle f_2, u_{n_1} \rangle$$

тоже ограниченная, а значит, из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$\langle f_2, u_{n_2} \rangle .$$

Продолжая таким образом этот процесс, мы получим подпоследовательность $\{u_{n_{k+1}}\}$, для которой последовательности $\{\langle f_j, u_{n_{k+1}} \rangle\}$ сходятся при $j = 1, ..., k+1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность [1] $\{u_{n_n}\}$ исходной последовательности $\{u_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится на счётном всюду плотном в $\mathbb{B}^*$ множестве $\{f_n\}$.

Шаг 3. Докажем теперь, что построенная подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к некоторому элементу $u_\infty \in \mathbb{B}$.

Пусть $f \in \mathbb{B}^*$ — произвольным образом выбранный фиксированный элемент. Тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f, u_{m_m} \rangle| \leqslant |\langle f, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{n_n} \rangle| + \\ + |\langle f_k, u_{n_n} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| + |\langle f, u_{m_m} \rangle - \langle f_k, u_{m_m} \rangle| \leqslant \end{aligned}$$

[1] См. § 10 семинара-лекции 13.

$$\leqslant \|f - f_k\|_* \|u_{n_n}\| + |\langle f_k, u_{n_n}\rangle - \langle f_k, u_{m_m}\rangle| + \|f - f_k\|_* \|u_{m_m}\|.$$

Первое и последнее слагаемые в правой части последнего неравенства могут быть сделаны сколь угодно малыми в силу плотности $\{f_k\}$ в пространстве $\mathbb{B}^*$ относительно сильной сходимости и ограниченности подпоследовательности $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\} \subset \mathbb{B}$. Наконец, второе слагаемое, как мы уже доказали, стремится к нулю при $n, m \to +\infty$.

Шаг 4. Значит, числовая последовательность

$$\{\langle f, u_{n_n}\rangle\}$$

является фундаментальной при любом $f \in \mathbb{B}^*$. Значит, сходится. Стало быть, в силу леммы 4 найдётся некоторый элемент $u \in \mathbb{B}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Теперь сформулируем без доказательства достаточное условие $*$-слабой сходимости.

Теорема 6. *Пусть $\mathbb{B}$ — сепарабельное банахово пространство и $\{f_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Тогда из $\{f_n\}$ можно выделить $*$-слабо сходящуюся в $\mathbb{B}^*$ подпоследовательность $\{f_{n_n}\}$:*

$$f_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

§ 5. Равномерная выпуклость банаховых пространств

Определение 3. *Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенств $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$ и $\|u - v\| \geqslant \varepsilon > 0$ следует*

$$\|u + v\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)). \tag{5.1}$$

Теперь приведём важное в приложениях к нелинейным краевым задачам достаточное условие сильной сходимости.

Теорема 8. *Если $\mathbb{B}$ — равномерно выпуклое банахово пространство, то из того условия, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

и

$$\|u_n\| \to \|u\| \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \textit{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\|u\| = 1$ и $\|u_n\| \neq 0$. Введем следующее обозначение:

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Ясно, что $\|v_n\| = 1$ и $v_n \rightharpoonup u$ при $n \to +\infty$. Обозначим

$$\varepsilon_n = \|v_n - u\|,$$

Шаг 2. Наша ближайшая цель — доказать, что $\varepsilon_n \to 0$. Предположим, что это неверно. Тогда существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{n_k}\}$ с $\varepsilon_{n_k} \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Выбросив при необходимости лишние члены, можем считать, что неравенство $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_0 > 0$ выполняется для исходной последовательности. Тогда, поскольку

$$\|v_n - u\| \geqslant \varepsilon_n \geqslant \varepsilon_0 > 0,$$

согласно (5.1) имеем

$$\|v_n + u\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) =: C < 2. \tag{5.2}$$

Шаг 3. В силу определения нормы линейного функционала для любого $f \in \mathbb{B}$ с $\|f\|_* \leqslant 1$ верно неравенство

$$|\langle f, v_n + u\rangle| \leqslant \|v_n + u\|,$$

или, с учётом (5.2),

$$|\langle f, v_n + u\rangle| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) = C < 2.$$

Шаг 4. Поскольку $v_n \rightharpoonup u$, можно перейти к пределу при $n \to +\infty$:

$$|\langle f, 2u\rangle| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon_0)) = C < 2,$$

или

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant C/2 < 1.$$

Беря точную верхнюю грань по всем $f \in \mathbb{B}^*$, $\|f\|_* \leqslant 1$, получаем

$$\|u\| = \sup_{f \in \mathbb{B}^*,\, \|f\|_{\mathbb{B}^*} = 1} |\langle f, u\rangle| \leqslant C/2 < 1,$$

что противоречит равенству $\|u\| = 1$ (см. начало доказательства). Значит, наше предположение неверно и $\varepsilon_n \to 0$, т. е. $v_n \to u$. Отсюда получаем, что

$$u_n = \|u_n\| v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку $\|u_n\| \to \|u\| = 1$.

Теорема доказана.