Лекция 7

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры

Определение 1. *Нормой называется неотрицательная вещественная функция* $\|\cdot\|$ *на линейном пространстве* L *над полем* $\mathbb{K}$ (*где* $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), *удовлетворяющая следующим условиям*:
(i) *из равенства* $\|x\|=0$ *следует, что* $x=\vartheta$;
(ii) *для любых* $x,y\in L$ *верно* $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$;
(iii) *для любых* $x\in L$, $\lambda\in\mathbb{K}$ *верно* $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$ [1].

Определение 2. *Линейное пространство*, *снабжённое нормой*, *называется нормированным пространством*: $N=(L,\|\cdot\|)$.

Замечание 1. Нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно — задача 1 семинара-лекции 9), что в нормированном пространстве величина
$$d(x,y)=\|x-y\| \tag{1.1}$$
удовлетворяет всем аксиомам метрики. Таким образом, всякое нормированное пространство N становится метрическим пространством, если ввести в N метрику по формуле (1.1). Отметим также, что частным случаем известного неравенства
$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y) \tag{1.2}$$
является неравенство
$$\bigl|\|x\|-\|y\|\bigr|\leqslant\|x-y\|: \tag{1.3}$$
достаточно положить $z=\vartheta$ в (1.2). В свою очередь, из (1.3) следует, в частности, что
$$\text{если } \|x_n-x\|\to 0, \text{ то } \|x_n\|\to\|x\|. \tag{1.4}$$

Теперь мы готовы дать определение банахова пространства.

Определение 3. *Банаховым пространством* $\mathbb{B}$ *называется нормированное пространство*, *которое является полным как мет-*

---

[1] Отсюда, в частности, следует, что условие $x=\vartheta$ не только необходимо, но и достаточно для равенства $\|x\|=0$.

рическое пространство относительно метрики (1.1), *где* $\|\cdot\|$ *— это норма данного нормированного пространства.*

ПРИМЕР 1. Пространство Лебега $L^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Это будет доказано в части II (семинар-лекция 5).

ПРИМЕР 2. Пространство l^p при $p \in [1,+\infty)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Замечание 2. Можно заметить, что этот пример является частным случаем предыдущего, поскольку пространство l^p можно рассматривать как $L^p(\mathbb{N},\mu)$, где $\mu(\{k\}) = 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 3. Докажем теперь, что пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

□ Действительно, докажем это утверждение за несколько шагов.

1. Пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ — фундаментальная последовательность. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех натуральных $n, m \geqslant N$ имеет место следующее неравенство:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

2. Таким образом, для каждого фиксированного $x \in [0,1]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^1$. Поэтому для каждого $x \in \in [0,1]$ определена функция $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Переходя в (1.5) к пределу при $m \to +\infty$, получим следующее неравенство:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.6}$$

Выбирая по любому $\varepsilon > 0$ соответствущее $N(\varepsilon)$, убеждаемся, что

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [0,1]. \tag{1.7}$$

3. Докажем, что $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$. Действительно, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Далее, согласно (1.7) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое достаточно большое $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем это n_0 и выберем такое $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$, что для всех $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда получаем неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \quad \boxtimes$$

П Р И М Е Р 4. Пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

$\square$ Действительно, пусть последовательность $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ фундаментальна, тогда $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ и $\{f'_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ обе фундаментальны. Следовательно,

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \in \mathbb{C}[0,1], \quad f'_n(x) \rightrightarrows g(x) \in \mathbb{C}[0,1]. \tag{1.8}$$

Тем самым выполнены (даже «с запасом») условия теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности. Следовательно, $g(x) = f'(x)$ и согласно (1.8) имеем $\|f - f_n\|_1 \to 0$. $\boxtimes$

§ 2. Эквивалентные нормы

О п р е д е л е н и е 4. *Норма $\|\cdot\|_1$ на нормированном пространстве $\mathbb{B}, \|\cdot\|$ называется эквивалентной исходной, если найдутся такие положительные числа c_1 и c_2, что имеет место неравенство*

$$c_1\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant c_2\|f\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}.$$

Очевидно, что $c_1 \leqslant c_2$.

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что при этом соответствующее линейное нормированное пространство $\mathbb{B}$ будет банаховым и относительно эквивалентной нормы $\|\cdot\|_1$.

П р и м е р э к в и в а л е н т н ы х н о р м. Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Теперь рассмотрим новую норму

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Докажем, что это эквивалентная норма.

□ Имеет место цепочка неравенств

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|.$$

Стало быть, нормированное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ также является банаховым. ⊠

Пример неэквивалентных норм. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$, на котором введём следующую норму:

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|.$$

Относительно этой нормы линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым.

Рассмотрим на этом же линейном пространстве другую норму:

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Относительно этой нормы рассматриваемое линейное пространство не является банаховым. Если применить процедуру пополнения, то его пополнением окажется банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$.

§ 3. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах

Пусть $(N_1, \|\cdot\|_1)$ и $(N_2, \|\cdot\|_2)$ — это два нормированных пространства, причём

$$A : N_1 \to N_2$$

— это линейный непрерывный оператор. (Определение линейного оператора известно из курса линейной алгебры; будем считать, что областью определения оператора является всё пространство N_1; непрерывность понимается как непрерывность функции, действующей из одного метрического пространства в другое.) Все такие операторы образуют линейное пространство (с очевидными операциями сложения и умножения на число), которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}(N_1, N_2).$$

Напомним, что если A — линейный оператор, то $A\vartheta = \vartheta$ (здесь и далее мы, как правило, будем обозначать нулевые элементы разных пространств одним символом ϑ).

Введём норму на $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ следующим образом:

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}. \tag{3.1}$$

Сразу отметим, что для любого $x \in N_1$ верно неравенство

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|x\|_1. \tag{3.2}$$

В самом деле, при $x = \vartheta$ имеем $0 = \|\vartheta\|_2 = \|A\vartheta\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|\vartheta\|_1$; при $x \neq$ $= \vartheta$ неравенство (3.2) следует из (3.1).

Лемма 1. *Норма линейного оператора конечна тогда и только тогда, когда оператор непрерывен.*

Доказательство. 1. Пусть $\|A\| < +\infty$. Тогда при $x_n \to x$ имеем

$$\|Ax_n - Ax\|_2 = \|A(x_n - x)\|_2 \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x\|_1 \to 0.$$

2. Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что $\|A\| = +\infty$. Тогда, в частности, согласно определению нормы оператора (3.1)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in N_1,\ \ x_n \neq \vartheta_1 :\ \frac{\|Ax_n\|_2}{\|x_n\|_1} \geqslant n;$$

тогда $\|Ax_n\|_2 \geqslant n\|x_n\|_1 > 0$. Положим

$$y_n = \frac{1}{\|Ax_n\|_2} x_n.$$

Тогда

$$\|y_n\|_1 = \frac{1}{\|Ax_n\|_2} \cdot \|x_n\|_1 \leqslant \frac{1}{n} \to 0, \quad \|Ay_n\|_2 = \frac{1}{\|Ax_n\|_2} \cdot \|Ax_n\|_2 = 1.$$

Итак, $y_n \to \vartheta_1$, $Ay_n \not\to \vartheta_2 = A\vartheta_1$, что противоречит условию непрерывности оператора.

Лемма доказана.

Поэтому непрерывные линейные операторы называют также *ограниченными* линейными операторами.

Лемма 2. *На линейном пространстве $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ непрерывных операторов величина $\|\cdot\|$ является нормой в смысле определения* 1.

Доказательство.

1. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{\|\lambda Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{|\lambda|\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \\ = |\lambda| \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = |\lambda|\|A\|.$$

2. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{\|(A_1 + A_2)x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \sup_{x\neq\vartheta,\ x\in N_1} \frac{\|A_1x\|_2 + \|A_2x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|A_1x\|_2}{\|x\|_1} + \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|A_2x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|.$$

3. Докажем, что если $\|A\| = 0$, то отсюда следует, что $A = \vartheta$.

$$0 = \|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \Rightarrow \|Ax\|_2 = 0 \quad \text{для всех} \quad \|x\|_1 \neq 0 \Rightarrow A = \vartheta.$$

Лемма доказана.

Замечание 4. На линейном пространстве $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ можно ввести и другие нормы (подробнее об этом см. в лекции-семинаре 11). Однако, если не оговорено иное, под нормой оператора мы всегда будем понимать норму (3.1), называемую *операторной нормой*.

Заметим, что в силу свойств линейного оператора и нормы имеет место следующая цепочка равенств:

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x\neq\vartheta,\, x\in N_1} \left\| A\frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \sup_{\|y\|_1=1} \|Ay\|_2.$$

Возникает вопрос: при каких условиях линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ является банаховым относительно введённой операторной нормы?

Теорема 1. *Пусть $(N_2, \|\cdot\|_2)$ является банаховым пространством, тогда $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ банахово.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная по операторной норме последовательность операторов, т. е.

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Докажем, что существует такой оператор

$$A \in \mathcal{L}(N_1, N_2),$$

что

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 2. Для всякого $x \in N_1$ последовательность $\{A_nx\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $(N_2, \|\cdot\|_2)$. Действительно,

$$\|A_nx - A_mx\|_2 \leqslant \|A_n - A_m\|\|x\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

В силу полноты $(N_2, \|\cdot\|_2)$ имеем

$$A_nx \to y[x] \quad \text{в} \quad (N_2, \|\cdot\|_2).$$

Введём оператор

$$Ax \stackrel{\text{def}}{=} y[x].$$

Докажем его линейность. С этой целью заметим прежде всего, что если

$$y_n \to y \quad \text{и} \quad z_n \to z,$$

то

$$\alpha_1 y_n + \alpha_2 z_n \to \alpha_1 y + \alpha_2 z \tag{3.3}$$

(докажите самостоятельно). Далее, по определению оператора A имеем

$$A_n x_1 \to A x_1, \quad A_n x_2 \to A x_2, \tag{3.4}$$

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2). \tag{3.5}$$

В силу линейности операторов A_n верны равенства

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$ с учётом (3.4), (3.5) и (3.3), получаем

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{n\to+\infty}(\alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2,$$

что и требовалось.

Шаг 3. Докажем теперь ограниченность оператора A. В силу (1.3) имеем

$$\big|\|A_n\| - \|A_m\|\big| \leqslant \|A_n - A_m\|.$$

Следовательно, из фундаментальности $\{A_n\}$ вытекает фундаментальность $\{\|A_n\|\}$. Значит,

$$\|A_n\| \to c_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак,

$$\|Ax\|_2 = \lim_{n\to+\infty}\|A_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty}\|A_n\|\|x\|_1 = c_1\|x\|_1.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_2 \leqslant c_1.$$

Шаг 4. Нам осталось доказать, что

$$\|A - A_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно, при $\|x\|_1 = 1$ имеем в силу (1.4)

$$\|(A - A_n)x\|_2 = \lim_{m\to+\infty}\|(A_m - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty}\|A_m - A_n\|.$$

Следовательно,

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|_1=1}\|(A - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty}\|A_m - A_n\|,$$

а в силу фундаментальности $\{A_n\}$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при больших n.

Теорема доказана.

§ 4. Линейные функционалы

Прежде всего будем называть сходимость по норме,

$$\|x - x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

сильной сходимостью. Обозначается сильная сходимость следующим образом:

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Рассмотрим частный, но очень важный случай линейных операторов — линейные функционалы:

$$f : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \to \mathbb{K} \tag{4.1}$$

(где $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ — то поле, над которым рассматривается банахово пространство $\mathbb{B}$), причём

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

Прежде всего условимся действие линейного функционала $f(\cdot)$ на элементе $x \in \mathbb{B}$ обозначать с помощью скобок двойственности:

$$\langle f, x\rangle \quad \text{вместо} \quad f(x).$$

Как для любых операторов, множество линейных функционалов само образует линейное пространство.

Определение 5. *Множество всех линейных функционалов над банаховым пространством* $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, *непрерывных в том смысле, что*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

для всех

$$x_n \to x \quad \textit{сильно в} \quad (\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

будем называть пространством, сопряжённым к $\mathbb{B}$, *и обозначать символом* $\mathbb{B}^*$.

Поскольку линейные функционалы — это линейные операторы, действующие из $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, а

$$\mathbb{C}, \mathbb{R} \text{ — полные (банаховы) пространства,}$$

то в силу доказанной выше теоремы 1 пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно следующей операторной нормы:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Заметим, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ по этой норме

$$\|f - f_n\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

является в наших обозначениях сильной сходимостью.

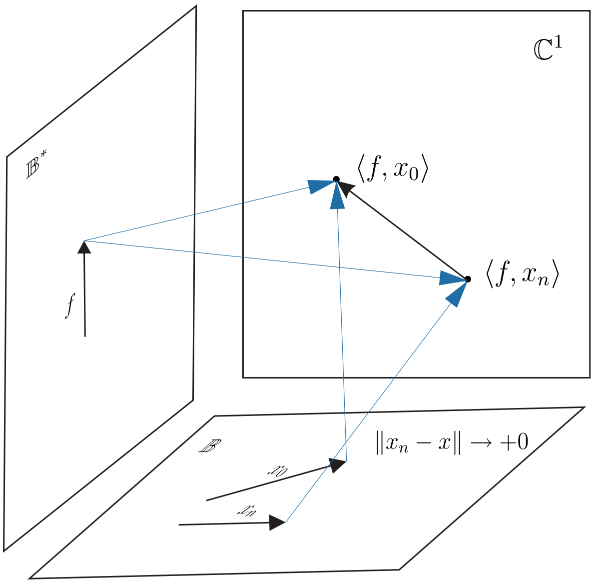

Рис. 1. Непрерывные функционалы.

§ 5. Слабая и $*$-слабая сходимость

Если есть сильная сходимость в банаховом пространстве $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, то должна существовать и слабая сходимость.

Определение 6. *Говорят, что последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ слабо сходится к элементу $x \in \mathbb{B}$, если*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{для каждого фиксированного } f \in \mathbb{B}^*.$$

Более того, на $\mathbb{B}^*$ можно ввести ещё одну сходимость — $*$-слабую.

Определение 7. *Говорят, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ $*$-слабо сходится к элементу $f \in \mathbb{B}^*$, если*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{B}.$$

1. Сильную сходимость мы обозначаем как

$$x_n \to x.$$

2. Слабую сходимость будем обозначать как

$$x_n \rightharpoonup x.$$

3. $*$-слабую сходимость будем обозначать как

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

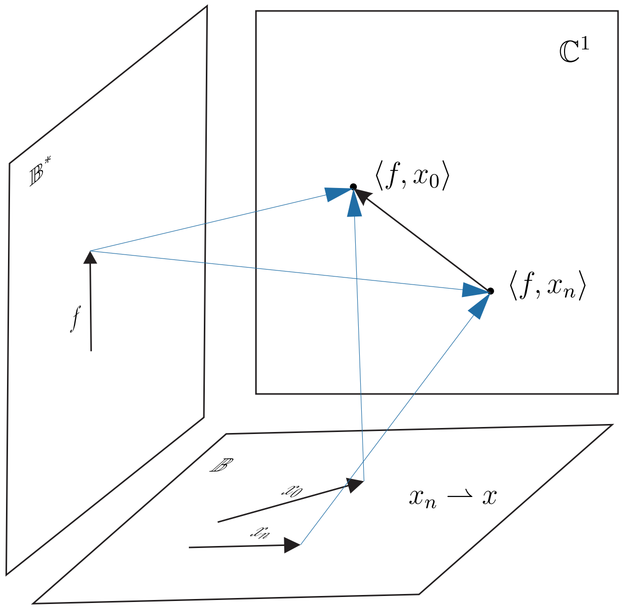

Рис. 2. Слабая сходимость.

Теперь мы проиллюстрируем введённые в этой лекции новые понятия на примере пространств Лебега. Дадим определения сильной, слабой и $*$-слабой сходимостей для пространств $L^p(X,\mu)$, где X — область евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, а $p \in [1,+\infty]$.

Определение 8. *Последовательность $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ называется сильно сходящейся к элементу $u \in L^p(\Omega)$ при $p \in [1,+\infty]$, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

Определение 9. *Последовательность $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ называется слабо сходящейся к элементу $u \in L^p(\Omega)$ при $p \in [1,+\infty)$, если для каждого $f \in (L^p(\Omega))^*$ имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f, u_n\rangle_p = \langle f, u\rangle_p\,,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $(L^p(\Omega))^*$ при $p \in [1,+\infty)$.

Определение 10. *Последовательность $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ называется $*$-слабо сходящейся к функции $f \in L^\infty(\Omega)$, если для каждого $u \in L^1(\Omega)$ имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f_n, u\rangle_\infty = \langle f, u\rangle_\infty,$$

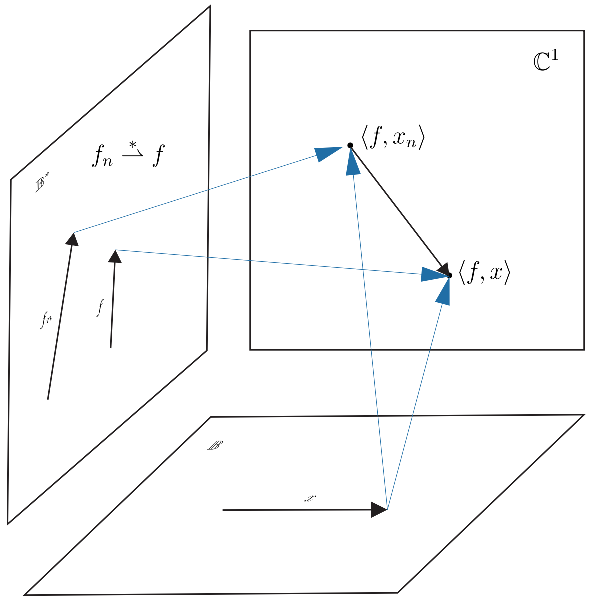

Рис. 3. $*$–слабая сходимость.

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ *— это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^\infty(\Omega)$ *и* $L^1(\Omega)$.

Позже (в следующем семестре) мы докажем следующую важную теорему:

Теорема 2. *Банахово пространство* $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in (1, +\infty)$ *совпадает с банаховым пространством* $L^q(\Omega)$ *при* $q = p/(p-1)$, *а в случае* $p = 1$ *банахово пространство* $\left(L^1(\Omega)\right)^*$ *совпадает с пространством* $L^\infty(\Omega)$.

§ 6. Теорема Хана–Банаха и её следствия

В этом параграфе мы докажем важную в приложениях теорему Хана—Банаха.

Теорема Хана—Банаха. *Пусть* X *— вещественное векторное пространство, а* $X_0 \subset X$ *— векторное подпространство, на котором задан линейный функционал* $\langle \lambda, x \rangle$, *причём*

$$\langle \lambda, x \rangle \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0, \tag{6.1}$$

где функция $p(x) : X \to \mathbb{R}^1$ *обладает следующими свойствами:*

1) *ослабленное свойство выпуклости*

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in X. \tag{6.2}$$

2) *свойство положительной однородности*

$$p(tx) = tp(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X \text{ и } t > 0.$$

Тогда существует линейный функционал $\langle \Lambda, x \rangle$, определённый на X и обладающий свойствами

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{на} \quad X_0, \tag{6.3}$$

$$\langle \Lambda, x \rangle \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{6.4}$$

Замечание 5. В качестве функции $p(x)$ можно взять полунорму.

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть выбрано фиксированное

$$\{x_0\} \in X \backslash X_0 \neq \varnothing,$$

поскольку в случае $X = X_0$ доказывать нечего. Пусть $x, y \in X_0$. Тогда

$$\langle \lambda, x \rangle + \langle \lambda, y \rangle = \langle \lambda, x + y \rangle \leqslant p(x + y) = \\ = p(x - x_0 + x_0 + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle, \tag{6.5}$$

Заметим, что (при фиксированном x_0) левая часть неравенства зависит только от x, правая — только от y. Следовательно,

$$\sup_{x \in X_0} \big(\langle \lambda, x \rangle - p(x - x_0) \big) \leqslant \inf_{y \in X_0} \big(p(y + x_0) - \langle \lambda, y \rangle \big),$$

поскольку в противном случае нашлись бы такие $x, y \in X_0$, при которых неравенство (6.5) было бы нарушено.

Следовательно, существует такое число $a = a(\lambda, x_0)$, что

$$a) \ \langle \lambda, x \rangle - a \leqslant p(x - x_0), \quad b) \ \langle \lambda, y \rangle + a \leqslant p(y + x_0). \tag{6.6}$$

Шаг 2. Пусть

$$X_1 = X_0 \oplus t x_0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Определим на X_1 функционал

$$\langle \Lambda, x + t x_0 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \lambda, x \rangle + t a, \quad x \in X_0$$

и докажем, что он обладает нужными свойствами.

□

1. Докажем линейность.

$$\langle \Lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0 \rangle = \\ = \langle \lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle + (\alpha_1 + \alpha_2) a = \\ = \alpha_1 \langle \lambda, x_1 \rangle + \alpha_1 a + \alpha_2 \langle \lambda, x_2 \rangle + \alpha_2 a =$$

$$= \alpha_1 \left(\langle\lambda, x_1\rangle + a\right) + \alpha_2 \left(\langle\lambda, x_2\rangle + a\right) = \\ = \alpha_1\langle\Lambda, x_1 + x_0\rangle + \alpha_2\langle\Lambda, x_2 + x_0\rangle.$$

2. Очевидно, функционал Λ обладает свойством (6.3).

3. Докажем, что функционал Λ удовлетворяет неравенству (6.4).

Докажем, что он удовлетворяет следующему неравенству:

$$\langle\Lambda, x + tx_0\rangle \leqslant p(x + tx_0) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

С этой целью воспользуемся неравенствами (6.6).

Пусть $t > 0$. Тогда из неравенства (6.6) *b)* вытекает, что

$$\langle\Lambda, x + tx_0\rangle = \langle\lambda, x\rangle + ta = t\left(\left\langle\lambda, \frac{x}{t}\right\rangle + a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0);$$

если же $t < 0$, положим $t_1 = -t > 0$ и из неравенства (6.6) *a)* получим

$$\langle\Lambda, x + tx_0\rangle = \langle\Lambda, x - t_1x_0\rangle = \langle\lambda, x\rangle - t_1a = \\ = t_1\left(\left\langle\lambda, \frac{x}{t_1}\right\rangle - a\right) \leqslant t_1p\left(\frac{x}{t_1} - x_0\right) = p(x - t_1x_0) = p(x + tx_0).$$

Таким образом, требуемое продолжение линейного функционала λ получено. ⊠

Шаг 3. Продолжение на всё пространство X осуществляется с помощью так называемой *трансфинитной индукции*, рассмотрение которой несложно, но выходит за рамки настоящего курса лекций.

Теорема доказана.

Замечание 6. Прежде всего отметим, что если $p(x) = p(-x)$, тогда при условиях теоремы имеет место следующее неравенство:

$$|\langle\Lambda, x\rangle| \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

□ Действительно, доказываемое неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$-p(x) \leqslant \langle\Lambda, x\rangle \leqslant p(x),$$

поэтому осталось доказать неравенство

$$\langle\Lambda, -x\rangle \leqslant p(x),$$

но это следствие неравенства

$$\langle\Lambda, -x\rangle \leqslant p(-x) = p(x). \quad ⊠$$

Замечание 7. Отметим, что продолжение функционала с некоторого подпространства линейного пространство не единственно и существенно зависит от функции $p(x)$, заданной на всём линейном пространстве X. Даже при одной и той же функции $p(x)$ продолженных функционалов может быть достаточно много.

Теперь мы рассмотрим комплексный вариант теоремы Хана–Банаха.

Теорема 3. *Пусть X — комплексное линейное пространство, а $X_0 \subset X$ — его подпространство. Пусть для линейного функционала $\langle \lambda, x \rangle$, определённого на X_0, выполнено неравенство*

$$|\langle \lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0, \tag{6.7}$$

где $p(x)$ — полунорма, определённая на X. Тогда существует такой линейный функционал $\langle \Lambda, x \rangle$, что

$$|\langle \Lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X \tag{6.8}$$

и

$$\langle \Lambda, x \rangle = \langle \lambda, x \rangle \quad \text{для} \quad x \in X_0. \tag{6.9}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим вещественное линейное пространство с тем же множеством-носителем, что у пространства X (для краткости будем называть его пространством $X_{\mathbb{R}}$). Это означает, что мы сужаем операцию умножения на число, разрешая умножать лишь на вещественные числа. Полученное пространство, как нетрудно проверить, дествительно является линейным пространством (естественно, теперь уже над полем $\mathbb{R}$), а X_0 является его подпространством. На этом подпространстве функционал

$$\operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle$$

является линейным функционалом. (Проверьте! В частности, существенно, что он принимает лишь вещественные значения.)

Шаг 2. Согласно условию (6.7) для функционала $\operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle$ выполнено следующее неравенство:

$$|\operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle| \leqslant |\langle \lambda, x \rangle| \leqslant p(x) \Rightarrow \operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle \leqslant p(x).$$

Следовательно, согласно предыдущей теореме, на пространстве $X_{\mathbb{R}}$ существует вещественный линейный функционал $\widetilde{\Lambda}$ — продолжение функционала $\operatorname{Re}\langle \lambda, x \rangle$, удовлетворяющее условию

$$\langle \widetilde{\Lambda}, x \rangle \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

Шаг 3. Возвращаясь от пространства $X_{\mathbb{R}}$ к X, определим функционал

$$\langle \Lambda, x \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{\Lambda}, x \rangle - i \langle \widetilde{\Lambda}, ix \rangle.$$

Отметим, что, поскольку при всех $x \in X$ величина $\langle \widetilde{\Lambda}, x \rangle$ вещественна, то

$$\operatorname{Re}\langle \Lambda, x \rangle = \langle \widetilde{\Lambda}, x \rangle. \tag{6.10}$$

Шаг 4. Проверим, что функционал Λ удовлетворяет следующим условиям:

1) это линейный функционал на исходном комплексном пространстве X,

2) он является продолжением линейного функционала λ, т. е. выполнено (6.9),

3) он подчинён полунорме $p(x)$, т. е. выполнено (6.8).

□ Действительно, справедливы следующие рассуждения.

1) Достаточно (почему?) проверить, что он однороден относительно умножения на i. Имеем

$$\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle = i(-i)\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle, \quad -i\langle\widetilde{\Lambda}, -x\rangle = i\langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle,$$
$$\langle\Lambda, ix\rangle = \langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle - i\langle\widetilde{\Lambda}, -x\rangle = i\langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle + i(-i)\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle = i\langle\Lambda, x\rangle.$$

2) Заметим, что для любого комплексного числа z верно равенство $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re}(iz)$, а поэтому при $x \in X_0$ имеем

$$\langle\lambda, x\rangle = \operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle + i\operatorname{Im}\langle\lambda, x\rangle =$$
$$= \operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle - i\operatorname{Re}(i\langle\lambda, x\rangle) = \operatorname{Re}\langle\lambda, x\rangle - i\operatorname{Re}\langle\lambda, ix\rangle = \langle\widetilde{\Lambda}, x\rangle - i\langle\widetilde{\Lambda}, ix\rangle.$$

3) Пусть

$$\langle\Lambda, x\rangle = |\langle\Lambda, x\rangle|\, e^{i\varphi} \Rightarrow |\langle\Lambda, x\rangle| = e^{-i\varphi}\langle\Lambda, x\rangle = \langle\Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle.$$

Тогда

$$|\langle\Lambda, x\rangle| = \langle\Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle = \{(6.10)\} = \operatorname{Re}\langle\Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle =$$
$$= \langle\widetilde{\Lambda}, xe^{-i\varphi}\rangle \leqslant p(xe^{-i\varphi}) = p(x). \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

Теорема 4. (Следствие из теоремы Хана—Банаха) *Пусть X — это нормированное линейное пространство, причём*

$$Y \subset X \quad и \quad \lambda \in Y^*,$$

где Y — линейное подпространство X. Тогда найдётся такое продолжение Λ функционала λ, что имеет место равенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Доказательство.

Шаг 1. Возьмём в качестве полунормы

$$p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|\langle\lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Y. \tag{6.11}$$

□ Действительно, согласно определению нормы линейного функционала имеем

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{y \in Y, \|y\|=1} |\langle\lambda, y\rangle| \Rightarrow |\langle\lambda, y\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Если $x = \vartheta$, то неравенство (6.11) имеет место. Пусть $x \neq \vartheta$. Положим

$$y = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow |\langle \lambda, y\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*} \Rightarrow |\langle \lambda, x\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| = p(x). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. В силу теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал Λ такой, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Возьмём *supremum* по $\|x\| = 1$ от обеих частей и получим неравенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Шаг 3. С другой стороны,

$$|\langle \lambda, x\rangle| = |\langle \Lambda, x\rangle| \quad \text{для} \quad x \in Y,$$

поэтому, взяв *supremum* по $x \in Y$, получим неравенство

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \lambda, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|=1, x\in X} |\langle \Lambda, x\rangle| = \|\Lambda\|_{X^*}.$$

Итак, первое следствие доказано.

Теорема доказана.

Рассмотрим ещё одно следствие из теоремы Хана–Банаха:

Теорема 5. *Пусть $y \in X$, где X — нормированное пространство (нетривиальное, т. е. содержащее не только нулевой элемент) над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Тогда существует функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что*

$$\langle \Lambda, y\rangle = \|y\|, \quad \|\Lambda\|_{X^*} = 1.$$

Доказательство.

Прежде рассмотрим случай $y \neq \vartheta$. Положим

$$Y = \{ay \mid a \in \mathbb{K}\} \quad \text{и} \quad \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\|.$$

Очевидно, λ — это линейный функционал над $Y \subset X$. Согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха найдётся линейный функционал

$$\Lambda \in X^*, \quad \|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*},$$

но

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|z\|=1,\, z\in Y} |\langle \lambda, z\rangle| = \sup_{\|z\|=1, z\in Y} \|z\| = 1,$$

значит,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1.$$

Причём на Y

$$\langle \Lambda, ay\rangle = \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{C}^1.$$

Следовательно,

$$\langle \Lambda, y \rangle = \|y\|.$$

Теперь рассмотрим случай $y = \vartheta$. Очевидно, достаточно провести описанное выше построение для произвольно фиксированного $y_1 \neq \vartheta$ и выбрать соответствующий функционал. Он и будет требуемым, ибо $\|\Lambda\|_{X^*} = 1$ в силу вышесказанного, а $\langle \Lambda, \vartheta \rangle = 0 = \|\vartheta\|$ для любого линейного функционала.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $y \in X$, X — нормированное пространство. Верна формула

$$\|y\| = \sup_{f \in X^*,\, \|f\|_{X^*}=1} |\langle f, y \rangle|. \tag{6.12}$$

□ Действительно, с одной стороны, при $\|f\|_{X^*} = 1$ имеем

$$|\langle f, y \rangle| \leqslant \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|y\| \geqslant \sup_{f \in X^*,\, \|f\|_{X^*}=1} |\langle f, y \rangle|.$$

С другой стороны, в силу теоремы 5 существует такой функционал f, что $\|f\|_{X^*} = 1$ и $\langle f, y \rangle = \|y\|$. Это и доказывает требуемое утверждение.

Замечание 8. Полезно сравнить представление (6.12) с определением

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x \rangle|.$$

Без доказательства сформулируем ещё одно следствие.

Теорема 6. *Пусть Z — замкнутое подпространство нормированного пространства X и пусть $y \in X \backslash Z$, причём*

$$\mathrm{distance}\{y, Z\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\Lambda \in X^*$, что

$$\langle \Lambda, z \rangle = 0 \quad \text{для всех } z \in Z, \quad \langle \Lambda, y \rangle = d, \quad \|\Lambda\|_{X^*} \leqslant 1.$$

Из этого следствия вытекает следующая важная теорема:

Теорема 7. *Пусть $\mathbb{B}$ — банахово пространство. Если $\mathbb{B}^*$ сепарабельно, то $\mathbb{B}$ также сепарабельно.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{B}^*$ — счётное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Выберем $\{x_n\} \in \mathbb{B}$ таким образом, чтобы имели место свойства

$$\|x_n\| = 1, \quad |\langle \lambda_n, x_n \rangle| \geqslant \|\lambda_n\|_*/2.$$

□ Поскольку

$$\|\lambda_n\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda_n, x \rangle|,$$

такая последовательность $\{x_n\}$ существует. ⊠

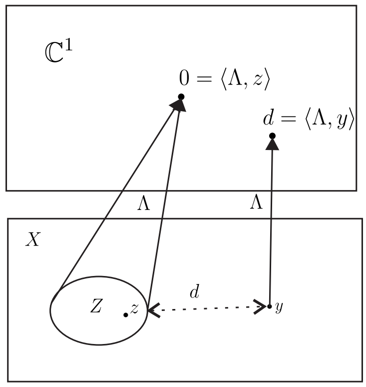

Рис. 4. Разделяющий функционал Λ.

Шаг 2. Пусть

$$\mathcal{D} := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,\middle|\, \alpha_k \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathbb{B}$. Пусть нет. Тогда существуют такие

$$y \in \mathbb{B} \backslash \overline{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \lambda \in \mathbb{B}^*,$$

что

$$\langle \lambda, y \rangle \neq 0, \quad \langle \lambda, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

С одной стороны, в силу плотности $\{\lambda_n\}$ в $\mathbb{B}^*$ найдётся такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, что

$$\lambda_{n_k} \to \lambda \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*. \tag{6.13}$$

С другой стороны, имеет место цепочка неравенств

$$\|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \geqslant |\langle \lambda - \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \geqslant \|\lambda_{n_k}\|_*/2. \tag{6.14}$$

Из (6.13) и (6.14) следует, что

$$\lambda_{n_k} \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*,$$

а значит,

$$\lambda = \vartheta.$$

Шаг 3. Итак, предположение о том, что $\overline{\mathcal{D}} \subsetneq \mathbb{B}$, привело нас к противоречию. Значит, $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{B}$ и пространство $\mathbb{B}$ сепарабельно.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 7. Дважды сопряжённое пространство

Итак, ранее мы построили сопряжённое банахово пространство $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$. Рассмотрим теперь линейное пространство всех линейных функционалов над этим банаховым пространством:

$$\langle x^{**}, f\rangle_* \quad \text{для всех} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**} := (\mathbb{B}^*)^*, \quad f \in \mathbb{B}^*,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ — это скобки двойственности между $\mathbb{B}^{**}$ и $\mathbb{B}^*$.

Определение 11. *Линейное пространство всех линейных функционалов x^{**} над банаховым пространством $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$, непрерывных в том смысле, что*

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle_*,$$

как только

$$\|f_n - f\|_* \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

будем называть дважды сопряжённым и обозначать как $\mathbb{B}^{**}$.

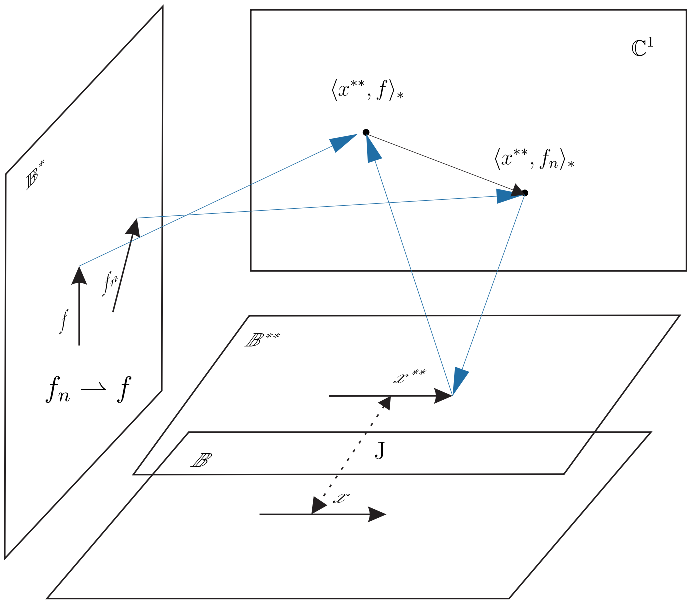

Рис. 5. Слабая сходимость в $\mathbb{B}^*$.

Поскольку каждый элемент $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$ — это линейный и непрерывный оператор, действующий как

$$x^{**} : (\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*) \to \mathbb{K}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

то, как и ранее, приходим к выводу, что $\mathbb{B}^{**}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^{**}\|_{**} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|_*=1} |\langle x^{**}, f\rangle_*| .$$

Сходимость последовательности $\{x_n^{**}\} \subset \mathbb{B}^{**}$ по введённой норме

$$\|x_n^{**} - x^{**}\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

в наших обозначениях является *сильной сходимостью.*

Разумеется, что после того как мы ввели в рассмотрение банахово пространство $(\mathbb{B}^{**}, \|\cdot\|_{**})$ мы можем ввести на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ обычную слабую сходимость.

Определение 12. *Будем говорить, что последовательность $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ слабо сходится к элементу $f_n \in \mathbb{B}^*$, и писать*

$$f_n \rightharpoonup f \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

если

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle \quad \textit{для каждого} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

Таким образом, на банаховом пространстве

$$(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*),$$

которое является сопряжённым к исходному банахову пространству

$$(\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

мы построили три типа сходимости: это сильная, слабая и $*$-слабая. Вопрос: как они связаны.

Лемма 3. *Сильная сходимость влечёт за собой слабую, а слабая сходимость влечёт за собой $*$-слабую.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{x_n\} \subset (\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ и

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Тогда из определений 5 и 6 непосредственно следует, что

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

В частности, $f_n \rightharpoonup f$ слабо в $\mathbb{B}^*$, если $\|f_n - f\|_* \to 0$ при $n \to +\infty$.

Замечание 9. Поскольку линейные функционалы суть частные случаи линейных операторов, на них переносятся утверждения лемм 1 и 2 (дайте самостоятельно соответствующие формулировки!). Полезно также иметь в виду неравенство

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \|f\|_* \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B},$$

являющееся частным случаем неравенства (3.2).

Шаг 2. Докажем теперь, что из слабой сходимости в $\mathbb{B}^*$ вытекает $*$-слабая сходимость.

Прежде всего заметим, что между $\mathbb{B}$ и подмножеством в $\mathbb{B}^{**}$ существует линейная изометрия

$$J : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**}, \quad \|Ju\|_{**} = \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}.$$

$\square$ Действительно, определим функционал $Jx \in \mathbb{B}^{**}$ над $\mathbb{B}^*$ следующей формулой:

$$\langle Ju, f\rangle_* \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, u\rangle, \quad u \in \mathbb{B},\ f \in \mathbb{B}^*.$$

1. Согласно определению имеем

$$\langle J(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), f\rangle_* = \langle f, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\rangle =$$
$$= \alpha_1\langle f, u_1\rangle + \alpha_2\langle f, u_2\rangle = \alpha_1\langle Ju_1, f\rangle_* + \alpha_2\langle Ju_2, f\rangle_*.$$

Линейность доказана.

2. Согласно определению нормы на $\mathbb{B}^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{B}^*)^*$ и следствию из теоремы 5 имеем

$$\|Ju\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle Ju, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u\rangle| = \{(6.12)\} = \|u\|. \boxtimes$$

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$, причём

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \Rightarrow \langle x^*, f_n - f\rangle \to 0 \quad \forall x^* \in \mathbb{B}^{**}.$$

Поскольку линейная изометрия J является взаимно однозначным отображением между $\mathbb{B}$ и $J(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}^{**}$, то приходим к выводу о том, что

$$\forall x \in \mathbb{B} \quad \langle Jx, f_n - f\rangle_* = \langle f_n - f, x\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом,

$$f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Лемма доказана.

Дадим следующее определение:

Определение 13. *Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется рефлексивным, если $J(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^{**}$.*

Если банахово пространство является рефлексивным, то имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle x^{**}, f\rangle_* = \langle f, x\rangle,$$

где

$$x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad x \in \mathbb{B},$$

причём

$$x^{**} = Jx.$$

И поэтому для рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{B}$ слабая и $*$-слабая сходимости на банаховом пространстве $\mathbb{B}^*$ совпадают. Хотя в общем случае, как мы уже говорили, слабая сходимость «сильнее» $*$-слабой сходимости.

Теорема 8. *Если $\mathbb{B}$ — рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым.*

Доказательство.

Пусть $J(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^{**}$, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathbb{B}^*$. Тогда $\mathbb{B}^{**}$ полно как всякое сопряжённое пространство (см. § 4).

Поэтому если $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ — это фундаментальная последовательность, то

$$\|x_n - x_m\| \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \|Jx_n - Jx_m\|_{**} = \|x_n - x_m\| \to +0. \qquad (7.1)$$

Следовательно, найдётся такой $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$, что

$$Jx_n \to x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

Положим $x = J^{-1}x^{**}$, тогда

$$\|x_n - x\| = \|Jx_n - x^{**}\|_{**} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 8. Теоремы Банаха–Штейнгауза

Пусть

$$F_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2, \quad \alpha \in I,$$

— это семейство не обязательно линейных отображений банаховых пространств с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

В этом параграфе мы рассмотрим две теоремы, каждую из которых принято называть теоремой Банаха–Штейнгауза.

Как мы покажем, обе эти теоремы являются следствиями теоремы Бэра о категориях. Точнее, они следуют из теоремы о равномерной ограниченности, вытекающей, в свою очередь, из теоремы Бэра.

Теорема 9 (о равномерной ограниченности). *Пусть*

(i) *отображение F_α непрерывно для каждого $\alpha \in I$;*

(ii) *отображение F_α для каждого $\alpha \in I$ удовлетворяет неравенствам*

$$1)\ \|F_\alpha(x+y)\|_2 \leqslant \|F_\alpha(x) + F_\alpha(y)\|_2, \quad 2)\ \|F_\alpha(\lambda x)\|_2 \leqslant |\lambda| \|F_\alpha(x)\|_2$$

для всех $x, y \in \mathbb{B}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha \in I$;

(iii) *для каждого $x \in \mathbb{B}_1$*

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда семейство отображений $\{F_\alpha\}$ равномерно по $\alpha \in I$ непрерывно в нуле: $\lim\limits_{\delta\to 0} \sup\limits_{\alpha\in I,\ \|x\|_1<\delta} \|F_\alpha(x)\|_2 = 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что для каждого F_α множество

$$b_n(\alpha) = \{x \in \mathbb{B}_1 :\ \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$$

замкнуто как прообраз замкнутого множества $[0, n]$ при непрерывном отображении.

Шаг 2. Поэтому множество

$$X_n = \bigcap_{\alpha\in I} b_n(\alpha) = \left\{x \in \mathbb{B}_1 :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\}$$

замкнуто.

Докажем, что

$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

□ Действительно, согласно условию (iii)

$$\sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

а поэтому для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{B}$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $c(x) \leqslant n$. Имеем

$$X_n = \left\{x \in \mathbb{B}_1 :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\},$$

но тогда из (iii) вытекает, что каждый элемент $x \in \mathbb{B}_1$ принадлежит какому-то X_n. ⊠

Шаг 3. Каждое X_n замкнуто в $\mathbb{B}_1$, а $\mathbb{B}_1$ является банаховым, т. е. полным, поэтому в силу доказанной ранее теоремы Бэра о категориях найдётся такое $n \in \mathbb{N}$ и такой открытый шар $O(x_0, \varepsilon)$, что

$$O(x_0,\varepsilon) \subset X_n \Rightarrow \{x \in \mathbb{B} :\ \|x - x_0\|_1 < \varepsilon\} \subset \left\{x \in \mathbb{B}_1 :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\right\}.$$

Отсюда после замены $y = x - x_0$ получим вложение

$$\{y :\ \|y\|_1 < \varepsilon\} \subset \left\{y \in \mathbb{B} :\ \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(x_0 + y)\|_2 \leqslant n\right\}.$$

В свою очередь, из свойства (ii)-1) вытекает неравенство

$$\forall \|y\|_1 < \varepsilon \quad \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(y + x_0)\|_2 + \\ + \sup_{\alpha\in I}\|F_\alpha(-x_0)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

Шаг 4. Итак,

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon \quad \text{верно} \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

В силу свойства (ii)-2) при всех $\|x\|_1 < \delta$, положив $y = \frac{\varepsilon}{\delta} x$, имеем $\|y\|_1 < \varepsilon$ и

$$\|F_\alpha(x)\|_2 = \left\| F_\alpha \left(\frac{\delta}{\varepsilon} y \right) \right\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}(n + c(x_0)).$$

Отсюда легко видеть, что

$$\sup_{\alpha \in I,\ \|x\|_1 < \delta} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon}(n + c(x_0)) \to 0 \quad \text{при } \delta \to 0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы о равномерной ограниченности вытекает следующая первая теорема Банаха–Штейнгауза:

Теорема 10. *Пусть $\{T_\alpha\}$ — это семейство линейных и непрерывных операторов*

$$T_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in I.$$

Пусть для каждого $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1 \to 2} < +\infty.$$

Доказательство.

Применим теорему о равномерной ограниченности к семейству

$$F_\alpha = T_\alpha.$$

Тогда получим, что для некоторого $\delta > 0$

$$\sup_{\alpha \in I,\ \|x\|_1 < \delta} \|T_\alpha x\|_2 \leqslant 1,$$

но отсюда в силу линейности операторов получим, что

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1 \to 2} = \sup_{\alpha \in I,\ \|z\|_1 \leqslant 1} \|T_\alpha z\|_2 = \frac{1}{\delta} \sup_{\alpha \in I,\ \|x\|_1 \leqslant \delta} \|T_\alpha x\|_2 \leqslant 1/\delta, \quad z = \frac{x}{\delta}.$$

Теорема доказана.

Справедлива вторая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема 11. *Пусть $\{T_n\}$ — это последовательность линейных непрерывных операторов, причём*

$$T_n : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

и

$$T_n x \to T_0 x \text{ \it сильно в } \mathbb{B}_2 \text{ \it для каждого } x \in \mathbb{B}_1.$$

Тогда T_0 — линейный и непрерывный оператор.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем прежде всего, что оператор T_0 является линейным.

□ Действительно, в силу линейности T_n имеем

$$T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2. \tag{8.1}$$

Поскольку по условию

$$T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to T_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad T_n x_1 \to T_0 x_1, \quad T_n x_2 \to T_0 x_2,$$

то, перейдя в (8.1) к пределу при $n \to +\infty$, получим

$$T_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T_0 x_1 + \alpha_2 T_0 x_2.$$

Шаг 2. Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_2 \leqslant c_1(x) < +\infty,$$

но тогда из первой теоремы Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{1\to 2} < +\infty,$$

тогда

$$\|T_0 x\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|T_n\|_{1\to 2} \|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_1.$$

Значит, T_0 — это ограниченный оператор.

Теорема доказана.

§ 9. Операторные топологии

По ходу лекции мы столкнулись уже с двумя типами сходимости операторов из пространства

$$\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2).$$

Первый тип — это равномерная сходимость:

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|_1=1} \|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Второй тип — это сильная сходимость:

$$\|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Наконец, ещё один тип операторной сходимости — это слабая сходимость

$$\langle f, (A_n - A)x \rangle \to 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{B}_1 \text{ и } f \in \mathbb{B}_2^*,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_2^*$.

Разумеется, у пространства $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$ есть и «обычные» типы сходимостей, как и у всякого банахова пространства. С точки зрения этих сходимостей равномерную следовало бы называть сильной, сильную — поточечной, однако устоялись термины «равномерная», «сильная» и «слабая», описывающие сходимость операторов с точки зрения сходимости их значений. Введённая только что слабая операторная сходимость, вообще говоря, отличается от стандартной слабой сходимости в $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$.