Лекция 10

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ

В этой лекции мы изучим банаховы алгебры и рассмотрим спектральную теорию операторов, действующих в банаховом пространстве, которое в данной лекции всюду считается комплексным.

§ 1. Банаховы алгебры

Определение 1. *Банаховой алгеброй с единицей $\mathcal{A}$ называется такое линейное пространство над полем $\mathbb{C}^1$, в котором определена бинарная операция умножения*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} : \quad a \times b \stackrel{\text{def}}{=} ab,$$

которая является ассоциативной и билинейной операцией:

$$(ab)c = a(bc),$$

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)b = \alpha_1 a_1 b + \alpha_2 a_2 b, \quad a(\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 a b_1 + \beta_2 a b_2;$$

кроме того, векторное пространство $\mathcal{A}$ является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\|\cdot\|$, причём

$$\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\| \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

Наконец, существует единица id: $\mathrm{id} \cdot a = a \cdot \mathrm{id} = a$, *причём* $\|\mathrm{id}\| = 1$.

Из неравенства $\|ab\| \leqslant \|a\| \|b\|$ вытекает непрерывность умножения. Действительно, пусть

$$a_n \to a, \quad b_n \to b \quad \text{сильно в} \quad \mathcal{A},$$

тогда

$$\|a_n b_n - ab\| \leqslant \|a_n\| \|b_n - b\| + \|a - a_n\| \|b\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

ПРИМЕР 1. Банаховой алгеброй с единицей является, в частности, пространство линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$ относительно нормы

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Это наиболее существенный для нас пример. Единственное, что нужно проверить, — это неравенство

$$\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\|T_2\| \quad \text{для всех} \quad T_1,\, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{B},\mathbb{B}).$$

$\square$ Действительно, согласно определению операторной нормы имеет место неравенство

$$\|T_1T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1(T_2x)\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|T_1\|\|T_2x\| = \|T_1\|\|T_2\|. \quad \boxtimes$$

§ 2. Интеграл Бохнера

Везде далее $\mathcal{A}$ — это банахова алгебра с единицей.

Пусть

$$f(z) : D \subset \mathbb{C}^1 \to \mathcal{A}$$

— это банаховозначная функция комплексного переменного, изменяющегося в области D. Пусть $l \in \mathbb{C}^1$ — кусочно гладкий контур. Если строить, как и в случае $\mathcal{A} = \mathbb{C}^1$, интеграл Римана через интегральные суммы, а предельный переход осуществлять в смысле сильной сходимости в банаховом пространстве, мы получим интеграл Бохнера

$$\int\limits_l f(z)\, dz \in \mathcal{A}.$$

Аналитичность в области определяется так же, как и в ТФКП, — как существование производной во всей области, причём определение производной аналогично ТФКП:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z, z+\Delta z \in D \subset \mathbb{C}^1,$$

только предел понимается не в смысле нормы $|\cdot|$ банахова пространства $\mathbb{C}^1$, а в смысле нормы $\|\cdot\|$ банахова пространства $\mathcal{A}$.

Для интеграла Бохнера справедливы многие свойства интегралов обычных $\mathbb{C}$-значных функций. В частности, теорема Коши об обращении в ноль интеграла от аналитической функции по контуру, целиком лежащему в области аналитичности, и вытекающая из неё формула Коши.

Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B},\mathbb{B})$. Оказывается, что аналитичность $\mathcal{A}$-значной функции $f(z)$ эквивалентна аналитичности следующей $\mathbb{C}^1$-значной функции

$$\varphi(z) = \langle w^*, f(z)u\rangle \quad \text{для всех} \quad w^* \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}^*$.

§ 3. Обратимые элементы банаховой алгебры

Определение 2. *Элемент $a \in \mathcal{A}$ называется обратимым, если существует такой элемент $a^{-1} \in \mathcal{A}$, что имеют место следующие равенства*:

$$a^{-1}a = aa^{-1} = \mathrm{id}.$$

Лемма 1. *Если элементы $a, b \in \mathcal{A}$ обратимы, то элемент $ab \in \in \mathcal{A}$ тоже обратим, причём обратным является элемент $b^{-1}a^{-1}$.*

Доказательство.

Действительно,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = \mathrm{id},$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}b = \mathrm{id}.$$

Лемма доказана.

Нетрудно доказать единственность обратного элемента. Попробуйте сделать это сами, а в случае неудачи обратитесь к лекции-семинару 11, § 3.

Лемма 2. *Пусть $a \in \mathcal{A}$. Если $\|a\| < 1$, то ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n, \tag{3.1}$$

где по определению положено $a^0 = \mathrm{id}$, сходится в $\mathcal{A}$ и его сумма является элементом, обратным к $(\mathrm{id} - a)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = (\mathrm{id} - a)^{-1}.$$

Доказательство.

1. Сходимость ряда (3.1) следует из его абсолютной сходимости (см. семинар-лекцию 9, § 2), которая, в свою очередь, вытекает из оценки

$$\|a^n\| \leqslant \|a\|^n$$

и условия $\|a\| < 1$.

2. Итак, ряд (3.1) представляет некоторый элемент b банаховой алгебры $\mathcal{A}$. Осталось показать, что

$$(\mathrm{id} - a)b = b(a - \mathrm{id}) = \mathrm{id}.$$

С этой целью заметим, что сходящийся ряд можно умножать (слева или справа) на произвольный постоянный элемент $c \in \mathcal{A}$. (Доказательство аналогично случаю числовых рядов, причём ключевую роль играет неравенство (1.1); проведите доказательство самостоятельно.) Поэтому имеем

$$(\mathrm{id}-a)b = (\mathrm{id}-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \lim_{m\to+\infty}(\mathrm{id}-a)\sum_{n=0}^{m} a^n =$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}(a^n - a^{n+1}) = \lim_{m\to+\infty}(\mathrm{id}-a^{m+1}) = \mathrm{id},$$

причём для $b(\mathrm{id}-a)$ мы приходим к тому же результату.

Лемма доказана.

Справедлива ещё одна лемма о множестве обратимых элементов.

Лемма 3. *Пусть элемент $a \in \mathcal{A}$ обратим. Тогда при условии*

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1} \tag{3.2}$$

обратим и элемент $a+b$, причём

$$(a+b)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-a^{-1}b)^{-n}\right)a^{-1}. \tag{3.3}$$

Доказательство.

При условии (3.2) верно

$$\|a^{-1}b\| \leqslant \|a^{-1}\|\|b\| < 1,$$

и поэтому в силу лемм 1 и 2 имеем

$$(a+b) = a(\mathrm{id}+a^{-1}b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a+b)^{-1} = (\mathrm{id}+a^{-1}b)^{-1}a^{-1} =$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-a^{-1}b)^{n}\right)a^{-1}.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема об открытости подмножества обратимых элементов.

Теорема 1. *Подмножество всех обратимых элементов банаховой алгебры $\mathcal{A}$ открыто, а отображение $T : a \mapsto a^{-1}$ непрерывно в каждой точке своей области определения (т. е. в каждом обратимой элементе).*

Доказательство.

1. Пусть $a \in \mathcal{A}$ обратим и a^{-1} — обратный к нему элемент, тогда в силу предыдущей леммы элемент $(a+b)$ обратим при

$$\|b\| < \|a^{-1}\|^{-1}.$$

Значит, подмножество всех обратимых элементов с каждым своим элементом содержит некоторую его окрестность, т. е. открыто.

2. Пусть элемент a обратим. Рассмотрим всевозможные элементы $b \in \mathcal{A}$, удовлетворяющие условию

$$q \overset{\text{def}}{=} \|a^{-1}\|\|b\| < 1.$$

Для каждого такого b по ранее доказанному существует элемент $T(a+b)$, причём в силу (3.3) можем записать:

$$\|T(a+b) - T(a)\| = \left\| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-a^{-1}b)^n \right) a^{-1} - a^{-1} \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} (-a^{-1}b)^n \right\| \|a^{-1}\| \leqslant \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{+\infty} \|a^{-1}b\|^n \leqslant \|a^{-1}\| \frac{q}{1-q}. \quad (3.4)$$

Поскольку при $\|b\| \to 0$ имеем $q \to 0$, соотношение (3.4) завершает доказательство теоремы.

Теорема доказана.

§ 4. Резольвента

Определение 3. *Если для элемента $a \in \mathcal{A}$ при некотором $\lambda \in \mathbb{C}^1$ элемент*

$$\lambda \cdot \mathrm{id} - a$$

является обратимым, т. е. существует элемент

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1} \in \mathcal{A}, \quad (4.1)$$

то элемент (4.1) *называется резольвентой элемента a и обозначается*

$$R(\lambda, a) \overset{\text{def}}{=} (\lambda \cdot \mathrm{id} - a)^{-1}.$$

(*Единственность следует из единственности обратного элемента.*)

Для удобства мы будем иногда писать 1 вместо id и использовать упрощённое обозначение для резольвенты

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Определение 4. *Множество*

$$\mathrm{res}(a) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^1 : \exists\, R(\lambda, a) \right\}$$

называется резольвентным множеством элемента a.

Пусть

$$\|a\| < |\lambda|,$$

тогда в силу леммы 2 имеет место следующая цепочка равенств:

$$R(\lambda, a) = (\lambda - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{a}{\lambda} \right)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^n. \quad (4.2)$$

Значит,
$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 \,|\, |\lambda| > \|a\|\right\} \subset \operatorname{res}(a).$$

§ 5. О непрерывности резольвенты

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Резольвента $R(\lambda, a)$ непрерывна по совокупности переменных (λ, a) в области ее существования.*

Доказательство.

Доказательство проведём в несколько шагов, имеющих и самостоятельный интерес.

Шаг 1. Пусть $a \in \mathcal{A}$ — произвольный элемент банаховой алгебры $\mathcal{A}$. Тогда отображение
$$\lambda \mapsto \lambda a$$
непрерывно как отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathcal{A}$ со стандартными топологиями.

$\square$ В самом деле, поскольку в силу свойства нормы имеем
$$\|\lambda a - \lambda_0 a\| = |\lambda - \lambda_0| \|a\|,$$
то при $a = \vartheta$ можно брать в определении непрерывности любое $\delta(\varepsilon)$, а в противном случае $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \|a\|$. $\boxtimes$

Шаг 2. Отображение
$$(a, b) \mapsto a + b$$
непрерывно по совокупности переменных в стандартной топологии $\mathcal{A}$.

$\square$ Действительно, из неравенства треугольника следует, что
$$\|(a + b) - (a_0 + b_0)\| = \|(a - a_0) + (b - b_0)\| \leqslant \|a - a_0\| + \|b - b_0\|,$$
и поэтому
$$\|(a + b) - (a_0 + b_0)\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \|a - a_0\| < \frac{\varepsilon}{2}, \|b - b_0\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Шаг 3. Теперь непрерывность резольвенты по совокупности переменных следует их результатов шагов 1 и 2 в силу непрывности композии непрерывных отображений.

Теорема доказана.

§ 6. Свойства резольвенты. Спектр элемента

Лемма 4. *Пусть $U \in \mathcal{A}$ — обратимый элемент. Тогда имеет место следующее равенство*:
$$U R(\lambda, a) U^{-1} = R(\lambda, U a U^{-1}).$$

Доказательство.

$$(\lambda \mathrm{id} - UaU^{-1})UR(\lambda,a)U^{-1} = \lambda UR(\lambda,a)U^{-1} - UaR(\lambda,a)U^{-1} = \\ = U(\lambda \mathrm{id} - a)R(\lambda,a)U^{-1} = UU^{-1} = \mathrm{id}.$$

Аналогичные преобразования показывают, что $UR(\lambda,a)U^{-1}(\lambda \mathrm{id} - - UaU^{-1}) = \mathrm{id}$.

В силу единственности резольвенты лемма доказана.

Лемма доказана.

Определение 5. *Спектром элемента $a \in \mathcal{A}$ называется множество, дополнительное к резольвентному множеству этого элемента:*

$$\sigma(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{C}^1 \backslash \mathrm{res}(a).$$

В силу последней леммы если $U \in \mathcal{A}$ — обратимый элемент, то

$$\sigma(UaU^{-1}) = \sigma(a).$$

Поскольку, как мы доказали, резольвентное множество $\mathrm{res}(a)$ является открытым, то спектр $\sigma(a)$ является замкнутым.

Докажем тождество Гильберта (также называемое первым резольвентным уравнением):

$$R(\lambda,a) - R(\mu,a) = -(\lambda-\mu)R(\lambda,a)R(\mu,a). \tag{6.1}$$

□ Для доказательства достаточно умножить тождество

$$(\mu \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - a) = -(\lambda - \mu),$$

на

$$R(\lambda,a)R(\mu,a). \quad \boxtimes$$

Рассмотрим второе резольвентное уравнение.

Их два. Они имеют следующий вид:

$$R(\lambda,b) - R(\lambda,a) = R(\lambda,b)(b-a)R(\lambda,a)$$

и

$$R(\lambda,b) - R(\lambda,a) = R(\lambda,a)(b-a)R(\lambda,b).$$

□ Докажем, например, первое из них. Имеет место тождество

$$(\lambda \cdot \mathrm{id} - a) - (\lambda \cdot \mathrm{id} - b) = (b-a).$$

Умножим это тождество справа на $R(\lambda,a)$, а слева на $R(\lambda,b)$, получим

$$R(\lambda,b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - a)R(\lambda,a) - R(\lambda,b)(\lambda \cdot \mathrm{id} - b)R(\lambda,a) = \\ = R(\lambda,b)(b-a)R(\lambda,a). \quad \boxtimes$$

Теперь докажем аналитичность резольвенты на резольвентном множестве.

Заметим, что если $\lambda \in \operatorname{res}(a)$, то для всех μ, достаточно близких к λ, резольвента $R(\mu, a)$ в силу леммы 3 существует, а в силу тождества Гильберта (6.1) верно равенство

$$\frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda, a)R(\mu, a).$$

Пользуясь непрерывностью резольвенты $R(\lambda, a)$ по переменной λ, вытекающей из доказанной в § 5 ее непрерывности по совокупности переменных, можем перейти к сильному пределу при $\mu \to \lambda$ и получить равенство

$$\frac{dR(\lambda, a)}{d\lambda} = -R(\lambda, a)^2.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda, a)$ является $\mathcal{A}$-значной аналитической функцией на резольвентном множестве.

Теорема 3. *Спектр $\sigma(a)$ непуст и замкнут.*

Доказательство.

Замкнутость спектра уже доказана выше в этом же параграфе. Докажем его непустоту.

Действительно, предположим противное. Тогда резольвента аналитична на всей комплексной плоскости. В частности, функция

$$\varphi(\lambda) = \langle w^*, R(\lambda, a)u \rangle$$

для всех $w^* \in \mathcal{A}^*$ и всех $u \in \mathcal{A}$ аналитична на всей комплексной плоскости. Тогда она — константа. Но тогда, как нетрудно заметить, пользуясь теоремой 5 лекции 7, при каждом фиксированном u элемент $R(\lambda, a)u$ не зависит от λ.

$\square$ В противном случае мы бы выбрали такие λ_1 и λ_2, что $R(\lambda_1, a)u \neq$ $= R(\lambda_2, a)u$, положили бы $y = R(\lambda_1, a)u - R(\lambda_2, a)u$ и нашли бы такое $w \stackrel{\text{def}}{=} y$, что $\langle w^*, R(\lambda_1, a)u - R(\lambda_2, a)u \rangle \neq 0$. $\boxtimes$.

Но тогда, в свою очередь, и оператор $R(\lambda, a)u$ не зависит от λ, поскольку каждому фиксированному u он сопоставляет один и тот же элемент. Однако резольвента не может не зависеть от λ. Действительно, как легко заметить из представления (4.2) для резольвенты, ее норма стремится к нулю при $|\lambda| \to +\infty$, но сама резольвента всегда отлична от нулевого оператора.

Теорема доказана.

§ 7. Алгебра функций, аналитических в окрестности спектра

Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\sigma(a)$ — спектр элемента a. Рассмотрим семейство всех функций $\mathcal{F}_a$, аналитических в некоторой (каждая в своей) окрестности спектра $\sigma(a)$.

Ясно, что относительно поточечного сложения и умножения на комплексные числа это семейство является линейным пространством.

Добавив операцию поточечного умножения, мы превратим его в алгебру.

Пусть $f(\lambda)$ — это функция, аналитическая в окрестности $D_f \supset \sigma(a)$ спектра элемента a, причём $l_f = \partial D_f$ — это кусочно гладкий контур.

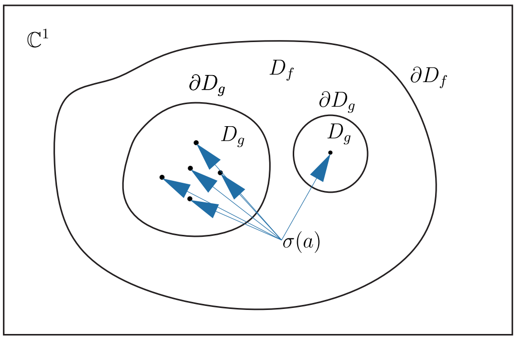

Рис. 1. Области D_g и D_f.

Рассмотрим следующий интеграл, понимаемый в смысле Бохнера:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_f} f(\lambda)R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

Определим отображение

$$\mathcal{O}_a : \mathcal{F}_a \to \mathcal{A}$$

равенством

$$f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_f} f(\lambda)R(\lambda, a)\, d\lambda.$$

(Интеграл в правой части называется <u>интегралом Данфорда</u>.)

Прежде всего заметим, что при этом отображении «единица переходит в единицу». Именно, справедлива следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть $\sigma(a)$ содержится в области D с кусочно гладкой границей ∂D, тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} 1 \cdot R(\lambda, a)\, d\lambda = \mathrm{id}.$$

Доказательство.

Пользуясь теоремой Коши, можно продеформировать контур интегрирования ∂D, оставляя спектр внутри контура, так, чтобы всюду на контуре выполнялось $|\lambda| > \|a\|$. Тогда согласно ряду Неймана для резольвенты получим

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n.$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} R(\lambda, a)\, d\lambda \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n d\lambda \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\lambda}\, d\lambda \cdot \mathrm{id} \;=\; \mathrm{id}.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Указанное отображение является гомоморфизмом алгебр, причём унитальным (т. е. единица переходит в единицу).*

Доказательство.

1. Линейность отображения $\mathcal{O}_a$ очевидна.

2. Нам нужно доказать, что при этом отображении произведению двух функций $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ соответствует произведение элементов $f(a)$ и $g(a)$ из $\mathcal{A}$, определённых интегралами Данфорда

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda, \quad g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_g} g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu.$$

Итак, пусть области аналитичности D_f и D_g как окрестности спектра $\sigma(a)$ выбраны. Причём $l_f = \partial D_f$ и $l_g = \partial D_g$ являются кусочно гладкими контурами и

$$D_g \cup \partial D_g \subset D_f, \quad \mathrm{distance}\{\partial D_g, \partial D_f\} > 0.$$

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} f(\lambda) R(\lambda, a)\, d\lambda \int\limits_{l_g} g(\mu) R(\mu, a)\, d\mu = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} \int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) R(\lambda, a) R(\mu, a)\, d\mu\, d\lambda = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{l_f} \int\limits_{l_g} f(\lambda) g(\mu) \frac{R(\lambda, a) - R(\mu, a)}{\mu - \lambda}\, d\mu\, d\lambda. \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda \notin \overline{D}_g$, то согласно теореме Коши имеем

$$\int\limits_{l_g} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu = 0,$$

а поскольку $\mu \in D_f$, то согласно формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_f}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda = f(\mu).$$

Поэтому

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{l_f}\int\limits_{l_g} f(\lambda)g(\mu)\frac{R(\lambda,a)-R(\mu,a)}{\mu-\lambda}\,d\mu\,d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_g} f(\mu)g(\mu)R(\mu,a)\,d\mu.$$

3. Тот факт, что гомоморфизм унитальный, составляет утверждение доказанной выше леммы 5.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A}$ матриц 2×2 с единицей. Пусть

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\lambda\cdot\mathrm{id}-a) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -2 & \lambda-1 \end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda\cdot\mathrm{id}-a) = (\lambda+1)(\lambda-3), \quad \sigma(a) = \{-1,3\},$$

$$R(\lambda,a) = \frac{1}{\lambda+1}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda-3}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{f(\lambda)}{\lambda+1}\,d\lambda = f(-1), \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{f(\lambda)}{\lambda-3}\,d\lambda = f(3),$$

$l = \{\lambda\in\mathbb{C}^1, |\lambda| = 4\}$, поэтому

$$f(a) = f(-1)\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + f(3)\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

§ 8. О существовании обратной операторной функции

Прежде всего заметим, что если функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит $\mathcal{F}_a$ и не имеет нулей в некоторой окрестности спектра $\sigma(a)$, то функция $1/\varphi(\lambda)$ также аналитична в окрестности спектра.

Теорема 5. *Пусть $\varphi(\lambda)\in\mathcal{F}_a$. Для существования $\varphi(a)^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(\lambda)$ не имела нулей на спектре $\sigma(a)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Достаточность. Пусть $\varphi(\lambda)\in\mathcal{F}_a$ не имеет нулей в некоторой окрестности D спектра $\sigma(a)$. Тогда в этой окрестности

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)}\in\mathcal{F}_a,$$

$$\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)} = \frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda) = 1$$

в D. С одной стороны, в силу леммы 5 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}R(\lambda,a)\,d\lambda = \mathrm{id}.$$

С другой стороны, если положить

$$b \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda,$$

то по теореме 4

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\varphi(\lambda)\frac{1}{\varphi(\lambda)}R(\lambda,a)\,d\lambda = \varphi(a)\cdot b,$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{\varphi(\lambda)}\varphi(\lambda)R(\lambda,a)\,d\lambda = b\cdot\varphi(a).$$

Значит,

$$\varphi(a)\cdot b = b\cdot\varphi(a) = \mathrm{id}$$

и $b = \varphi(a)^{-1}$.

Шаг 2. Необходимость. Пусть функция $\varphi(\lambda)$ принадлежит $\mathcal{F}_a$ и имеет ноль в точке $\lambda_0 \in \sigma(a)$. Тогда функцию $\varphi(\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)h(\lambda), \quad h(\lambda) \in \mathcal{F}_a.$$

Разумеется, функция $h(\lambda)$ тоже может обращаться в ноль в той же точке, но для дальнейшего это несущественно. Тогда в силу операторного исчисления имеем

$$\varphi(a) = (a - \lambda_0\cdot\mathrm{id})h(a).$$

Если бы существовал обратный элемент для $\varphi(a)$, то имело бы место равенство

$$(a - \lambda_0\cdot\mathrm{id})h(a)\varphi(a)^{-1} = \mathrm{id},$$

но это означает, что элемент

$$a - \lambda_0\cdot\mathrm{id}$$

обратим, что противоречит тому, что $\lambda_0 \in \sigma(a)$.

Теорема доказана.

§ 9. Лемма об отображении спектра

Справедлива следующая лемма:
Лемма 6.
$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Доказательство.
Пусть $\mu \in \mathbb{C}^1$ фиксировано.Применим теорему 5 к функции
$$\varphi(\lambda) = \mu - f(\lambda)$$
и получим, что элемент
$$\varphi(a) = \mu \cdot \mathrm{id} - f(a)$$
обратим тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\lambda)$ не имеет нулей на спектре $\sigma(a)$.

В силу этого
$$\mu_0 \in \sigma(f(a))$$
тогда и только тогда, когда найдется $\lambda_0 \in \sigma(a)$ такое, что
$$\mu_0 = f(\lambda_0).$$
Итак, утверждение доказано.

Лемма доказана.

§ 10. Степенные ряды

Следующая важная теорема будет доказана в семинаре-лекции 11:

Теорема 6. *Пусть*
$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \lambda^n$$
— степенной ряд с радиусом сходимости $r > \|a\|$. Тогда
$$f(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n a^n.$$

Определение 6. *Спектральным радиусом $r(a)$ элемента a банаховой алгебры называется число*
$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Спектральный радиус элемента может быть вычислен по формуле*
$$r(a) = \lim_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Доказательство.

1. Прежде всего напомним вид ряда Неймана для резольвенты:

$$R(\lambda, a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^n.$$

2. Точно так же, как и в ТФКП, можно доказать, что для радиуса сходимости этого степенного ряда имеет место формула

$$r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Причём при $|\lambda| > r_0$ ряд сходится, а при $|\lambda| < r_0$ расходится и на границе $|\lambda| = r_0$ имеет особенности. Поэтому

$$r(a) = r_0 = \limsup_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

3. Теперь докажем, что

$$r(a) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Имеют место вложения

$$(\sigma(a))^n = \{\text{лемма } 6\} = \sigma(a^n) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 : |\lambda| \leqslant \|a^n\|\right\}.$$

Значит,

$$r(a)^n \leqslant \|a^n\|,$$

$$r(a) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

Теорема доказана.

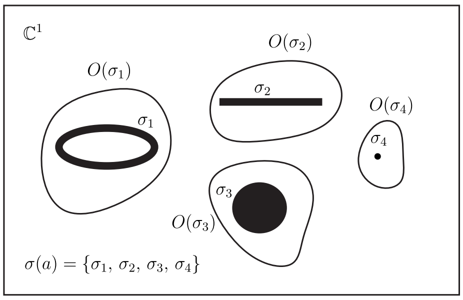

Рис. 2. Спектр $\sigma(a)$.

Пусть спектр $\sigma(a)$ можно разбить на замкнутые компоненты

$$\sigma(a) = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j, \quad \text{distance}\{\sigma_j, \sigma_k\} > 0 \quad j \neq k.$$

Пусть $O(\sigma_j)$ — это окрестности спектральных компонент, причём

$$O(\sigma_j)\bigcap(\sigma\backslash\sigma_j)=\varnothing.$$

Выберем D так, чтобы $\sigma_j\subset D_j\subset O(\sigma_j)$, и рассмотрим интегралы Данфорда

$$P(\sigma_j)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D_j}R(\lambda,a)\,d\lambda.$$

Оказывается, если $\mathcal{A}$ — банахова алгебра линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}(\mathbb{B},\mathbb{B})$, то банахово пространство $\mathbb{B}$ разлагается в прямую сумму (см. семинар-лекцию 11, § 4)

$$\mathbb{B}=\oplus\sum_j P(\sigma_j)\mathbb{B},\quad P(\sigma_j)P(\sigma_k)=0,\quad j\neq k,\quad P(\sigma_j)^2=P(\sigma_j).$$