Лекция 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Пространство $\mathcal{P}$

Напомним, что топология τ пространства Фреше $(\mathcal{P}, \tau)$ порождена следующим счетным семейством полунорм:

$$\|f\|_n \stackrel{\text{def}}{=} p_n(f) = \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial^\alpha f(x)|\,. \tag{1.1}$$

Определение 1. *Обозначим через* $\mathcal{P}'$ *или* $\mathcal{P}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ *пространство линейных и непрерывных функционалов над пространством* $(\mathcal{P}, \tau)$.

Замечание 1. Отметим, что непрерывность элемента $f^* \in \mathcal{P}'$ в силу линейности понимается в том смысле, что

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty$$

для любой последовательности $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{P}$ такой, что

$$\varphi_k \xrightarrow{\tau} \vartheta \Leftrightarrow \|\varphi_k\|_n \to +0$$

при $k \to +\infty$ для любого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Причем такую сходимость естественно назвать сильной сходимостью.

Докажем важную лемму.

Лемма 1. *Линейный функционал* $f^* \in \mathcal{P}'$ *тогда и только тогда, когда найдется такая полунорма* $p_n(\varphi)$ *вида* (1.1) *и постоянная* $\mathrm{M}_n > 0$, *что имеет место неравенство*:

$$|\langle f^*, \varphi \rangle| \leqslant \mathrm{M}_n \max_{|\alpha| \leqslant n} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(1 + |x|^2\right)^n |\partial^\alpha \varphi(x)| \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in (\mathcal{P}, \tau)$.

Достаточность. Из (1.2) получаем, что если $\{\varphi_k(x)\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ и $\varphi_k \to \vartheta$, то и

$$\langle f^*, \varphi_k \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, приходим к выводу, что $f^* \in \mathcal{P}'$.

Необходимость. Пусть $f^* \in \mathcal{P}'$, тогда полунорма

$$p(\varphi) = |\langle f^*, \varphi \rangle|$$

непрерывна над всем $(\mathcal{P}, \tau)$. А это в свою очередь означает, что найдется полунорма $p_n(\varphi)$ из системы полунорм, порождающих топологию пространства $(\mathcal{P}, \tau)$ и постоянная $\mathrm{M}_n > 0$ такие, что

$$|\langle f^*, \varphi\rangle| \leqslant \mathrm{M}_n p_n(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P}.$$

Но полунорма $p_n(\varphi)$ имеет явный вид (1.1). Формула (1.2) доказана.

Лемма доказана.

§ 2. Преобразование Фурье

Определение 2. *Назовем прямым преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{P}$:

$$\widehat{\varphi}(y) \stackrel{\text{def}}{=} F[\varphi](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \varphi(x)\, dx, \quad (x, y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k. \tag{2.1}$$

Определение 3. *Назовем обратным преобразованием Фурье следующий линейный оператор на* $\mathcal{P}$:

$$\widetilde{\varphi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)} \varphi(y)\, dy, \quad (x, y) = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k. \tag{2.2}$$

Справедлива следующая теорема о линейности и непрерывности преобразования Фурье.

Теорема 1. *Операции прямого и обратного преобразования Фурье являются линейными и непрерывными*:

$$F : (\mathcal{P}, \tau) \to (\mathcal{P}, \tau) \quad \text{и} \quad F^{-1} : (\mathcal{P}, \tau) \to (\mathcal{P}, \tau).$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку пространство $(\mathcal{P}, \tau)$ является пространством Фреше, то оно как метрическое пространство обладает свойством эквивалентности непрерывности по Коши по Хайне. Поэтому в силу теоремы 8 четвертой лекции нам достаточно доказать, что для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset (\mathcal{P}, \tau)$ такой, что

$$\varphi_m \to \vartheta \quad \text{в} \quad (\mathcal{P}, \tau) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

вытекает, что [1])

$$F[\varphi_m] \to \vartheta \quad \text{в} \quad (\mathcal{P}, \tau) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

[1]) Т. е. из сильной сходимости последовательности $\varphi_m \to \vartheta$ вытекает сильная сходимость $F[\varphi_m] \to \vartheta$.

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеют место следующие равенства:

$$\partial_y^\alpha F\left[\varphi\right](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha e^{-i(x,y)} \varphi(x)\, dx, \tag{2.3}$$

$$[1-\Delta_x] e^{-i(x,y)} = [1+|y|^2] e^{-i(x,y)},$$

$$\begin{aligned}\left(1+|y|^2\right)^n F[\varphi](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \left(1-\Delta_x\right)^n e^{-i(x,y)}\, dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \left[1-\Delta_x\right]^n \varphi(x)\, dx, \end{aligned}\tag{2.4}$$

здесь мы воспользовались интегрированием по частям, чтобы «перекинуть» оператор $[1-\Delta_x]^n$ $n \in \mathbb{N}$, где

$$\Delta_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

Шаг 3. Таким образом, с учетом (2.3) и (2.4) получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}&\left|\left(1+|y|^2\right)^n \partial_y^\alpha F[\varphi](y)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\left[1-\Delta_x\right]^n (-ix)^\alpha \varphi(x)\right| dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left[\left|1+|x|^2\right|^s \left|\left|\left[1-\Delta_x\right]^n x^\alpha \varphi(x)\right|\right.\right] \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\left[1+|x|^2\right]^s}\, dx, \quad s > \frac{N}{2}.\end{aligned}$$

Отсюда сразу же получаем оценку

$$p_n\left(F[\varphi]\right) \leqslant c(n,s) p_{2n+s}(\varphi), \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad s > \frac{N}{2}.$$

В силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ мы получаем, что если

$$\varphi_m \xrightarrow{\tau} \vartheta \Leftrightarrow p_n(\varphi_m) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

для любого $n \in \mathbb{N}$ фиксированного, то и

$$p_n\left(F[\varphi_m]\right) \to \vartheta \Leftrightarrow F[\varphi_m] \xrightarrow{\tau} \vartheta \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

для всякого фиксированного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема доказана.

§ 3. Операторы Фурье F и F^{-1} на пространстве $\mathcal{P}$

Теорема 2. *Операторы Фурье F и F^{-1} являются взаимно обратными операторами на $\mathcal{P}$.*

Доказательство.

Шаг 1. Для доказательства утверждения теоремы сначала докажем следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y)f(x+y)\,dy. \tag{3.1}$$

$\Box$ Действительно, имеет место цепочка равенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy g(y)\int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(z-x,y)}f(z) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dz f(z)\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy g(y)e^{-i(z-x,y)} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz f(z)\widehat{g}(z-x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy f(x+y)\widehat{g}(y). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Возьмем теперь в качестве функции $g(y)$ функцию $g(\varepsilon y)$.

$$g_\varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(\varepsilon x).$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\widehat{g_\varepsilon}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y,z)}g(\varepsilon z) = \{w = \varepsilon z\}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}}\frac{1}{\varepsilon^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N} dw\, e^{-i(y/\varepsilon,w)}g(w) = \frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right). \tag{3.2}$$

С учетом равенств (3.1) и (3.2) приходим к следующему равенству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(y)\widehat{f}(y)e^{i(x,y)}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}_\varepsilon(y)f(x+y)\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{g}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)f(x+y)\,dy = \left\{z = \frac{y}{\varepsilon}\right\}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(z)f(x+\varepsilon z)\,dz. \tag{3.3}$$

Шаг 3. Теперь возьмем в равенстве (3.3) в качестве функции $g(x)$:

$$g(x) = e^{-|x|^2/2} \Rightarrow g_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon^2|x|^2/2}.$$

Тогда переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (3.3), получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{g}(y)\, dy. \tag{3.4}$$

Справедливы следующие свойства введенной функции $g(x)$:

$$\widehat{g}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|y|^2}{2}} e^{-i(z,y)}\, dy = e^{-|z|^2/2},\ ^{1)}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2/2}\, dz = 1.$$

С учетом этого из равенства (3.4) приходим к следующему равенству:

$$\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)}\, dy = f(x).$$

Которое иначе можно переписать как

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Шаг 4. Аналогично доказывается и равенство

$$F\left[F^{-1}[f]\right] = f \quad \text{для всех} \quad f(x) \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Теорема доказана.

§ 4. Свертка

1. Докажем, что операция свертки (которая, очевидно, является нелинейной операцией) не выводит нас за рамки пространства $\mathcal{P}$.

□ Итак, пусть $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{P}$, тогда воспользуемся следующим легко проверяемым неравенством:

$$\left[1 + |x|^2\right] \leqslant 2\left[1 + |x-y|^2\right]\left[1 + |y|^2\right],$$

поскольку

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| \Rightarrow |x|^2 \leqslant (|x-y| + |y|)^2 =$$
$$= |x-y|^2 + 2|x-y||y|| + |y|^2 \leqslant 2|x-y|^2 + 2|y|^2.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left[1 + |x|^2\right]^n \partial^\alpha \left(\varphi * \psi\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[1 + |x|^2\right]^n \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\psi(y)\, dy =$$

---

1) Этот интеграл вычисляется методами ТФКП.

$$
= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy \, \frac{\left[1+|x|^2\right]^n}{\left[1+|x-y|^2\right]^n \left[1+|y|^2\right]^n} \times
$$
$$
\times \left[1+|x-y|^2\right]^n \partial^\alpha_{x-y}\varphi(x-y) \left[1+|y|^2\right]^n \psi(y) \leqslant
$$
$$
\leqslant 2^n \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left[1+|z|^2\right]^n |\partial^\alpha_z \varphi(z)| \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy \, \left[1+|y|^2\right]^n \psi(y) \leqslant
$$
$$
\leqslant 2^n \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left[1+|z|^2\right]^n |\partial^\alpha_z \varphi(z)| \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[1+|y|^2\right]^{n+m} |\psi(y)| \times
$$
$$
\times \int\limits_{\mathbb{R}^N} dw \, \frac{1}{\left[1+|w|^2\right]^m}, \quad m > N/2.
$$

Тогда из этой цепочки приходим к следующему неравенству:

$$
\max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left[1+|x|^2\right]^n |(\varphi * \psi)(x)| \leqslant
$$
$$
\leqslant c \max_{|\alpha|\leqslant n} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \left[1+|z|^2\right]^n |\partial^\alpha_z \varphi(z)| \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left[1+|y|^2\right]^{n+m} |\psi(y)| \leqslant
$$
$$
\leqslant c p_n(\varphi) p_{n+m}(\psi),
$$

и получаем в результате неравенство:

$$
p_n(\varphi * \psi) \leqslant c(m,n) p_n(\varphi) p_{n+m}(\psi) \quad \text{при} \quad m \in \mathbb{N}, \ m > \frac{N}{2}.
$$

Стало быть, $\varphi * \psi \in \mathcal{P}$ для всех $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{P}$. ⊠

2. Теперь применим оператор преобразования Фурье к свертке двух функций:

$$
F[\varphi * \psi](y) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \, e^{-i(x,y)} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz \varphi(x-z)\psi(z) =
$$
$$
= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz \psi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \varphi(x-z) e^{-i(y,x-z)} e^{-i(y,z)} =
$$
$$
= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dz e^{-i(y,z)} \psi(z) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx \varphi(x-z) e^{-i(y,x-z)} =
$$
$$
= (2\pi)^{N/2} \widehat{\psi}(y) \widehat{\varphi}(y).
$$

3. Докажем теперь равенство

$$
F[f(x)g(x)] = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \widehat{f} * \widehat{g}. \tag{4.1}
$$

□ Ранее мы доказали следующее равенство

$$F\left[f * g\right] = (2\pi)^{N/2} \widehat{f}\widehat{g}. \tag{4.2}$$

Возьмем в этой формуле вместо функций f и g функции $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$, соответственно. Тогда из формулы (4.2) получим следующее равенство:

$$F\left[\widetilde{f} * \widetilde{g}\right] = (2\pi)^{N/2} \widehat{\widetilde{f}} \cdot \widehat{\widetilde{g}} = (2\pi)^{N/2} fg.$$

Но непосредственным вычислением может быть проверена справедливость следующего равенства:

$$F\left[\widetilde{f} * \widetilde{g}\right] = F^{-1}\left[\widehat{f} * \widehat{g}\right].$$

И в результате приходим к равенству (4.1). ⊠

§ 5. Транспонированный оператор

Теперь мы приступим к изучению транспонированного оператора F^t к оператору Фурье F:

$$F^t : \mathcal{P}^{'} \to \mathcal{P}^{'},$$

$$\left\langle F^t\left[f^*\right], \varphi\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, F[\varphi]\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{P},\ f^* \in \mathcal{P}^{'}. \tag{5.1}$$

Рассмотрим сначала случай регулярной обобщенной функции из $\mathcal{P}^{'}$, т. е. такой, что найдется такая локально интегрируемая функция $f(x) \in \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$, что для скобок двойственности имеет явное представление:

$$\langle f^*, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx f(x)\varphi(x).$$

Тогда правая часть равенства (5.1) примет следующий вид:

$$\langle f^*, F[\varphi]\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, f(x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy e^{-i(x,y)}\varphi(y) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \varphi(y) \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} dx e^{-i(x,y)} f(x) = \langle F\left[f^*\right], \varphi\rangle. \tag{5.2}$$

Так что для случая регулярных обобщенных функций из $\mathcal{P}^{'}$ мы пришли к выводу, что оператор $F^t \equiv F$. Следовательно, для всех элементов из $\mathcal{P}^{'}$ за определение транспонированного оператора F^t нужно взять равенство (5.1), в котором следует положить $F^t = F$.

Определение 4. *Преобразованием Фурье обобщенных функций $f^* \in \mathcal{P}^{'}$ называется линейный оператор*

$$F^t : \mathcal{P}^{'} \to \mathcal{P}^{'},$$

определенный следующей формулой:

$$\left\langle F^t\left[f^*\right],\varphi\right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, F[\varphi]\rangle \quad \textit{для всех} \quad \varphi\in\mathcal{P},\ f^*\in\mathcal{P}^{'}. \qquad (5.3)$$

§ 6. Фундаментальные решения

Решение уравнения в смысле пространства $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$

$$\langle D_x\mathcal{E}(x), \varphi(x)\rangle = \varphi(0)$$

для всех $\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ называется фундаментальным решением некоторого дифференциального оператора D_x.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим волновой оператор

$$D\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Найдем его фундаментальное решение.

$\square$ Рассмотрим следующее уравнение в смысле распределений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathcal{E}(x,t)=\delta(x,t).$$

Имеем $\delta(x,t)=\delta(x)\delta(t)$ в случае декартова произведения

$$\mathbb{R}^2_+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}_+.$$

Поэтому применим преобразование Фурье по переменной $x\in\mathbb{R}^1$. Получим равенство в смысле пространства $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}_+)$

$$\frac{d^2\widehat{\mathcal{E}}}{dt^2}+k^2\widehat{\mathcal{E}}=\delta(t).$$

Его решение

$$\widehat{\mathcal{E}}(k,t)=\frac{\vartheta(t)}{(2\pi)^{1/2}}\frac{\sin(kt)}{k},$$

$$\mathcal{E}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\vartheta(t)\frac{\sin(kt)}{k}e^{ikx}\,dk=\frac{1}{2}\vartheta(t-|x|). \quad \boxtimes$$