Лекция 12

$\mathbb{B}$–ЗНАЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

§ 1. Пространства $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$

Теперь определим классы функций, интегрируемых по Бохнеру. Дадим определение.

Определение 1. *Классом функций* $\mathcal{L}^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *при* $p \in [1,+\infty)$ *назовем множество сильно* μ*–измеримых на отрезке* $[0,T]$ $\mathbb{B}$*–значных функций, для которых функция* $\|f(t)\|^p$ *является* μ*–интегрируемой на отрезке* $[0,T]$.

Замечание 1. Пространство функций $\mathcal{L}^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ не является линейным. Поскольку не единственен нулевой элемент.

Обозначим через $\mathcal{J}_0([0,T],\mu;\mathbb{B})$ подмножество множества $\mathcal{L}^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$, состоящее из μ–измеримых $\mathbb{B}$–значных функций равных нулю почти всюду на $[0,T]$. И рассмотрим факторпространство

$$\mathcal{L}^p([0,T],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,T],\mu;\mathbb{B}). \tag{1.1}$$

Это факторпространство является линейным пространством, поскольку мы отождествили все функции, отличающиеся лишь на множестве нулевой μ–меры Лебега. Значит, отождествлены и все функции равные нулю почти всюду по μ–мере Лебега. Как и всякое факторпространство, введенное факторпространство состоит из дизъюнктных классов эквивалентности. Мы будем использовать этот факт в дальнейшем.

Дадим следующее определение.

Определение 2. *Через* $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *обозначим факторпространство* $\mathcal{L}^p([0,T],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *при* $p \in [1,+\infty)$.

Отдельно нужно рассмотреть случай $p = +\infty$.

Определение 3. *Через* $\mathcal{L}^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *обозначим множество* μ*–измеримых функций, которые почти всюду по норме пространства* $\mathbb{B}$ *ограничены.*

И аналогично определению 2 дадим следующее:

Определение 4. *Через* $L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *обозначим факторпространство* $\mathcal{L}^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,T],\mu;\mathbb{B})$.

Так введенные множества $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ при $p \in [1,+\infty) \cup \{\infty\}$ являются линейными пространствами. Естественно, возникает вопрос:

являются ли они банаховыми пространствами относительно некоторых норм?

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пространство* $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *является банаховым при* $p \in [1,+\infty)$ *относительно следующей нормы*:

$$\|u\|_p \overset{\text{def}}{=} \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|^p \, \mu(dt)\right)^{1/p}. \tag{1.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Заметим, что (1.2) — это действительно норма. Это проверяется непосредственно с использованием неравенства треугольника и неравенства Минковского.

Шаг 2. Пусть $\{u_n(t)\}$ — это фундаментальная относительно нормы (1.2) последовательность нормированного пространства $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$, т. е.

$$\lim_{n,m\to+\infty} \int\limits_0^T \|u_n(t) - u_m(t)\|^p \, \mu(dt) = 0.$$

Выберем теперь такую подпоследовательность $\{u_{n_j}(t)\} \subset \{u_n(t)\}$, чтобы имело место неравенство

$$\int\limits_0^T \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\|^p \, \mu(dt) < \frac{1}{4^j} \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

где мы ввели для удобства обозначение

$$v_j(t) := u_{n_j}(t).$$

Шаг 3. Введем следующее множество:

$$\mathrm{M}_j := \left\{t \in [0,T] : \ \|v_{j+1}(t) - v_j(t)\| > 2^{-j}\right\}.$$

Из (1.3) получим, что

$$\mu(\mathrm{M}_j)\, 2^{-j} < 4^{-j} \Rightarrow \mu(\mathrm{M}_j) < 2^{-j}.$$

Определим множество

$$\mathrm{N}_i = \bigcup_{j \geqslant i} \mathrm{M}_j.$$

Понятно, что

$$\mathrm{N}_1 \supset \mathrm{N}_2 \supset \mathrm{N}_3 \cdots$$

и

$$\mu(\mathrm{N}_i) \leqslant \sum_{j\geqslant i} \frac{1}{2^j} \to 0 \quad \text{при} \quad i \to +\infty.$$

Поэтому множество

$$\mathrm{N} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathrm{N}_i$$

имеет нулевую меру Лебега μ:

$$\mu\,(\mathrm{N}) = 0.$$

Шаг 4. Пусть $t \in [0,T]\backslash\mathrm{N}$, т. е. это означает, что $t \notin \mathrm{N}_i$ при некотором $i \in \mathbb{N}$, а это в свою очередь означает, что $t \notin \mathrm{M}_j$ для всех $j \geqslant i$, т. е. для таких t имеет место неравенство

$$\|v_{j+1}(t) - v_j(t)\| \leqslant \frac{1}{2^j} \quad \text{для всех} \quad j \geqslant i.$$

Следовательно, в силу неравенства треугольника при $l > j$

$$\|v_l(t) - v_j(t)\| \leqslant \sum_{k=j}^{l-1} \|v_{k+1}(t) - v_k(t)\| \leqslant \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to +\infty.$$

Следовательно, при $t \in [0,T]\backslash\mathrm{N}$ последовательность $\{v_j(t)\}$ фундаментальная в $\mathbb{B}$. Значит, в силу полноты $\mathbb{B}$ эта последовательность для каждого $t \in [0,T]\backslash\mathrm{N}$ сходится сильно в $\mathbb{B}$ к некоторой функции $u(t)$.

Шаг 5. Доопределим функцию $u(t)$ нулем на множестве N.

$$\overline{u}(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} u(t), & \text{если} \quad t \in [0,T]\backslash\mathrm{N}; \\ 0, & \text{если} \quad t \in \mathrm{N}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Докажем, что $\mathbb{B}-$значная *функция $\overline{u}(t)$ сильно $\mu-$измерима.*

□ Действительно, $\{v_j(t)\}$ — это последовательность сильно измеримых функций. Следовательно, для каждой $v_j(t)$ найдется последовательность простых функций $\{h_n^j(t)\}$ таких, что $\mu-$почти всюду на отрезке $[0,T]$ имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to+\infty} \|v_j(t) - h_n^j(t)\| = 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $j \in \mathbb{N}$ и $n = n(j) \in \mathbb{N}$, что имеет место неравенство

$$\|\overline{u}(t) - h_n^j(t)\| \leqslant \|\overline{u}(t) - v_j(t)\| + \|v_j(t) - h_n^j(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому можно выбрать из последовательности простых функций $\{h_n^j(t)\}$ подпоследовательность $\{\overline{h}_m(t)\}$ простых функций, которая будет $\mu-$почти всюду на отрезке $[0,T]$ сильно в $\mathbb{B}$ сходится к функции $\overline{u}(t)$. Следовательно, $\overline{u}(t)$ сильно измерима. ⊠

Шаг 6. В силу леммы Фату получим неравенство

$$\int_0^T \|\overline{u}(t) - v_j(t)\|^p\,\mu(dt) \leqslant \liminf_{i\to+\infty} \int_0^T \|v_i(t) - v_j(t)\|^p\,\mu(dt).$$

Причем правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора $j \in \mathbb{N}$, поскольку $\{v_j(t)\}$ — это по условию фундаментальная последовательность. Поэтому

$$\lim_{j\to+\infty} \int\limits_0^T \|\overline{u}(t) - v_j(t)\|^p \,\mu(dt) = 0.$$

Шаг 7. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\int\limits_0^T \|\overline{u}(t) - u_n(t)\|^p \,\mu(dt) \leqslant \int\limits_0^T \left(\|\overline{u}(t) - u_{n_j}(t)\| + \|u_{n_j} - u_n(t)\|\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\int\limits_0^T \|\overline{u}(t) - u_{n_j}(t)\|^p \,\mu(dt) + c(p)\int\limits_0^T \|u_{n_j}(t) - u_n(t)\|^p \,\mu(dt),$$

из которого предельным переходом и приходим к доказательству того, что фундаментальная последовательность $\{u_n(t)\}$ сходится по норме (1.2) к некоторой функции $\overline{u}(t) \in L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$.

Теорема доказана.

Дадим определение.

Определение 5. *Ступенчатой функцией назовем простую функцию* [1]) *вида*:

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} b_i \chi(S_i),$$

где S_i — это непересекающиеся интервалы, а $\chi(S_i)$ — характеристическая функция множества S_i.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Множество ступенчатых функций плотно в банаховом пространстве $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ при $p \in [1,+\infty)$.*

Доказательство.

По самому построению для любой функции $u(t) \in L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ найдется такая последовательность простых функций $\{h_n(t)\}$, сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$:

$$h_n(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для μ–почти всех $t \in [0,T]$. Построим следующую последовательность простых функций:

$$w_n(t) = \begin{cases} h_n(t), & \text{при} \quad \|h_n(t)\| \leqslant 2\|u(t)\|; \\ 0, & \text{при} \quad \|h_n(t)\| > 2\|u(t)\|. \end{cases}$$

[1]) Смотри определение 1 простой функции.

Прежде всего отметим, что последовательность $\{w_n(t)\}$ сильно в $\mathbb{B}$ μ–почти всюду на отрезке $[0,T]$ сходится к $u(t)$. Кроме того,

$$\|u(t)-w_n(t)\| \leqslant 3\|u(t)\|.$$

Следовательно, по теореме Лебега приходим к выводу, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^T \|u(t)-w_n(t)\|^p\,\mu(dt)=0.$$

Тем самым, любую функцию из $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ можно аппроксимировать простыми функциями. Совсем несложно доказывается, что любую простую функцию можно аппроксимировать ступенчатыми по норме пространства $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 2. *Векторное пространство $L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B})$ является банаховым относительно следующей нормы*:

$$\|u\|_\infty \stackrel{\mathrm{def}}{=} \operatorname*{vraimax}_{t\in[0,T]}\|u(t)\|. \tag{1.5}$$

Справедливо следующее неравенство Гельдера.

Лемма 2. *Пусть $u(t)\in L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty]$, а $v(t)\in$ $\in L^q([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$, где*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

то

$$\langle v(t),u(t)\rangle \in L^1([0,T],\mu)$$

и справедливо следующее неравенство Гельдера

$$\int\limits_0^T |\langle v(t),u(t)\rangle|\;\mu(dt) \leqslant \|u\|_p\|v\|_q^*, \tag{1.6}$$

где

$$\|u\|_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|^p\,\mu(dt)\right)^{1/p}, \quad \|v\|_q^* \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\int\limits_0^T \|v(t)\|_*^q\,\mu(dt)\right)^{1/q}.$$

Доказательство.

Пусть $\{u_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 1 лекции 10 для функции $u(t)$, а $\{v_n(t)\}$ — это последовательность простых функций для функции $v(t)$. Тогда

$$\langle v_n(t),u_n(t)\rangle \to \langle v(t),u(t)\rangle \quad \mu-\text{почти всюду на}\quad [0,T].$$

Но тогда функция $\langle v(t), u(t)\rangle$ является $\mu-$измеримой на отрезке $[0, T]$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|\langle v(t), u(t)\rangle| \leqslant \|v(t)\|_* \|u(t)\|.$$

Теперь осталось воспользоваться неравенством Гельдера для скалярных функций.

Теорема доказана.

Замечание 3. Из неравенства Гельдера (1.6) вытекает, что формула

$$\langle \Phi, f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \langle f^*(t), f(t)\rangle\ \mu(dt) \quad \text{для всех} \quad f(t) \in L^p([0,T], \mu; \mathbb{B}) \tag{1.7}$$

задает семейство линейных и непрерывных функционалов над пространством $L^p([0,T], \mu; \mathbb{B})$ при каждом фиксированном $f^*(t) \in \in L^q([0,T], \mu; \mathbb{B}^*)$ при $p \in [1, +\infty]$ и $q = p/(p-1)$.

Справедлива следующее важное утверждение, доказательство которого мы не будем приводить, поскольку оно достаточно длинное и трудоемкое. Доказательство можно найти в работе [**?**].

Теорема 3. *Пусть банахово пространство $\mathbb{B}$ является либо рефлексивным либо сепарабельным, тогда формулой* (1.7) *задаются все линейные и непрерывные функционалы над пространством $L^p([0,T], \mu; \mathbb{B})$ при $p \in (1, +\infty)$. Более того, можно отождествить пространство*

$$(L^p([0,T], \mu; \mathbb{B}))^*$$

с пространством

$$L^q([0,T], \mu; \mathbb{B}^*) \quad \textit{при} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Следствие 1. *При условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}$ из этой теоремы вытекает рефлексивность пространства $L^p([0,T], \mu; \mathbb{B})$ при $p \in (1, +\infty)$.*

Кроме того, справедлив также следующий результат, доказательство которого приведено в [**?**].

Теорема 4. *Пусть $\mathbb{B}$ — это рефлексивное банахово пространство. Тогда каждый линейный и непрерывный функционал над $L^1([0,T], \mu; \mathbb{B})$ представим в следующем виде*:

$$\langle \Phi, f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^T \langle f^*(t), f(t)\rangle\ \mu(dt) \quad \textit{для всех} \quad f(t) \in L^1([0,T], \mu; \mathbb{B}), \tag{1.8}$$

где

$$f^*(t) \in L^\infty([0,T], \mu; \mathbb{B}^*).$$

Более того, можно отождествить пространство

$$\left(L^1([0,T],\mu;\mathbb{B})\right)^* \quad \text{с пространством} \quad L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B}^*).$$

§ 2. Сильная, слабая и $*-$слабая сходимости

Теперь мы перейдем к рассмотрению различных типов сходимостей последовательностей в пространствах $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty]$. При этом будем следовать общим результатам, полученным ранее для скалярных пространств Лебега $L^p(0,T,\mu)$. Дадим определения.

Определение 6. *Сильной сходимостью последовательности $\{f_n(t)\}$ в пространстве $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty]$ к функции $f(t)\in L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ называется сходимость по норме этого пространства:*

$$\|f_n(t)-f(t)\|_p\to 0 \quad \text{при} \quad n\to+\infty \tag{2.1}$$

и обозначается сильная сходимость как

$$f_n\to f \quad \text{сильно в} \quad L^p([0,T],\mu;\mathbb{B}).$$

Определение 7. *Слабой сходимостью последовательности $\{f_n(t)\}$ в пространстве $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty)$ к функции $f(t)\in L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ называется сходимость следующей числовой последовательности:*

$$\langle\langle f^*,f_n(t)\rangle\rangle_p\to\langle\langle f^*,f(t)\rangle\rangle_p \quad \text{при} \quad n\to+\infty \tag{2.2}$$

для всех

$$f^*(t)\in\left(L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})\right)^*, \tag{2.3}$$

где $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_p$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ и $L^q([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$ при $q=p/(p-1)$.

Причем из (2.2) вытекает, что при условии рефлексивности в случае $p=1$ и рефлексивности или сепарабельности в случае $p\in(1,+\infty)$ банахова пространства $\mathbb{B}$ слабая сходимость определяется следующим образом:

$$\int\limits_0^T\langle f^*(t),f_n(t)\rangle\;\mu(dt)\to\int\limits_0^T\langle f^*(t),f(t)\rangle\;\mu(dt) \quad \text{при} \quad n\to+\infty \tag{2.4}$$

для всех $f^*(t)\in L^q([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$ при $q=p/(p-1)$.

Обозначается слабая сходимость следующим образом:

$$f_n\rightharpoonup f \quad \text{слабо в} \quad L^p([0,T],\mu;\mathbb{B}) quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

Определение 8. *$*-$Слабой сходимостью последовательности функций $\{f_n^*(t)\}\subset L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$ к функции $f^*(t)\in$ $\in L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$ при условии рефлексивности банахова про-*

странства $\mathbb{B}$ *называется сходимость следующей числовой последовательности*:

$$\langle\langle f_n^*, f\rangle\rangle_\infty \to \langle\langle f^*, f\rangle\rangle_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty, \tag{2.5}$$

для всех $f(t) \in L^1\left([0,T], \mu; \mathbb{B}\right)$.

Сходимость числовой последовательности (2.5) эквивалентна сходимости следующей числовой последовательности:

$$\int\limits_0^T \langle f_n^*(t), f(t)\rangle \; \mu(dt) \to \int\limits_0^T \langle f^*(t), f(t)\rangle \; \mu(dt) \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{2.6}$$

для всех $f(t) \in L^1([0,T], \mu; \mathbb{B})$. Обозначается эта сходимость следующим образом:

$$f_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} f^* \quad * -\text{слабо в} \quad L^\infty([0,T], \mu; \mathbb{B}^*) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Замечание 2. Заметим, что мы не случайно определили $*-$слабую сходимость только для пространства $L^\infty([0,T], \mu; \mathbb{B}^*)$ (при условии рефлексивности $\mathbb{B}$), поскольку в случае пространства $L^p([0,T], \mu; \mathbb{B}^*)$ при $p \in (1, +\infty)$ $*-$слабая сходимость совпадает со слабой сходимостью, так как пространство $L^p([0,T], \mu; \mathbb{B}^*)$ является рефлексивным.

Для введенных трех сходимостей справедливы следующие общие результаты:

Теорема 5. *Справедливы следующие два утверждения*:

(I) *Всякая слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n(t)\}$ *из банахова пространства* $L^p([0,T], \mu; \mathbb{B})$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad f_n \rightharpoonup f_\infty \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\textit{то} \quad \|f_\infty\|_p \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_p\,;$$

(II) *Всякая $*-$слабо сходящаяся последовательность* $\{f_n^*\}$ *из банахова пространства* $L^\infty([0,T], \mu; \mathbb{B}^*)$ *ограничена, причем*

$$\textit{если} \quad f_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} f_\infty^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$
$$\textit{то} \quad \|f_\infty^*\|_\infty^* \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n^*\|_\infty^*,$$

где мы обозначили через $\|\cdot\|_\infty^*$ *норму в банаховом пространстве* $L^\infty([0,T], \mu; \mathbb{B}^*)$:

$$\|f^*\|_\infty^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vraimax}_{t\in[0,T]} \|f^*(t)\|_*.$$

Теорема 6. *Пусть* $\{f_n(t)\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного банахова пространства*

$L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ [1]) *при* $p \in [1,+\infty)$. *Тогда из* $\{f_n(t)\}$ *можно выделить слабо сходящуюся в* $L^p([0,T],\mu;\mathbb{B})$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}(t)\}$:

$$f_{n_n} \rightharpoonup f \quad \text{слабо в} \quad L^p([0,T],\mu;\mathbb{B}) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема 7. *Пусть* $\{f_n^*(t)\}$ — *ограниченная по норме последовательность элементов банахова пространства* $L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$. *Тогда из* $\{f_n^*(t)\}$ *можно выделить* $*-$*слабо сходящуюся в* $L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B}^*)$ *подпоследовательность* $\{f_{n_n}^*\}$:

$$f_{n_n}^* \overset{*}{\rightharpoonup} f^* \quad *-\text{слабо в} \quad L^\infty([0,T],\mu;\mathbb{B}^*) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

[1]) Мы также требуем, чтобы $\mathbb{B}$ было рефлексивным банаховым пространством.