Вопросы по курсу «Тензорный анализ. Часть 1»

1. Понятие числового набора, линейное пространство $\mathbb{K}^{N_1\times\cdots\times N_r}$; понятие геометрического объекта в линейном пространстве L, линейное пространство $(GL)_r$; понятие тензора в линейном пространстве L, линейное пространство $(TL)^q_p$; прямое произведение тензоров, базис линейного пространства $(TL)^q_p$; интерпретация тензоров как полилинейных форм.

2. Транспонирование тензора, перестановка сомножителей в прямом произведении тензоров; антисимметричный тензор, линейное пространство $(\Omega L)^q_p$, альтернирование тензора.

3. Внешнее произведение тензоров; ассоциативность внешнего произведения тензоров.

4. Перестановка сомножителей во внешнем произведении тензоров; базис линейного пространства $(\Omega L)^q_p$.

5. Топология; открытое множество, окрестность точки, окрестность множества; внутренняя точка множества A, граничная точка множества A, предельная точка множества A, точка прикосновения множества A, $\mathrm{int}(A)$, ∂A, $\overline{A}$; замкнутое множество, регулярное множество.

6. Хаусдорфово пространство; открытое покрытие множества, компактное множество; теорема о том, что если: (M,τ) — хаусдорфово топологическое пространство, A — компактное множество в пространстве (M,τ), $p\in M$, $p\notin A$, то можно указать такую окрестность ω_1 множества A и такую окрестность ω_2 точки p, что $\omega_1\cap\omega_2=\varnothing$.

7. Определяющая система окрестностей точки, первая аксиома счётности; база топологии, вторая аксиома счётности; связь между заданием базы топологии и заданием определяющей системы окрестностей каждой точки пространства.

8. Условие того, что система множеств $B\subseteq P(M)$ является базой некоторой топологии на множестве M.

9. Индуцированная топология; прямое произведение топологических пространств.

10. Определение непрерывности функции F в точке p; запись необходимого и достаточного условия непрерывности функции F в точке p с помощью определяющих систем окрестностей точек p и $F(p)$.

11. Непрерывные функции и гомеоморфизмы в пространствах (M_1,τ_1), (M_2,τ_2).

12. Непрерывные функции и гомеоморфизмы в пространствах $\mathbb{K}^{N_1}$ и $\mathbb{K}^{N_2}$ (без доказательства).

13. Гладкие функции и диффеоморфизмы в пространствах $\mathbb{R}^{N_1}$, $\mathbb{R}^{N_2}$.

14. Определение координатной карты, размерность координатной карты; C^r-согласованные координатные карты, положительно C^r-согласованные координатные карты; множество координатных карт одной размерности, C^r-гладкое множество координатных карт, C^r-согласованные множества координатных карт.

15. Условие того, что координатные карты h_1, h_2 — C^r-согласованы.

16. Определение C^r-гладкого координатного атласа, определение максимального C^r-гладкого координатного атласа; единственность расширения данного C^r-гладкого координатного атласа до максимального C^r-гладкого координатного атласа; существование расширения данного C^r-гладкого координатного атласа до максимального C^r-гладкого

координатного атласа.

17. Гладкое многообразие (квазимногообразие), размерность гладкого многообразия (квазимногообразия); простейшие примеры гладких многообразий (квазимногообразий); прямое произведение гладких многообразий (квазимногообразий).

18. Определение открытого множества на C^0-гладком квазимногообразии (M, μ), система открытых множеств τ_μ; условие того, что A — открытое множество.

19. Определение локально евклидова топологического пространства размерности N; теорема о том, что если: (M, τ) — локально евклидово топологическое пространство размерности N_1, (M, τ) — локально евклидово топологическое пространство размерности N_2, то $N_1 = N_2$; множество функций μ_τ в локально евклидовом топологическом пространстве (M, τ); теорема о том, что если (M, τ) — локально евклидово топологическое пространство размерности N, то: (M, μ_τ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $N \in \mathrm{N}$, $\dim\big((M, \mu_\tau)\big) = N$.

20. Теорема о том, что если: (M, μ) — C^0-гладкое квазимногообразие, $N \in \mathrm{N}$, $\dim\big((M, \mu)\big) = N$, то: (M, τ_μ) — локально евклидово топологическое пространство размерности N; $\mathrm{MA}(\mu, 0) = \mu_{\tau_\mu}$.

21. Теорема о том, что если (M, τ) — локально евклидово топологическое пространство размерности N, то: (M, μ_τ) — C^0-гладкое многообразие, $N \in \mathrm{N}$, $\dim\big((M, \mu_\tau)\big) = N$; $\tau = \tau_{\mu_\tau}$.

22. C^r-гладкая векторная функция на C^r-гладком квазимногообразии; C^r-гладкое отображение из (M_1, μ_1) в (M_2, μ_2); C^r-диффеоморфизм из (M_1, μ_1) в (M_2, μ_2); частные производные C^1-гладкой векторной функции на C^1-гладком квазимногообразии.

23. Касательное пространство T_pM; голономный базис пространства T_pM; дифференциал C^1-гладкой векторной функции на C^1-гладком квазимногообразии; дифференциал C^1-гладкого отображения из (M_1, μ_1) в (M_2, μ_2); пространство $(T_pM)^*$, базис пространства $(T_pM)^*$, сопряжённый к голономному базису пространства T_pM, пространство $(T_pM)^{s_2}_{s_1}$; касательное C^{r-1}-гладкое квазимногообразие $(TM, \tilde{T}\mu)$ к C^r-гладкому квазимногообразию (M, μ).

24. Тензорное поле на C^1-гладком квазимногообразии; C^r-гладкое тензорное поле на C^{r+1}-гладком квазимногообразии; проблема дифференцирования тензорного поля.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М : Физматлит. — 2001.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. М : Наука. — 1984.

[3] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука. — 1989.

[4] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М. : Наука. — 1987.

[5] *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. — М. : Мир. — 1987.