ЛЕКЦИЯ 5А

Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$

0. Вводные замечания

На этом занятии основное внимание будет уделено пространству $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ — пространству непрерывных линейных функционалов, действующих на пространстве основных функций $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Из теоретических основ, изложенных на лекции 5, на практике важно следующее:
1) линейный функционал f, определённый на $\mathcal{D}$, непрерывен тогда и только тогда, когда он секвенциально непрерывен в нуле, т. е.

$$\forall\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D} \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \langle f, \varphi_n\rangle \to 0;$$

2) говорят, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, если существует такой компакт $K \subset \mathbb{R}^N$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ и $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(K)} \varphi$. Иными словами, носители всех функций последовательности лежат в некотором компакте и все производные функций $\varphi_n(x)$ (включая сами функции) сходятся равномерно в K (а тем самым, и в $\mathbb{R}^N$) к соответствующим производным функции φ.

1. Пространство $\mathcal{D}$: некоторые примеры

1. Функция-«шапочка». Напомним:

$$\omega_\varepsilon(x) = c_\varepsilon \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь константа c_ε такова, что $\int_{\mathbb{R}^N} \omega_\varepsilon(x)\,dx \equiv \int_{\{x\in\mathbb{R}^N||x|\leqslant\varepsilon\}} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

Рассмотрим случай $N = 1$. Имеем

$$1 = \int_{\mathbb{R}^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = c_\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x^2|}}\,dx = c_\varepsilon\cdot\varepsilon \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-\frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}}\,d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = c_\varepsilon\cdot\varepsilon\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-t^2}}\,dt.$$

Отсюда ясно, что

$$c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon}, \quad c = \left(\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}\,dx\right)^{-1}.$$

2. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$1)\,\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x), \quad 2)\,\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{1}{k}x\right), \quad 3)\,\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx)$$

сходящиеся в $\mathcal{D}$.

Итак, нужно проверить, что:
а) носители всех функций φ_k лежат в некотором компакте K;
б) все производные $\partial^\alpha\varphi_k$, $|\alpha| \geqslant 0$, равномерно на K сходятся к $\partial^\alpha\psi$, $\psi \in \mathcal{D}$.

1) а). Очевидно, носитель всех функций φ_k совпадает с носителем функции φ и, тем самым, условие а) выполнено. б) Имеем

$$\forall|\alpha| \geqslant 0 \quad \max_{x\in\operatorname{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| = \frac{1}{k} \max_{x\in\operatorname{supp}\varphi} |\partial^\alpha \varphi(x)| \to 0,$$

поскольку все рассматриваемые производные ограничены в K. Итак, $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

2) Очевидно, что при $\varphi(x) \not\equiv 0$ сходимость места не имеет уже потому, что $\operatorname{supp}\varphi_k = k\operatorname{supp}\varphi$ и, следовательно, не существует общего компакта, содержащего носители всех функций последовательности.

3) а) Легко видеть, что $\operatorname{supp}\varphi_k \subset \operatorname{supp}\varphi =: K$. Следовательно, условие а) выполнено. б) Очевидно, $\varphi_k \rightrightarrows 0$, т. к.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi_k(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{k}\varphi(kx)\right| \leqslant \sup_{kx\in\mathbb{R}^N} \frac{1}{k}|\varphi(kx)| = \frac{1}{k} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Значит, если $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, то $\varphi \equiv 0$. Но уже для производных первого порядка имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k(x) = k\frac{1}{k} \left(\frac{\partial}{\partial t_l}\varphi(t)\right)\Bigg|_{t=kx},$$

откуда следует, что

$$\sup_{x\in K} \left|\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi_k(x)\right| = \sup_{t\in K} \left|\frac{\partial}{\partial t_l}\varphi(t)\right| = C \not\to 0,$$

если переменная x_l выбрана так, что производная функции $\varphi(x)$ по этой переменной отлична от тождественного нуля. Итак, условие б) нарушено и последовательность $\{\varphi_k\}$ не стремится к 0 в $\mathcal{D}$, а следовательно, не имеет предела в этом пространстве.

2. Обобщённые функции из $\mathcal{D}'$: примеры

Далее по тексту, если не оговорено особо, считаем $N = 1$.

3. На лекции 5 были приведены примеры обобщённых функций: $\delta(x)$, $\theta(x)$, константа, $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, из которых $\delta(x)$ и $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ являются сингулярными обобщёнными функциями, а другие две — регулярными. Оставалось ещё показать, что выражение, входящее в определение функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, действительно имеет смысл при всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Сделаем это.

Зафиксируем $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. В выражении

$$\text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \equiv \lim_{\gamma\to+0} \left(\int_{-\infty}^{-\gamma} + \int_{\gamma}^{\infty}\right) \frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

определяющем эту функцию, содержится предел при $\gamma \to +0$. (Заметим ещё, что в силу финитности основной функции интегрирование фактически не распространяется до бесконечности.) Для доказательства существования этого предела можно воспользоваться критерием Коши. Иными словами, достаточно доказать, что

$$\text{при } \gamma_1, \gamma_2 \to +0, \gamma_1 < \gamma_2 \quad \int_{-\gamma_2}^{-\gamma_1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \to 0. \tag{2}$$

Для этого воспользуемся формулой конечных приращений Лагранжа, согласно которой для каждого $x > 0$ ($x < 0$) существует такое $x^* = x^*(x) \in (0; x)$ ($x^{**} = x^{**}(x) \in (x; 0)$), что $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(x^*)x$ (соответственно $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(x^{**})x$). Тогда сумму интегралов в (2) можно переписать в виде

$$I(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{-\gamma_2}^{-\gamma_1} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x^{**}) \right) dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left(\frac{\varphi(0)}{x} + \varphi'(x^*) \right) dx.$$

Имеем теперь

$$I(\gamma_1, \gamma_2) = \left(\int_{-\gamma_2}^{-\gamma_1} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \right) \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{-\gamma_2}^{-\gamma_1} \varphi'(x^{**})\, dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \varphi'(x^*)\, dx.$$

Первое слагаемое обращается в ноль как интеграл от нечётной функции, второе же оценивается величиной $\sup_{x\in\mathbb{R}^1} |\varphi'(x)| \cdot 2\gamma_2 \to 0$ при $\gamma_2 \to 0$, поскольку первый множитель в силу свойств основных функций ограничен.

4. Рассмотрим теперь обобщённую функцию $\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$, определяемую выражением

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\, dx. \tag{3}$$

Аналогично предыдущему можно доказать, что выражение (3) имеет смысл для всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ (см. задачу 4). Докажем теперь, что оно действительно представляет непрерывный линейный функционал. Поскольку линейность в силу свойств интеграла и предела очевидна, остаётся проверить лишь непрерывность.

Итак, пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к нулю в $\mathcal{D}$, т. е. эти функции равны нулю вне некоторого компакта $[-R; R]$ и сходятся в нём вместе со всеми производными к нулю равномерно. Для каждой из функций $\varphi_n(x)$ запишем разложение по формуле Тейлора до первого порядка включительно с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi_n(x) = \varphi_n(0) + \varphi_n'(0)x + \frac{\varphi_n''(x_n^*(x))}{2}x^2.$$

Тогда можем переписать (3) в виде

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v. p.} \int_{[-R;R]} \frac{\varphi_n'(0)}{x}\, dx + \int_{[-R;R]} \frac{\varphi_n''(x_n^*(x))}{2}\, dx,$$

где во втором слагаемом по понятной причине символ главного значения снят. Первое слагаемое равно нулю как предел интегралов от нечётной функции по симметричному множеству, а второе ограничено величиной $R \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |\varphi_n''(x)|$ и стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости производных.

Доказательство того факта, что данная обобщённая функция является сингулярной, остаётся в качестве самостоятельного упражнения (см. задачу 4).

5. Рассмотрим обобщённую функцию $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta(x-n)$, где a_n — произвольные числовые коэффициенты. Здесь полагается по определению

$$\langle \delta(x-x_0), \varphi \rangle \equiv \varphi(x_0) \tag{4}$$

(подробнее о линейной замене переменных в аргументе обобщённых функций мы поговорим в следующей лекции) и, тем самым,

$$\langle f, \varphi \rangle \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(n). \tag{5}$$

Заметим прежде всего, что выражение (5) определено для всех $\varphi \in \mathcal{D}$. Действительно, в силу финитности основной функции в $\langle f, \varphi \rangle$ войдёт лишь конечное число слагаемых:

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{|n|\leqslant m[\varphi]} a_n\varphi(n). \tag{6}$$

Линейность рассматриваемого функционала очевидна. Непрерывность тоже, поскольку, во-первых, при $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ все функции последовательности обращаются в нуль вне некоторого общего компакта и, тем самым, в (6) можно взять некоторое общее $m[\varphi]$, а во-вторых, в силу сходимости $\varphi_k(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ при каждом $x = n$ (здесь даже не существенно, что сходимость равномерна) имеем

$$\sum_{|n|\leqslant m[\varphi]} a_n\varphi_k(n) \to \sum_{|n|\leqslant m[\varphi]} a_n\varphi(n).$$

6. Пусть $f(x) \in C^1(x \leqslant x_0) \cap C^1(x \geqslant x_0)$, что понимается следующим образом: $f(x) \in$ $\in C^1(x < x_0) \cap C^1(x > x_0)$ и существуют (вообще говоря, различные) *конечные* предельные значения производной $f'(x)$ при $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$. Отметим, что отсюда сразу следует, что $f'(x)$ ограничена при $x \to x_0 - 0$ и при $x \to x_0 + 0$, а поэтому (в силу критерия Коши существования предела функции в точке) существуют конечные предельные значения $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$. Имеем далее (с учётом (4))

$$\begin{aligned}
&\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \\
&= -\left(f(x)\varphi(x)\right)\big|_{-\infty}^{x_0-0} - \left(f(x)\varphi(x)\right)\big|_{x_0+0}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = \\
&= f(x_0+0)\varphi(x_0) - f(x_0-0)\varphi(x_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \{f'(x)\}\varphi(x)\,dx = \langle \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x-x_0), \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

3. Операции над обобщёнными функциями из $\mathcal{D}'$: умножение на $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ —произвольная функция.

Определение 1. Произведением обобщённой функции f на функцию $a(x)$ называется обобщённая функция af, действующая по правилу

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a(x)\varphi(x) \rangle. \tag{7}$$

Это определение есть не что иное, как естественное обобщение равенства

$$\int_{\mathbb{R}^N}(a(x)f(x))\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)(a(x)\varphi(x))\,dx,$$

верного для регулярной обобщённой функции с представителем $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Легко видеть, что полученная операция преобразует всякую обобщённую функцию из $\mathcal{D}'$ в обобщённую функцию из $\mathcal{D}'$. В самом деле, для всякой $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем $a(x)\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Поэтому выражение в правой части (7) — значение обобщённой функции f на $a\varphi \in \mathcal{D}$ — заведомо имеет смысл. Линейность полученного функционала очевидна. Для доказательства непрерывности достаточно заметить, что в силу ограниченности функции $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и всех её производных *на компакте* K, содержащем носители всех функций последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, функции $a(x)\varphi_n(x)$ со всеми производными равномерно в K сходятся к $a(x)\varphi(x)$, а их носители, очевидно, содержатся в K.

7. Пусть $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. Тогда $a(x)\delta(x) \in \mathcal{D}$. Покажем, более того, что $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$, т. е.

$$\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}\ \ \langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = a(0)\varphi(0).$$

Действительно, по определению 1 для произвольной $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ имеем

$$\langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), a(x)\varphi(x)\rangle = (a(x)\varphi(x))|_{x=0} = a(0)\varphi(0).$$

8. 1) Очевидно, $x\mathcal{P}\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$. Покажем, что $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$. Действительно, имеем в силу определения обобщённой функции $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, а также определения произведения обобщённых функций:

$$\left\langle x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, x\varphi(x)\right\rangle = \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

2) $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x^2\varphi(x)\right\rangle = \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0)}{x^2}dx = \int_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

3) $x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3} = 1$. Имеем

$$\left\langle x^3\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, x^3\varphi(x)\right\rangle = \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^3\varphi(x) - 0^3\varphi(0) - (x^3\varphi(x))'|_0\cdot x)}{x^3}dx =$$
$$= \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^3\varphi(x) - 0^3\cdot\varphi(0) - 0\cdot x)}{x^3}dx = \int_{\mathbb{R}^1}\varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi(x)\rangle.$$

9. $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3} = \mathcal{P}\frac{1}{x}$. Действительно,

$$\left\langle x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right\rangle = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^3}, x^2\varphi(x)\right\rangle = \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^2\varphi(x) - 0^2\varphi(0) - (x^2\varphi(x))'|_0\cdot x)}{x^3}dx =$$
$$= \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{x^2\varphi(x) - 0}{x^3}dx = \mathrm{v.\,p.}\int_{\mathbb{R}^1}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

4. Операции над обобщёнными функциями из $\mathcal{D}'$: дифференцирование

Определение 2. *Производной* порядка α $\partial^\alpha f$ обобщённой функции $f \in \mathcal{D}$ называется обобщённая функция, действующая по правилу

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

В частности, при $N = 1$ имеем

$$\langle f^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle f, \varphi^{(n)} \rangle.$$

Это определение является естественным обобщением формулы интегрирования по частям

$$\int_{\mathbb{R}^N} \partial^\alpha f(x) \varphi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx$$

для регулярных обобщённых функций, заданных бесконечно дифференцируемой функцией $f(x)$. Здесь в силу финитности основной функции $\varphi(x)$ интегрирование фактически ведётся по компакту.

10. $\theta' = \delta(x)$ (здесь и далее равенство понимается в смысле равенства обобщённых функций). Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\theta(x), \varphi(x) \right\rangle = -\langle \theta(x), \varphi'(x) \rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} \theta(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx =$$
$$= -\varphi(x)|_0^{+\infty} = -(-\varphi(0)) = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle.$$

11. $\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$. Имеем

$$\left\langle \frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'(x) \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi'(x)}{x} dx = -\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi'(x)}{x} dx =$$
$$= \left\{ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \right\} =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to+0} \left[\left.\frac{\varphi(x)}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \left.\frac{\varphi(x)}{x}\right|_{+\varepsilon}^{+\infty} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x^2} dx \right] =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{\varphi(-\varepsilon)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2} dx + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{\varphi(0)}{x^2} dx \right] =$$
$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle - \lim_{\varepsilon\to+0} \left[-\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi(0) \left(-\left.\frac{1}{x}\right|_{-\infty}^{-\varepsilon} - \left.\frac{1}{x}\right|_{+\varepsilon}^{+\infty} \right) \right] =$$
$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle + \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi(0) \left(\frac{1}{-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right] =$$
$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle + \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} + \frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} \right) =$$
$$= -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle + \varphi'(0) - \varphi'(0) = -\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x) \right\rangle.$$

Замечание. Как видно, в основе техники работы с обобщёнными функциями лежит интегрирование по частям, а также учёт свойств гладкости основных функций (применяем теорему Лагранжа либо определение производной, стандартные пределы и т. п.).

12. Докажем, что решением уравнения $x^m u = 0$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ являются функции $u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c^k \delta^{(k)}(x)$, где c_k, $k = 0, \ldots, m-1$, — произвольные постоянные.

1) Очевидно, что $u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$ является решением рассматриваемого уравнения, поскольку

$$\left\langle x^m \delta^{(k)}(x), \varphi(x) \right\rangle = \left\langle \delta^{(k)}(x), x^m \varphi(x) \right\rangle = (-1)^k \left\langle \delta(x), (x^m \varphi(x))^{(k)} \right\rangle = 0$$

при всех $k = 0, \ldots, m-1$.

2) Докажем, что найдено общее решение рассматриваемого уравнения. Пусть $\eta(x)$ — основная функция, равная 1 в окрестности точки $x = 0$ (вопрос о её построении сейчас обсуждать не будем). Тогда для любой основной функции $\varphi(x)$ верно представление

$$\varphi(x) = \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^m \psi(x),$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{x^m} \left[\varphi(x) - \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right], \quad \psi(0) = 0. \tag{8}$$

Заметим, что $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ (см. задачу 10).

Следовательно, если $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$ — решение уравнения $x^m u = 0$, то

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle &= \left\langle u, \eta(x) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right\rangle + \langle u, x^m \psi(x) \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle u, \eta(x) x^k \rangle + \langle x^m u, \psi \rangle = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_k \varphi^{(k)}(0) + 0 = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

с $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle u, x^k \eta(x) \rangle$, $k = 0, \ldots, m-1$.

Важное замечание. При использовании рядов Тейлора для функций из $\mathcal{D}$ необходимо учитывать, что эти ряды, вообще говоря, лишь асимптотические и могут не сходиться к функции на интересующем нас множестве. В самом деле, в силу единственности аналитического продолжения с действительной прямой финитная функция, отличная от тождественного нуля, не может являться аналитической.

Задачи для самостоятельного решения

1. С помощью замены переменной установить вид зависимости нормировочного коэффициента в (1) от ε при произвольном N.

2*. Доказать, что $\omega_\varepsilon(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ при 1) $N = 2$; 2) произвольном N.

3. Выяснить, задают ли функции 1) e^x, 2) $e^{\frac{1}{x}}$ (после произвольного доопределения в нуле) обобщённые функции из $\mathcal{D}'$. Регулярными или сингулярными будут эти обобщённые функции?

4. Положим

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^m}, \varphi(x) \right\rangle \equiv \text{v. p.} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{\varphi(x) - \sum_{l=0}^{m-2} \frac{x^l}{l!}\varphi^{(l)}(0)}{x^m}\, dx. \tag{9}$$

Доказать, что:

1) правая часть формулы (9) определена при всех $\varphi(x) \in \mathcal{D}$;

2) она задаёт непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$;

3) этот функционал является сингулярной обобщённой функцией.

5. (Продолжение.) Показать, что:

1) $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$;

2) при всех $m \in \mathbb{N}$

$$x^m \mathcal{P}\frac{1}{x^m} = 1.$$

6. 1) Показать, что

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

2*) Сформулировать и доказать общее утверждение (ср. пример 9).

7. Показать, что $\frac{d}{dx}\operatorname{sgn} x = 2\delta(x)$ (Здесь и далее производная понимается в смысле обобщённых функций.)

8. 1) Показать, что

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -2\mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

2) Показать, что

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

(Как корректно придать смысл интегралу с логарифмом?)

9*. Положим для всех $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x^2+y^2}, \varphi \right\rangle = \int_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(0,0)}{x^2+y^2}\, dx\, dy + \int_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+y^2}\, dx\, dy.$$

1) Доказать, что это выражение определено для всех $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

2) Доказать, что оно задаёт непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}$.

3) Доказать, что

$$(x^2+y^2)\mathcal{P}\frac{1}{x^2+y^2} = 1,$$

где равенство понимается в смысле обобщённых функций.

10. Доказать, что функция, определённая формулой (8) в примере 12, принадлежит $\mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$:

1**) Доказать, что если $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, то функция

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{x}, & x \neq 0, \\ \varphi'(0), & x = 0, \end{cases}$$

также принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^1)$.

2) Вывести отсюда требуемое утверждение.