

**ЛЕКЦИЯ 1Б**  
**Интеграл Римана—Стилтьеса**

1. Пусть  $f_n(x) \in C[a; b]$ ,  $g(x) \in \mathbb{BV}[a; b]$ ,  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  на  $[a; b]$ . Тогда  $f(x) \in C[a; b]$  и

$$\int_a^b f_n(x) dg(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dg(x).$$

Действительно,  $f(x) \in C[a; b]$  как равномерный предел непрерывных функций; в силу оценки

$$\left| \int_a^b F(x) dg(x) \right| \leq \|F\|_{C[a; b]} V_a^b(g) \quad (1)$$

и свойств линейности интеграла Лебега—Стилтьеса имеем

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dg(x) \right| \leq \|f_n - f\|_{C[a; b]} V_a^b(g) \rightarrow 0.$$

2. Пусть  $f(x) \in C[a; b]$ ,  $g_n(x) \in \mathbb{BV}[a; b]$ ,  $V_a^b(g_n - g) \rightarrow 0$ . Тогда  $g \in \mathbb{BV}[a; b]$  и

$$\int_a^b f(x) dg_n(x) \rightarrow \int_a^b f(x) dg(x).$$

Заметим:  $V_a^b(g) \leq V_a^b(g_n) + V_a^b(g - g_n)$ . Далее, подобно предыдущему, в силу (1) и свойств линейности интеграла верно

$$\left| \int_a^b f(x) dg_n(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b f(x) d(g_n(x) - g(x)) \right| \leq \|f\|_{C[a; b]} V_a^b(g_n - g) \rightarrow 0.$$

3. Очевидно, если  $g(x) \equiv C$  на  $[a; b]$ , то интеграл Римана—Стилтьеса

$$\int_a^b f(x) dg(x) \quad (2)$$

существует абсолютно для любой функции  $f(x)$ . Однако этот тривиальный случай, естественно, не интересен. При  $g(x) \not\equiv C$  ситуация становится более похожей на интеграл Римана. Покажем, например, что для  $g(x)$ , отличной от константы, и  $f(x) = D(x)$  (функция Дирихле) интеграл (2) при  $a \neq b$  не существует.

Идея доказательства заключается в следующем. Для любого сколь угодно малого  $\delta > 0$  мы предъявим два таких разбиения с отмеченными точками, что соответствующие интегральные суммы будут различаться не менее чем на некоторое фиксированное число:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists T_i \equiv (x_0^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}; \xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}), \lambda(T_i) < \delta, i = 1; 2, |S_{T_1} - S_{T_2}| \geq \varepsilon.$$

Поскольку  $g(x) \not\equiv C$ , то существуют  $\bar{x} < \bar{\bar{x}} \in [a; b]$  такие, что  $g(\bar{x}) \neq g(\bar{\bar{x}})$ . Положим  $\varepsilon = |g(\bar{x}) - g(\bar{\bar{x}})|$ . Выберем при всяком  $\delta > 0$  разбиения  $T_1$  и  $T_2$  с  $\lambda(T) < \delta$  состоящими из одних и тех же точек  $(x_k^{(i)})_{k=0}^n$ , среди которых будут точки  $x_l = \bar{x}$  и  $x_m = \bar{\bar{x}}$  (если в некотором разбиении

их нет, можно добавить), а отмеченные точки  $(\xi_k^{(i)})_{k=1}^n$  возьмём руководствуясь следующими правилами:

- 1)  $\xi_k^{(1)} = \xi_k^{(2)}$  при  $[x_{k-1}; x_k] \not\subset [\bar{x}; \bar{\bar{x}}]$ ;
- 2)  $\xi_k^{(1)} \in \mathbb{Q}$ ,  $\xi_k^{(2)} \notin \mathbb{Q}$  при  $[x_{k-1}; x_k] \subset [\bar{x}; \bar{\bar{x}}]$ .

Тогда будем иметь:

$$|S_{T_1} - S_{T_2}| = \left| \sum_{k=l+1}^m 1 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=l+1}^m 0 \cdot (g(x_k) - g(x_{k-1})) \right| = |g(\bar{\bar{x}}) - g(\bar{x})| = \varepsilon,$$

что и требовалось.

4. Легко построить функции  $f, g$ , не являющиеся ограниченными на  $[-1; 1]$ , такие, что интеграл Римана—Стилтьеса (2) существует. Положим, например,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0] \cup \{1\}, \\ \frac{x}{1-x}, & x \in (0; 1), \end{cases} \quad g(x) = f(-x).$$

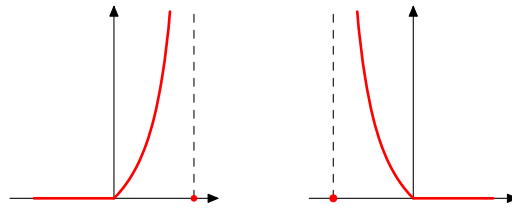


Рис. к примеру 4: функции  $f(x)$  и  $g(x)$ .

5. Пусть существует интеграл Римана—Стилтьеса (2), причём функция  $g$  разрывна в точке  $c \in [a; b]$ . Тогда функция  $f$  непрерывна в этой точке.

*Доказательство.* Предположим противное: пусть  $f(x)$  разрывна в точке  $c$ . Докажем, подобно сделанному в примере 3, что в этом случае для сколько угодно малого параметра разбиения найдутся интегральные суммы, отличающиеся не менее чем на константу.

Рассмотрим сначала случай  $c \in (a; b)$ . Как будет ясно из дальнейших рассуждений, рассмотрение случая граничной точки отрезка даже проще.

Итак, по нашему предположению неверно по крайней мере одно из равенств в каждой строке:

$$\begin{aligned} g(c-0) &= g(c), & g(c+0) &= g(c), \\ f(c-0) &= f(c), & f(c+0) &= f(c) \end{aligned} \tag{3}$$

(невыполнение любого из равенств подразумевает или отсутствие предельного значения, или его отличие от значения соответствующей функции в точке). Могут представиться два случая:

- 1) среди неверных равенств в (3) найдутся два в одном столбце;
- 2) таковых не найдётся, т. е. неверных равенств всего два и они расположены «по диагонали».

1) Рассмотрим первый случай. Пусть для определённости не выполняются равенства правого столбца. Это означает:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \forall \delta_1 > 0 \exists x(\delta_1) \in (c; c + \delta_1) |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geq \varepsilon_1, \quad (4)$$

$$\exists \varepsilon_2 > 0 \forall \delta_2 > 0 \exists x(\delta_2) \in (c; c + \delta_2) |f(x(\delta_2)) - f(c)| \geq \varepsilon_2. \quad (5)$$

Пусть дано некоторое  $\rho > 0$ . Выберем сначала точку  $\bar{x}$  так, чтобы имели место неравенства

$$c < \bar{x} < c + \rho, \quad |g(\bar{x}) - g(c)| \geq \varepsilon_1. \quad (6)$$

Это возможно в силу (4): можно положить  $\bar{x} = x(\delta_1 = \rho)$ . Теперь построим такое разбиение  $T$  отрезка  $[a; b]$  с параметром разбиения  $\lambda(T) < \rho$ , в которое войдут точки  $c$  и  $\bar{x}$ , причём они будут соседними (это возможно, поскольку  $\bar{x} - c < \rho$ ). Пусть в полученном разбиении точки  $c, \bar{x}$  имеют номера соответственно  $l - 1, l$ . Далее, выберем на отрезках  $[x_{i-1}; x_i]$  точки  $\xi_i, i = 1, \dots, l - 1, l + 1, \dots, n$ . Выберем теперь, пользуясь (5),  $\xi^{(2)}$  из условий

$$1) c < \xi^{(2)} < \bar{x}, \quad 2) |f(\xi^{(2)}) - f(c)| \geq \varepsilon_2 \quad (7)$$

(для этого надо положить в (5)  $\delta_2 = \bar{x} - c$  и взять  $\xi^{(2)} = x(\delta_2)$ ).

Пусть теперь интегральные суммы  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  определяются одним и тем же разбиением  $T$  и следующим выбором точек:  $\xi_i^{(1)} = \xi_i^{(2)} = \xi_i, i \neq l$ , и  $\xi_l^{(1)} = c \in [c; \bar{x}] \equiv [x_{l-1}; x_l], \xi_l^{(2)} = \xi^{(2)}$ . Тогда получим

$$|S^{(1)} - S^{(2)}| = |(f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l) - g(x_{l-1}))| \geq \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

где последнее неравенство имеет место в силу (6), (7). Поскольку возможность такого построения показана для всякого  $\rho > 0$  и при этом константы  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  от  $\rho$  не зависят, для первого случая рассуждение завершено.

2) Во втором случае ситуация осложняется тем, что односторонняя непрерывность не позволяет нам одновременно оценить снизу  $|g(x) - g(c)|$  и  $|f(x) - f(c)|$  ни в одной из полукрестностей точки  $c$ . Однако это мешающее обстоятельство можно обратить в пользу, если из одной полукрестности «немного шагнуть» в другую: мы приобретём разрыв одной из функций, не сильно ухудшив уже найденную оценку снизу для другой. Проведём теперь это рассуждение более подробно.

Пусть, для определённости,

$$\begin{aligned} g(c-0) &= g(c), & g(c+0) &\neq g(c), \\ f(c-0) &\neq f(c), & f(c+0) &= f(c). \end{aligned}$$

(Напоминаем, что в данном случае знак  $\neq$  может обозначать не только неравенство, но и отсутствие предела.) Здесь существенно, что равенство  $f(c+0) = f(c)$  влечёт неравенство  $f(c-0) \neq f(c)$

(иначе функция  $f(x)$  была бы непрерывной в точке  $c$ ), а последнее — равенство  $g(c-0) = g(c)$  (иначе бы ситуация была бы аналогична рассмотренной выше). Тогда:

$$\exists \varepsilon_1 > 0 \forall \delta_1 > 0 \exists x(\delta_1) \in (c; c + \delta_1) |g(x(\delta_1)) - g(c)| \geq \varepsilon_1, \quad (8)$$

$$\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall x \in (c; c + \delta_2) |f(x) - f(c)| < \varepsilon_2,$$

$$\forall \varepsilon_3 > 0 \exists \delta_3 > 0 \forall x \in (c - \delta_3; c) |g(x) - g(c)| < \varepsilon_3, \quad (9)$$

$$\exists \varepsilon_4 > 0 \forall \delta_4 > 0 \exists x(\delta_4) \in (c - \delta_4; c) |f(x(\delta_4)) - f(c)| \geq \varepsilon_4, \quad (10)$$

Пусть задано  $\rho > 0$ . Выберем теперь:

$$\begin{aligned} \bar{x} \text{ из условий } \bar{x} \in \left(c; c + \frac{\rho}{2}\right), |g(\bar{x}) - g(c)| \geq \varepsilon_1, \\ \bar{x} \text{ из условий } \bar{x} \in \left(c - \frac{\rho}{2}; c\right), |g(\bar{x}) - g(c)| < \frac{\varepsilon_1}{2}, \\ \xi^{(2)} \text{ из условий } \xi^{(2)} \in (\bar{x}; c), |f(\xi^{(2)}) - f(c)| \geq \varepsilon_3, \end{aligned} \quad (11)$$

что возможно соответственно в силу (8), (9), (10). Теперь дополним систему  $(\bar{x}; \bar{x})$  (отметим, что  $\bar{x} - \bar{x} < \rho$ ) до разбиения  $T$  отрезка  $[a; b]$  с  $\lambda(T) < \rho$  так, чтобы между  $\bar{x}$  и  $\bar{x}$  не оказалось новых точек. Предположим,  $\bar{x}$  и  $\bar{x}$  получили соответственно номера  $l-1$  и  $l$ . Выберем теперь  $\xi_i, i \neq l$ , произвольным образом и  $\xi_l^{(1)} = c, \xi_l^{(2)} = \xi^{(2)}$ . Пусть  $S^{(1)}, S^{(2)}$  — соответствующие интегральные суммы. Поскольку в силу (11)

$$|g(\bar{x}) - g(\bar{x})| \geq \frac{\varepsilon_1}{2}, \quad |f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)})| \geq \varepsilon_3,$$

получаем

$$|S^{(1)} - S^{(2)}| = |(f(\xi_l^{(1)}) - f(\xi_l^{(2)}))(g(x_l) - g(x_{l-1}))| \geq \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{2},$$

что в силу произвольности  $\rho > 0$  и независимости от  $\rho$  констант  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  завершает рассуждение для второго случая.

Легко видеть, что при совпадении точки  $c$  с одним из концов отрезка мы всегда будем иметь первый случай.

*Утверждение доказано.*

6. Пусть  $a < c < b$ ,  $g(x) = \chi_{[c;b]}(x)$ . Тогда интеграл Римана—Стилтьеса (2) существует в том и только том случае, когда  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$ , и в случае интегрируемости

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(c).$$

Заметим, что необходимость доказана ранее (п. 5). Докажем достаточность. Имеем

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) = f(\xi_l)(g(x_l) - g(x_{l-1})) = f(\xi_l), \quad \text{где } x_{l-1} < c \leq x_l.$$

При  $\lambda(T) \rightarrow 0$  имеем  $\xi_l \rightarrow c$ , что в случае непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $c$  гарантирует  $f(\xi_l) \rightarrow f(c)$ . Это и доказывает как существование рассматриваемого интеграла, так и равенство  $\int_a^b f(x) dg(x) = f(c)$ .

7. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $c$  и интеграл (2) существует. Тогда при  $c \in (a; b)$  интеграл

$$\int_a^b f(x) d\tilde{g}(x), \quad \text{где} \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq c, \\ A \neq g(c), & x = c, \end{cases} \quad (12)$$

также существует и равен интегралу (2).

*Доказательство.* Принцип доказательства состоит в том, чтобы убедиться, что разница между соответствующими интегральными суммами стремится к нулю при стремлении к нулю параметра разбиения. Идея же основана на наблюдении, что чем менее меняется функция  $f$ , тем слабее интеграл «замечает» конкретные значения функции  $g$ . Так,

$$\text{при } f(x) \equiv C = \text{const} \quad \text{имеем} \quad \int_a^b f(x) dg(x) = C(g(b) - g(a)). \quad (13)$$

Приступим собственно к доказательству.

Рассмотрим некоторое разбиение  $T$  отрезка  $[a; b]$ . Если  $c \notin T$ , то интегральная сумма вовсе не поменялась. В противном случае ( $x_l = c$ ) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\tilde{g}(x_k) - \tilde{g}(x_{k-1})) &= \\ = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)((g(x_k) - \tilde{g}(x_k)) - (g(x_{k-1}) - \tilde{g}(x_{k-1}))) &= (g(x_l) - \tilde{g}(x_l))(f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу определения непрерывности функции  $f$  в точке  $c$

$$\forall \gamma > 0 \exists \delta(\gamma) > 0 \forall \xi \in (c - \delta(\gamma); c + \delta(\gamma)) \quad |f(\xi) - f(c)| < \gamma. \quad (15)$$

Пусть дано произвольное  $\varepsilon > 0$ . Выберем  $\rho = \delta\left(\gamma = \frac{\varepsilon}{2|g(c) - \tilde{g}(c)|}\right)$ . Пусть разбиение  $T$  удовлетворяет условию  $\lambda(T) < \rho$ . Тогда

$$|\xi_l - c| < \rho, \quad |\xi_{l+1} - c| < \rho,$$

в силу чего из (15) моментально получим, что  $|f(\xi_l) - f(\xi_{l+1})| < \frac{\varepsilon}{|g(c) - \tilde{g}(c)|}$ , откуда в силу (14) следует, что интегральные суммы для параметра разбиения меньше выбранного  $\rho$  различаются меньше чем на  $\varepsilon$ . Тем самым, интегральные суммы интеграла (12) тоже имеют предел и он равен интегралу (2).

*Утверждение доказано.*

*Замечание.* Условие несовпадения точки  $c$  с концами отрезка существенно, что очевидно уже из (13).

*Следствие 1.* Если функция  $f$  непрерывна в точке  $c \in (a; b)$ , а функция  $g$  равна нулю всюду на  $[a; b]$ , кроме точки  $c \in (a; b)$ , то  $\int_a^b f dg = 0$ .

*Следствие 2.* То же верно для любого конечного числа точек, если  $f$  непрерывна в каждой из них (или, скажем, на всём отрезке).

*Следствие 3.* Если  $f \in C[a; b]$ ,  $g \in \mathbb{BV}[a; b]$  и  $g$  отлична от нуля лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу  $(a; b)$ , то  $\int_a^b f dg = 0$ . Это следует из теоремы Хелли и предыдущего следствия (поскольку «приближения» к функции  $g$ , имеющие конечное число разрывов, имеют вариации, ограниченные в совокупности числом  $V_a^b(g)$  — см. задачу 6).

*Следствие 4.* Если  $f \in C[a; b]$ ,  $g_1, g_2 \in \mathbb{BV}[a; b]$  и эти функции различны лишь в счётном числе точек, принадлежащих интервалу  $(a; b)$ , то  $\int_a^b f dg_1 = \int_a^b f dg_2$ .

Но это означает, что наивная попытка описать  $(C[a; b])^*$  как  $\mathbb{BV}[a; b]$  (используя теорему Рисса) наталкивается на трудности: функция  $g$  оказывается не единственной (даже если потребовать  $g(a) = 0$ ), и различные «представители» совсем не равноправны в том смысле, что они могут иметь различную полную вариацию.

8. Вычислить

$$\int_0^\pi \sin x dg(x),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}), \\ 2, & x \in \{\frac{\pi}{2}; \pi\}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi). \end{cases}$$

Заметим, что в силу п. 7 можно переопределить функцию  $g(x)$  в точке  $x = \frac{\pi}{2}$  её левым пределом  $\frac{\pi}{2}$ . Далее, в точке  $x = \pi$  её тоже можно переопределить левым пределом  $\frac{\pi}{2}$ , поскольку  $f(x)$  непрерывна (слева) в точке  $\pi$  и  $f(\pi) = 0$  (см. задачу 3; отметим, что результат п. 7 здесь неприменим!). Обозначим полученную после двух переопределений функцию через  $\tilde{g}(x)$ . Имеем теперь

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x dg(x) &= \int_0^\pi \sin x d\tilde{g}(x) = \int_0^\pi \sin x d\left(x - \frac{\pi}{2}\chi_{(\frac{\pi}{2}; \pi]}(x)\right) = \\ &= \int_0^\pi \sin x d(x) - \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin x d\left(\chi_{(\frac{\pi}{2}; \pi]}(x)\right) = \\ &= \int_0^\pi \sin x dx - \frac{\pi}{2} \left( \sin \pi \cdot 1 - \sin \frac{\pi}{2} \cdot 0 - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \chi_{(\frac{\pi}{2}; \pi]}(x) d \sin x \right) = \\ &= 2 + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \chi_{(\frac{\pi}{2}; \pi]}(x) \cos x dx = 2 + \frac{\pi}{2} \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = 2 - \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

где при переходе к третьей строке мы воспользовались сведением к интегралу Римана для непрерывно дифференцируемой функции  $g(x) = x$  (см. лекцию) и интегрированием по частям, а при переходе к четвёртой — той же теоремой для  $g(x) = \sin x$ , а затем воспользовались возможностью изменить в одной точке подынтегральную функцию в интеграле Римана.

9. Найти (какую-либо) функцию  $g \in \mathbb{BV}[-1; 1]$ , для которой при любой  $f(x) \in C[-1; 1]$  верно равенство

$$\int_{-1}^1 f(x) dg(x) = f(0). \quad (16)$$

В силу результата примера 6 можно взять, например,  $g(x) = \chi_{[0;1]}(x)$ . Отметим, что при этом  $V_{-1}^1(g) = 1$ , но функцию  $g(x)$  можно переопределить в любой точке интервала  $(a; b)$  — при этом равенство (16) не нарушится (см. пример 7), а её вариация изменится.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить интегралы Римана—Стилтьеса:

1)  $\int_{-\pi}^{\pi} (x + 2) d(e^x \operatorname{sgn}(\sin x))$ ;

2)  $\int_0^{\pi} (x - 1) d(\cos x \operatorname{sgn} x)$ .

2. Подробно обосновать существование интеграла (2) в примере 4.

3. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции  $g(x)$  в граничной точке отрезка, которым мы воспользовались при решении примера 8.

4. Сформулировать и доказать утверждение об изменении значения функции  $f(x)$  в точке непрерывности функции  $g(x)$ . Нужно ли при этом требовать, чтобы  $c$  не была граничной точкой?

5\*. Показать, что условие равномерной ограниченности вариаций в теореме Хелли существенно.

6\*. Доказать, что если  $g(x)$  отлична от нуля лишь в счётном числе точек  $\{y_s\}_{s=1}^{\infty} \subset (a; b)$ , а

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{y_s\}_{s=n+1}^{\infty}, \\ g(x) & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

то  $V_a^b(g_n) \leq V_a^b(g)$ .

7\*\*. Сформулировать и доказать для интеграла Римана—Стилтьеса утверждение, обобщающее необходимое условие интегрируемости по Риману (ограниченность подынтегральной функции функции).