Разрывные решения уравнений переноса

Как линейное, так и квазилинейное уравнения переноса могут допускать разрывные решения, но при различных условиях.

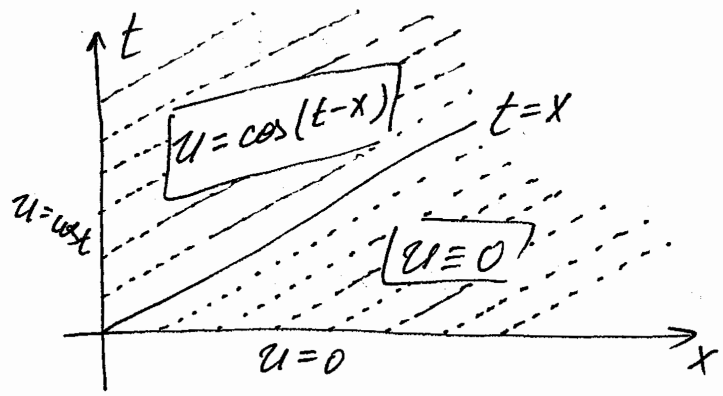
Так как в случае линейного уравнения характеристики не пересекаются, то разрывное решение (которое понимается как обобщенное) может возникать, только если разрывы имеются в начальных и граничных условиях, либо если они не согласованы. Разрыв решения при этом может идти только по характеристике.

Пример 1
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0; \ x>0, \ t>0 \\ u\big|_{t=0} = 0; \quad u\big|_{x=0} = \cos t \end{cases}$$

В данном случае начальные и граничные условия не согласованы: $\cos 0 = 1 \neq u\big|_{t=0}$.

Характеристики: $dt = dx \Rightarrow t - x = const$ – параллельные прямые, по которым переносится начальное или граничное условие. Если τ – параметр вдоль характеристики, то $\dfrac{d\tilde{u}}{d\tau} = 0 \Rightarrow \tilde{u} = const$ вдоль характеристики, где $\tilde{u}(\tau) = u(x(\tau), t(\tau))$.

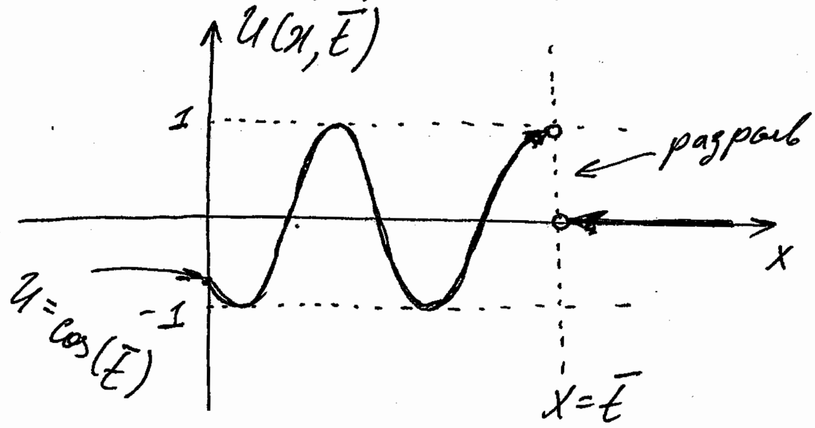
Пользуясь начальными и граничными условиями, получаем:



$$u(x,t)=\begin{cases}0, & t<x;\\ \cos(t-x), & t>x.\end{cases}$$

На прямой $t=x$ решение претерпевает скачок.

Если фиксировать какой-то момент времени $\bar{t}$, то мгновенный профиль решения выглядит так:



В ситуации квазилинейного уравнения всё сложнее, так как проекции характеристик на плоскость x,t могут пересекаться, не пересекаться, либо вообще не попадать в некоторую подобласть расчетной области в зависимости от начальных и граничных условий. При этом пересекаться они могут даже в том случае, когда начальные и граничные условия непрерывны и согласованы.

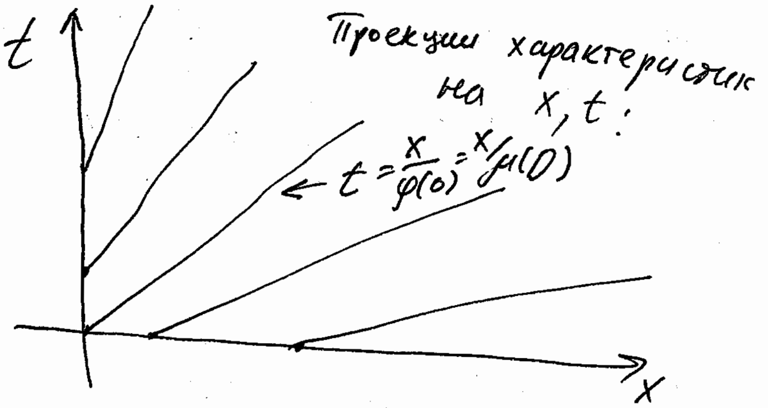
Рассмотрим три возможные ситуации на примере уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$

Будем рассматривать его в области $x>0;\ t>0$ с дополнительными условиями $u|_{t=0}=\varphi(x)$, $u|_{x=0}=\mu(t)$.

<u>Случай 1</u>. Функции $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ непрерывны, $\varphi(0)=\mu(0)$, и для них выполняются следующие условия <u>монотонности</u>: $\varphi(x)$ монотонно не убывает, а $\mu(t)$ монотонно не возрастает.

Уравнение характеристик:
$$\begin{cases} dt=\dfrac{dx}{u} \\ du=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-t^*=\dfrac{x-x^*}{u^*} \\ u(x,t)=u^* \end{cases}$$

где $u^*=u(x^*,t^*)$. Проекции характеристик на плоскость x,t: $\quad t=\dfrac{x-x^*}{u^*}+t^*$ — прямые, коэффициент углового наклона которых зависит от u^*. Если они пересекают ось Ox при $x\geq 0$, то $u^*=u^*(x^*,0)=\varphi(x^*)$, и
$$t=\frac{x-x^*}{\varphi(x^*)},$$
причем $\dfrac{1}{\varphi(x^*)}$ тем меньше, чем x^* больше в силу условий монотонности, наложенных на $\varphi(x)$. Если проекции характеристик пересекают ось Ot при $t\geq 0$, то $u^*=u^*(0,t^*)=\mu(t^*)$ и тогда
$$t-t^*=\frac{x}{\mu(t^*)},$$
причем $\dfrac{1}{\mu(t^*)}$ тем больше, чем больше t^* (т.к. $\mu(t)$ монотонно невозрастает).

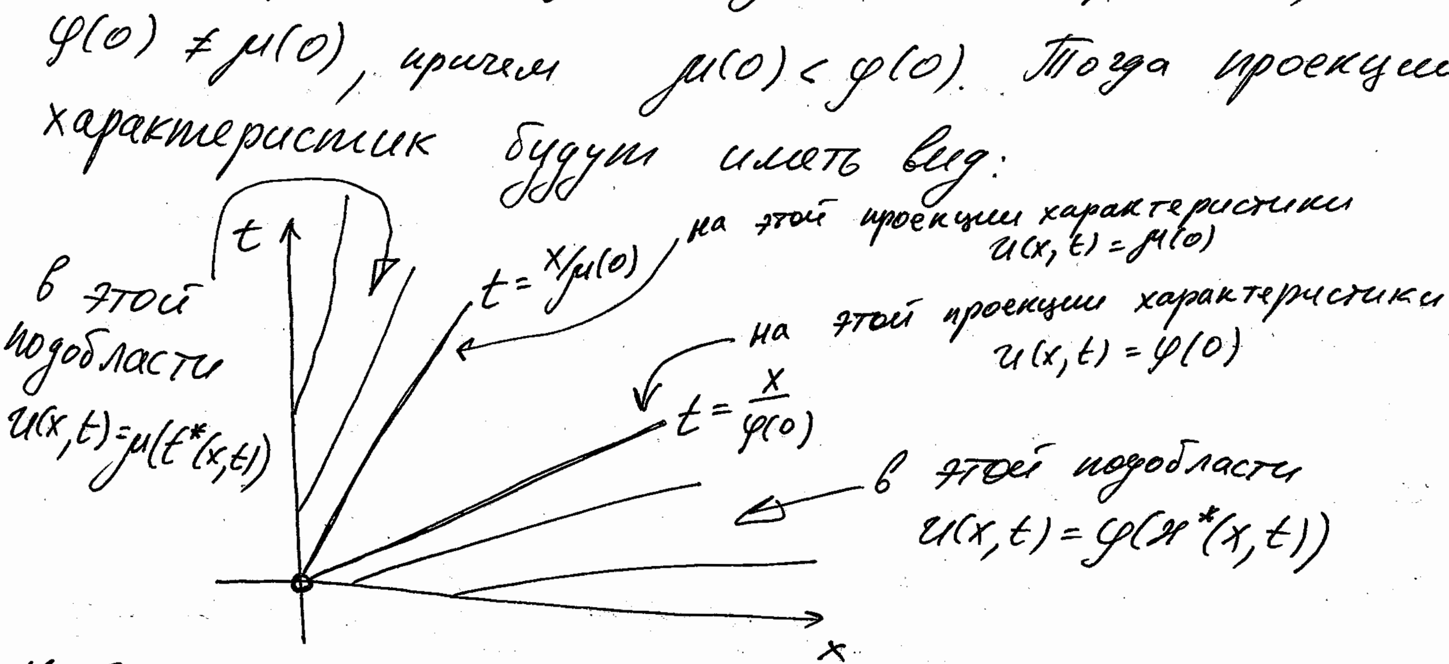


Если удаётся выразить в явном виде $x^* = x^*(x,t)$ при $t \le x/\varphi(0)$, то $u(x,t) = \varphi(x^*(x,t))$ в этой подобласти.

Аналогично, если удаётся выразить $t^* = t^*(x,t)$ при $t \geq \frac{x}{\varphi(0)}$, то в этой подобласти $u(x,t) = \mu(t^*(x,t))$.

В данном случае решение $u(x,t)$ непрерывно.

<u>Случай 2</u>. Для функций $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ выполнены те же условия монотонности, что и в предыдущем случае, но либо они имеют разрывы первого рода, либо не согласованы в начале координат. Пусть, например, $\varphi(x)$ и $\mu(t)$ непрерывны, но $\varphi(0) \neq \mu(0)$, причем $\mu(0) < \varphi(0)$. Тогда проекции характеристик будут иметь вид:



Чтобы достроить решение в области $\frac{x}{\varphi(0)} \le t \le \frac{x}{\mu(0)}$ при $x > 0$

предположим, что $u(x,t)$ непрерывна всюду, кроме начала координат. Тогда, формально подставляя в уравнение проекций характеристик $x^* = t^* = 0$, получаем

$$t = \frac{x}{u} \Rightarrow u(x,t) = \frac{x}{t}$$

эта функция удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{t^2} + \frac{x}{t}\cdot\frac{1}{t} = 0.$$

Кроме того, при $x>0$ имеем:

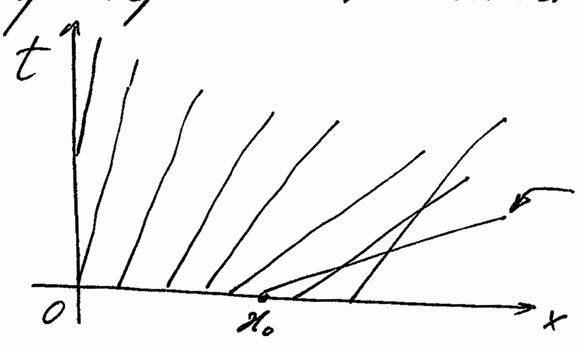
$$u\Big|_{t=\frac{x}{\varphi(0)}} = \frac{x}{x/\varphi(0)} = \varphi(0); \quad u\Big|_{t=\frac{x}{\mu(0)}} = \frac{x}{x/\mu(0)} = \mu(0).$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi(x^*(x,t)), & x>0,\ 0 \le t \le \frac{x}{\varphi(0)} \\ \frac{x}{t}, & x>0,\ t \in \left[\frac{x}{\varphi(0)}, \frac{x}{\mu(0)}\right] \\ \mu(t^*(x,t)), & x \ge 0,\ t > \frac{x}{\mu(0)} \end{cases}$$

Полученное решение $u(x,t)$ непрерывно всюду, кроме начала координат.

Случай 3. Для функции $\varphi(x)$ или $\mu(t)$ нарушены указанные выше условия монотонности. Например, функция $\varphi(x)$ имеет локальный максимум в т. x_0. Тогда проекции характеристик на плоскость x,t начнут пересекаться:



$t = \frac{x - x_0}{\varphi(x_0)}$ имеет меньший коэффициент углового наклона, чем соседние проекции характеристик.

На каждой из проекций характеристик $u(x,t)$ имеет своё значение. Если в какой-то точке они пересекаются, то там возникает неоднозначность решения. Либо, если мы требуем однозначности решения, у него появляется разрыв, то есть некоторая линия в области, где пересекаются проекции характеристик, при переходе через которую значение $u(x,t)$ изменяется скачком. В отличие от линейного уравнения, эта линия не обязана совпадать с проекцией характеристики. И возникает такая ситуация даже при непрерывных начальных и граничных условиях за счёт их <u>немонотонности</u>.

Получить выражение для линии разрыва решения можно на основе уравнения баланса. Прежде всего, найдём <u>скорость</u> движения разрыва.

Пусть рассматривается начальная или начально-краевая задача для уравнения вида

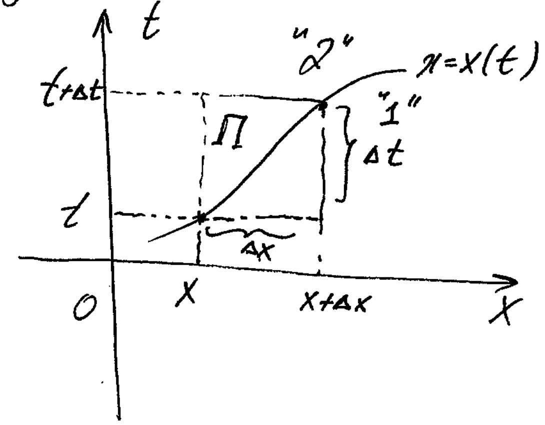
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \qquad \left(F(u) = q(u)\cdot u,\ q \text{ - скорость переноса}\right)$$

{Для случая $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ уравнение можно привести к дивергентному виду, внося множитель u под производную по x: $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0$, т.е. $F(u) = \frac{u^2}{2}$}

Дифференциальное уравнение переноса — это следствие интегрального уравнения баланса:

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\left(u(\xi, t+\Delta t) - u(\xi, t)\right)d\xi = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left(F(u(x,\tau)) - F(u(x+\Delta x,\tau))\right)d\tau$$

Пусть $x = x(t)$ — линия разрыва решения:



и пусть в интегральном уравнении баланса $x, x+\Delta x, t, t+\Delta t$ выбраны так, что линия разрыва решения идет из одной вершины прямоугольника Π в противоположную. Если мы меняем Δx и Δt, то соответствующий прямоугольник остаётся указанным образом связанным с линией разрыва.

Условно назовем область ниже линии разрыва первой, а выше — второй. Пусть $u^{(1)}(x,t)$ и $u^{(2)}(x,t)$ в соответствующих областях известны. Тогда

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x}\left(u^{(2)}(\xi, t+\Delta t) - u^{(1)}(\xi, t)\right)d\xi = \int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left\{F(u^{(2)}(x,\tau)) - F(u^{(1)}(x+\Delta x,\tau))\right\}d\tau.$$

По теореме о среднем $\exists\ \xi^* \in [x, x+\Delta x]$ и $\tau^* \in [t, t+\Delta t]$:

$$\left\{u^{(2)}(\xi^*, t+\Delta t) - u^{(1)}(\xi^*, t)\right\}\cdot\Delta x = \left\{F(u^{(2)}(x,\tau^*)) - F(u^{(1)}(x+\Delta x,\tau^*))\right\}\Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{F(u^{(2)}(x,\tau^*)) - F(u^{(1)}(x+\Delta x,\tau^*))}{u^{(2)}(\xi^*, t+\Delta t) - u^{(1)}(\xi^*, t)}$$

Устремляя Δt к нулю, получаем выражение для скорости движения разрыва:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(u^{(2)}) - F(u^{(1)})}{u^{(2)} - u^{(1)}}$$ – условие Гюгонио.

В частном случае $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ функция $F(u) = \frac{u^2}{2}$,

откуда получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{(u^{(2)})^2 - (u^{(1)})^2}{u^{(2)} - u^{(1)}} = \frac{u^{(2)} + u^{(1)}}{2}.$$

<u>Пример</u>

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + ku\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad t>0,\ x>0 \\ u\big|_{x=0} = \begin{cases} \alpha t, & t\in[0,t_1] \\ u_1 = \alpha t_1, & t \geq t_1 \end{cases}, \quad u\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

где $k>0$ и $\alpha>0$ – некоторые константы.

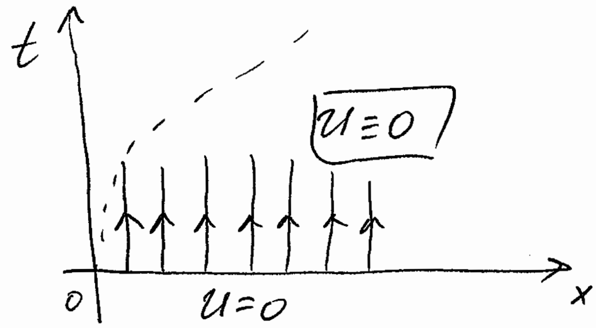
<u>Решение</u>: в данном случае начальные и граничные условия непрерывны и согласованы, но решение будет иметь разрыв, т.к. $\mu(t) = \begin{cases} \alpha t, & t\in[0,t_1] \\ u_1, & t\geq t_1 \end{cases}$ не является монотонно невозрастающей.

Уравнение характеристик: $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{ku} = \frac{du}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} du = 0 \\ ku\,dt = dx \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = u^*, \\ ku^*(t-t^*) = x - x^* \end{cases}, \text{ где } u^* = u(x^*, t^*).$$

Будем выбирать (x^*, t^*) там, где решение известно из начальных или граничных условий.

1). Пусть $t^*=0$, $x^*\geq 0 \Rightarrow u^*=0$, и уравнения характеристик принимает вид: $\begin{cases} u=0 \\ 0 = x - x^* \end{cases}$ – проекции характеристик на плоскость x, t.



2). Пусть $t^* \geq 0$, $x^* = 0$

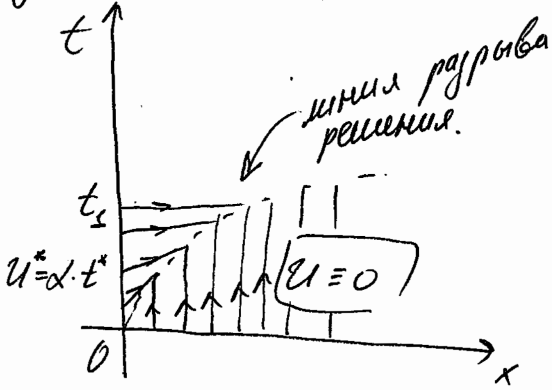
2.1) $t^* \in [0, t_1] \Rightarrow u^* = \alpha \cdot t^* \Rightarrow$

$$\begin{cases} u(x,t) = \alpha \cdot t^* \\ k\alpha t^*(t - t^*) = x \end{cases}$$ – проекции

характеристик на плоскость x, t. Это прямые вида

$$t = t^* + \frac{x}{k\alpha t^*},$$

то есть, чем меньше t^*, тем больше коэффициент углового наклона:



Выразим t^* через x и t:

$$k\alpha (t^*)^2 - k\alpha t\, t^* + x = 0$$

$$(t^*)^2 - t\, t^* + \frac{x}{k\alpha} = 0$$

$$t^*_{\pm} = \frac{1}{2}\left(t \pm \sqrt{t^2 - \frac{4x}{k\alpha}}\right)$$

При $x \to 0$ должно получаться равенство $t = t^*$:

$t^*_+ \to \frac{1}{2}(t + t) = t$ при $x \to 0$ – по смыслу подходит этот вариант.

$t^*_- \to \frac{1}{2}(t - t) = 0$ при $x \to 0$

Итак, $t^* = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{4x}{k\alpha}}\right)$, причем это выражение остаётся действительным, пока $t^2 \geq \frac{4x}{k\alpha}$. Значит, где-то в подобласти

$$2\sqrt{\frac{x}{k\alpha}} < t \leq t_1 + \frac{x}{k\alpha t_1}$$

решение имеет вид $u(x,t) = \alpha t^* = \frac{\alpha}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - \frac{4x}{k\alpha}}\right)$.

"Где-то", потому что пока мы не знаем точной границы этой подобласти, определяемой линией разрыва решения. Найдем линию разрыва, пользуясь условиями Гюгонио. Проекции характеристик вида $x = x^*$ и $t = t^* + \frac{x}{k\alpha t^*}$ начинают

пересекаться сразу при $x^*>0$ и $t^*>0$. То есть, линия разрыва начинается в точке $(0,0)$. Ниже линии разрыва $u(x,t)=u^{(1)}(x,t)\equiv 0$, выше $u(x,t)=u^{(2)}(x,t)=$
$= \frac{\alpha}{2}\left(t+\sqrt{t^2-\frac{4x}{k\alpha}}\right)$.

Линию разрыва $x=x(t)$ можно найти из задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{k}{2}\left(u^{(2)}+u^{(1)}\right) \\ x(0)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{k\alpha}{4}\left(t+\sqrt{t^2-\frac{4x}{k\alpha}}\right), \quad t>0 \\ x(0)=0 \end{cases}$$

Правая часть уравнения для $x(t)$ – дифференцируемая функция, то есть, задача Коши имеет единственное решение. За счет структуры правой части уравнения в данном случае решение можно искать в виде $x=At^2$. При этом получаем: $2At=\frac{k\alpha t}{4}\left(1+\sqrt{1-\frac{4A}{k\alpha}}\right) \Rightarrow k\alpha\sqrt{1-\frac{4A}{k\alpha}}=8A-k\alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} A\le\frac{k\alpha}{4} \\ A\geq\frac{k\alpha}{8} \\ 64A^2-16A\cdot k\alpha+\cancel{k^2\alpha^2}=\cancel{k^2\alpha^2}-4Ak\alpha \Longleftrightarrow 16A=3k\alpha \Rightarrow \boxed{A=\frac{3k\alpha}{16}.} \end{cases}$$

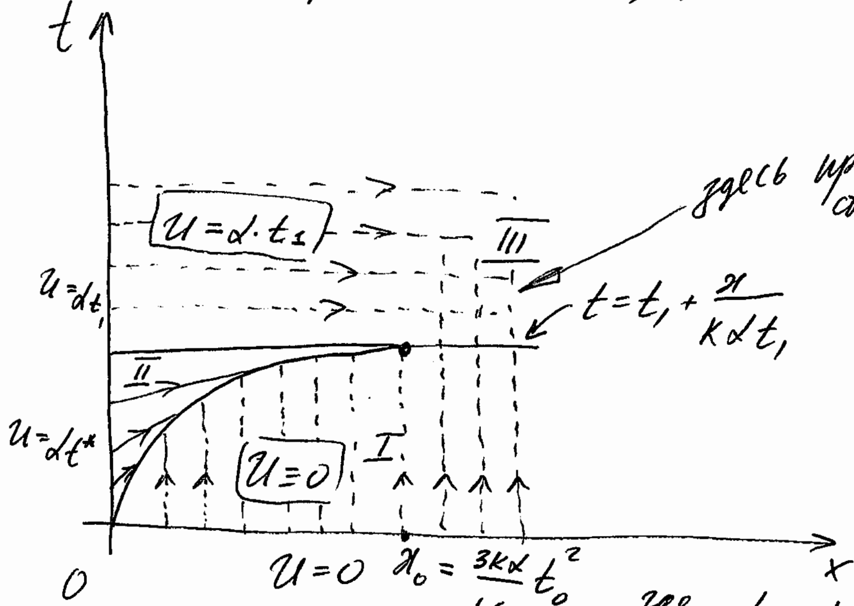
Итак, линия разрыва между подобластями 1 и 2 имеет вид

$$\boxed{x=\frac{3k\alpha}{16}t^2}.$$ То есть:

$$\left.\begin{aligned} &u\equiv 0 \quad \text{при} \quad x>\frac{3k\alpha}{16}t^2 \\ &u=\frac{\alpha}{2}\left(t+\sqrt{t^2-\frac{4x}{k\alpha}}\right) \quad \text{при} \quad x<\frac{3k\alpha}{16}t^2 \end{aligned}\right\} \text{ для } t\le t_1+\frac{x}{k\alpha t_1}.$$

2.2.) Остаётся рассмотреть случай $t^* > t_1$, $u^* = \alpha t_1$, $x^* = 0$

При этом $\begin{cases} u(x,t) = \alpha t_1 \\ k\alpha t_1 (t - t^*) = x \end{cases}$ – проекции соответствующих характеристик на плоскость x, t. Это параллельные прямые $t = t^* + \dfrac{x}{k\alpha t_1}$ в области $t > t_1 + \dfrac{x}{k\alpha t_1}$, на которых решение $u(x,t)$ остаётся равным αt_1.



здесь проекции характеристик, соответствующих областям I и III, пересекаются. То есть, нужно дальше построить линию разрыва решения.

$t = t_1 + \dfrac{x}{k\alpha t_1}$

(x_0, t_0) – точка пересечения линий $t = t_1 + \dfrac{x}{k\alpha t_1}$ и $x = \dfrac{3k\alpha}{16} t^2$.

$u = 0$ $\quad x_0 = \dfrac{3k\alpha}{16} t_0^2$, где $t_0 = t_1 + \dfrac{x_0}{k\alpha t_1}$

Найдем координаты точки (x_0, t_0):

$$\frac{3k\alpha}{16} t_0^2 = k\alpha t_1 (t_0 - t_1)$$

$$3\cancel{\alpha} t_0^2 - 16\cancel{\alpha} t_1 \cdot t_0 + 16\cancel{\alpha} t_1^2 = 0$$

$$t_0^{\pm} = \frac{8t_1 \pm \sqrt{64t_1^2 - 48t_1^2}}{3} = \left[\begin{array}{l} 4t_1 \\ \frac{4}{3} t_1 \end{array}\right.$$

Нас интересует <u>первая</u> точка пересечения прямой $t = t_1 + \dfrac{x}{k\alpha t_1}$ с параболой $x = \dfrac{3k\alpha}{16} t^2$, то есть $t_0 = \dfrac{4}{3} t_1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{k\alpha}{3} t_1^2$.

Для линии разрыва решения между подобластями 1 и 3 получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{k}{2}\Big(\underbrace{u^{(1)}}_{0} + \underbrace{u^{(3)}}_{\alpha t_1}\Big) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \iff \frac{dx}{dt} = \frac{k\alpha}{2} t_1; \quad x(t_0) = x_0 \Rightarrow$$

$$x(t) = x_0 + \frac{k\alpha t_1}{2}(t - t_0).$$

Итак, решение задачи имеет вид:

$$u = \begin{cases} 0, & t \le t_0,\ x > \dfrac{3k\alpha}{16}t^2 \ \text{или}\ t \ge t_0,\ x > x_0 + \dfrac{k\alpha t_1}{2}(t-t_0), \\ \dfrac{\alpha}{2}\left(t + \sqrt{t^2 - \dfrac{4x}{k\alpha}}\right), & t \le t_1 + \dfrac{x}{k\alpha t_1},\ x < \dfrac{3k\alpha}{16}t^2, \\ \alpha t_1, & x \le x_0,\ t \ge t_1 + \dfrac{x}{k\alpha t_1} \ \text{или}\ x \ge x_0,\ t > t_0 + \dfrac{2}{k\alpha t_1}(x - x_0), \end{cases}$$

где $x_0 = \dfrac{k\alpha}{3}t_1^2$ и $t_0 = \dfrac{4}{3}t_1$