I курс, задача 1. Докажите, что функция Римана

$$R(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } x=\dfrac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N},\ m\neq 0, \text{ и дробь } \dfrac{m}{n} \text{ несократима},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

разрывна в каждой рациональной точке и непрерывна в каждой иррациональной.

Решение. Докажем, что функция $R(x)$ разрывна в каждой рациональной точке. Пусть x_0 — некоторое рациональное число. Тогда $R(x_0)\neq 0$. В любой окрестности рационального числа x_0 есть иррациональные числа. Значит, для каждого $n=1,2,\ldots$ найдётся иррациональное число x_n такое, что $|x_n-x_0|<\frac{1}{n}$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, но последовательность $\{R(x_n)\}$ не сходится к $R(x_0)$, поскольку $R(x_n)=0$, а $R(x_0)\neq 0$. Отсюда следует (в силу определения предела функции по Гейне), что предел функции $R(x)$ при $x\to x_0$ не равен $R(x_0)$, а значит, функция $R(x)$ разрывна в точке x_0, ч.т.д.

Докажем, что функция $R(x)$ непререрывна в каждой иррациональной точке. Пусть x_0 — некоторое иррациональное число. Тогда $R(x_0)=0$. Надо доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ выполняется $|R(x)-R(x_0)|<\varepsilon$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon>0$. Положим

$$\delta=\min\left\{\delta_1,\ldots,\delta_{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}\right\},$$

где δ_1 — расстояние от точки x_0 до ближайшего целого числа, δ_2 — расстояние от точки x_0 до ближайшего числа вида $\frac{m}{2}$, где $m\in\mathbb{Z}$, δ_3 — расстояние от точки x_0 до ближайшего числа вида $\frac{m}{3}$, где $m\in\mathbb{Z}$, и т.д. Тогда в -окрестности точки x_0 не будет ни одного рационального числа вида $\frac{m}{n}$, где дробь $\frac{m}{n}$ несократима, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ и $n\leq\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\leq\frac{1}{\varepsilon}$. Это значит, что в δ-окрестности точки x_0 есть рациональные числа только вида $x=\frac{m}{n}$, где $n>\frac{1}{\varepsilon}$. В этих точках значение функции $R(x)$ равно $\frac{1}{n}<\varepsilon$, значение функции $R(x_0)$ равно 0, поэтому неравенство $|R(x)-R(x_0)|<\varepsilon$ выполняется для всех рациональных x из δ-окрестности точки x_0. Для иррациональных x оно тоже выполняется, т.к. в этом случае $R(x)=R(x_0)=0$. Значит, функция $R(x)$ непрерывна в точке x_0, ч.т.д.

I курс, задача 2. Пусть вещественнозначная функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Может ли её производная $f'(x)$ на этом интервале иметь точку устранимого разрыва; разрыва первого рода; разрыва второго рода? Ответ обоснуйте.

Решение. Рассмотрим произвольное $x_0 \in (a, b)$. Пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = b$. Докажем, что тогда $b = f'(x_0)$. В самом деле, если взять точку x, лежащую на интервале (a, b) правее точки x_0, то по теореме Лагранжа, справедливой для дифференцируемой на сегменте $[x_0, x]$ функции $f(x)$, существует точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0+0 \\ \xi \in (x_0, x)}} f'(\xi) = \lim_{\xi \to x_0+0} f'(\xi) = b.$$

С другой стороны, указанный предел $\lim\limits_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ по определению является правой производной функции $f(x)$ в точке x_0, и поскольку существует обычная производная $f'(x_0)$, то и правая производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна $f'(x_0)$. Таким образом, мы доказали, что если существует $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$, то этот предел равен $f'(x_0)$. Аналогично доказывается, если существует $\lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x)$, то этот предел тоже равен $f'(x_0)$.

Предположим, что функция $f'(x)$ имеет в точке x_0 устранимый разрыв. Это означает, что существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x)$ они равны друг другу, но не равны $f'(x_0)$. Выше мы доказали, что это невозможно, потому что оба этих предела равны $f'(x_0)$.

Предположим, что функция $f'(x)$ имеет в точке x_0 разрыв первого рода. Это означает, что существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-0} f'(x)$ но они не равны друг другу. Выше мы доказали, что это невозможно, потому что оба указанных предела равны $f'(x_0)$.

Таким образом, функция $f'(x)$ **не может** иметь устранимый разрыв или разрыв первого рода в точке x_0.

Разрыв второго рода функция $f'(x)$ в точке x_0 **может** иметь. Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$,

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\Delta x \cdot \sin\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$,

так как функция $\sin\frac{1}{\Delta x}$ ограниченная, а функция Δx бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Значит, функция $f(x)$ дифференцируема на всей вещественной оси. Докажем, что односторонний предел

$$\lim_{x \to +0} f'(x) = \lim_{x \to +0} \left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

не существует. Это вытекает из следующих трёх утверждений.

Утверждение 1. $\lim\limits_{x \to 0}\left(x \cdot \sin\frac{1}{x}\right) = 0$. Доказано выше.

Утверждение 2. $\lim\limits_{x \to +0} \cos\frac{1}{x}$ не существует. В самом деле, рассмотрим две числовые последовательности, сходящиеся к 0 справа: $x_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi n}$ и $x_n^{(2)} = \frac{1}{\pi + 2\pi n}$. Имеем:

$$\lim_{n \to \infty} \cos\frac{1}{x_n^{(1)}} = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \cos\frac{1}{x_n^{(2)}} = -1.$$

Тогда, согласно определению предела функции по Гейне, предел $\lim\limits_{x \to +0} \cos\frac{1}{x}$ не существует, ч.т.д.

Утверждение 3. Пусть функция $u(x)$ имеет в точке a предел справа, а предел функции $v(x)$ в точке a справа не существует. Тогда предел функции $u(x) - v(x)$ в точке a справа не существует.

Доказательство. От противного. Пусть существует предел функции $u(x) - v(x)$ в точке a справа. Предел справа функции $u(x)$ в точке a существует по условию леммы. Тогда функция $u(x) - \big(u(x) - v(x)\big)$ имеет предел в точке a справа согласно теореме о пределе разности двух функции. Но эта функция равна $v(x)$, а предел $v(x)$ в точке a справа не существует по условию леммы. Полученное противоречие доказывает, что предел функции $u(x) - v(x)$ в точке a справа не существует, ч.т.д.

Аналогично можно доказать, что предел слева функции $f'(x)$ в точке 0 не существует. Если односторонние пределы функции $f'(x)$ в точке 0 не существуют, то функция $f'(x)$ имеет разрыв второго рода в этой точке, ч.т.д.

Ответ: функция $f'(x)$ не может иметь точку устранимого разрыва или разрыва первого рода, но точку разрыва второго рода она может иметь.

I курс, задача 3. Докажите, что если вещественнозначная функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале $(-a,a)$ и для любых $x,y\in(-a,a)$ таких, что $x+y\in(-a,a)$, верно равенство $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, то найдётся такое число C, что $f'(x)=C\cdot\left(1+f^2(x)\right)$ на интервале $(-a,a)$.

Решение. В равенстве $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ положим $x=y=0$, тогда получим $f(0)=0$.

Запишем определение производной функции $f(x)$ в точке $x\in(-a,a)$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Подставив сюда выражение $f(x+\Delta x)=\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}$, справедливое при $x+\Delta x\in(-a,a)$, получим

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)\left(1+f^2(x)\right)}{\Delta x\left(1-f(x)f(\Delta x)\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\right)=f'(0)\cdot\left(1+f^2(x)\right),$$

откуда следует выполнение равенства $f'(x)=C\cdot\left(1+f^2(x)\right)$ на интервале $(-a,a)$ при $C=f'(0)$, ч.т.д.

I курс, задача 4. Может ли вещественнозначная функция вещественной переменной быть дифференцируемой ровно в одной точке своей области определения? Ответ обоснуйте.

Решение. Да, может. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

определена на всей вещественной оси. Докажем, что она дифференцируема только в точке 0. Сначала докажем, что функция $f(x)$ разрывна во всех точках, кроме 0, поэтому не может быть дифференцируемой в этих точках.

Рассмотрим произвольное иррациональное число x_0. Тогда $f(x_0) = 0$. В любой окрестности иррационального числа x_0 есть рациональные числа. Значит, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдётся рациональное число x_n такое, что $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, а последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $x_0^2 \neq 0$. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0) = 0$, следовательно, функция $f(x)$ разрывна в точке x_0.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ разрывна в каждой рациональной точке $x_0 \neq 0$.

Теперь докажем, что в точке 0 функция $f(x)$ дифференцируема. Запишем определение производной в точке 0:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Поскольку для любого $x \neq 0$ значение $\frac{f(x)}{x}$ заключено между 0 и x, то по теореме о трёх функциях (или «о двух полицейских») получим, что

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Итак, мы доказали, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке 0 и не дифференцируема в остальных точках, ч.т.д.

Ответ: да.

I курс, задача 5. Пусть $f(x)$ — вещественнозначная дважды дифференцируемая функция, определённая на $\mathbb{R}$, и пусть $f''(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Докажите, что либо $f(x) = \text{const}$, либо функция $f(x)$ не ограничена на $\mathbb{R}$.

Решение.

Первый способ. Если $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) = \text{const}$.

Если $f'(x) \not\equiv 0$, то найдётся такая точка x_0, что $f'(x_0) \neq 0$. Для определённости, пусть $f'(x_0) > 0$. Поскольку $f''(x) \geq 0$, то функция $f'(x)$ является неубывающей, значит, при всех $x > x_0$ выполняется $f'(x) \geq f'(x_0)$.

Теперь рассмотрим произвольное $x > x_0$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[x, x_0]$, то согласно теореме Лагранжа найдётся такое $\xi \in (x, x_0)$, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi) \cdot (x - x_0).$$

Поскольку $f'(\xi) \geq f'(x_0)$, то имеем оценку

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

которую можно переписать в виде

$$f(x) \geq f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

При $x \to +\infty$ функция, стоящая в правой части неравенства, неограниченно возрастает. Значит, и функция $f(x)$ неограниченно возрастает.

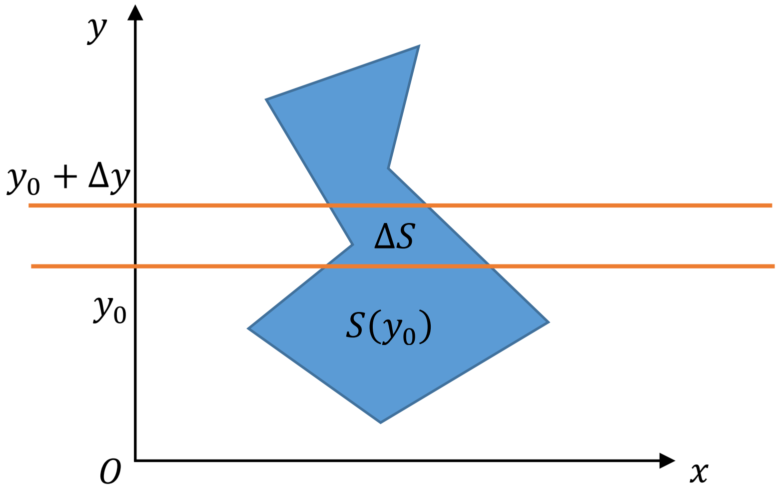
Аналогично доказывается, что $f(x)$ является неограниченной при $f'(x_0) < 0$, ч.т.д.

Второй способ. Если на всей вещественной оси $f''(x) \geq 0$, то график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз. Это означает, что он лежит не ниже любой своей касательной. Если функция $f(x)$ не равна константе, то найдётся точка x_0, в которой $f'(x_0) \neq 0$, тогда касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 является прямой, не параллельной оси абсцисс. Уравнение этой касательной $y = kx + b$, где $k = f'(x_0) \neq 0$. Таким образом, для всех вещественных x справедливо неравенство

$$f(x) \geq kx + b.$$

Заметим, что выражение, стоящее в правой части этого неравенства, неограниченно возрастает либо при $x \to +\infty$, либо при $x \to -\infty$, в зависимости от знака k. Значит, функция $f(x)$ тоже не ограничена, ч.т.д.

I курс, задача 6. На плоскости задан многоугольник и ненулевой вектор. Докажите, что существует прямая, параллельная данному вектору и делящая многоугольник на две части одинаковой площади.



Решение. Введём прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox была параллельна данному вектору. Будем проводить различные прямые, параллельные оси Ox. Обозначим через $S(y_0)$ площадь той части многоугольника, которая лежит **ниже** прямой $y = y_0$.

Докажем, что функция $S(y_0)$ является непрерывной во всех вещественных точках. Заметим, что $S(y_0 + \Delta y) - S(y_0) = \Delta S$ — площадь той части многоугольника, которая заключена между прямыми $y = y_0$ и $y = y_0 + \Delta y$. Многоугольник является ограниченной областью, поэтому он содержится внутри некоторого прямоугольника $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$. Поэтому $0 \leq \Delta S \leq (a_2 - a_1) \cdot \Delta y$. Отсюда по теореме о трёх функциях (или «о двух полицейских») следует, что $\Delta S \to 0$ при $\Delta y \to 0$, поэтому функция $S(y_0)$ является непрерывной в точке y_0.

Непрерывная функция принимает все свои промежуточные значения. При достаточно малом y_1 весь многоугольник будет лежать выше прямой $y = y_1$, поэтому $S(y_1) = 0$. При достаточно большом y_2 весь многоугольник будет лежать ниже прямой $y = y_2$, поэтому $S(y_2) = S_0$ — площадь всего многоугольника. Следовательно, найдётся такое $y_3 \in [y_1, y_2]$, что $S(y_3) = S_0/2$. Таким образом, прямая $y = y_3$ делит многоугольник на две части одинаковой площади, ч.т.д.

II курс, задача 1. Поверхность Φ задана в прямоугольных координатах уравнением $z\left(x^4+y^4\right)=x^8+y^8+z^6$. Найдите координаты точек поверхности Φ, в которых координата z принимает наибольшее и наименьшее значения. Найдите уравнение границы проекции поверхности Φ на плоскость Oxy.

Решение. Запишем уравнение поверхности Φ :

$$z(x^4+y^4)=x^8+y^8+z^6. \qquad (1)$$

Заметим, что выражение, стоящее в правой части уравнения (1), неотрицательно. Значит, и выражение, стоящее в его левой части, неотрицательно. Поэтому $z\geq 0$, т.е. вся поверхность Ф расположена в верхнем полупространстве. Значение $z=0$ достигается при $x=y=0$, поэтому наименьшее значение z на поверхности Ф равно 0.

Докажем, что поверхность Ф ограничена. Для этого перейдём к сферическим координатам:

$x=r\sin\theta\cos\varphi,$

$y=r\sin\theta\sin\varphi,$

$z=r\cos\theta.$

Уравнение поверхности (1) принимает вид

$$r^5\cos\theta\sin^4\theta\,(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=r^8\sin^8\theta\,(\cos^8\varphi+\sin^8\varphi)+r^6\cos^6\theta.$$

Отсюда либо $r=0$, что соответствует точке $(0;0;0)$, либо

$$\cos\theta\sin^4\theta\,(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)=r^3\sin^8\theta\,(\cos^8\varphi+\sin^8\varphi)+r\cos^6\theta.$$

Выражение, стоящее в левой части полученного равенства, ограничено сверху (например, числом 2). Значит, выражение, стоящее в правой его части, тоже ограничено сверху числом 2. В правой части стоит сумма двух неотрицательных слагаемых, поэтому каждое из них ограничено сверху числом 2:

$$\begin{cases} r^3\sin^8\theta\,(\cos^8\varphi+\sin^8\varphi)\leq 2,\\ r\cos^6\theta\leq 2.\end{cases}$$

Функция $\cos^8\varphi+\sin^8\varphi$ непрерывна на отрезке $[0;2\pi]$, поэтому в силу второй теоремы Вейерштрасса она достигает на отрезке $[0;2\pi]$ своих точных граней. Заметим, что $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не могут одновременно обращаться в 0 в силу основного тригонометрического тождества $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$, поэтому точная нижняя грань функции $\cos^8\varphi+\sin^8\varphi$ на отрезке $[0;2\pi]$ является некоторым положительным числом m.

Если $\sin\theta=0$, то $x=y=0$, и из уравнения (1) получим $z=0$.

Если $\cos\theta=0$, то $z=0$, и из уравнения (1) получим $x=y=0$.

В остальных случаях имеем

$$\begin{cases} r^3 \le \dfrac{2}{\sin^8\theta\,(\cos^8\varphi + \sin^8\varphi)}, \\ r \le \dfrac{2}{\cos^6\theta}. \end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что поверхность Ф не ограничена, т.е. r может принимать сколь угодно большие положительные значения. Тогда оба выражения, стоящих в правых частях неравенств (2), тоже должны принимать сколь угодно большие значения. Но функция $\frac{2}{\sin^8\theta(\cos^8\varphi+\sin^8\varphi)}$ может неограниченно возрастать только при $\sin\theta \to 0$, а функция $\frac{2}{\cos^6\theta}$ может неограниченно возрастать только при $\cos\theta \to 0$. В силу основного тригонометрического тождества $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ функции $\sin\theta$ и $\cos\theta$ не могут стремиться к 0 одновременно. Поэтому r не может принимать сколь угодно большие значения, и поверхность Ф ограничена. Следовательно, значения координаты z на поверхности Ф ограничены.

Вектор нормали к гладкой поверхности, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$, равен $\vec{N} = \{F_x, F_y, F_z\}$. Поэтому вектор нормали к поверхности Ф имеет вид

$$\vec{N} = \{8x^7 - 4x^3z, 8y^7 - 4y^3z, 6z^5 - x^4 - y^4\}.$$

Во всех точках поверхности Ф, кроме точки (0; 0; 0), вектор $\vec{N}$ существует и не является нулевым вектором, потому что система уравнений

$$\begin{cases} 8x^7 - 4x^3z = 0, \\ 8y^7 - 4y^3z = 0, \\ 6z^5 - x^4 - y^4 = 0, \\ z(x^4 + y^4) = x^8 + y^8 + z^6 \end{cases}$$

имеет единственное решение (0; 0; 0).

В той точке поверхности Ф, в которой координата z принимает наибольшее значение, вектор нормали $\vec{N}$ параллелен оси Oz. Поэтому координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 8x^7 - 4x^3z = 0, \\ 8y^7 - 4y^3z = 0, \\ z(x^4 + y^4) = x^8 + y^8 + z^6. \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет решения (0; 0; 0), $\left(0; \frac{1}{2^{3/8}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0; -\frac{1}{2^{3/8}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2^{3/8}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2^{3/8}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2^{5/16}}; \frac{1}{2^{5/16}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2^{5/16}}; -\frac{1}{2^{5/16}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2^{5/16}}; \frac{1}{2^{5/16}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2^{5/16}}; -\frac{1}{2^{5/16}}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. Наибольшее значение координаты z достигается в последних четырёх точках и равно $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Граница проекции поверхности Ф на плоскость Oxy является проекцией тех точек поверхности Ф, в которых вектор $\vec{N}$ параллелен плоскости Oxy. Координаты этих точек удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 6z^5 - x^4 - y^4 = 0, \\ z(x^4 + y^4) = x^8 + y^8 + z^6. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения z и подставив во второе, получим уравнение кривой на плоскости Oxy

$$5(x^4 + y^4)^{6/5} = 6^{6/5}(x^8 + y^8).$$

Это и есть уравнение границы проекции поверхности Ф на плоскость Oxy.

Ответ. $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, уравнение границы проекции поверхности Ф на плоскость Oxy: $5(x^4 + y^4)^{6/5} = 6^{6/5}(x^8 + y^8)$.

II курс, задача 2. Следует ли из сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$? Следует ли из сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$? Ответы обоснуйте. (Здесь a_n — вещественные числа.)

Решение. Докажем, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. В самом деле, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится (обобщённый гармонический ряд), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (гармонический ряд).

Докажем, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$. Рассмотрим $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos \frac{2\pi n}{3}$. В силу известного неравенства

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \cos nx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \text{ при } x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

получим

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \cos \frac{2\pi n}{3} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi}{3} \right|} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ — ограничено.}$$

Последовательность $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right\}$ монотонно убывает и сходится к 0. Тогда по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

С другой стороны,

$$a_n^3 = \frac{1}{n} \left(\cos \frac{2\pi n}{3} \right)^3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos 2\pi n + 3 \cos \frac{2\pi n}{3}}{4} = \frac{1}{4n} + \frac{3}{4n} \cos \frac{2\pi n}{3}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ расходится (он пропорционален гармоническому ряду), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n} \cos \frac{2\pi n}{3}$ сходится (по признаку Дирихле), поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ расходится в силу следующего утверждения.

Утверждение. Сумма сходящегося и расходящегося ряда является расходящимся рядом.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходится. Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ тоже расходится. От противного. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится, тогда разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

есть сходящийся ряд (по свойству разности рядов), а это противоречит условию, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ не может сходиться, ч.т.д.

Ответ. В обоих случаях не следует.

II курс, задача 3. Произведением двух числовых рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ называется числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Исходя из определения произведения числовых рядов, докажите, что $f(x) \cdot f(y) = f(x+y)$.

Решение. Поскольку $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, то согласно определению произведения рядов $f(x) \cdot f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Тогда

$$f(x) \cdot f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y), \text{ ч.т.д.}$$

Замечание. Доказанное равенство означает, что если определить функцию $\exp x$ как сумму функционального ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, то она будет обладать характеристическим свойством экспоненты: $\exp x \cdot \exp y = \exp(x+y)$.

II курс, задача 4. Исследуйте сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n^2)$ и интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$.

Решение. Необходимым условием сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n^2)$ является

$$\lim_{n\to 0}\sin(n^2)=0. \tag{1}$$

Докажем, что оно не выполняется. От противного. Пусть условие (1) выполнено. Тогда и $\lim\limits_{n\to 0}\sin(n+1)^2=0$. С другой стороны,

$$\sin(n+1)^2=\sin(n^2+2n+1)=\sin(n^2)\cos(2n+1)+\cos(n^2)\sin(2n+1).$$

Отсюда

$$\cos(n^2)\sin(2n+1)=\sin(n+1)^2-\sin(n^2)\cos(2n+1).$$

В силу основного тригонометрического тождества $|\cos(n^2)|=\sqrt{1-(\sin(n^2))^2}$, и поскольку $\sin(n^2)\to 0$ при $n\to\infty$, то начиная с некоторого номера n выполняется неравенство $|\cos(n^2)|\geq\frac{1}{2}$, откуда $\left|\frac{1}{\cos(n^2)}\right|\leq 2$, и

$$\sin(2n+1)=\underbrace{(\sin(n+1)^2-\sin(n^2)\cos(2n+1))}_{\text{бесконечно малая}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(n^2)}}_{\text{ограниченная}}.$$

Эта последовательность стремится к нулю. Тогда и

$$\lim_{n\to\infty}\sin(2n+3)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\sin(2n-1)=0. \tag{2}$$

Но поскольку

$$\sin(2n+3)-\sin(2n-1)=2\cos(2n+1)\sin 2,$$

то

$$\cos(2n+1)=\frac{\sin(2n+3)-\sin(2n-1)}{2\sin 2}.$$

С учётом (2) получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n+1)=0$. Но в силу основного тригонометрического тождества последовательности $\sin(2n+1)$ и $\cos(2n+1)$ не могут стремиться к нулю одновременно. Полученное противоречие доказывает, что условие (1) выполняться не может, поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin(n^2)$ расходится.

Теперь докажем, что сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ (интеграл Френеля). В самом деле, представим его в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx.$$

Первый из них существует как определённый интеграл от функции, непрерывной на отрезке $[0; 1]$. Докажем сходимость второго. Представим подынтегральную функцию в виде произведения:

$$\sin(x^2) = 2x\sin(x^2) \cdot \frac{1}{2x}.$$

Функция $2x\sin(x^2)$ имеет ограниченную на промежутке $[1;\ +\infty)$ первообразную $-\cos(x^2)$. Функция $\frac{1}{2x}$ монотонно убывает на промежутке $[1;\ +\infty)$ и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Значит, интеграл $\int_1^{+\infty} 2x\sin(x^2) \cdot \frac{1}{2x} dx$ сходится по признаку Дирихле. Значит, и исходный интеграл $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ сходится.

Ответ. Ряд расходится, интеграл сходится.

II курс, задача 5. Исследуйте сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx$.

Решение. Докажем, что интеграл расходится. По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx. \qquad (1)$$

Пусть N — наибольшее целое число такое, что $\pi N \le A$. В силу положительности подынтегральной функции справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{A} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx \ge \int\limits_0^{\pi N} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx. \qquad (2)$$

При $N = 1, 2, \dots$ имеем:

$$\int\limits_0^{\pi N} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx = \sum_{n=1}^{N}\int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx. \qquad (3)$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx$. Сделаем в нём замену переменной $x = \pi n - t$, тогда

$$\int\limits_{\pi(n-1)}^{\pi n} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx = \int\limits_0^{\pi} \exp\left(-(\pi n - t)^2\sin^2 t\right)dt. \qquad (4)$$

Воспользовавшись неравенством $|\sin t| \le |t|$, справедливым для всех вещественных t, получим $(\pi n - t)^2 \sin^2 t \le (\pi n - t)^2 t^2 \le (\pi n)^2 t^2$, откуда

$$\int\limits_0^{\pi} \exp\left(-(\pi n - t)^2\sin^2 t\right)dt \ge \int\limits_0^{\pi} \exp(-\pi^2 n^2 t^2)\,dt. \qquad (5)$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $\pi n t = \xi$, получим

$$\int\limits_0^{\pi} \exp(-\pi^2 n^2 t^2)\,dt = \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi^2 n} \exp(-\xi^2)\,d\xi \ge \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^{\pi^2} \exp(-\xi^2)\,d\xi. \qquad (6)$$

Обозначим $C = \int\limits_0^{\pi^2} \exp(-\xi^2)\,d\xi$. Это некоторое положительное число. Из (2)–(6) получим

$$\int\limits_0^{A} \exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx \ge \sum_{n=1}^{N}\frac{C}{\pi n}. \qquad (7)$$

Поскольку

$$\lim_{A\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{C}{\pi n}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{C}{\pi n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{\pi n}=+\infty$$

в силу расходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то из (1) и (7) получим

$$\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-x^2\sin^2 x\right)dx=+\infty,$$

то есть интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходится.

II курс, задача 6. Постройте взаимно-однозначное отображение сегмента $[0;1]$ на интервал $(0;1)$.

Решение. Выпишем все рациональные числа, принадлежащие сегменту [0; 1]:

$0;\ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \ldots$

Отобразим каждое иррациональное число сегмента [0; 1] в себя, а рациональные числа отобразим следующим образом:

число 0 отобразим в $\frac{1}{2}$,

число 1 отобразим в $\frac{1}{3}$,

число $\frac{1}{2}$ отобразим в $\frac{2}{3}$,

число $\frac{1}{3}$ отобразим в $\frac{1}{4}$,

и так далее, т.е. сдвинем числа в выписанной последовательности на две позиции.

Построенное отображение является взаимно-однозначным отображением сегмента [0; 1] на интервал (0; 1).