ЛЕКЦИЯ 4

Приложение абстрактной теоремы Пикара к исследованию задач математической физики: начально-краевая задача для уравнения Бенджамена—Бони—Махони—Бюргерса

§ 8. Локальная разрешимость и разрушение решения уравнения Бенджамена—Бони—Махони—Бюргерса

1. Постановка задачи и её эквивалентные переформулировки. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{xx}-u)+u_{xx}+uu_x=0, \quad (x,t)\in[0,l]\times(0,T_0), \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in[0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t)=0, \quad lu_x(0,t)=u(l,t), \quad t\in[0,T_0), \tag{3}$$

где $u_0(x)\in C^2[0,l]$ и удовлетворяет граничным условиям (3). Величина T_0, которая может быть конечной или бесконечной ($T_0=+\infty$), будет определена ниже. Здесь и далее производные по переменной x обозначены нижним индексом (даже для функций, зависящих только от x), а штрих может обозначать лишь производную по времени t.

Нам потребуется ввести функциональные пространства

$$Z=C[0,l], \quad \|z\|_Z=\|z\|_{C[0,l]},$$
$$Z_1=\{z(x)\in C^1[0,l]\mid z(0)=0,\, lz_x(0)=z(l)\}, \quad \|z\|_{Z_1}=\|z\|_{C[0,l]}+\|z_x\|_{C[0,l]},$$
$$Z_2=\{z(x)\in C^2[0,l]\mid z(0)=0,\, lz_x(0)=z(l)\}, \quad \|z\|_{Z_2}=\|z\|_{C[0,l]}+\|z_x\|_{C[0,l]}+\|z_{xx}\|_{C[0,l]}.$$

Пространства Z_1, Z_2, очевидно, полны относительно выбранных норм как замкнутые подпространства пространств $C^1[0,l]$ и $C^2[0,l]$ соответственно.

Введём также непрерывный при действии $Z_2\to Z$ оператор $\mathbb{L}$ по формуле

$$\mathbb{L}z=z_{xx}-z.$$

Оператор $\mathbb{L}$ имеет непрерывный обратный $\mathbb{G}:Z\to Z_2$, который можно выписать явно:

$$(\mathbb{G}f)(x)=\int_0^l G(x,s)f(s)\,ds \tag{4}$$

с помощью функции Грина задачи

$$\begin{cases} v_{xx}-v=f(x), \quad x\in[0,l],\\ v(0)=0,\\ lv_x(0)=v(l). \end{cases}$$

Эта функция Грина, как нетрудно проверить непосредственно, имеет вид

$$G(x,s) = G_0(x,s) + \frac{\operatorname{sh} x(l \operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l \operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l},$$

где

$$G_0(x,s) = \begin{cases} -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s, & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l, \\ -\operatorname{ch} x \operatorname{sh} s, & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant l \end{cases}$$

— функция Грина первой краевой задачи для уравнения $v_{xx} - v = f(x)$. Непрерывность оператора $\mathbb{G} : Z \to Z_2$ следует из общих свойств функции Грина, а также может быть легко проверена непосредственно для явно выписанной функции Грина.

Определение 1. Решением задачи (1)—(3) будем называть функцию

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2), \tag{5}$$

где $T_0 < +\infty$ или $T_0 = +\infty$, удовлетворяющую уравнению (1) и начальному условию (2) (отметим, что граничные условия включены в определения пространств Z_1, Z_2). При этом в уравнении (1) выражение под знаком производной по t мы понимаем в смысле оператора $\mathbb{L}$, второе слагаемое — в смысле оператора дифференцирования, действующего при каждом фиксированном t из Z_2 в Z естественным образом, а третье — как результат вложения в Z функции uu_x, получаемой естественным образом при каждом фиксированном t.

Таким образом, равенство в (1) следует понимать как равенство двух элементов пространства Z, второй из которых представляет собой тождественный нуль, т. е. уравнение (1) интерпретируется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{L}u) + u_{xx} + uu_x = 0, \tag{6}$$

где производную по времени следует считать обычной (не частной) в смысле пространства (5). Операторы $\mathbb{L}$ и $\frac{d}{dt}$ коммутируют между собой (см. лекцию 1), поэтому уравнение (6) может быть переписано в виде

$$\mathbb{L}u' + u_{xx} + uu_x = 0. \tag{7}$$

Далее, уравнение (7) в силу обратимости операторов $\mathbb{L} = \mathbb{G}^{-1}$ эквивалентно в пространстве (5) уравнению

$$u' + \mathbb{G}(u_{xx}) + \mathbb{G}(uu_x) = 0.$$

А поскольку $\mathbb{G}(u_{xx}) = \mathbb{G}(u_{xx} - u + u) = u + \mathbb{G}u$, мы приходим к эквивалентному виду

$$u' + u + \mathbb{G}u + \mathbb{G}(uu_x) = 0. \tag{8}$$

Сделав теперь в (8) замену

$$w(t) = e^t u(t), \tag{9}$$

мы получим в силу вышесказанного, что функция $u(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_2)$ является решением задачи (1)—(3) тогда и только тогда, когда функция $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_2)$, связанная с ней тождеством (9), является решением задачи Коши

$$w' = -(\mathbb{G}w + e^{-t}\mathbb{G}(ww_x)), \quad w(x)(0) = u_0(x) \equiv w_0(x) \in Z_2. \tag{10}$$

Стандартным образом (см., например, предыдущую лекцию) задача (10) может быть сведена к интегральному уравнению

$$w(t) = w_0 - \int_0^t d\tau A(\tau, w(\tau)), \tag{11}$$

где $w_0 = u_0(x)$, $A(t,z) = \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$.

2. Интегральное уравнение в пространстве $C^1([0,T_0);Z_1)$. Будем вначале искать решение интегрального уравнения (11) ослабленного типа:

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_1).$$

Отметим, что по-прежнему $w_0 \in Z_2 \subset Z_1$.

Нетрудно видеть, что оператор

$$A(t,z) : z \mapsto \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$$

ограниченно липшиц-непрерывен при действии $Z_1 \to Z_1$ в силу свойств функции Грина. (Ниже будет доказано более сильное утверждение.) Далее, этот оператор непрерывен и по совокупности переменных (t,z) в силу непрерывности произведения непрерывных функций $e^{-t} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\mathbb{G}(zz_x) : Z_1 \to Z_1$. Кроме того, $A(t,0) = 0$. Итак, оператор $A(t,z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы из предыдущей лекции. Поэтому в силу этой теоремы уравнение (11) имеет единственное непродолжаемое решение. Точнее, верна

Теорема 1. Решение класса $C^1([0,T_0);Z_1)$ интегрального уравнения (11) (или, что то же самое, задачи Коши (10)) в классе $C^1([0,T_0);Z_1)$ существует на некотором максимальном промежутке $[0,T_0)$, где $0 < T_0 \leqslant +\infty$, и единственно на нём. При этом в том случае, когда $T_0 < +\infty$, верно предельное равенство

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|Aw\|_{Z_1} = +\infty.$$

3. Повышение гладкости до $C^1([0,T_0);Z_2)$.

Теорема 2. Пусть на промежутке $[0,T_0)$ (где T_0 может быть конечным или бесконечным) существует решение $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_1)$ задачи Коши (10) (или, что то же самое, интегрального уравнения (11)). Тогда это решение принадлежит классу $C^1([0,T_0);Z_2)$.

Доказательство. Заметим, что оператор

$$A(t,z) : z \mapsto \mathbb{G}z + e^{-t}\mathbb{G}(zz_x)$$

ограниченно липшиц-непрерывен при действии $Z_1 \to Z_2$ с не зависящей от t константой Липшица. Действительно, имеем при всех $t \geqslant 0$

$$\|A(t,\bar z) - A(t,\bar{\bar z})\|_{Z_2} = \left\|\mathbb{G}(\bar z - \bar{\bar z}) + e^{-t}\mathbb{G}(\bar z\bar z_x) - e^{-t}\mathbb{G}(\bar{\bar z}\bar{\bar z}_x)\right\|_{Z_2} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbb{G}\|_{Z\to Z_2}\|\bar z - \bar{\bar z}\|_Z + e^{-t}\|\mathbb{G}(\bar z\bar z_x) - \mathbb{G}(\bar{\bar z}\bar{\bar z}_x)\|_{Z_2} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbb{G}\|_{Z\to Z_2}\|\bar z - \bar{\bar z}\|_{Z_1} + \|\mathbb{G}(\bar z\bar z_x - \bar{\bar z}\bar{\bar z}_x)\|_{Z_2}.$$

Для оценки второго слагаемого в правой части заметим, что

$$\|\bar z\bar z_x - \bar{\bar z}\bar{\bar z}_x\|_Z = \|\bar z\bar z_x - \bar z\bar{\bar z}_x + \bar z\bar{\bar z}_x - \bar{\bar z}\bar{\bar z}_x\|_Z \leqslant \|\bar z(\bar z_x - \bar{\bar z}_x)\|_Z + \|(\bar z - \bar{\bar z})\bar{\bar z}_x\|_Z \leqslant$$
$$\leqslant \|\bar z\|_Z\|\bar z-\bar{\bar z}\|_{Z_1} + \|\bar z-\bar{\bar z}\|_Z\|\bar{\bar z}\|_{Z_1} \leqslant \|\bar z\|_{Z_1}\|\bar z-\bar{\bar z}\|_{Z_1} + \|\bar z-\bar{\bar z}\|_{Z_1}\|\bar{\bar z}\|_{Z_1} \leqslant 2\max(\|\bar z\|_{Z_1}, \|\bar{\bar z}\|_{Z_1})\|\bar z-\bar{\bar z}\|_{Z_1}.$$

А поэтому в силу непрерывности линейного оператора $\mathbb{G}$ при действии $Z \to Z_2$ мы и получаем требуемый результат с константой Липшица, зависящей от $\max(\|\bar z\|_{Z_1}, \|\bar{\bar z}\|_{Z_1})$.

Итак, $A(t,z)$ есть ограниченно липшиц-непрерывный оператор при действии из Z_1 в Z_2, причём константа Липшица зависит от $\max(\|\bar z\|_{Z_1}, \|\bar{\bar z}\|_{Z_1})$ и не зависит от t. (Отметим, что ограниченная липшиц-непрерывность оператора $A(t,z) : Z_1 \to Z_1$ отсюда непосредственно следует в силу непрерывности вложения $Z_2 \to Z_1$ с константой вложения, не превышающей единицу для выбранных нормировок пространств Z_1 и Z_2.) Из только что доказанной ограниченной липшиц-непрерывности в силу теоремы о композиции непрерывных отображений мы получаем, что если $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_1)) \subset C([0,T_0);Z_1)$, то $A(t,w(x)(t)) \in C([0,T_0);Z_2))$, поэтому интеграл в правой части уравнения (11) является интегралом от непрерывной функции и в смысле пространства Z_2. Следовательно, правая часть уравнения (11) принадлежит Z_2 при каждом t (напомним, что $w_0 \in Z_2$) и дифференцируема как функция от t со значениями в Z_2. Поэтому то же можно сказать о левой части, и мы получаем, что $w(x)(t) \in C^1([0,T_0);Z_2)$. ▲

4. Дальнейшее усиление результатов. Можно, однако, исходить из решения не в пространстве Z_1, а в пространстве Z. Для этого нам следует распространить оператор $A(t,z)$ на функции $z \in C[0,l]$. Для этого рассмотрим более подробно оператор $\mathbb{G}$ (см. (4) и ниже). Положим

$$g_1(x,s) = -\operatorname{sh} x \operatorname{ch} s + \frac{\operatorname{sh} x(l\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l\operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l}, \quad g_2(x,s) = -\operatorname{ch} x\operatorname{sh} s + \frac{\operatorname{sh} x(l\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} l\operatorname{sh} s)}{l - \operatorname{sh} l}.$$

Тогда

$$(\mathbb{G}f)(x) = \int_0^x g_2(x,s)f(s)\,ds + \int_x^l g_1(x,s)f(s)\,ds. \tag{12}$$

Естественно, это определение не годится для функции $f = zz_x$, если z только непрерывна. Поэтому мы формально запишем $zz_x = (1/2)(z^2)_x$ и формально проинтегрируем по частям в (12). Это даст

$$\mathbb{G}(zz_x)(x) = \frac{1}{2}\left[\int_0^x g_2(x,s)(z^2(s))_s ds + \int_x^l g_1(x,s)(z^2(s))_s ds\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[g_2(x,s)z^2(s)\Big|_{s=0}^{s=x} - \int_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s)\,ds + g_1(x,s)z^2(s)\Big|_{s=x}^{s=l} - \int_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s)\,ds\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[g_1(x,l)z^2(l) - g_2(x,0)z^2(0) - \int_0^x \frac{\partial g_2}{\partial s} z^2(s)\,ds - \int_x^l \frac{\partial g_1}{\partial s} z^2(s)\,ds\right], \quad (13)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались непрерывностью функции Грина. Формулу (13) следует рассматривать как определение оператора $\mathbb{G}(zz_x)$, применимое к $z \in Z$. Существенно, однако, что при $z \in Z_1$ цепочку равенств (13) можно прочитать с конца и убедиться тем самым, что при таких z новое определение равносильно старому. Но теперь мы будем считать, что второе слагаемое в операторе $A(t,z)$ определено с помощью формулы (13).

Заметим теперь, что функция $(\mathbb{G}(zz_x))(x)$ дифференцируема по x, как следует из свойств интегралов, зависящих от параметров, и свойств функции Грина. Имеем

$$(\mathbb{G}(zz_x))_x(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,l)z^2(l) - \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,0)z^2(0) - \frac{\partial g_2}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=x} z^2(x) - \right.$$
$$\left. - \int_0^x \frac{\partial^2 g_2}{\partial x \partial s}(x,s)z^2(s)\,ds + \frac{\partial g_1}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=x} z^2(x) - \int_x^l \frac{\partial^1 g_2}{\partial x \partial s}(x,s)z^2(s)\,ds\right] \quad (14)$$

Отметим ещё, что при $z \in Z$ для функции $A(t,z)$ выполнены граничные условия (3), — это следует из свойств функции Грина. Поэтому при $z \in Z$ имеем $A(t,z) \in Z_1$.

Используя ограниченность функций $g_1(x,s)$ и $g_2(x,s)$ и их первых и вторых производных на отрезке $[0,l]$, а также неравенство

$$|z_1^2(x) - z_2^2(x)| = |z_1(x) - z_2(x)| \cdot |z_1(x) + z_2(x)| \leqslant \|z_1 - z_2\|_{C[0,l]} \cdot (\|z_1\|_{C[0,l]} + \|z_2\|_{C[0,l]}),$$

устанавливаем, что оператор $z \mapsto \mathbb{G}(zz_x)$, а с ним и оператор $A(t,z)$ (в котором второе слагаемое теперь определено формулой (13)) является равномерно по t ограниченно липшиц-непрерывным при действии $Z \to Z_1$. А из теоремы о непрерывности произведения получаем, как и прежде, что $A(t,z)$ непрерывен по совокупности переменных (t,z) относительно рассматриваемых норм. Тогда тем более это верно при рассмотрении оператора A при действии $Z \to Z$. Итак, для оператора $A(t,z)$ в рассматриваемом теперь смысле выполнены все условия теоремы из предыдущей лекции и, следовательно, уравнение (11) имеет единственное непродолжаемое решение класса

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0); Z). \quad (15)$$

Далее, пользуясь только что установленными равномерной по t ограниченной липшиц-непрерывностью и непрерывностью по совокупности переменных (t,z) оператора $A(t,z)$ при действии $Z \to Z_1$, аналогично предыдущему разделу получаем, что существование решения класса (15) на промежутке $[0,T_0)$ гарантирует существование решения класса

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0); Z_1)$$

на этом же промежутке. А последнее в силу теоремы 2 обеспечивает существование классического решения

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0); Z_2)$$

на этом же промежутке. Эти рассуждения доказывают, что верна

Теорема 3. 1. Решение интегрального уравнения (11) (или, что то же самое, задачи Коши (10)) в классе

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0); Z)$$

существует на некотором максимальном промежутке $[0, T_0)$, где $0 < T_0 \leqslant +\infty$, и единственно на нём. При этом в том случае, когда $T_0 < +\infty$, верно предельное равенство

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|w\|_Z = +\infty.$$

2. Существование решения интегрального уравнения (11) в классе

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0); Z)$$

гарантирует существование его решения в классе

$$w(x)(t) \in C^1([0,T_0); Z_2)$$

с тем же T_0.

5. Разрушение решения. В предыдущем разделе мы доказали существование единственного максимального решения задачи (1)—(3), понимаемого в «усиленном классическом» смысле

$$u(x)(t) \in C^1([0,T_0); C^2[0,l]).$$

Теперь умножим обе части уравнения (1) на пробную функцию $l - x$ и проинтегрируем по $x \in (0, l)$. С учетом граничных условий справедливы следующие формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^l (l-x)u'_{xx}\,dx = -lu'_x(0,t) + u'(l,t) - u'(0,t) = 0,$$

$$\int_0^l (l-x)u_{xx}\,dx = -lu_x(0,t) + u(l,t) - u(0,t) = 0,$$

$$\int_0^l (l-x)uu_x dx = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\,dx.$$

Таким образом с учётом уравнения (1) приходим к следующему равенству:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2}\int_0^l u^2\,dx, \quad J(t) = \int_0^l (l-x)u\,dx. \tag{16}$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского получаем следующую оценку:

$$(J(t))^2 = \left(\int_0^l (l-x)u\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^l (l-x)^2 dx \int_0^l u^2 dx = \int_0^l u^2 dx \cdot \frac{l^3}{3}, \tag{17}$$

откуда с учётом (16) следует, что

$$\frac{dJ}{dt} \geqslant \frac{3}{2l^3} J^2(t). \tag{18}$$

Теперь мы предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию

$$J(0) = \int\limits_0^l (l-x)u_0(x)\,dx > 0. \tag{19}$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $J(t) \in C[0,T) \cap C^1(0,T)$;
2. $J(0) > 0$;
3. $\exists a > 0 \quad \forall t \in (0,T)$
$$\frac{dJ}{dt} \geqslant aJ^2.$$

Здесь $0 < T \leqslant +\infty$. Тогда при всех $t \in [0,T)$

$$J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}. \tag{20}$$

Доказательство. В силу второго и третьего условий имеем $J(t) \geqslant J(0)$ при всех $t \in [0,T)$. Следовательно, на всём промежутке существования функции J верна цепочка

$$\frac{J'}{J^2} \geqslant a \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{J}\right) \geqslant a \Rightarrow -\frac{1}{J}\bigg|_{t=0}^{t=t} \geqslant at \Rightarrow \frac{1}{J(0)} - \frac{1}{J(t)} \geqslant at \Rightarrow \frac{1}{J(t)} \leqslant \frac{1}{J(0)} - at \Rightarrow$$
$$\Rightarrow J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}.$$

▲

В силу леммы из (18) получим следующее неравенство:

$$J(t) \geqslant \frac{J(0)}{1 - aJ(0)t}, \tag{21}$$

где $a = \frac{3}{2l^3}$, из которого следует, что

$$T_0 \leqslant T_1 \equiv \frac{2l^3}{3} J(0)^{-1}, \tag{22}$$

т. е. на большем временном промежутке решение существовать не может.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 4. При условии (19) решение задачи (1)—(3) в смысле (5) не может существовать при всех $t \in [0, +\infty)$. Промежуток $[0, T_0)$ существования решения ограничен условием (22).

6. Основной результат. Из вышеизложенных результатов непосредственно следует

Теорема 5. В условиях теорем 1, 4 решение задачи (1)—(3) существует в классическом смысле

$$u(x)(t) \in C^1([0, T_0); Z_2)$$

и при выполнении условия (19) разрушается за конечное время с режимом «жёсткий blow-up», т. е. $T_0 \leqslant T_1 \equiv l^3 J(0)^{-1}$ и

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(x)(t)\|_{C[0,l]} = +\infty.$$

Доказательство. В самом деле, теорема 4 с учётом замены (9) гарантирует существование и единственность решения в классическом смысле, причём решение принадлежит $C^1([0, T_0); C^2[0, l])$ для тех же самых T_0, для которых оно принадлежит $C^1([0, T_0); C[0, l])$. Теорема 5 гарантирует разрушение классического решения за конечное время при условии (19). Следовательно, решение из $C^1([0, T_0); C^2[0, l])$, а с ним и решение из $C^1([0, T_0); C[0, l])$ существует лишь для $T_0 \leqslant T_1$. А тогда в силу теоремы из предыдущей лекции имеем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|w(t)\|_{C[0,l]} = +\infty,$$

а в силу соотношения (9) и неравенств $0 \leqslant t < T_0 < +\infty$ имеем

$$\lim_{t \to T_0 - 0} \|u(t)\|_{C[0,l]} = +\infty.$$

▲

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что для функции (13) выполнены граничные условия (3), если $z(x) \in C[0, l]$.

2. Проверить, что решение класса (5) является классическим решением, т. е. что все производные, входящие в уравнение (1), существуют и непрерывны.