Тематическая лекция 9

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

В этой лекции мы рассмотрим слабый принцип максимума для линейных и нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов.

§ 1. Слабый принцип максимума для слабых решений уравнения Лапласа и Пуассона

Дадим определение некоторых величин для функций $u(x) \in H^1(\Omega)$.

$$\sup_{\Omega} u \overset{def:}{=} \inf \{l : \ (u(x)-l)_+ = 0 \quad \text{п. вс. в} \quad \Omega\}, \tag{1.1}$$

$$\sup_{\partial\Omega} u \overset{def:}{=} \inf \left\{l : \ (u(x)-l)_+ \in H^1_0(\Omega)\right\}, \tag{1.2}$$

$$\inf_{\Omega} = -\sup_{\Omega}(-u), \quad \inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u), \tag{1.3}$$

где мы использовали следующее обозначение:

$$s_+ \overset{def:}{=} \max\{s, 0\}.$$

Замечание 1. В том случае, когда $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ имеют место неравенства

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{x\in\Omega} u(x), \quad \sup_{\partial\Omega} u = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

В слабом смысле решение $u(x) \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1.4), если

$$\int_{\Omega} (D_x u(x), D_x \varphi(x)) \, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega). \tag{1.5}$$

Справедливо следующее утверждение, которое имеет смысл слабого принципа максимума для слабых решений уравнения Лапласа:

Лемма 1. *Пусть* $u(x) \in H^1(\Omega)$ — *это слабое решение уравнения Лапласа в смысле равенства* (1.5). *Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u.$$

Доказательство.

Пусть

$$l = \sup_{\partial\Omega} u \Rightarrow (u(x) - k)_+ \in H^1_0(\Omega)$$

для всех $k > l$. Заметим, что имеет место следующее равенство в слабом смысле:

$$\frac{\partial (u(x) - k)_+}{\partial x_i} = \begin{cases} \partial u/\partial x_i, & \text{если} \quad u(x) > k; \\ 0, & \text{если} \quad u(x) \leqslant k. \end{cases}$$

Выбирая в качестве функции $\varphi(x)$ в равенстве (1.5) функцию

$$\varphi(x) = (u(x) - k)_+ \in H^1_0(\Omega)$$

мы получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} |D_x (u(x) - k)_+|^2 \, dx = 0.$$

Осталось воспользоваться неравенством Фридрихса и получить неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |(u(x) - k)_+|^2 \, dx \leqslant K_{fr} \int\limits_{\Omega} |D_x (u(x) - k)_+|^2 \, dx = 0,$$

из которого вытекает, что

$$(u(x) - k)_+ = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega$$

для всех $k > l$. Следовательно,

$$\sup_{\Omega} u \leqslant l = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Для всякого слабого решения* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *уравнения Лапласа имеет место неравенство*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leqslant \inf_{\Omega} u.$$

Доказательство.

Достаточно заметить, что $-u(x) \in H^1(\Omega)$ — это тоже слабое решение уравнения Лапласа. Поэтому из теоремы получим неравенство

$$\sup_{\Omega}(-u) \leqslant \sup_{\partial\Omega}(-u) \Rightarrow -\sup_{\partial\Omega}(-u) \leqslant -\sup_{\Omega}(-u) \Rightarrow \inf_{\partial\Omega} u \leqslant \inf_{\Omega} u.$$

Следствие доказано.

Для дальнейшего нам необходимо доказать следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t)$ является неотрицательной и невозрастающей функцией на луче $[k_0, +\infty)$, удовлетворяющая*

$$\varphi(h) \leqslant \left(\frac{M}{h-k}\right)^{\alpha} \varphi^{\beta}(k) \quad \textit{для всех} \quad h > k \geqslant k_0 \tag{1.6}$$

для некоторых постоянных $M > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$. Тогда найдется такое $d > 0$, [1] *что*

$$\varphi(h) = 0 \quad \textit{для всех} \quad h \geqslant k_0 + d. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Положим

$$k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.8}$$

с некоторой постоянной $d > 0$, подлежащей определению. Положим в неравенстве (1.6)

$$h = k_{n+1} = k_0 + d - \frac{d}{2^{n+1}}, \quad k = k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - k = k_{n+1} - k_n = \frac{d}{2^{n+1}} \Rightarrow \varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{M^{\alpha} 2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha}} \varphi^{\beta}(k_n). \tag{1.9}$$

Докажем по индукции, что имеет место следующее неравенство:

$$\varphi(k_n) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.10}$$

Действительно, в силу (1.9) имеет место цепочка неравенств

$$\varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{M^{\alpha} 2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha}} \varphi^{\beta}(k_n) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^{n+1}} \frac{M^{\alpha} 2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha} r^{n(\beta-1)-1}} \varphi^{\beta-1}(k_0). \tag{1.11}$$

Теперь положим

$$r = 2^{\alpha/(\beta-1)} > 1.$$

Тогда

$$\varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^{n+1}} \frac{M^{\alpha} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}}{d^{\alpha}} \varphi^{\beta-1}(k_0).$$

Отсюда видно, что если величина $d > 0$ удовлетворяет равенству

$$\frac{M^{\alpha} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}}{d^{\alpha}} \varphi^{\beta-1}(k_0) = 1 \Rightarrow d = M 2^{\beta/(\beta-1)} \varphi^{(\beta-1)/\alpha}(k_0),$$

то мы получим неравенство

$$\varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^{n+1}}.$$

[1] Выражение для величины $d > 0$ будет получено в процессе доказательства утверждения.

Отсюда в силу неотрицательности функции $\varphi(t)$ и того, что она является невозрастающей приходим к выводу, что

$$\varphi(k_0+d)=\lim_{n\to+\infty}\varphi(k_n)\leqslant 0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\varphi(k_0+d)=0\Rightarrow\varphi(h)=0\quad\text{для всех}\quad h\geqslant k_0+d.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать принцип максимума для слабых решений уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x)=f(x)\quad\text{при}\quad x\in\Omega. \tag{1.12}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in L^\infty(\Omega)$ *и* $u(x)\in H^1(\Omega)$ *— это слабое решение уравнения Пуассона* (1.12). *Тогда имеет место неравенство*

$$\sup_\Omega u\leqslant\sup_{\partial\Omega}u+c\|f\|_{L^\infty}, \tag{1.13}$$

где постоянная c зависит только от N *и* Ω.

Доказательство.

Шаг 1. Напомним, что слабое решение уравнения Пуассона удовлетворяет равенству

$$\int\limits_\Omega (D_x u(x),D_x\varphi(x))\;dx=\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1.14}$$

для всех $\varphi(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Пусть

$$l\overset{def:}{=}\sup_{\partial\Omega}u,\quad \varphi(x)=(u(x)-k)_+\in H_0^1(\Omega),\quad k>l.$$

После подстановки функции $\varphi(x)$ в (1.14) мы получим равенство [1)]

$$\int\limits_\Omega |D_x\varphi(x)|^2\,dx=\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\int\limits_\Omega |D_x\varphi(x)|^2\,dx\leqslant\int\limits_\Omega |f(x)\varphi(x)|\,dx. \tag{1.15}$$

Заметим, что в силу неравенства Фридрихса имеет место непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)\quad\text{при}\quad 2<p<p^*.$$

[1)] Поскольку $D_x(u(x)-k)=D_x u(x)$.

Поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant c \left(\int_{\Omega} |D_x\varphi|^2 \, dx\right)^{1/2},$$

где постоянная $c = c(N, p, \Omega) > 0$. В силу этого неравенства мы из неравенства (1.15) получим неравенство

$$\left(\int_{\Omega} |\varphi|^p \, dx\right)^{2/p} \leqslant c \int_{\Omega} |f(x)\varphi(x)| \, dx,$$

которое с учетом определения функции $\varphi(x) = (u(x) - k)_+$ может быть переписано в следующем виде:

$$\left(\int_{A(k)} |\varphi|^p \, dx\right)^{2/p} \leqslant c \int_{A(k)} |f(x)\varphi(x)| \, dx, \tag{1.16}$$

где

$$A(k) \stackrel{def:}{=} \{x \in \Omega : \; u(x) > k\}. \tag{1.17}$$

Шаг 2. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int_{A(k)} |f(x)\varphi(x)| \, dx \leqslant \left(\int_{A(k)} |\varphi|^p \, dx\right)^{1/p} \left(\int_{A(k)} |f|^q \, dx\right)^{1/q},$$

где

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Отсюда и из (1.16) получим неравенство

$$\left(\int_{A(k)} |\varphi|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant c \left(\int_{A(k)} |f|^q \, dx\right)^{1/q}. \tag{1.18}$$

Отметим, что при $h > k$ в силу определения (1.17) имеет место вложение $A(h) \subset A(k)$. Кроме того, при $x \in A(h)$ выполнена цепочка неравенств

$$u(x) > h \Rightarrow u(x) - k + k > h \Rightarrow (u(x) - k)_+ + k > h \Rightarrow \varphi(x) > h - k.$$

Поэтому имеет место цепочка неравенств

$$\int\limits_{A(k)} |\varphi|^p\,dx \geqslant \int\limits_{A(h)} |\varphi|^p\,dx \geqslant (h-k)^p|A(h)| \ ^{1)} \tag{1.19}$$

В силу (1.18) и (1.19) вытекает неравенство

$$(h-k)|A(h)|^{1/p} \leqslant c\|f\|_{L^\infty(\Omega)}|A(k)|^{1/q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |A(h)| \leqslant \left(\frac{c\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{h-k}\right)^p |A(k)|^{p/q}.$$

Шаг 3. Применим лемму 2 к функции $\varphi(t) = |A(t)|$, заметив, что при $p > 2$ получим

$$p > q = \frac{p}{p-1}.$$

Тогда получим, что

$$\varphi(l+d) = |A(l+d)| = 0,$$

где

$$d = c\|f\|_{L^\infty(\Omega)}|A(l)|^{(p-q)/(pq)}2^{p/(p-q)} \leqslant c|\Omega|^{(p-q)/(pq)}2^{p/(p-q)}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

В силу определения (1.17) получим неравенство

$$u(x) \leqslant l + c|\Omega|^{(p-q)/(pq)}2^{p/(p-q)}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in L^\infty(\Omega)$ *и* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *— это слабое решение* 1.12. *Тогда*

$$\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u - c\|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

где постоянная $c = c(N, \Omega)$.

§ 2. Слабый принцип максимума для слабых решений уравнения теплопроводности

Дадим определения некоторых величин, используемых в данном параграфе. Пусть $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$, $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область.

$$\sup_D u = \inf\left\{l:\ (u(x,t)-l)_+ = 0 \quad \text{п. вс. в} \quad D\right\},$$

---

[1]) Символом $|A(h)|$ мы обозначаем обычно меру Лебега множества $A(h)$, которое, очевидно, является измеримым в силу измеримости функции $u(x) \in H^1(\Omega)$.

$$\sup_{\partial' D} u = \inf\left\{ l :\ (u(x,t) - l)_+ \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(D) \right\},$$

$$\inf_D u = -\sup_D(-u), \quad \inf_{\partial' D} u = -\sup_{\partial' D}(-u).$$

Прежде всего рассмотрим однородное уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 3. *Пусть* $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение однородного уравнения теплопроводности* (2.1). *Тогда*

$$\sup_D u \leqslant \sup_{\partial' D} u. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно определению слабого решения $u(x)$ класса $W_2^{1,1}(D)$ имеет место равенство

$$\int_D \left(u_t(x,t)\varphi(x,t) + (D_x u(x,t), D_x\varphi(x,t))\right) dx\, dt = 0 \tag{2.3}$$

для всех $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ и, следовательно, для всякой функции $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D)$. Положим

$$l \overset{def:}{=} \sup_{\partial' D} u \text{ [1]}$$

и положим

$$\varphi(x,t) = (u(x,t) - k)_+, \quad k > l.$$

Тогда

$$\varphi(x,t) \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(D) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D).$$

После подстановки этой функции в равенство (2.3) мы получим выражение

$$\int_0^T \int_\Omega (u(x,t) - k)_t (u(x,t) - k)_+ \, dx\, dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \left(D_x(u(x,t) - k), D_x(u(x,t) - k)_+\right) dx\, dt = 0,$$

[1] Ясно, что величина l не зависит от времени $t \in [0,T]$.

из которого получим уравнение

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-k)_+^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega \left|D_x(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt = 0. \tag{2.4}$$

Прежде всего заметим, что

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-k)_+^2\,dx\,dt = \int_\Omega (u(x,T)-k)_+^2\,dx - \int_\Omega (\gamma(u(x,0)-k)_+)^2\,dx, \tag{2.5}$$

причем в силу теоремы **??** и того факта, что $k > l = \sup\limits_{\partial' D} u$ имеем

$$\gamma(u(x,0)-k)_+ = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x\in\overline{\Omega}.$$

Отсюда и из (2.4), (2.5)

$$\int_0^T\int_\Omega \left|D_x(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt \leqslant 0. \tag{2.6}$$

В силу неравенства Фридрихса имеем

$$\int_0^T\int_\Omega \left|(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt \leqslant K_{fr}\int_0^T\int_\Omega \left|D_x(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u(x,t)\leqslant k \quad \text{для всех} \quad k>l \quad \text{для почти всех} \quad (x,t)\in D.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $u(x,t)\in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение уравнения* (2.1). *Тогда*

$$\inf_{\partial' D} u \leqslant \inf_D u.$$

Теперь мы приступим к доказательству слабого принципа максимума для слабых решений неоднородного уравнения теплопроводности [1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t)\in D. \tag{2.7}$$

Справедлива следующая теорема:

---

[1]) На самом деле правильнее было бы назвать неравенство (2.9) априорной оценкой, а не слабым принципом максимума, хотя и такое название оправдано.

Теорема 2. *Пусть* $f(x,t) \in L^{\infty}(D)$ *и* $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение неоднородного уравнения* (2.7). *Тогда*

$$\sup_D u \leqslant \sup_{\partial' D} u + c\|f\|_{L^{\infty}(D)}, \tag{2.8}$$

где постоянная $c = c(N,\Omega) > 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Напомним определение слабого решения $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ неоднородного уравнения теплопроводности (2.7)

$$\int_D (u_t(x,t)\varphi(x,t) + (D_x u(x,t), D_x\varphi(x,t)))\,dx\,dt = \\ = \int_Q f(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt \tag{2.9}$$

для всех $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\infty}(\overline{D})$. Обозначим через

$$l \overset{def:}{=} \sup_{\partial' D} u.$$

Для $k > l$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ мы определим функцию $\varphi(x,t)$ следующим образом:

$$\varphi(x,t) = \chi_{[t_1,t_2]}(t)(u(x,t)-k)_+, \quad \chi_E(t) \overset{def:}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in E; \\ 0, & \text{если} \quad t \notin E. \end{cases}$$

Подставим эту функцию $\varphi(x,t)$ в равенство (2.9) и получим равенство

$$\int_D (u-k)_t(u-k)_+\chi_{[t_1,t_2]}(t)\,dx\,dt + \int_D \chi_{[t_1,t_2]}(t)\,|D_x(u-k)_+|^2\,dx\,dt = \\ = \int_D f(x,t)(u-k)_+\chi_{[t_1,t_2]}(t)\,dx\,dt.$$

Отсюда в силу определения характеристической функции $\chi_{[t_1,t_2]}(t)$ отрезка $[t_1,t_2] \subset [0,T]$ получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-k)_+{}^2\,dx\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega \left|D_x\,(u-k)_+\right|^2\,dx\,dt \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |f|(u-k)_+\,dx\,dt,$$

из которого получим неравенство

$$\frac{1}{2}\left(I_k(t_2) - I_k(t_1)\right) + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega |D_x(u-k)_+|^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\,dx\,dt, \quad (2.10)$$

где

$$I_k(t) \stackrel{def:}{=} \int\limits_{\Omega} (u(x,t)-k)_+^2\,dx. \quad (2.11)$$

Шаг 2. Предположим. что абсолютно непрерывная функция $I_k(t)$ достигает максимума в точке $\sigma \in [0,T]$. Поскольку $I_k(0)=0$ и $I_k(t) \geqslant 0$ мы можем предположить, что $\sigma > 0$. Теперь положим

$$t_1 = \sigma - \varepsilon, \quad t_2 = \sigma$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при этом в силу определения $\sigma > 0$

$$I_k(\sigma) - I_k(\sigma-\varepsilon) \geqslant 0.$$

При таких t_1 и t_2 из неравенства (2.10) получим неравенство

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |D_x(u-k)_+|^2\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\,dx\,dt.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |D_x(u-k)_+|^2\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\,dx\,dt.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ мы получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |D_x(u(x,\sigma)-k)_+|^2\,dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |f(x,\sigma)|(u(x,\sigma)-k)_+\,dx. \quad (2.12)$$

Введем обозначения

$$A_k(t) \stackrel{def:}{=} \{x \in \Omega:\ u(x,t) > k\}, \quad \mu_k \stackrel{def:}{=} \sup_{0<t<T} |A_k(t)|. \quad (2.13)$$

Аналогично выводу неравенства (1.18) мы получим в силу неравенства Фридрихса неравенство

$$\left(\int\limits_{A_k(\sigma)} (u(x,\sigma)-k)_+^p\right)^{1/p} \leqslant c\left(\int\limits_{A_k(\sigma)} |f(x,\sigma)|^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant c\|f\|_{L^\infty(D)}|A_k(\sigma)|^{1/q} \leqslant c\|f\|_{L^\infty(D)}\mu_k^{1/q} \quad (2.14)$$

при условиях

$$2 < p < 2^*, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

В силу ограниченности области Ω для функции $I_k(\sigma)$, определенной формулой (2.11) в силу неравенства Гельдера с показателями

$$q_1 = \frac{p}{2} > 1, \quad q_2 = \frac{q_1}{q_1 - 1} = \frac{p}{p-2}$$

в силу (2.14) мы получим неравенство

$$I_k(\sigma) \leqslant \left(\int\limits_{A_k(\sigma)} (u-k)_+^p \, dx \right)^{2/p} |A_k(\sigma)|^{(p-2)/p} \leqslant$$
$$\leqslant (c\|f\|_{L^\infty(D)})^2 \mu_k^{(3p-4)/p}. \quad (2.15)$$

Следовательно, в силу определения числа $\sigma > 0$ для всех $t \in [0, T]$ имеем место неравенство

$$I_k(t) \leqslant I_k(\sigma) \leqslant (c\|f\|_{L^\infty(D)})^2 \mu_k^{(3p-4)/p}. \quad (2.16)$$

Шаг 3. В силу определения (2.13) величины $A_k(t)$ имеем для всех $h > k$ и при любом $t \in [0, T]$

$$I_k(t) \geqslant \int\limits_{A_h(t)} (u(x,t) - k)_+^2 \, dx \geqslant (h-k)^2 |A_h(t)|,$$

а с учетом (2.16) мы получим неравенство

$$(h-k)^2 \mu_h \leqslant (c\|f\|_{L^\infty(D)})^2 \mu_k^{(3p-4)/p},$$

т. е.

$$\mu_h \leqslant \left(\frac{c\|f\|_{L^\infty(D)}}{h-k} \right)^2 \mu_k^{(3p-4)/p}, \quad \frac{3p-4}{p} = 1 + \frac{2p-4}{p} > 1. \text{ [1]} \quad (2.17)$$

В силу результата леммы 2 получим, что

$$\mu_{l+d} = \sup_{0<t<T} |A_{l+d}(t)| = 0,$$

где

$$d = c\|f\|_{L^\infty(D)} \mu_l^{1-2/p} 2^{(3p-4)/(2p-4)} \leqslant c|\Omega|^{1-2/p} 2^{(3p-4)/(2p-4)} \|f\|_{L^\infty(D)}.$$

Отсюда согласно определению $A_{l+d}(t)$ получим, что

$$u(x,t) \leqslant l + c|\Omega|^{1-2/p} 2^{(3p-4)/(2p-4)} \|f\|_{L^\infty(D)} \quad \text{для п. вс.} \quad (x,t) \in D.$$

Теорема доказана.

---

[1] Поскольку $p > 2$.

Следствие. *Пусть* $f(x,t) \in L^\infty(D)$ *и* $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение неоднородного уравнения теплопроводности. Тогда*

$$\inf_D u \geqslant \inf_{\partial' D} u - c\|f\|_{L^\infty(D)},$$

где постоянная $c = c(N, \Omega) > 0$.