Тематическая лекция 7

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА И С. Л. СОБОЛЕВА

В этой лекции мы

§ 1. Параболические пространства Гельдера

Пусть $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область с гладкой границей $\partial\Omega$. Далее символом $\partial^{'} D$ мы обозначаем параболическую границу области D [1])

$$\partial^{'} D \overset{def:}{=} \overline{B} \cup S, \quad B \overset{def:}{=} \Omega \otimes \{t=0\}, \quad S \overset{def:}{=} \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$B_T \overset{def:}{=} \Omega \otimes \{t=T\}, \quad \partial B_T \overset{def:}{=} \partial\Omega \otimes \{t=T\}.$$

Полный курс теории линейных параболических уравнений выложен также на сайте кафедры математики в разделе «Специальные курсы//Параболические уравнения.»

Ниже мы использовали следующие обозначения:

$$|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \overset{def:}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{2+\alpha;1+\alpha/2;D} < +\infty, \qquad (1.1)$$

где

$$[u]_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \overset{def:}{=} [u_t]_{\alpha,\alpha/2;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\alpha,\alpha/2;D}, \qquad (1.2)$$

$$[u]_{\alpha,\alpha/2;D} \overset{def:}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^{\alpha}(z_1, z_2)}, \text{ [2])} \qquad (1.3)$$

$$|u|_{\alpha,\alpha/2;D} \overset{def:}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\alpha,\alpha/2;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \qquad (1.4)$$

---

[1]) Напомним, что полная граница $\partial D = \overline{B}_T \cup \overline{B} \cup S$.

[2]) Параболическое расстояние: $\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}$.

для $\alpha \in (0,1]$. Через $\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ мы обозначаем пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\alpha,\alpha/2;D} < +\infty$, а через $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ определим как банахово пространство вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что конечна *норма* $|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < +\infty$.

В дальнейшем нам потребуется следующие оценки величины $|h|_{\alpha,\alpha/2;D}$ для функции $h(x,t,u) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{D}\otimes\mathbb{R}^1)$ при условии, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. Прежде всего имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{gathered}
|h|_{\alpha,\alpha/2;D} = \\
= |h|_{0;D} + \sup_{(z_1,u_1)\neq(z_1,u_2)} \frac{|h(x_1,t_1,u_1)-h(x_2,t_2,u_2)|}{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}\frac{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}{\rho^\alpha(z_1,z_2)} \leqslant \\
\leqslant |h|_{0;D} + K_1(1+|u_t|_{0;D} + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{0;D}) \leqslant \\
\leqslant |h|_{0;D} + K_1 + \varepsilon|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c_1(\varepsilon)|u|_{0;D}, \quad (1.5) \\
\rho(z_1,z_2) \stackrel{def:}{=} |x_1-x_2| + |t_1-t_2|^{1/2}, \\
\rho((z_1,u_1),(z_2,u_2)) \stackrel{def:}{=} \rho(z_1,z_2) + |u_1-u_2|,
\end{gathered}
$$

где мы воспользовались известным интерполяционным неравенством из книги Н. В. Крылова [**?**]:

$$
\begin{gathered}
|u_{xx}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + |u_x|_{\alpha,\alpha/2;D} + |u|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \\
\leqslant \varepsilon|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c(\varepsilon)|u|_{0;D} \quad (1.6)
\end{gathered}
$$

для всех $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ и всех $\varepsilon > 0$.

§ 2. Интеграл Бохнера

Рассмотрим теперь банаховы пространства функций $u(t) \in L^q(0,T;\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — это банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$. Для аккуратного введения этого пространства нам нужно сначала ввести понятие *интеграла Бохнера*.

Перейдем к построению интеграла Бохнера. Как и в случае интеграла Лебега пусть у нас имеется тройка $([0,\mathrm{T}],\mathcal{M},\mu)$ — это измеримое пространство, состоящее из отрезка $[0,\mathrm{T}] \subset \mathbb{R}^1_+$, $\sigma-$алгебры его подмножеств $\mathcal{M}$ и положительной меры Лебега μ, определенной на $\mathcal{M}$. Конечно, как и интеграл Лебега интеграл Бохнера можно строить и для множеств не только на прямой $\mathbb{R}^1$. Но нас в дальнейшем будет интересовать интеграл Бохнера на «временном» отрезке $[0,\mathrm{T}]$. Дадим следующее определение.

Определение 1. *Простой функцией $h(t)$ на сегменте $[0,\mathrm{T}]$ со значениями в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ мы назовем следующую функцию*:

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}b_i\chi_i(t)\quad b_i\in\mathbb{B}, \tag{2.1}$$

где для каждого $i=\overline{1,n}$ функция $\chi_i(t)$ — это характеристическая функция некоторого множества $S_i\in\mathcal{M}$:

$$\chi_i(t)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t\in S_i;\\ 0 & \text{при}\quad t\in[0,\mathrm{T}]\backslash S_i.\end{cases}$$

Причем $S_i\cap S_j=\varnothing$ при $i\neq j$.

Теперь мы можем определить интеграл Бохнера для простых функций. Дадим определение.

Определение 2. *Интегралом Бохнера от простой функции $h(t)$ называется следующая величина*:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}h(t)\,\mu(dt)=\sum_{i=1}^{n}b_i\mu(S_i). \tag{2.2}$$

Наконец, можно ввести интеграл Бохнера для произвольной $\mathbb{B}-$ $-$значной функции $f(t)$. Дадим определение.

Определение 3. *Интегралом Бохнера от произвольной $\mathbb{B}-$ $-$значной функции называется следующая величина*:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}}f(t)\,\mu(dt)=\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}}h_n(t)\mu(dt), \tag{2.3}$$

где предел понимается в сильном смысле банахова пространства $\mathbb{B}$ при условии, что существует такая последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций, сходящаяся μ почти всюду на $[0,\mathrm{T}]$ сильно в $\mathbb{B}$ к функции $f(t)$, причем

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\|f(t)-h_n(t)\|\,\mu(dt)=0. \tag{2.4}$$

Здесь есть один тонкий момент. Мы пока не доказали, что скалярная функция

$$\|f(t)-h_n(t)\|,$$

стоящая под знаком интеграла Лебега (2.4) $\mu-$измерима на отрезке $[0,\mathrm{T}]$. Действительно, это необходимо проверить. Для ответа на этот вопрос мы немного углубимся в теорию измеримости $\mathbb{B}-$значных функций.

Дадим определение сильной измеримости.

Определение 4. *$\mathbb{B}$—значная функция $f(t)$ называется μ— —сильно измеримой на отрезке $[0,\mathrm{T}]$, если существует последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций на отрезке $[0,\mathrm{T}]$, сильно сходящаяся в $\mathbb{B}$ к $f(t)$ μ почти всюду на отрезке $[0,\mathrm{T}]$.*

Теперь мы можем доказать важную теорему, принадлежащую Бохнеру.

Теорема 1. *Для того чтобы сильно μ—измеримая функция $f(t)$ была интегрируемой по Бохнеру на отрезке $[0,\mathrm{T}]$, необходимо и достаточно, чтобы $\|f(t)\|$ была μ—интегрируемой на этом же отрезке.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Имеет место следующее неравенство треугольника:

$$\|f(t)\| \leqslant \|h_n(t)\| + \|f(t) - h_n(t)\|.$$

Из этого неравенства вытекает μ—интегрируемость функции $\|f(t)\|$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $\{h_n(t)\}$ это последовательность простых функций, μ почти всюду на отрезке $[0,\mathrm{T}]$ сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся к функции $f(t)$. Рассмотрим новую последовательность простых функций:

$$w_n(t) = \begin{cases} h_n(t), & \text{при} \quad \|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + n^{-1}\right); \\ 0, & \text{при} \quad \|h_n(t)\| > \|f(t)\| \left(1 + n^{-1}\right). \end{cases}$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to+\infty} \|f(t) - w_n(t)\| = 0$$

μ почти всюду на отрезке $[0,\mathrm{T}]$. Кроме того,

$$\|f(t) - w_n(t)\| \leqslant 2\|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Теперь в силу μ—интегрируемости функции $\|f(t)\|$ можно воспользоваться теоремой Лебега и доказать, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - w_n(t)\| \, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим еще некоторые свойства интеграла Бохнера. Во-первых, интеграл Бохнера обладает свойством линейности.

Лемма 1. *Пусть функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ интегрируемы по Бохнеру, тогда для любых постоянных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^1$ имеет место следующее равенство*:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] \, \mu(dt) = \alpha_1 \int\limits_0^{\mathrm{T}} f_1(t) \, \mu(dt) + \alpha_2 \int\limits_0^{\mathrm{T}} f_2(t) \, \mu(dt).$$

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения достаточно взять соответствующие аппроксимирующие последовательности и перейти к пределу, поскольку для простых функций это равенство имеет место.

Лемма доказана.

Кроме того, имеет место важное в приложениях неравенство.

Лемма 2. *Пусть функция $f(t)$ $\mu-$интегрируема по Бохнеру на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$, *тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) \right\| \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t)\|\,\mu(dt).$$

Доказательство.

Надо взять аппроксимирующую последовательность простых функций $\{h_n(t)\}$, для которых указанное неравенство имеет место, а затем перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить требуемое неравенство. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) \right\| \leqslant \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) - \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) - \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|h_n(t)\|\,\mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) - \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - h_n(t)\|\,\mu(dt) + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t)\|\,\mu(dt).$$

Теперь надо перейти к пределу при $n \to +\infty$, воспользовавшись определением 3.

Лемма доказана.

Наконец, справедлива следующая важная лемма.

Лемма 3. *Пусть функция $f(t)$ интегрируема по Бохнеру на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$, *тогда функция $u(t)$, определенная формулой*

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\mu(ds), \tag{2.5}$$

является сильно дифференцируемой для почти всех $t \in [0, \mathrm{T}]$.

Доказательство.

1. Итак, пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3, причем без ограничения общности можно предполо-

жить, что имеет место следующее неравенство (сравни с теоремой 2):

$$\|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

В силу определения 3

$$h_n(t) \to f(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}$$

μ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds) - f(t_0) = \frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} [f(s) - h_n(s)]\;\mu(ds) + \\ + \frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\,\mu(ds) - f(t_0).$$

Отсюда получаем следующую цепочку неравенств:

$$\left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds) - f(t_0)\right\| \leqslant \frac{1}{|t-t_0|}\int\limits_{t_0}^{t} \|f(s) - h_n(s)\|\;\mu(ds) + \\ + \left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\,\mu(ds) - h_n(t_0)\right\| + \|h_n(t_0) - f(t_0)\| = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3. \tag{2.6}$$

2. Прежде всего отметим, что в силу того, что $h_n(t)$ — это простая функция, то выражение I_2 равно нулю μ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$ при достаточно малой длине отрезка $|t - t_0|$. Выражение для I_1 в пределе при $t \to t_0$ дает следующее предельное равенство:

$$\lim_{t\to t_0} \mathrm{I}_1 = \|h_n(t_0) - f(t_0)\|$$

μ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Таким образом, из (2.6) получим в пределе при $t \to t_0$ следующее неравенство:

$$\lim_{t\to t_0}\left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds) - f(t_0)\right\| \leqslant 2\,\|h_n(t_0) - f(t_0)\| \tag{2.7}$$

μ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$.

3. Теперь достаточно перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить из неравенства (2.7) следующее равенство:

$$\lim_{t\to t_0}\left\|\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\,\mu(ds) - f(t_0)\right\| = 0$$

μ почти всюду на отрезке $[0,\mathrm{T}]$.

Лемма доказана.

Имеет место такое утверждение.

Лемма 4. *Пусть $f(t)$ функция, интегрируемая по Бохнеру. Тогда для каждого $f^* \in \mathbb{B}^*$ имеет место следующее равенство*:

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt)\right\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, f(t)\rangle\ \mu(dt). \tag{2.8}$$

Доказательство.

1. Пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3 для функции $f(t)$. Для каждой функции из этой последовательности имеет место равенство (2.8):

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt)\right\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t)\rangle\ \mu(dt).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt)\right\rangle = \left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t)-h_n(t)]\ \mu(dt)\right\rangle + \\ + \left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt)\right\rangle = \left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t)-h_n(t)]\ \mu(dt)\right\rangle + \\ + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t)\rangle\ \mu(dt) = \left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t)-h_n(t)]\ \mu(dt)\right\rangle + \\ + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t)-f(t)\rangle\ \mu(dt) + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, f(t)\rangle\ \mu(dt). \tag{2.9}$$

2. Справедливы следующие оценки:

$$\left|\left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t)-h_n(t)]\ \mu(dt)\right\rangle\right| \leqslant \|f^*\|_* \left\|\int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t)-h_n(t)]\ \mu(dt)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - h_n(t)\| \, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\left| \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle \; \mu(dt) \right| \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} |\langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle| \; \mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|h_n(t) - f(t)\| \, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

С учетом этих оценок из (2.9) переходом к пределу при $n \to +\infty$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s) \, \mu(ds) \quad t_0, t \in [0, \mathrm{T}].$$

Тогда если $f(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$, *то* $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$.

Доказательство.

Из леммы 5 вытекает, что $u(t)$ μ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$ сильно дифференцируема причем $u'(t) = f(t)$. Но поскольку $f(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$, то $u'(t)$ после изменения на множестве нулевой меры μ имеем $u'(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$.

Теорема доказана.

§ 3. Пространства $L^p(0, T; \mathbb{B})$

Теперь определим класс функций, интегрируемых по Бохнеру. Дадим определение.

Определение 5. *Классом функций* $\mathcal{L}^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$ *при* $p \in [1, +\infty)$ *назовем множество сильно* $\mu-$*измеримых на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$ $\mathbb{B}-$*значных функций, для которых функция времени* $\|f(t)\|^p$ $\mu-$*интегрируема на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$.

Замечание 2. Пространство $\mathcal{L}^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$ не является линейным, поскольку нулевой элемент является не единственным.

Обозначим через $\mathcal{J}_0([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$ подмножество множества $\mathcal{L}^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$, состоящее из $\mu-$измеримых $\mathbb{B}-$значных функций равных нулю почти всюду в $[0, \mathrm{T}]$. И рассмотрим следующее факторпространство:

$$\mathcal{L}^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B}) / \mathcal{J}_0([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B}). \tag{3.1}$$

Это факторпространство является линейным пространством, поскольку мы отождествили все функции, отличающиеся лишь на множестве нулевой $\mu-$меры Лебега. Значит, отождествлены и все функции равные нулю почти всюду по $\mu-$мере Лебега. Как и всякое факторпространство, введенное факторпространство состоит из дизъюнктных классов эквивалентности. Мы будем использовать этот факт в дальнейшем.

Дадим следующее определение.

Определение 6. *Через $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ обозначим факторпространство $\mathcal{L}^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty)$.*

Отдельно нужно рассмотреть случай $p=+\infty$.

Определение 7. *Через $\mathcal{L}^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ обозначим множество $\mu-$измеримых функций, которые почти всюду по норме пространства $\mathbb{B}$ ограничены.*

И аналогично определению 7 дадим следующее:

Определение 8. *Через $L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ обозначим факторпространство $\mathcal{L}^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$.*

Так введенные множества $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty)\cup\{\infty\}$ являются линейными пространствами. Естественно, возникает вопрос: можно ли сделать банаховыми пространствами относительно некоторой нормы?

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пространство $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ является банаховым при $p\in[1,+\infty)$ относительно нормы*

$$\|u\|_p\equiv\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}}\|u(t)\|^p\,\mu(dt)\right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

Теорема 4. *Векторное пространство $L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ является банаховым относительно нормы*

$$\|u\|_\infty\equiv\underset{t\in[0,\mathrm{T}]}{\mathrm{vraimax}}\|u(t)\|. \tag{3.3}$$

Справедливо следующее неравенство Гельдера.

Лемма 5. *Пусть $u(t)\in L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty]$, а $v(t)\in$ $\in L^q([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*)$, где*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

то

$$\langle v(t),u(t)\rangle\in L^1([0,\mathrm{T}],\mu)$$

и справедливо следующее неравенство Гельдера [1])

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} |\langle v(t), u(t)\rangle| \; \mu(dt) \leqslant \|u\|_p \|v\|_q^*, \tag{3.4}$$

где

$$\|u\|_p \equiv \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|^p \, \mu(dt)\right)^{1/p}, \quad \|v\|_q^* \equiv \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|v(t)\|_*^q \, \mu(dt)\right)^{1/q}.$$

Доказательство.

Пусть $\{u_n(t)\}$ — это последовательность простых функций для функции $u(t)$, а $\{v_n(t)\}$ — это последовательность простых функций для функции $v(t)$. Тогда

$$\langle v_n(t), u_n(t)\rangle \to \langle v(t), u(t)\rangle \quad \mu \quad \text{почти всюду на} \quad [0, \mathrm{T}].$$

Но тогда функция $\langle v(t), u(t)\rangle$ является $\mu-$измеримой на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|\langle v(t), u(t)\rangle| \leqslant \|v(t)\|_* \|u(t)\|.$$

Теперь осталось воспользоваться неравенством Гельдера для скалярных функций.

Лемма доказана.

Справедлива следующее важное утверждение, доказательство которого мы не будем приводить, поскольку оно достаточно длинное и трудоемкое.

Теорема 5. *Пусть банахово пространство* $\mathbb{B}$ *является либо рефлексивным либо сепарабельным, тогда формулой*

$$\int\limits_0^{T} \langle v(t), u(t)\rangle \; dt$$

задаются все линейные и непрерывные функционалы над пространством $L^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$ *при* $p \in (1, +\infty)$. *Более того, можно отождествить пространство*

$$(L^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B}))^*$$

с пространством

$$L^q([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B}^*) \quad \textit{при} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

[1]) Символом $\|\cdot\|_*$ мы обозначили $*-$норму сопряженного пространства $\mathbb{B}^*$.

Следствие 1. *При условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}$ из этой теоремы вытекает рефлексивность пространства $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p \in (1,+\infty)$.*

Кроме того, справедлив также следующий результат:
Теорема 6. *Пусть пространство $\mathbb{B}$ рефлексивное банахово пространство. Тогда каждый линейный и непрерывный функционал над $L^1([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ представим в следующем виде*:

$$\langle \Phi, f\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*(t), f(t)\rangle \;\mu(dt) \quad \text{для всех} \quad f(t) \in L^1([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}), \tag{3.5}$$

где

$$f^*(t) \in L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*).$$

Более того, можно отождествить пространство

$$\left(L^1([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})\right)^* \quad \text{с пространством} \quad L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*).$$

В дальнейшем нас будут интересовать пространства $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ и $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ с показателем $p > 1$,

$$p' = \frac{p}{p-1},$$

а также пространство $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

§ 4. t–Анизотропные пространства С. Л. Соболева

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,+\infty)$. Дадим определение анизотропного пространства С. Л. Соболева $W_p^{2k,k}(D)$.

Определение 9. *Множество*

$$\{u(x,t):\; D_x^\alpha D_t^r \in L^p(D),\; \text{для всех}\; \alpha,\; r,\; |\alpha| + 2r \leqslant 2k\}$$

пополненное по норме

$$\|u\|_{W_p^{2k,k}(D)} \stackrel{def:}{=} \left(\int\limits_D \sum_{|\alpha|+2r\leqslant 2k} |D_x^\alpha D_t^r u(x,t)|^p \; dx\, dt\right)^{1/p}$$

называется пространством $W_p^{2k,k}(D)$.

Частный случай этого пространства — это пространство $W_p^{2,1}(D)$ с нормой [1])

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(D)} = \left(\int\limits_D \left[|u|^p + |D_t u|^p + \sum_{i=1}^{N} |D_{x_i} u|^p + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left| D^2_{x_i x_j} u \right|^p \right] dx\, dt \right)^{1/p}.$$

Кроме того, рассмотрим банахово пространство $W^{m,k}(D)$ с целыми неотрицательными числами $m, k \geqslant 0$.

Определение 10. *Множество*

$$\{u(x,t) :\; D_x^\alpha u(x,t),\; D_t^r u(x,t) \in L^p(D), \quad |\alpha| \leqslant m,\; r \leqslant k\}$$

пополненное относительно нормы

$$\|u\|_{W_p^{m,k}(D)} \stackrel{def:}{=} \left(\int\limits_D \left(\sum_{|\alpha| \leqslant m} |D_x^\alpha u(x,t)|^p + \sum_{r \leqslant k} |D_t^r u(x,t)|^p \right) dx\, dt \right)^{1/p}$$

обозначается как $W_p^{m,k}(D)$.

Частным важным случаем этого пространства является $W_p^{1,1}(D)$, которое при $p = 2$ совпадает с пространством Соболева $H^1(D)$.

Отметим, что в теории параболических уравнений важную роль играют параболическая граница $\partial' D = S \cup \overline{B}$. В связи с этим помимо пространства $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемых функций $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(D)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} u \subset D$ рассматриваются еще два пространства бесконечно дифференцируемых функций.

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{D}$, равных нулю вблизи боковой границы $S = \partial\Omega \otimes (0,T)$ цилиндра D. Кроме того, обозначим через $\overset{\bullet}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{D}$, равных нулю вблизи параболической границы $\partial' D = S \cup \overline{B}$.

Дадим определения.

Определение 11. *Обозначим через* $\overset{\circ}{W}{}_p^{2k,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{2k,k}(D)$; *через* $\overset{\circ}{W}{}_p^{m,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{m,k}(D)$; *через* $\overset{\bullet}{W}{}_p^{2k,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\bullet}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{2k,k}(D)$; *через* $\overset{\bullet}{W}{}_p^{m,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\bullet}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{m,k}(D)$.

[1]) Символами D_{x_i} и $D^2_{x_i x_j}$ мы обозначили слабые производные первого и второго порядков.

Отметим, что справедлива следующая важная теорема: [1]

Теорема 7. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *— это ограниченная область с гладкой границей. Тогда всякая функция* $u(x,t) \in H^1(D)$ *имеет след* $\gamma u(x,t)$ *на параболической границе* $\partial' D$, *причем* $\gamma u(x,t) \in L^2(\partial' D)$.

§ 5. Теорема компактности Лионса–Обэна

Перейдем к рассмотрению одной ситуации, довольно часто возникающей в приложениях при исследовании нелинейных краевых задач.

Итак, пусть $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}_1$ — это три банаховых пространства, причем $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$ [2]. Пусть банаховы пространства $\mathbb{B}_0$ и $\mathbb{B}_1$ являются рефлексивными. Введем следующее нестандартное пространство распределений с интегрируемыми производными:

$$\mathbb{W} \equiv \left\{ u(t): \ u(t) \in L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0), \quad u'(t) \in L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1) \right\}, \tag{5.1}$$

где $p_0, p_1 \in (1,+\infty)$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 6. *Векторное пространство* $\mathbb{W}$ *является банаховым относительно следующей нормы*:

$$\|u\|_{\mathbb{W}} \equiv \|u\|_{p_0} + \|u'\|_{p_1}, \tag{5.2}$$

где

$$\|f\|_{p_0} \equiv \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|^{p_0}_{\mathbb{B}_0} \, dt \right)^{1/p_0}, \quad \|f\|_{p_1} \equiv \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|^{p_1}_{\mathbb{B}_1} \, dt \right)^{1/p_1}.$$

Доказательство.

Пусть $\{u_n(t)\} \subset \mathbb{W}$ — есть фундаментальная последовательность относительно нормы (5.2). Тогда $\{u_n(t)\}$ является фундаментальной в $L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)$. Следовательно, эта последовательность сходится сильно в этом пространстве к некоторой функции $u(t) \in L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)$.

С другой стороны, $\{u_n'(t)\} \subset L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1)$ и фундаментальна в этом пространстве, значит, сходится сильно в этом пространстве к функции $v(t) \in L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1)$. С другой стороны,

$$u_n' \to u' \quad \text{в} \quad \left(\mathcal{D}'(0,T;\mathbb{B}), \tau_w^* \right).$$

В силу отделимости топологии τ_w^* приходим к выводу, что $v(t) = u'(t)$. Тем самым, утверждение доказано.

Лемма доказана.

---

[1] Смотри третью тематическую лекцию.

[2] Символом $\hookrightarrow\hookrightarrow$ мы обозначаем вполне непрерывное вложение, а символом $\subset$ мы обозначаем непрерывное вложение.

Пусть $T < +\infty$ и $p = \min\{p_0, p_1\}$. Поскольку $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}_1$ имеем

$$L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0) \subset L^p(0,T;\mathbb{B}_0) \subset L^p(0,T;\mathbb{B}_1),$$
$$L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1) \subset L^p(0,T;\mathbb{B}_1),$$

тогда

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{W}^{1,p}(0,T;\mathbb{B}_1).$$

Кроме того, имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{W}^{1,p}(0,T;\mathbb{B}_1) \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \text{при} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{p}.$$

Следовательно, имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \text{при} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{p}.$$

Тем самым, доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть* $p = \min\{p_0, p_1\} \in (1, +\infty)$, *тогда имеет место вложение*

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \textit{при} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{p}. \tag{5.3}$$

Для получения одного результата о компактном вложении введенного банахова пространства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть* $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$, *где* $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}_1$ — *это банаховы пространства. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $c(\varepsilon) > 0$, *что*

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathbb{B}_0} + c(\varepsilon)\|u\|_{\mathbb{B}_1}. \tag{5.4}$$

Доказательство.

Предположим, что неравенство (5.4) не выполняется. Тогда найдется такая последовательность $\{v_n\} \subset \mathbb{B}_0$ такая, что имеет место обратное неравенство

$$\|v_n\|_{\mathbb{B}} \geqslant \varepsilon \|v_n\|_{\mathbb{B}_0} + c_n \|v_n\|_{\mathbb{B}_1},$$

причем $c_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Введем новую последовательность

$$w_n \equiv \frac{v_n}{\|v_n\|_{\mathbb{B}_0}},$$

для которой мы получаем неравенство

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}} \geqslant \varepsilon + c_n \|w_n\|_{\mathbb{B}_1}. \tag{5.5}$$

Заметим, что имеет место непрерывное вложение $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}$ и поэтому

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}} \leqslant c\|w_n\|_{\mathbb{B}_0} = c,$$

где $c > 0$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Но тогда из (5.5) приходим к выводу, что

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}_1} + \frac{\varepsilon}{c_n} \leqslant \frac{c}{c_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}_1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{5.6}$$

С другой стороны, $\|w_n\|_{\mathbb{B}_0} = 1$ и $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B}$, [1]) поэтому найдется такая подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$ последовательности $\{w_n\}$, что

$$w_{n_k} \to w \in \mathbb{B} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но по условию имеет место непрерывное вложение $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$, поэтому указанная подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$ сходится сильно и в $\mathbb{B}_1$ к тому же элементу w, следовательно, имеет место следующее предельное равенство:

$$\|w_{n_k}\|_{\mathbb{B}_1} \to \|w\|_{\mathbb{B}_1} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но в силу (5.6) приходим к выводу, что $w = 0$. Значит,

$$w_{n_k} \to 0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но это противоречит неравенству (5.5).

Лемма доказана.

Приведем без доказательства следующую лемму:

Лемма 9. *Банахово пространство $\mathbb{W}$ является рефлексивным.*

Наконец, мы в состоянии доказать основной результат этого параграфа. Справедлива следующая теорема о компактном вложении Лионса–Обэна.

Теорема 8. *Пусть $T > 0$ конечно. Тогда при условиях данного параграфа имеет место вполне непрерывное вложение*:

$$\mathbb{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}).$$

Доказательство.

Шаг 1. Непрерывность вложения $\mathbb{W}$ в $L^{p_0}(0,T;\mathbb{B})$ следует из непрерывности вложения $\mathbb{B}_0$ в $\mathbb{B}$. Поэтому нам осталось доказать компактность указанного в теореме вложения.

Шаг 2. По лемме 9 банахово пространство $\mathbb{W}$ является рефлексивным, а значит, из любой ограниченной в $\mathbb{W}$ последовательности $\{v_n\}$ можно выделить слабо в $\mathbb{W}$ сходящуюся подпоследовательность. Итак, наша задача упрощается. Без ограничения общности, нам достаточно доказать следующее утверждение: *Пусть $\{v_n\} \subset \mathbb{W}$ — это слабо в $\mathbb{W}$ к нулю сходящаяся последовательность*, *тогда эта последовательность сходится сильно к нулю в банаховом пространстве $L^{p_0}(0,T;\mathbb{B})$.*

Шаг 3. В силу леммы 8 для любого $\eta > 0$ найдется такое $c(\eta) > 0$, что имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leqslant \eta\|u\|_{\mathbb{B}_0} + c(\eta)\|u\|_{\mathbb{B}_1}.$$

[1]) Вполне непрерывное вложение банахова пространства $\mathbb{B}_0$ в $\mathbb{B}$.

Возведем обе части этого неравенства в степень $p_0 > 1$, тогда после очевидных преобразований получим следующее неравенство:

$$\|u\|_{\mathbb{B}}^{p_0} \leqslant \eta c(p_0)\|u\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0} + c_1(p_0,\eta)\|u\|_{\mathbb{B}_1}^{p_0}.$$

Откуда интегрированием по $t \in [0,T]$ получим неравенство

$$\|u\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B})}^{p_0} \leqslant \eta c(p_0)\|u\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)}^{p_0} + c_1(p_0,\eta)\|u\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_1)}^{p_0}.$$

Теперь возведем в степень p_0^{-1} и получим после ряда несложных преобразований неравенство, в которое подставим $v_n \in L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)$

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B})} \leqslant \eta c_2(p_0)\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)} + c_3(p_0,\eta)\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_1)}. \tag{5.7}$$

Поскольку по условию

$$v_n \rightharpoonup \vartheta \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W},$$

то эта последовательность сильно ограничена:

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)} \leqslant c_4 < +\infty,$$

где c_4 не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Шаг 4. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$\eta c_2(p_0)c_4 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь заметим, что в силу леммы 7 настоящей главы имеет место вложение

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^{0,\mu}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \text{при} \quad \mu \in \left[0, 1-\frac{1}{p}\right], \quad p = \min\{p_0,p_1\}.$$

Следовательно,

$$\|v_n\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant c,$$

где $c > 0$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для того чтобы доказать, что

$$v_n \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_1)$$

нам достаточно доказать, что

$$v_n(s) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{для всех} \quad s \in [0,T].$$

Поскольку s не играет никакой специальной роли, то достаточно доказать, что

$$v_n(0) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Шаг 5. Рассмотрим новую функцию

$$w_n(t) = v_n(\lambda t) \quad \text{при} \quad \lambda \in (0,1).$$

Справедливы следующие цепочки неравенств:

$$\left(\int\limits_0^T \|w_n(t)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,dt\right)^{1/p_0} = \left(\int\limits_0^T \|v_n(\lambda t)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,dt\right)^{1/p_0} =$$

$$= \lambda^{-1/p_0}\left(\int\limits_0^{\lambda T} \|v_n(\tau)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,d\tau\right)^{1/p_0} \leqslant \lambda^{-1/p_0}\left(\int\limits_0^T \|v_n(\tau)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,d\tau\right)^{1/p_0} \leqslant c\lambda^{-1/p_0},$$

$$\left(\int\limits_0^T \|w_n^{'}(t)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} = \left(\int\limits_0^T \|v_n^{'}(\lambda t)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\lambda^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} =$$

$$= \lambda^{1-1/p_1}\left(\int\limits_0^{\lambda T} \|v_n^{'}(\tau)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\,d\tau\right)^{1/p_1} \leqslant \lambda^{1-1/p_1}\left(\int\limits_0^T \|v_n^{'}(\tau)\|_{\mathbb{B}_1}\,d\tau\right)^{1/p_1} \leqslant$$
$$\leqslant c\lambda^{1-1/p_1}.$$

Пусть функция $\varphi \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T]$, причем $\varphi(0) = -1$ и $\varphi(T) = 0$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$w_n(0) = \int\limits_0^T \left(w_n(t)\varphi(t)\right)^{'}\,dt = \int\limits_0^T w_n^{'}(t)\varphi(t)\,dt + \int\limits_0^T w_n(t)\varphi^{'}(t)\,dt = \beta_n + \gamma_n.$$

Докажем, что $w_n(0) \to \vartheta$ сильно в $\mathbb{B}_1$. Действительно, имеет место следующее неравенство:

$$\|w_n(0)\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant \|\beta_n\|_{\mathbb{B}_1} + \|\gamma_n\|_{\mathbb{B}_1}.$$

Но

$$\|\beta_n\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant c\left(\int\limits_0^T \|w_n^{'}(t)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} \leqslant c\lambda^{1-1/p_1}.$$

Поэтому мы можем выбрать $\lambda \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$\|\beta_n\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь поскольку $w_n \rightharpoonup \vartheta$ слабо в $\mathbb{W}$, значит,

$$w_n \rightharpoonup \vartheta \quad \text{слабо в} \quad L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0).$$

Значит, $\gamma_n \rightharpoonup \vartheta$ слабо в $\mathbb{B}_0$, но $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$, поэтому

$$\gamma_n \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Следовательно,

$$\|w_n(0)\|_{\mathbb{B}_1} \to 0,$$

и вместе с ней и

$$v_n(0) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Тем самым, утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.