Тематическая лекция 2

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА $W^{1,P}(\Omega)$, $W_0^{1,P}(\Omega)$ И $W^{-1,P'}(\Omega)$

В этой лекции мы введем понятие слабой производной и рассмотрим пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ и их частный, но важный случай при $p = 2$.

§ 1. Слабая производная

Определение 1. *Функция $v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ называется слабой производной ∂^α_x функции $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Здесь мы используем следующие обозначения:

$$\partial^\alpha \stackrel{def:}{=} \partial^{\alpha_1}_{x_1} \cdots \partial^{\alpha_N}_{x_N}, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N_+, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Слабая частная производная порядка α функции u, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_1 \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_2 \varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0, 2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

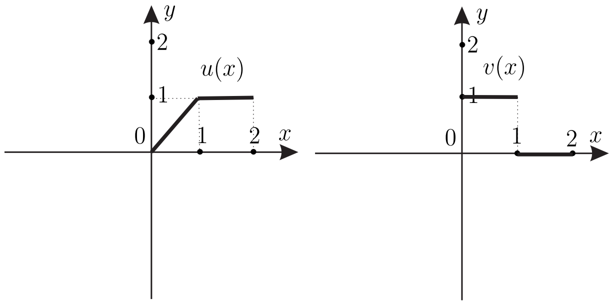

Рис. 1. Слабая производная $v(x)$ функции $u(x)$.

Покажем, что $u^{'} = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Надо показать, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\, dx = -\int_0^2 v\varphi\, dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\, dx = \int_0^1 x\varphi^{'}\, dx + \int_1^2 \varphi^{'}\, dx = -\int_0^1 \varphi\, dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\, dx.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = (0, 2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Мы покажем, что производная $u^{'}$ не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\int_0^2 u\varphi^{'}\, dx = -\int_0^2 v\varphi\, dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$.

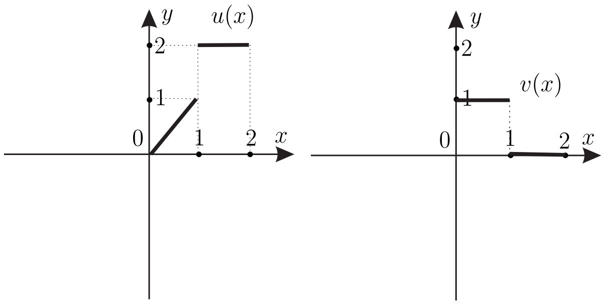

Рис. 2. Отсутствие слабой производной $v(x)$ функции $u(x)$.

Предположим противное. Пусть (1.2) выполняется для некоторой функции v и всех функций φ. Тогда

$$-\int\limits_0^2 v\varphi\,dx = \int\limits_0^2 u\varphi'\,dx = \int\limits_0^1 x\varphi'\,dx + 2\int\limits_1^2 \varphi'\,dx = -\int\limits_0^1 \varphi\,dx - \varphi(1). \qquad (1.3)$$

Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$ гладких функций таких, что

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив φ на φ_m в (1.3) и полагая $m \to +\infty$, получаем предельное равенство [1]

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty} \left[\int\limits_0^2 v\varphi_m\,dx - \int\limits_0^1 \varphi_m\,dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

Теперь приведем без доказательства следующие две леммы о свойствах слабых производных. [2]

Л е м м а 2. *Пусть функции $u(x), v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ имеют слабые производные $\partial u(x), \partial v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ области Ω достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула* [3] :

$$\partial(uv) = u\partial v + v\partial u, \qquad (1.4)$$

[1] В силу теоремы Лебега.

[2] Доказательство этих утверждений можно найти во втором томе курса «Линейный и нелинейный функциональный анализ» М. О. Корпусова и А. А. Панина.

[3] Символом ∂ мы обозначили какую либо слабую частную производную первого порядка.

понимаемая в слабом смысле, т.е. для любой функции $\varphi(x) \in \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \partial(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega} u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \int_{\Omega} v(x)\partial u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Лемма 3. *Пусть функция* $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и* $f^{'}(t) \in L^{\infty}\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и функция* $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ *и имеет слабую производную* $\partial u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$. *Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial f(u)(x) = f^{'}(u)\partial u(x). \tag{1.5}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $f(u) = u^n(x)$ при $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что производная функции $f(t) = t^n$ при $t \in \mathbb{R}^1$ является, очевидно, неограниченной и поэтому применить лемму 3 нельзя. Тем не менее, применяя последовательно лемму 2, мы в результате получим, что имеет место равенство

$$\partial u^n(x) = nu^{n-1}(x)\partial u(x)$$

в слабом смысле.

§ 2. Пространства $H^1(D)$ и $H^1_0(D)$

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вещественные пространства С. Л. Соболева:

$$H^1_0(D) \stackrel{def:}{=} W^{1,2}_0(D), \quad H^1(D) \stackrel{def:}{=} W^{1,2}(D),$$

$$H^{-1}(D) \stackrel{def:}{=} W^{-1,2}(D) = (W^{1,2}_0(D))^*.$$

Напомним определение слабой частной производной функции.

Определение 2. *Слабой частной производной функции* $u(x) \in \in L^1_{loc}(D)$ *по переменной* x_i *называется функция* $v_i(x) \in L^1_{loc}(D)$, *если для любой пробной функции* $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}_0(D)$ *выполнено равенство*

$$\int_{D} \left[v_i(x)\varphi(x) + u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \right] dx = 0 \tag{2.1}$$

Отметим, что равенство (2.1) есть следствие формулы интегрирования по частям.

Дадим определение пространства Соболева $H^1(D)$.

Определение 3. *Функция* $u(x) \in H^1(D)$, *если* $u(x) \in L^2(D)$, *а ее слабые частные производные* $v_i(x) \in L^2(D)$ *при всех* $i = \overline{1, N}$, *причем это пространство банахово относительно нормы* [1]

$$\|u\| \equiv \left(\int\limits_D \left[|u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N |v_i(x)|^2\right] dx\right)^{1/2}.$$

Дадим определение пространства Соболева $H^1_0(D)$.

Определение 4. *Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}^\infty_0(D)$ по норме банахового пространства $H^1(D)$ называется банаховым пространством $H^1_0(D)$.*

Замечание 1. Отметим, что нормой на векторном пространстве $\mathbb{C}^\infty_0(D)$ является также величина

$$\|Du\|_2, \quad D = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}),$$

где ∂_{x_k} — это соответствующие слабые частные производные по переменной x_k. И если рассмотреть пополнение $\mathbb{C}^\infty_0$ мы получим банахово пространство $\mathcal{D}^{1,2}(D)$ относительно указанной нормы. Оказывается как было доказано в 10-й Лекции–Семинаре [2] в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_2 \leqslant c_1\|Du\|_2 \quad \text{для всех} \quad u(x) \in H^1_0(D)$$

это пространство совпадает с банаховым пространством $H^1_0(D)$.

Далее мы изучим свойства пространства $H^{-1}(D)$ сопряженного к банаховому пространству $H^1_0(D)$. Введем следующие обозначения:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^{-1}(D) \otimes H^1_0(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1_0(D)$ и

$$H^{-1}(D) \stackrel{def:}{=} (H^1_0(D))^*;$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : (H^1(D))^* \otimes H^1(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1(D)$ и $(H^1(D))^*$. Величина

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle : \mathcal{D}'(D) \otimes \mathcal{D}(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(D)$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(D)$.

---

[1] Это согласуется с определением слабой производной, поскольку $L^2(D) \subset \subset L^2_{loc}(D)$.

[2] Линейный и нелинейный функциональный анализ. Том II. М. О. Корпусова и А. А. Панина

Рассмотрим формальный вид эллиптического оператора $\mathcal{L}$, определенного следующей формулой:

$$\mathcal{L}u(x) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \quad (2.2)$$

Пусть $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(D)$. Причем частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при} \quad j = \overline{1,N}$$

в слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$$

понимается в слабом смысле (точнее из $L^2(D) \subset L^1_{loc}(D)$). Тогда при $u(x) \in H^1_0(D)$ имеем

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(D). \quad (2.3)$$

Теперь введем функционал, порождаемый функцией $f(x) \in L^2(D)$, обозначаемый также как и частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$ [1])

причем это не слабая производная, а производная регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $f(x) \in L^2(D) \subset \mathcal{D}'(D)$, стандартной формулой

$$\left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\right\rangle \stackrel{def:}{=} -\left\langle\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle\right\rangle = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx, \quad \varphi(x) \in H^1_0(D) \quad (2.4)$$

и, в частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(D)$$

— это слабая производная функции $\varphi(x) \in H^1_0(D)$.

Л е м м а 4. *Функционал* (2.4) *является линейным и непрерывным в сильной топологии пространства* $H^1_0(D)$. *Иначе говоря,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(D). \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

[1]) Недоразумений это не должно вызвать, потому что в каждом конкретном случае понятно какая производная имеется в виду слабая или обобщенная в смысле обобщенных функций.

Действительно, для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1_0(D)$ такой, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(D)$$

имеем, в частности,

$$\|D\varphi_m - D\varphi\|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\left|\left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_m - \varphi \right\rangle\right\rangle\right| \leqslant \int\limits_D |D\varphi_m - D\varphi|\,|f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_D |D\varphi_m - D\varphi|^2\,dx\right)^2 \left(\int\limits_D |f(x)|^2\,dx\right)^2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Стало быть, по формуле

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{def}{=} \left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\right\rangle = -\int\limits_D f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

определен линейный и непрерывный функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{над пространством} \quad H^1_0(D) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \left(H^1_0(D)\right)^* = H^{-1}(D).$$

Л е м м а д о к а з а н а.

Справедливо следующее важное утверждение:

Л е м м а 5. *Всякий функционал над банаховым пространством $H^1(D)$ порождается функциями $f_j(x) \in L^2(D)$ при $j = \overline{0, N}$ по формуле*

$$\langle f^*, \varphi \rangle_1 \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D f_0(x)\varphi(x)\,dx, \tag{2.6}$$

причем для некоторого однозначно определенного элемента $g(x) \in \in H^1(D)$ имеет место равенство в слабом смысле

$$f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Действительно, пространство $H^1(D)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(g(x), \varphi(x))_1 \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx$$

для всех $\varphi(x), g(x) \in H^1(D)$. С другой стороны, для всякого элемента $f^*(x) \in \left(H^1(D)\right)^*$ согласно теореме Рисса–Фреше найдется такой единственный элемент $g(x) \in H^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (g(x), \varphi(x))_1 = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\, dx,$$

где

$$f_j(x) = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(D), \quad j = \overline{1, N}.$$

Шаг 2. Наконец, для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H^1(D) \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

имеем

$$\|\varphi_m - \varphi\|_2 \to +0, \quad \|D\varphi_m - D\varphi\|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_D f_j(x) \left[\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j}\right] dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_D \left|\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_m(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_D f_j^2(x)\, dx\right)^{1/2} \to +0,$$

$$\left|\int\limits_D g(x)[\varphi_m(x) - \varphi(x)]\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_D |\varphi_m(x) - \varphi(x)|^2\, dx\right)^2 \left(\int\limits_D |g(x)|^2\, dx\right)^2 \to +0$$

при $m \to +\infty$. Следовательно, формулой (2.6) задается линейный и непрерывный функционал над пространством $H^1(D)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для всякого элемента $f^* \in H^{-1}(D)$ найдется такой единственный элемент $g(x) \in H_0^1(D)$, что имеет место явное представление*

$$\langle f^*, \varphi\rangle \stackrel{def:}{=} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D f_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx, \quad f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad g(x) \in H_0^1(D) \quad (2.7)$$

для всех $\varphi(x) \in H^1_0(D)$.

Дадим эквивалентное определение банахова пространства $(H^1(D))^*$.

Определение 5. *Множество всех линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством $H^1(D)$ обозначим символом $(H^1(D))^*$, причем это пространство является банаховым относительно нормы* [1])

$$\|f^*\|_{-1} \equiv \sup_{\|Du\|_2=1} \left| \sum_{j=1}^{N} \int_D f^*_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int_D f_0(x)\varphi(x)\, dx \right|,$$

где

$$f^*_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x), \quad g(x) \in H^1(D), \quad j = \overline{0, N}$$

— это функции порождающие функционал.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 6. *Имеет место следующие равенства*:

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} |\langle f^*, \varphi\rangle_1| = \left(\|g\|_2^2 + \|Dg\|_2^2\right)^{1/2}, \quad g(x) \in H^1(D) \tag{2.8}$$

для любого $f^*(x) \in (H^1(D))^*$ *и для всех* $\varphi(x) \in H^1(D)$;

$$\|f^*\|_{*} = \sup_{\|D\varphi\|_2=1} |\langle f^*, \varphi\rangle| = \|Dg\|_2, \quad g(x) \in H^1_0(D) \tag{2.9}$$

для любого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ *и для всех* $\varphi(x) \in H^1_0(D)$.

Доказательство.

Докажем, например, равенство (2.8). Действительно, во–первых, имеет место следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left[\sum_{j=1}^{N} \|\partial_j g\|_2 \|\partial_j \varphi\|_2 + \|g\|_2 \|\varphi\|_2 \right]. \tag{2.10}$$

Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\left(\sum_{j=1}^{N} a_j^{1/2} b_j^{1/2} + a_0^{1/2} b_0^{1/2} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{N} a_j + a_0 \right) \left(\sum_{j=1}^{N} b_j + b_0 \right)$$

для всех $a_j \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$ при $j = \overline{0, N}$. Поэтому мы из (2.10) мы получим следующее неравенство:

[1]) Стандартная $*$–норма.

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2+\|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left(\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2} \left(\|D\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, заметим, что имеет место неравенство снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\, dx \right|$$

для всех $\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2} = 1$. Возьмем в этом неравенстве

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2}}$$

и получим оценку снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \sqrt{\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2}\,.$$

Равенство (2.8) доказано.

Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение оператора $\mathcal{L}$, определенного формулой (2.2). Причем в слагаемом

$$b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

производная понимается в слабом смысле, о вот производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

примененная к выражению

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u(x) \in H_0^1(D),$$

понимается уже как функционал из $H^{-1}(D)$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что

$$a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} : H_0^1(D) \to L^2(D), \tag{2.11}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : H_0^1(D) \to H^{-1}(D), \tag{2.12}$$

$$b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} : H_0^1(D) \to L^2(D), \quad c(x)I : H_0^1(D) \to L^2(D). \tag{2.13}$$

Теперь заметим, что имеют место плотное вложение

$$H_0^1(D) \overset{ds}{\subset} L^2(D) \Rightarrow L^2(D) = \Big(L^2(D)\Big)^* \overset{ds}{\subset} \big(H_0^1(D)\big)^* = H^{-1}(D).$$

Таким образом, такое обобщение оператора $\mathfrak{L}$, формально записанного как и ранее, действует следующим образом:

$$\mathfrak{L} \equiv \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I : H_0^1(D) \to H^{-1}(D). \tag{2.14}$$

Наконец, мы можем определить так называемое сильное решение следующей однородной краевой задачи Дирихле:

$$\mathfrak{L}u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{2.15}$$

Определение 6. *Слабым решением однородной краевой задачи Дирихле* (2.15) *называется функция $u(x) \in H_0^1(D)$, удовлетворяющая равенству*

$$\langle \mathfrak{L}u, \varphi\rangle = 0 \quad \textit{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(D), \tag{2.16}$$

причем это равенство эквивалентно равенству

$$\int\limits_D \Bigg[\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \\ - \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x) - c(x)u(x)\varphi(x)\Bigg]\,dx = 0 \tag{2.17}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Рассмотренные пространства $H^1(D)$, $H_0^1(D)$ и соответствующие сопряженные используются при рассмотрении и нелинейных краевых задач с главным линейным оператором эллиптического типа второго порядка. Однако, при рассмотрении нелинейных в главном дифференциальных уравнений используются банаховы пространства $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$. Рассмотрением этих пространств мы займемся в 4 параграфе. А сейчас мы изучим вопрос о явном виде оператора Рисса–Фреше для пространства Соболева $H_0^1(D)$.

§ 3. Оператор Рисса–Фреше для гильбертового пространства $H_0^1(D)$

1. Для построения явного вида оператора Рисса–Фреше нам нужно рассмотреть вопрос о существовании и единственности слабого решения следующей краевой задачи в классическом смысле имеющей вид:

$$-\Delta u(x) = f^*(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x)|_{\partial D} = 0. \tag{3.1}$$

В слабом смысле задача ставится так:

$$\langle -\Delta u, \varphi\rangle = \langle f^*, \varphi(x)\rangle \text{ для всех } \varphi(x) \in H_0^1(D),\ f^*(x) \in H^{-1}(D). \tag{3.2}$$

Эта задача эквивалентна следующей:

$$B(u, \varphi) = \langle f^*, \varphi\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(D), \quad f^*(x) \in H^{-1}(D), \tag{3.3}$$

где билинейная форма $B(u, \varphi)$ определена равенством

$$B(u, \varphi) = \int\limits_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\, dx. \tag{3.4}$$

Для билинейной формы справедливы оценки

$$B(u, \varphi) \leqslant \|Du\|_2 \|D\varphi\|_2, \quad B(u, u) = \|Du\|_2^2. \tag{3.5}$$

2. Согласно лемме Лакса-Мильграма существует единственный оператор $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(H, H)$, $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$ [1] такой, что

$$B(u, \varphi) = (\mathbb{A}u, \varphi) \quad \text{для всех} \quad u(x),\ \varphi(x) \in H_0^1(D), \tag{3.6}$$

где $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $H_0^1(D)$ вида

$$(v_1, v_2) \stackrel{def:}{=} \int\limits_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i}\, dx.$$

Поэтому этот оператор $\mathbb{A}$ — это единичный оператор.

3. Кроме того, в силу теоремы Рисса-Фреше для всякого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ найдется такая функция $w(x) \in H_0^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi(x)\rangle = (w, \varphi). \tag{3.7}$$

Поскольку $\operatorname{Im} \mathbb{A} = H_0^1(D)$, то для этого $w(x)$ найдется такая функция $u(x) \in H_0^1(D)$, что для этой функции $u(x)$ и для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$ выполнена цепочка равенств

$$\mathbb{A}u(x) = w(x) \Rightarrow B(u, \varphi) = (\mathbb{A}u, \varphi) = (w, \varphi) = \langle f^*, \varphi\rangle,$$

из которой следует, что $u(x)$ слабое решение исходной задачи.

4. Единственность слабого решения следует из следующих соображений. Пусть слабых решений два: $u_1(x), u_2(x) \in H_0^1(D)$, тогда имеем

$$B(u_1, \varphi) = \langle f^*, \varphi\rangle, \quad B(u_2, \varphi) = \langle f^*, \varphi\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B(u_1 - u_2, \varphi) = 0 \Rightarrow B(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow \|D(u_1 - u_2)\|_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H_0^1(D) \ni u_1 - u_2 = constant \Rightarrow constant = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.$$

---

[1] Лекция 11. Том II. Линейный и нелинейный функциональный анализ. М. О. Корпусов и А. А. Панин.

5. Таким образом, для всякого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ существует единственное слабое решение $u(x) \in H_0^1(D)$ уравнения (3.2). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, \varphi \rangle = \langle -\Delta u, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \, dx = (u, \varphi).$$

6. Докажем, что оператор $\mathrm{J} = (-\Delta)^{-1}$ является изометрическим. Действительно,

$$\|f^*\|_* \stackrel{def:}{=} \sup_{\|D\varphi\|_2 = 1} |\langle -\Delta u, \varphi \rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_2 = 1} \|Du\|_2 \|D\varphi\|_2 = \|Du\|_2 = \|u\|_{H_0^1} = \|\mathrm{J} f^*\|_{H_0^1},$$

$$\|f^*\|_* \geqslant |\langle -\Delta u, \varphi \rangle| \geqslant \left| \left\langle -\Delta u, \frac{u}{\|Du\|_2} \right\rangle \right| = \|Du\|_2 = \|u\|_{H_0^1} = \|\mathrm{J} f^*\|_{H_0^1},$$

$$\|f^*\|_* = \|\mathrm{J} f^*\|_{H_0^1} \quad \text{для всех} \quad f^*(x) \in H^{-1}(D).$$

Отсюда вытекает, что оператор Рисса–Фреше имеет следующий явный вид:

$$\mathrm{J} = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(D) \to H_0^1(D), \quad u(x) = \mathrm{J} f^*(x).$$

§ 4. Пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$

Дадим определение пространства Соболева $W^{1,p}(D)$ при $p > 2$.

Определение 7. *Функция $u(x) \in W^{1,p}(D)$, если $u(x) \in L^p(D)$ и ее слабые частные производные $\partial_{x_i} u(x) \in L^p(D)$ при всех $i = \overline{1, N}$, причем это пространство банахово относительно нормы*

$$\|u\|_{1,p} \equiv \left(\int\limits_D \left[|u(x)|^p + \sum_{i=1}^{N} |\partial_{x_i} u(x)|^p \right] dx \right)^{1/p}.$$

Дадим определение пространства Соболева $W_0^{1,p}(D)$.

Определение 8. *Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ по норме банахова пространства $W^{1,p}(D)$ называется банаховым пространством $W_0^{1,p}(D)$.*

Замечание 2. Отметим [1], что норма на пространстве $W_0^{1,p}(D)$ эквивалентна следующей

$$\|Du\|_p \stackrel{def}{=} \left(\int\limits_D |Du|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad D = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}).$$

Введем обозначения.

$$W^{-1,p'}(D) \stackrel{def}{=} (W_0^{1,p}(D))^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : W^{-1,p'}(D) \otimes W_0^{1,p}(D) \to \mathbb{R}^1.$$

Кроме того, мы используем обозначение $(W^{1,p}(D))^*$ для линейных и непрерывных функционалов над $W^{1,p}(D)$ со скобками двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1*} : (W^{1,p}(D))^* \otimes W^{1,p}(D) \to \mathbb{R}^1.$$

Справедлива следующая важная лемма:
Лемма 7. *Всякая функция $f^*(x) \in (W^{1,p}(D))^*$ представима в следующем виде*:

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = \sum_{j=1}^N \int\limits_D g_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \, dx + \int\limits_D g_0(x) u(x) \, dx \; \forall \; u(x) \in W^{1,p}(D), \tag{4.1}$$

где $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{0, N}$.

Доказательство.

Шаг 1. Банахово пространство $W^{1,p}(D)$ можно отождествить с подпространством

$$W \stackrel{def}{=} w = (u, D_1 u, ..., D_N u) \subset \underbrace{L^p(D) \otimes L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_{N+1}, \quad D_k = \partial_{x_k}.$$

Причем это банахово пространство относительно нормы

$$\|w\|_W \stackrel{def}{=} \|u\|_p + \sum_{j=1}^N \|D_j u\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Шаг 2. Введем оператор

$$P : u \in W^{1,p}(D) \to w = (u, D_1 u, ..., D_N u) \in W.$$

[1] В силу обобщения неравенства Фридрихса.

Очевидно что этот оператор является изометрией между банаховыми пространствами $W^{1,p}(D)$ и W при наделении пространства $W^{1,p}(D)$ такой же нормой:

$$\|Pu\|_W = \|u\|_{W^{1,p}} \quad \text{для всех} \quad u \in W^{1,p}(D).$$

Шаг 3. Поэтому любой элемент $f^* \in (W^{1,p}(D))^*$ представим в виде

$$f^* = L^* P, \quad L^* \in (W)^*.$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = ((L^*, Pu))\ ^{1)},$$
$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\|u\|_{W^{1,p}}=1} |\langle f^*, u\rangle_{1*}| = \sup_{\|Pu\|_W=1} |((L^*, Pu))| = \|L^*\|_{W^*}$$

где $((\cdot,\cdot))$ — скобки двойственности между W и W^*. Согласно теореме Хана–Банаха существует продолжение $\widehat{L^*}$ функционала L^* с подпространства W на все банахово пространство

$$(L^p(D))^{N+1} \overset{def}{=} \underbrace{L^p(D) \otimes L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_{N+1},$$

таким образом, что

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = ((L^*, Pu)) = \langle \widehat{L^*}, w\rangle_p, \quad w \in W \subset (L^p(D))^{N+1},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ — скобки двойственности между банаховым пространством $(L^p(D))^{N+1}$ и банаховым пространством $\left((L^p(D))^{N+1}\right)^*$

$$\left((L^p(D))^{N+1}\right)^* = (L^{p'}(D))^{N+1} = \underbrace{L^{p'}(D) \otimes L^{p'}(D) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(D)}_{N+1}.$$

Стало быть, найдутся такие функции $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{0,N}$, что имеет место равенство

$$\langle \widehat{L^*}, w\rangle_p = \sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x)\,dx + \int\limits_D u(x) g_0(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = \sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x)\,dx + \int\limits_D u(x) g_0(x)\,dx, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Лемма доказана.

---

[1]) Здесь мы записали последовательное действие операторов L^*P.

С л е д с т в и е 1. *Всякий элемент* $f^* \in W^{-1,p'}(D)$ *представим, возможно, неединственным образом в следующем виде*:

$$\langle f^*, u\rangle_* = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D g_j(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dx,\ \forall\, u(x) \in W_0^{1,p}(D), \tag{4.2}$$

где $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ *при* $j = \overline{1, N}$.

Теперь рассмотрим вопрос об инъективном операторе, который действует из пространства $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$ на все пространство $W^{-1,p'}(D)$. В отличие от случая $p = 2$ этот оператор является **нелинейным оператором p–лапласиана.**

□ Действительно, рассмотрим оператор p—лапласиана:

$$\Delta_p u \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du), \quad D = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}). \tag{4.3}$$

При этом мы будем рассматривать этот оператор в расширенном смысле. Оператор D понимается в слабом смысле.

1. В качестве области определения возьмем

$$\operatorname{dom}\Delta_p = W_0^{1,p}(D),$$

тогда

$$D : W_0^{1,p}(D) \to \underbrace{L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_{N}.$$

Рассмотрим векторную нелинейную функцию

$$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) =$$
$$= |\xi(x)|^{p-2}\xi(x) : \underbrace{L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_{N} \to \underbrace{L^{p'}(D) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(D)}_{N},$$

где $\xi(x) = (\xi_1(x), ..., \xi_N(x))$. Теперь определим функционал $\operatorname{div}(\eta(x)) \in \in W^{-1,p'}(D)$ над пространством $W_0^{1,p}(D)$ следующим образом:

$$\langle \operatorname{div}(\eta(x)), \varphi(x)\rangle_* \stackrel{def:}{=} -\sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \eta_j(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и заданной функции

$$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) \in \underbrace{L^{p'}(D) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(D)}_{N}.$$

Тогда, оператор Δ_p представим в следующем виде

$$\Delta_p u \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}(\eta(x)), \quad \eta(x) = |\xi(x)|^{p-2}\xi(x), \quad \xi(x) = Du(x)$$

при $u(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и получим, что этот оператор действует

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(D) \to W^{-1,p'}(D).$$

2. В дальнейшем будет доказано, что слабое решение $u(x) \in \in W_0^{1,p}(D)$ задачи

$$\langle -\Delta_p u(x), \varphi(x)\rangle_* = \langle f^*(x), \varphi(x)\rangle_* \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$$

при любом $f^*(x) \in W^{-1,p'}(D)$ существует и единственно [1].

3. Докажем теперь, что для Δ_p выполнено следующее равенство:

$$\|\Delta_p u\|_* = \|Du\|_p^{p-1} \quad \text{для всех} \quad u(x) \in W_0^{1,p}(D).$$

Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_p u\|_* = \sup_{\|D\varphi\|_p=1} |\langle D_p u, \varphi\rangle| &= \\
&= \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \left| \sum_{j=1}^N \int\limits_D |Du(x)|^{p-2} D_j u(x) D_j \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \int\limits_D |Du(x)|^{p-2} \sum_{j=1}^N |D_j u(x)||D_j\varphi(x)|\, dx \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \int\limits_D |Du(x)|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^N |D_j u(x)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N |D_j\varphi(x)|^2\right)^{1/2} dx \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \int\limits_D |Du(x)|^{p-1} |D\varphi(x)|\, dx \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \|Du\|_p^{p-1} \|D\varphi\|_p = \|Du\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\|\Delta_p u\|_* \geqslant \left| \sum_{j=1}^N \int\limits_D |Du(x)|^{p-2} D_j u(x) D_j\varphi(x)\, dx \right| \quad \text{при} \quad \|D\varphi\|_p = 1,$$

в котором возьмем

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{\|Du\|_p}$$

[1] Что может быть доказано при помощи теоремы Браудера–Минти. Том III. Нелинейный анализ. Линейный и нелинейный функциональный анализ. М. О. Корпусова и А. А. Панина.

и получим следующее неравенство:

$$\|\Delta_p u\|_* \geqslant \|Du\|_p^{p-1}. \quad \boxtimes$$