МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**М. О. Корпусов**

# Конспект лекций по курсу «Нелинейные эллиптические и параболические уравнения математической физики» для аспирантов

Москва
Физический факультет МГУ
2016

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# Предисловие

Данный конспект лекций содержит современное изложение теории нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов второго порядка в частных производных. Изложение в известном смысле замкнутое — все необходимые сведения из курса нелинейного функционального анализа даются в достаточно полной форме. Целью данного специального курса для аспирантов отделения прикладной математики является на примере модельных нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов математической физики рассмотреть методы исследования классических и слабых решений этих уравнений. В известной степени данный конспект лекций является компиляцией из книг [2], [8], [9], [11].

Специальный курс состоит из 10 тематических лекций. В первой тематической лекции мы привели вывод основных для нас уравнений следующего вида

$$\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) = f(x,u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,u), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u + f(x,u).$$

Во второй тематической лекции рассматриваются пространства С. Л. Соболева, необходимые для изучения слабых решений нелинейных уравнений эллиптического типа. В третьей тематической лекции изучается важный вопрос о следах функций из пространств С. Л. Соболева на многообразиях меньшей размерности. В четвертой тематической лекции рассматриваются необходимые сведения из курса нелинейного функционального анализа. В пятой тематической лекции мы вводим понятие оператора Немыцкого и важную теорему М. А. Красносельского о непрерывности оператора Немыцкого. Далее излагаются основные методы исследования полулинейных эллиптических уравнений. В шестой тематической лекции мы изучаем нелинейный оператор p–лапласиана

$$\Delta_p u \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u), \quad p > 1.$$

Кроме того, рассмотрены основные методы исследования нелинейных эллиптических уравнений с главным оператором $p$–лапласиана. В седьмой тематической лекции мы рассматриваем необходимые сведения о нестационарных пространствах С. Л. Соболева $L^q(0,T;W^{1,p}(\Omega))$, $L^{q'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, а также о параболических пространствах Гельдера $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(D)$ и об анизотропных пространствах С. Л. Соболева.

В восьмой тематической лекции рассматриваются основные методы исследования нелинейных параболических уравнений. В девятой тематической лекции мы рассматриваем принципы максимума для слабых решений линейных и нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов. Наконец, в десятой тематической лекции мы изучаем слабые решения задачи Коши для вырождающегося уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \quad m > 1.$$

Автор конспекта лекций хочет выразить признательность профессорам А. Н. Боголюбову и Н. Н. Нефедову за предложение читать данный спецкурс.

Книга набрана и сверстана в пакете LaTeX2e.

Тематическая лекция 1

# МОДЕЛЬНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой лекции мы приведем вывод некоторых модельных нелинейных эллиптических и параболических уравнений. Кроме того, мы предложим читателю некоторые возможные их модификации без вывода. Тем не менее, они тоже имеют физический смысл.

## § 1. Уравнения с $p$–лапласианом

Прежде всего дадим вывод нелинейных уравнений, содержащих в качестве главного нелинейного оператора по пространственным переменным так называемый оператор *$p$–лапласиана*

$$\Delta_p u(x) \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}\left(|Du|^{p-2}Du\right), \quad Du(x) = (\partial_{x_1}u(x), ..., \partial_{x_N}u(x)). \tag{1.1}$$

Пусть электромагнитная среда занимает область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим систему уравнений Максвелла в квазистационарном приближении в этой области:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -n(x), \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon(|\mathbf{E}|)\mathbf{E}, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{B} = \chi(|\mathbf{H}|)\mathbf{H}. \tag{1.3}$$

Заметим, что в случае поверхностно–односвязной области $\Omega$ можно ввести потенциалы электрического и магнитного полей [1])

$$\mathbf{E} = -D\varphi(x), \quad \mathbf{H} = -D\psi(x). \tag{1.4}$$

Осталось выписать явный вид для функций $\varepsilon = \varepsilon(|\mathbf{E}|)$ и $\chi = \chi(|\mathbf{H}|)$. Мы воспользуемся следующей модельной степенной зависимостью:

$$\varepsilon(|\mathbf{E}|) = \varepsilon_0|\mathbf{E}|^{p-2}, \quad \chi(|\mathbf{H}|) = \chi_0|\mathbf{H}|^{p-2}, \tag{1.5}$$

где в большинстве случаев $p \geqslant 2$. Однако, возможна ситуация, когда $p \geqslant 1$. Мы в дальнейшем опишем модель, в которой возникает такой показатель.

[1]) Напоминаем, что в нелинейном анализе вместо привычного обозначения для градиента $\nabla$ используется менее привычное обозначение $D$.

Итак, из систем соответствующих уравнений (1.2), (1.4) и (1.5) или (1.3), (1.4) и (1.5) мы получим следующие модельные уравнения:

$$\operatorname{div}\left(|D\varphi(x)|^{p-2}D\varphi(x)\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}n(x), \tag{1.6}$$

$$\operatorname{div}\left(|D\psi(x)|^{p-2}D\psi(x)\right) = 0. \tag{1.7}$$

Заметим, что оператор $p$–лапласиана является нелинейным *оператором эллиптического типа*. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Delta_p u(x) = \operatorname{div}(|Du(x)|^{p-2}Du(x)) =$$
$$= |Du(x)|^{p-4}\left\{|Du(x)|^2\Delta u + (p-2)\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\}. \tag{1.8}$$

Согласно общей теории эллиптических уравнений уравнение вида

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0$$

является уравнением эллиптического типа, если матрица

$$a_{ij} = \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}, \quad F = F(x, u, p_i, p_{ij})$$

является положительно определенной. В силу равенств (1.8) мы имеем

$$a_{ij} = |Du(x)|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|Du(x)|^{p-4}u_{x_i}(x)u_{x_j}(x).$$

Рассмотрим соответствующую квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\xi^i\xi^j = |Du(x)|^{p-2}|\xi|^2 +$$
$$+ (p-2)|Du(x)|^{p-4}\left(\sum_{i=1}^{N}\xi^i u_{x_i}(x)\right)^2 \geqslant |Du(x)|^{p-2}|\xi|^2.$$

Таким образом, оператор $p$–лапласиана является вырожденным эллиптическим оператором при $p > 2$ и он вырождается там, где $|Du(x)| = 0$. Наконец, если $p < 2$, то он является сингулярным оператором. При $p = 2$ оператор $p$–лапласиана является линейным оператором Лапласа.

Известно какую роль в теории эллиптических уравнений играет оператор Лапласа. Такую же роль играет оператор $p$–лапласиана в теории нелинейных эллиптических уравнений.

Обсудим теперь некоторые важные варианты уравнений для $p$–лапласиана. Важные случаи связаны с показателем $p$.

**Случай** $p = 1$. *Уравнение поверхностей с заданной средней кривизной* $H(x)$.

$$\Delta_1 u(x) = \operatorname{div}\left(\frac{Du(x)}{|Du(x)|}\right) = -H(x).$$

В случае, когда $N = 2$ приходим к следующему уравнению:

$$u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy} = H(x)\left(u_x^2 + u_y^2\right)^{3/2}.$$

**Случай** $p = 2$. В этом случае, как мы уже отмечали, мы приходим к оператору Лапласа

$$\delta_2 u(x) = \Delta u(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}.$$

**Случай** $p = N$. Этот случай является является критическим случаем между случаем $p < N$ и $p > N$. В этом случае решение $N$–гармонического уравнения

$$\Delta_N u(x) = 0$$

относительно преобразования Мёбиуса

$$y = a + \frac{x-a}{|x-a|^2},$$

где $a$ — это постоянная.

**Случай** $p = \infty$. Рассмотрим уравнение (1.8)

$$\Delta_p u(x) = 0 \Rightarrow |Du(x)|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{p-2}|Du(x)|^2 \Delta u + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Откуда формально в пределе при $p \to +\infty$ мы получим уравнение

$$\Delta_\infty u(x) \stackrel{def:}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Причем это уравнение возникает в теории броуновского движения. Отметим, что в настоящем курсе мы намеренно рассматриваем только частные, но базовые нелинейные уравнения, на основе которых слушатели в дальнейшем смогут читать статьи и монографии по нелинейным уравнениям общего вида. Отметим только, что интерес представляют общие эллиптические уравнения следующего дивергентного вида:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(x,u,Du)) + B(x,u,Du) = 0. \tag{1.9}$$

Тем не менее, мы приведем некоторые результаты и для такого вида нелинейных уравнений эллиптического типа.

В дальнейшем нас будут интересовать следующие уравнения, содержащие $p$–лапласиан:

1. Нелинейная задача на собственные значения и соответствующие собственные функции

$$\Delta_p u + \lambda|u|^{p-2}u = 0;$$

2. Уравнение $p$–Пуассона

$$\Delta_p u(x) = f(x);$$

3. Уравнение следующего вида:

$$\Delta_p u + |u|^q u = 0;$$

4. Соответствующее нелинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u.$$

Теперь мы рассмотрим некоторые другие уравнения вида (1.9), близкие к уравнению $p$–лапласиана. Рассмотрим вывод уравнения вида

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}(Du)) = 0,$$

возникающее в *газовой динамике*. Стационарный безвихревой поток идеальной сжимаемой жидкости описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho Du) = 0, \tag{1.10}$$

где $u$ — потенциал скоростей, а плотность жидкости $\rho$ связана со скоростью соотношением вида

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad \gamma > 1$$

где постоянная $\gamma$ равна отношению удельных теплоемкостей газа. В этом случае приходим к уравнению

$$\Delta u(x) - \frac{1}{1-\frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{1.11}$$

Заметим, что минимальное собственное число $\lambda$ и максимальное собственное число $\Lambda$ матрицы

$$a_{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

соответствующей уравнению (1.11) имеют следующий явный вид:

$$\lambda = \frac{1 - \frac{\gamma+1}{2}|Du(x)|^2}{1 - \frac{\gamma-1}{2}|Du(x)|^2} \quad \text{и} \quad \Lambda = 1.$$

Из общей теории известно, что имеет место неравенство

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\xi^i\xi^j \leqslant \Lambda|\xi|^2.$$

Поэтому при

$$|Du(x)| < \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2},$$

т. е. если газовый поток дозвуковой, уравнение (1.11) эллиптично. А при условии

$$\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} < |Du(x)| < \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}$$

уравнение становится гиперболическим уравнением.

Теперь рассмотрим *уравнение капиллярности*. Профиль установившейся поверхности жидкости с постоянным поверхностным натяжением в равномерном поле тяжести подчиняется уравнению капиллярности

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du(x)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}\right) = ku(x), \tag{1.12}$$

где $u = u(x)$ — это высота жидкости над невозмущенной поверхностью, $k$ — это постоянная, положительная или отрицательная в зависимости от того, внутрь или наружу действует гравитационное поле. Естественное физическое граничное условие для функции $u(x)$, удовлетворяющей условию (1.12) в области с фикисированной твердой границей, имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}} \frac{\partial u(x)}{\partial n_x} = \cos\gamma,$$

где величина $\gamma$ — это так называемый угол контакта, т. е. угол между поверхностью жидкости и твердой границей, занимаемой жидкостью.

## § 2. Уравнение фильтрации в пористой среде

В этом параграфе мы приведем физические модели, приводящие к уравнению следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \quad m > 1, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{2.1}$$

где величина $u = u(x,t)$ имеет смысл неотрицательной физической величины (плотность, температура). Однако, можно рассматривать и следующий вариант нелинейного параболического уравнения (2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta \left( |u|^{p-2} u \right), \quad p > 2. \tag{2.2}$$

Т е ч е н и е г а з а ч е р е з п о р и с т у ю с р е д у. Сначала мы рассмотрим одну из первых физических моделей, приводящих к уравнению (2.1) для плотности $\rho = \rho(x,t)$. Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon \rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{2.3}$$

— это уравнение неразрывности, где $\varepsilon \in (0,1)$ — это параметр «пористости». Следующее уравнение выражает так называемый закон Дарси

$$\mu \mathbf{v} = -k D_x p, \tag{2.4}$$

где $p = p(x,t)$ — это давление, а $\mu$ — это вякость жидкости. Наконец, давление связано с плотностью следующим образом:

$$p = p_0 \rho^\gamma, \quad \gamma \geqslant 1. \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.3)–(2.5) сводится к следующему уравнению:

$$\rho_t = c \Delta \rho^m, \quad m = 1 + \gamma, \quad c = \frac{\gamma k p_0}{(\gamma + 1)\varepsilon \mu}. \tag{2.6}$$

Н е л и н е й н о е у р а в н е н и е т е п л о п р о в о д н о с т и. Довольно часто задачи, связанные с теплопроводностью являются существенно нелинейными. Так уравнение для нестационарной теплопроводности имеет следующий вид [1]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}\left( k D_x T \right), \tag{2.7}$$

где величина $k = k(T)$ — коэффициент теплопроводности, зависящий от температуры $T$. Например, естественным является степенной закон

$$k(T) = aT^n, \quad n > 0.$$

---

[1] Еще раз используем вместо $\nabla_x$ символ $D_x$.

Итогом опять является опять уравнение (2.1).

Отметим также, что в приложениях к теории горения и теории популяционной динамики в биологии возникают такие уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m + f(u). \tag{2.8}$$

Тематическая лекция 2

# ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА $W^{1,P}(\Omega)$, $W_0^{1,P}(\Omega)$ И $W^{-1,P'}(\Omega)$

В этой лекции мы введем понятие слабой производной и рассмотрим пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ и их частный, но важный случай при $p = 2$.

## § 1. Слабая производная

Определение 1. *Функция $v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ называется слабой производной $\partial_x^\alpha$ функции $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и пишем*

$$v(x) = \partial^\alpha u(x),$$

*если для всякой функции $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство*

$$(-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u(x)\partial^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx. \tag{1.1}$$

Здесь мы используем следующие обозначения:

$$\partial^\alpha \stackrel{def:}{=} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}, \quad \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i.$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Слабая частная производная порядка $\alpha$ функции $u$, если существует, определяется единственным образом с точностью до множества меры нуль.*

Доказательство.

Пусть $v_1, v_2 \in L^p_{loc}(\Omega)$ такие, что

$$\int\limits_\Omega u\partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_1 \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_2 \varphi\, dx$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (v_1 - v_2)\, \varphi(x)\, dx = 0$$

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, откуда $v_1 - v_2 = 0$ почти всюду.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = (0,2)$

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Определим

$$v(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

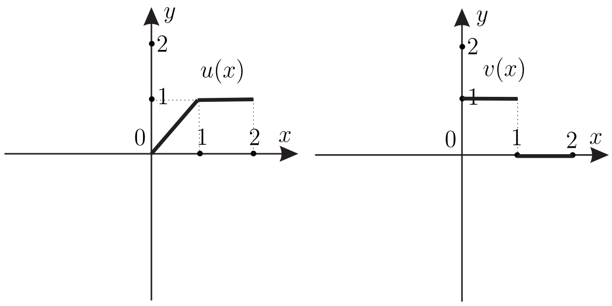


Рис. 1. Слабая производная $v(x)$ функции $u(x)$.

Покажем, что $u' = v$ в слабом смысле. Чтобы убедиться в этом, выберем произвольно $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Надо показать, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

Легко вычислить, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = \int_0^1 x\varphi'\,dx + \int_1^2 \varphi'\,dx = -\int_0^1 \varphi\,dx + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\,dx.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = (0,2)$.

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Мы покажем, что производная $u'$ не существует в слабом смысле. Для этого надо показать, что не существует функции $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ такой, что

$$\int_0^2 u\varphi'\,dx = -\int_0^2 v\varphi\,dx \tag{1.2}$$

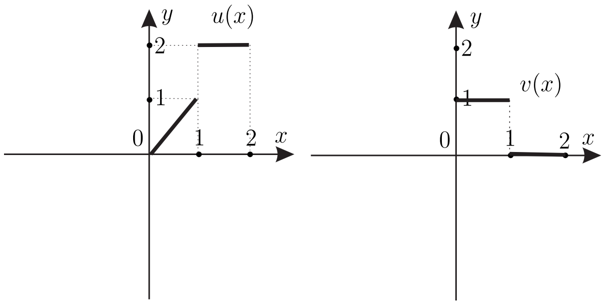


Рис. 2. Отсутствие слабой производной $v(x)$ функции $u(x)$.

для всех $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$.

Предположим противное. Пусть (1.2) выполняется для некоторой функции $v$ и всех функций $\varphi$. Тогда

$$-\int\limits_0^2 v\varphi\, dx = \int\limits_0^2 u\varphi'\, dx = \int\limits_0^1 x\varphi'\, dx + 2\int\limits_1^2 \varphi'\, dx = -\int\limits_0^1 \varphi\, dx - \varphi(1). \tag{1.3}$$

Выберем последовательность $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ гладких функций таких, что

$$0 \leqslant \varphi_m \leqslant 1, \quad \varphi_m(1) = 1, \quad \varphi_m \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \neq 1.$$

Заменив $\varphi$ на $\varphi_m$ в (1.3) и полагая $m \to +\infty$, получаем предельное равенство [1])

$$1 = \lim_{m\to+\infty} \varphi_m(1) = \lim_{m\to+\infty}\left[\int\limits_0^2 v\varphi_m\, dx - \int\limits_0^1 \varphi_m\, dx\right] = 0,$$

которое противоречиво.

Теперь приведем без доказательства следующие две леммы о свойствах слабых производных. [2])

Лемма 2. *Пусть функции $u(x), v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ имеют слабые производные $\partial u(x), \partial v(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ и граница $\partial\Omega$ области $\Omega$ достаточно гладкая, тогда справедлива следующая формула* [3]) :

$$\partial(uv) = u\partial v + v\partial u, \tag{1.4}$$

---

[1]) В силу теоремы Лебега.

[2]) Доказательство этих утверждений можно найти во втором томе курса «Линейный и нелинейный функциональный анализ» М. О. Корпусова и А. А. Панина.

[3]) Символом $\partial$ мы обозначили какую либо слабую частную производную первого порядка.

*понимаемая в слабом смысле, т. е. для любой функции* $\varphi(x) \in \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ :

$$\int\limits_\Omega \partial(u(x)v(x))\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega u(x)\partial v(x)\varphi(x)\,dx + \int\limits_\Omega v(x)\partial u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Лемма 3. *Пусть функция* $f(t) \in \mathbb{C}^1\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и* $f'(t) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^1\right)$ *и функция* $u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$ *и имеет слабую производную* $\partial u(x) \in L^p_{loc}(\Omega)$. *Тогда справедлива следующая формула слабой производной сложной функции*:

$$\partial f(u)(x) = f'(u)\partial u(x). \tag{1.5}$$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $f(u) = u^n(x)$ при $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что производная функции $f(t) = t^n$ при $t \in \mathbb{R}^1$ является, очевидно, неограниченной и поэтому применить лемму 3 нельзя. Тем не менее, применяя последовательно лемму 2, мы в результате получим, что имеет место равенство

$$\partial u^n(x) = nu^{n-1}(x)\partial u(x)$$

в слабом смысле.

## § 2. Пространства $H^1(D)$ и $H_0^1(D)$

В этом параграфе мы рассмотрим следующие вещественные пространства С. Л. Соболева:

$$H_0^1(D) \overset{def}{=} W_0^{1,2}(D), \quad H^1(D) \overset{def}{=} W^{1,2}(D),$$

$$H^{-1}(D) \overset{def}{=} W^{-1,2}(D) = (W_0^{1,2}(D))^*.$$

Напомним определение слабой частной производной функции.

Определение 2. *Слабой частной производной функции* $u(x) \in \in L^1_{loc}(D)$ *по переменной* $x_i$ *называется функция* $v_i(x) \in L^1_{loc}(D)$, *если для любой пробной функции* $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}_0(D)$ *выполнено равенство*

$$\int\limits_D \left[v_i(x)\varphi(x) + u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right]\,dx = 0 \tag{2.1}$$

Отметим, что равенство (2.1) есть следствие формулы интегрирования по частям.

Дадим определение пространства Соболева $H^1(D)$.

О п р е д е л е н и е 3. *Функция* $u(x) \in H^1(D)$, *если* $u(x) \in L^2(D)$, *а ее слабые частные производные* $v_i(x) \in L^2(D)$ *при всех* $i = \overline{1, N}$, *причем это пространство банахово относительно нормы* [1])

$$\|u\| \equiv \left( \int\limits_D \left[ |u(x)|^2 + \sum_{i=1}^N |v_i(x)|^2 \right] dx \right)^{1/2}.$$

Дадим определение пространства Соболева $H_0^1(D)$.

О п р е д е л е н и е 4. *Пополнение векторного пространства* $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ *по норме банахового пространства* $H^1(D)$ *называется банаховым пространством* $H_0^1(D)$.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что нормой на векторном пространстве $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ является также величина

$$\|Du\|_2, \quad D = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}),$$

где $\partial_{x_k}$ — это соответствующие слабые частные производные по переменной $x_k$. И если рассмотреть пополнение $\mathbb{C}_0^\infty$ мы получим банахово пространство $\mathcal{D}^{1,2}(D)$ относительно указанной нормы. Оказывается как было доказано в 10-й Лекции–Семинаре [2]) в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_2 \leqslant c_1 \|Du\|_2 \quad \text{для всех} \quad u(x) \in H_0^1(D)$$

это пространство совпадает с банаховым пространством $H_0^1(D)$.

Далее мы изучим свойства пространства $H^{-1}(D)$ сопряженного к банаховому пространству $H_0^1(D)$. Введем следующие обозначения:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(D) \otimes H_0^1(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H_0^1(D)$ и

$$H^{-1}(D) \overset{def:}{=} (H_0^1(D))^*;$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 : (H^1(D))^* \otimes H^1(D) \to \mathbb{R}^1$$

— это скобки двойственности между $H^1(D)$ и $(H^1(D))^*$. Величина

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathcal{D}'(D) \otimes \mathcal{D}(D) \to \mathbb{R}^1$$

[1]) Это согласуется с определением слабой производной, поскольку $L^2(D) \subset \subset L^2_{loc}(D)$.

[2]) Линейный и нелинейный функциональный анализ. Том II. М. О. Корпусова и А. А. Панина

— это скобки двойственности между пространством основных функций $\mathcal{D}(D)$ и пространством обобщенных функций $\mathcal{D}^{'}(D)$.

Рассмотрим формальный вид эллиптического оператора $\mathcal{L}$, определенного следующей формулой:

$$\mathcal{L}u(x) \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x). \quad (2.2)$$

Пусть $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in L^\infty(D)$. Причем частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при} \quad j = \overline{1, N}$$

в слагаемом

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)$$

понимается в слабом смысле (точнее из $L^2(D) \subset L^1_{loc}(D)$). Тогда при $u(x) \in H_0^1(D)$ имеем

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(D). \quad (2.3)$$

Теперь введем функционал, порождаемый функцией $f(x) \in L^2(D)$, обозначаемый также как и частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$ [1]

причем это не слабая производная, а производная регулярной обобщенной функции, порожденной функцией $f(x) \in L^2(D) \subset \mathcal{D}^{'}(D)$, стандартной формулой

$$\left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\right\rangle \stackrel{def}{=} -\left\langle\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right\rangle\right\rangle = -\int_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx, \quad \varphi(x) \in H_0^1(D) \quad (2.4)$$

и, в частности,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(D)$$

— это слабая производная функции $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Лемма 4. *Функционал (2.4) является линейным и непрерывным в сильной топологии пространства $H_0^1(D)$. Иначе говоря,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{-1}(D). \quad (2.5)$$

[1] Недоразумений это не должно вызвать, потому что в каждом конкретном случае понятно какая производная имеется в виду слабая или обобщенная в смысле обобщенных функций.

Доказательство.

Действительно, для любой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1_0(D)$ такой, что

$$\varphi_m \to \varphi \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(D)$$

имеем, в частности,

$$\|D\varphi_m - D\varphi\|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\left|\left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi_m - \varphi \right\rangle\right\rangle\right| \leqslant \int\limits_D |D\varphi_m - D\varphi|\,|f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_D |D\varphi_m - D\varphi|^2\,dx\right)^2 \left(\int\limits_D |f(x)|^2\,dx\right)^2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Стало быть, по формуле

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \stackrel{def:}{=} \left\langle\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle\right\rangle = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,dx$$

определен линейный и непрерывный функционал

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{над пространством} \quad H^1_0(D) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \left(H^1_0(D)\right)^* = H^{-1}(D).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 5. *Всякий функционал над банаховым пространством $H^1(D)$ порождается функциями $f_j(x) \in L^2(D)$ при $j = \overline{0,N}$ по формуле*

$$\langle f^*, \varphi\rangle_1 \stackrel{def:}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D f_j(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D f_0(x)\varphi(x)\,dx, \tag{2.6}$$

*причем для некоторого однозначно определенного элемента $g(x) \in \in H^1(D)$ имеет место равенство в слабом смысле*

$$f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x).$$

Доказательство.

*Шаг 1.* Действительно, пространство $H^1(D)$ является гильбертовым относительно скалярного произведения

$$(g(x), \varphi(x))_1 \stackrel{def:}{=} \sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\,dx$$

для всех $\varphi(x), g(x) \in H^1(D)$. С другой стороны, для всякого элемента $f^*(x) \in \left(H^1(D)\right)^*$ согласно теореме Рисса–Фреше найдется такой единственный элемент $g(x) \in H^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi\rangle = (g(x), \varphi(x))_1 = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D f_j(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_D g(x)\varphi(x)\, dx,$$

где

$$f_j(x) = \frac{\partial g}{\partial x_j} \in L^2(D), \quad j = \overline{1, N}.$$

*Шаг 2.* Наконец, для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \subset H^1(D)$ такой, что

$$\varphi_m(x) \to \varphi(x) \quad \text{сильно в} \quad H^1(D) \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

имеем

$$\|\varphi_m - \varphi\|_2 \to +0, \quad \|D\varphi_m - D\varphi\|_2 \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_D f_j(x)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_j}\right] dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_D \left|\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi_m(x)}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_D f_j^2(x)\, dx\right)^{1/2} \to +0,$$

$$\left|\int\limits_D g(x)[\varphi_m(x) - \varphi(x)]\, dx\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int\limits_D |\varphi_m(x) - \varphi(x)|^2\, dx\right)^2 \left(\int\limits_D |g(x)|^2\, dx\right)^2 \to +0$$

при $m \to +\infty$. Следовательно, формулой (2.6) задается линейный и непрерывный функционал над пространством $H^1(D)$.

Лемма доказана.

Следствие 1. *Для всякого элемента $f^* \in H^{-1}(D)$ найдется такой единственный элемент $g(x) \in H^1_0(D)$, что имеет место явное представление*

$$\langle f^*, \varphi\rangle \stackrel{def:}{=} \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D f_j(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_j}\, dx, \quad f_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad g(x) \in H^1_0(D) \quad (2.7)$$

*для всех* $\varphi(x) \in H^1_0(D)$.

Дадим эквивалентное определение банахова пространства $(H^1(D))^*$.

Определение 5. *Множество всех линейных и непрерывных функционалов над банаховым пространством* $H^1(D)$ *обозначим символом* $(H^1(D))^*$, *причем это пространство является банаховым относительно нормы* [1]

$$\|f^*\|_{-1} \equiv \sup_{\|Du\|_2=1} \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{D} f^*_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{D} f_0(x)\varphi(x)\, dx \right|,$$

*где*

$$f^*_j(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}, \quad f_0(x) = g(x), \quad g(x) \in H^1(D), \quad j = \overline{0, N}$$

— *это функции порождающие функционал.*

Справедлива следующая лемма:

Лемма 6. *Имеет место следующие равенства*:

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} |\langle f^*, \varphi\rangle_1| = \left(\|g\|_2^2 + \|Dg\|_2^2\right)^{1/2}, \quad g(x) \in H^1(D) \tag{2.8}$$

*для любого* $f^*(x) \in (H^1(D))^*$ *и для всех* $\varphi(x) \in H^1(D)$;

$$\|f^*\|_{*} = \sup_{\|D\varphi\|_2=1} |\langle f^*, \varphi\rangle| = \|Dg\|_2, \quad g(x) \in H^1_0(D) \tag{2.9}$$

*для любого* $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ *и для всех* $\varphi(x) \in H^1_0(D)$.

Доказательство.

Докажем, например, равенство (2.8). Действительно, во–первых, имеет место следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2}=1} \left[ \sum_{j=1}^{N} \|\partial_j g\|_2 \|\partial_j \varphi\|_2 + \|g\|_2 \|\varphi\|_2 \right]. \tag{2.10}$$

Заметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\left( \sum_{j=1}^{N} a_j^{1/2} b_j^{1/2} + a_0^{1/2} b_0^{1/2} \right)^2 \leqslant \left( \sum_{j=1}^{N} a_j + a_0 \right) \left( \sum_{j=1}^{N} b_j + b_0 \right)$$

[1] Стандартная $*$–норма.

для всех $a_j \geqslant 0$, $b_j \geqslant 0$ при $j = \overline{0, N}$. Поэтому мы из (2.10) мы получим следующее неравенство:

$$\|f^*\|_{1*} \leqslant \sup_{\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2} = 1} \left(\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2} \left(\|D\varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2\right)^{1/2}.$$

С другой стороны, заметим, что имеет место неравенство снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \left| \sum_{j=1}^{N} \int_D \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx + \int_D g(x)\varphi(x)\, dx \right|$$

для всех $\left(\|\varphi\|_2^2 + \|D\varphi\|_2^2\right)^{1/2} = 1$. Возьмем в этом неравенстве

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2}}$$

и получим оценку снизу

$$\|f^*\|_{1*} \geqslant \sqrt{\|Dg\|_2^2 + \|g\|_2^2}\,.$$

Равенство (2.8) доказано.

Лемма доказана.

Продолжим рассмотрение оператора $\mathfrak{L}$, определенного формулой (2.2). Причем в слагаемом

$$b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

производная понимается в слабом смысле, о вот производная

$$\frac{\partial}{\partial x_i},$$

примененная к выражению

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad u(x) \in H_0^1(D),$$

понимается уже как функционал из $H^{-1}(D)$. Таким образом, мы приходим к выводу о том, что

$$a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} : H_0^1(D) \to L^2(D), \tag{2.11}$$

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) : H_0^1(D) \to H^{-1}(D), \tag{2.12}$$

$$b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} : H_0^1(D) \to L^2(D), \quad c(x)I : H_0^1(D) \to L^2(D). \tag{2.13}$$

Теперь заметим, что имеют место плотное вложение

$$H_0^1(D) \overset{ds}{\subset} L^2(D) \Rightarrow L^2(D) = \left(L^2(D)\right)^* \overset{ds}{\subset} \left(H_0^1(D)\right)^* = H^{-1}(D).$$

Таким образом, такое обобщение оператора $\mathfrak{L}$, формально записанного как и ранее, действует следующим образом:

$$\mathfrak{L} \equiv \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I : H_0^1(D) \to H^{-1}(D). \tag{2.14}$$

Наконец, мы можем определить так называемое сильное решение следующей однородной краевой задачи Дирихле:

$$\mathfrak{L}u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{2.15}$$

Определение 6. *Слабым решением однородной краевой задачи Дирихле* (2.15) *называется функция* $u(x) \in H_0^1(D)$, *удовлетворяющая равенству*

$$\langle \mathfrak{L}u, \varphi \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(D), \tag{2.16}$$

*причем это равенство эквивалентно равенству*

$$\int_D \Bigg[ \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} - \\ - \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\varphi(x) - c(x)u(x)\varphi(x)\Bigg] dx = 0 \tag{2.17}$$

*для всех* $\varphi(x) \in H_0^1(D)$.

Рассмотренные пространства $H^1(D)$, $H_0^1(D)$ и соответствующие сопряженные используются при рассмотрении и нелинейных краевых задач с главным линейным оператором эллиптического типа второго порядка. Однако, при рассмотрении нелинейных в главном дифференциальных уравнений используются банаховы пространства $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$. Рассмотрением этих пространств мы займемся в 4 параграфе. А сейчас мы изучим вопрос о явном виде оператора Рисса–Фреше для пространства Соболева $H_0^1(D)$.

## § 3. Оператор Рисса–Фреше для гильбертового пространства $H_0^1(D)$

1. Для построения явного вида оператора Рисса–Фреше нам нужно рассмотреть вопрос о существовании и единственности слабого решения следующей краевой задачи в классическом смысле имеющей вид:

$$-\Delta u(x) = f^*(x) \quad \text{при} \quad x \in D, \quad u(x)|_{\partial D} = 0. \tag{3.1}$$

В слабом смысле задача ставится так:

$$\langle -\Delta u, \varphi\rangle = \langle f^*, \varphi(x)\rangle \text{ для всех } \varphi(x) \in H_0^1(D),\ f^*(x) \in H^{-1}(D). \tag{3.2}$$

Эта задача эквивалентна следующей:

$$B(u, \varphi) = \langle f^*, \varphi\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(D), \quad f^*(x) \in H^{-1}(D), \tag{3.3}$$

где билинейная форма $B(u, \varphi)$ определена равенством

$$B(u, \varphi) = \int\limits_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx. \tag{3.4}$$

Для билинейной формы справедливы оценки

$$B(u, \varphi) \leqslant \|Du\|_2 \|D\varphi\|_2, \quad B(u, u) = \|Du\|_2^2. \tag{3.5}$$

2. Согласно лемме Лакса-Мильграма существует единственный оператор $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(H, H)$, $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{L}(H, H)$ [1] такой, что

$$B(u, \varphi) = (\mathbb{A}u, \varphi) \quad \text{для всех} \quad u(x),\, \varphi(x) \in H_0^1(D), \tag{3.6}$$

где $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $H_0^1(D)$ вида

$$(v_1, v_2) \stackrel{def:}{=} \int\limits_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_1(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v_2(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Поэтому этот оператор $\mathbb{A}$ — это единичный оператор.

3. Кроме того, в силу теоремы Рисса-Фреше для всякого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ найдется такая функция $w(x) \in H_0^1(D)$, что имеет место равенство

$$\langle f^*, \varphi(x)\rangle = (w, \varphi). \tag{3.7}$$

[1] Лекция 11. Том II. Линейный и нелинейный функциональный анализ. М. О. Корпусов и А. А. Панин.

Поскольку $\operatorname{Im}\mathbb{A} = H_0^1(D)$, то для этого $w(x)$ найдется такая функция $u(x) \in H_0^1(D)$, что для этой функции $u(x)$ и для всех $\varphi(x) \in H_0^1(D)$ выполнена цепочка равенств

$$\mathbb{A}u(x) = w(x) \Rightarrow B(u,\varphi) = (\mathbb{A}u,\varphi) = (w,\varphi) = \langle f^*,\varphi\rangle,$$

из которой следует, что $u(x)$ слабое решение исходной задачи.

4. Единственность слабого решения следует из следующих соображений. Пусть слабых решений два: $u_1(x), u_2(x) \in H_0^1(D)$, тогда имеем

$$\begin{aligned}
&B(u_1,\varphi) = \langle f^*,\varphi\rangle, \quad B(u_2,\varphi) = \langle f^*,\varphi\rangle \Rightarrow \\
&\Rightarrow B(u_1-u_2,\varphi) = 0 \Rightarrow B(u_1-u_2,u_1-u_2) = 0 \Rightarrow \|D(u_1-u_2)\|_2 = 0 \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow H_0^1(D) \ni u_1 - u_2 = constant \Rightarrow constant = 0 \Rightarrow u_1 = u_2.
\end{aligned}$$

5. Таким образом, для всякого $f^*(x) \in H^{-1}(D)$ существует единственное слабое решение $u(x) \in H_0^1(D)$ уравнения (3.2). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*,\varphi\rangle = \langle -\Delta u,\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\,dx = (u,\varphi).$$

6. Докажем, что оператор $\mathrm{J} = (-\Delta)^{-1}$ является изометрическим. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|f^*\|_* &\overset{def:}{=} \sup_{\|D\varphi\|_2=1} |\langle -\Delta u,\varphi\rangle| \leqslant \\
&\qquad\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_2=1} \|Du\|_2\|D\varphi\|_2 = \|Du\|_2 = \|u\|_{H_0^1} = \|\mathrm{J}f^*\|_{H_0^1},
\end{aligned}$$

$$\|f^*\|_* \geqslant |\langle -\Delta u,\varphi\rangle| \geqslant \left|\left\langle -\Delta u, \frac{u}{\|Du\|_2}\right\rangle\right| = \|Du\|_2 = \|u\|_{H_0^1} = \|\mathrm{J}f^*\|_{H_0^1},$$

$$\|f^*\|_* = \|\mathrm{J}f^*\|_{H_0^1} \quad \text{для всех} \quad f^*(x) \in H^{-1}(D).$$

Отсюда вытекает, что оператор Рисса–Фреше имеет следующий явный вид:

$$\mathrm{J} = (-\Delta)^{-1} : H^{-1}(D) \to H_0^1(D), \quad u(x) = \mathrm{J}f^*(x).$$

## § 4. Пространства С. Л. Соболева $W^{1,p}(D)$ и $W_0^{1,p}(D)$ при $p > 2$

Дадим определение пространства Соболева $W^{1,p}(D)$ при $p > 2$.

Определение 7. *Функция $u(x) \in W^{1,p}(D)$, если $u(x) \in L^p(D)$ и ее слабые частные производные $\partial_{x_i} u(x) \in L^p(D)$ при всех $i = \overline{1,N}$, причем это пространство банахово относительно нормы*

$$\|u\|_{1,p} \equiv \left( \int\limits_D \left[ |u(x)|^p + \sum_{i=1}^N |\partial_{x_i} u(x)|^p \right] dx \right)^{1/p}.$$

Дадим определение пространства Соболева $W_0^{1,p}(D)$.

Определение 8. *Пополнение векторного пространства $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ по норме банахова пространства $W^{1,p}(D)$ называется банаховым пространством $W_0^{1,p}(D)$.*

Замечание 2. Отметим [1], что норма на пространстве $W_0^{1,p}(D)$ эквивалентна следующей

$$\|Du\|_p \stackrel{def:}{=} \left( \int\limits_D |Du|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad D = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N}).$$

Введем обозначения.

$$W^{-1,p'}(D) \stackrel{def:}{=} (W_0^{1,p}(D))^*, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1,$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* : W^{-1,p'}(D) \otimes W_0^{1,p}(D) \to \mathbb{R}^1.$$

Кроме того, мы используем обозначение $(W^{1,p}(D))^*$ для линейных и непрерывных функционалов над $W^{1,p}(D)$ со скобками двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{1*} : (W^{1,p}(D))^* \otimes W^{1,p}(D) \to \mathbb{R}^1.$$

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 7. *Всякая функция $f^*(x) \in (W^{1,p}(D))^*$ представима в следующем виде*:

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = \sum_{j=1}^N \int\limits_D g_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \, dx + \int\limits_D g_0(x) u(x) \, dx \; \forall \; u(x) \in W^{1,p}(D), \tag{4.1}$$

*где $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j = \overline{0,N}$.*

Доказательство.

*Шаг 1.* Банахово пространство $W^{1,p}(D)$ можно отождествить с подпространством

$$W \stackrel{def:}{=} w = (u, D_1 u, ..., D_N u) \subset \underbrace{L^p(D) \otimes L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_{N+1}, \quad D_k = \partial_{x_k}.$$

[1] В силу обобщения неравенства Фридрихса.

Причем это банахово пространство относительно нормы

$$\|w\|_W \overset{def:}{=} \|u\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|D_j u\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}.$$

*Шаг 2.* Введем оператор

$$P : u \in W^{1,p}(D) \to w = (u, D_1 u, ..., D_N u) \in W.$$

Очевидно что этот оператор является изометрией между банаховыми пространствами $W^{1,p}(D)$ и $W$ при наделении пространства $W^{1,p}(D)$ такой же нормой:

$$\|Pu\|_W = \|u\|_{W^{1,p}} \quad \text{для всех} \quad u \in W^{1,p}(D).$$

*Шаг 3.* Поэтому любой элемент $f^* \in (W^{1,p}(D))^*$ представим в виде

$$f^* = L^* P, \quad L^* \in (W)^*.$$

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = ((L^*, Pu))\ ^{1)},$$

$$\|f^*\|_{1*} = \sup_{\|u\|_{W^{1,p}}=1} |\langle f^*, u \rangle_{1*}| = \sup_{\|Pu\|_W=1} |((L^*, Pu))| = \|L^*\|_{W^*}$$

где $((\cdot, \cdot))$ — скобки двойственности между $W$ и $W^*$. Согласно теореме Хана–Банаха существует продолжение $\widehat{L^*}$ функционала $L^*$ с подпространства $W$ на все банахово пространство

$$(L^p(D))^{N+1} \overset{def:}{=} \underbrace{L^p(D) \otimes L^p(D) \otimes \cdots \otimes L^p(D)}_{N+1},$$

таким образом, что

$$\langle f^*, u \rangle_{1*} = ((L^*, Pu)) = \langle \widehat{L^*}, w \rangle_p, \quad w \in W \subset (L^p(D))^{N+1},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ — скобки двойственности между банаховым пространством $(L^p(D))^{N+1}$ и банаховым пространством $\left((L^p(D))^{N+1}\right)^*$

$$\left((L^p(D))^{N+1}\right)^* = (L^{p'}(D))^{N+1} = \underbrace{L^{p'}(D) \otimes L^{p'}(D) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(D)}_{N+1}.$$

[1] Здесь мы записали последовательное действие операторов $L^* P$.

Стало быть, найдутся такие функции $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j=\overline{0,N}$, что имеет место равенство

$$\langle \widehat{L^*}, w\rangle_p = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x)\,dx + \int\limits_D u(x) g_0(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\langle f^*, u\rangle_{1*} = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} g_j(x)\,dx + \int\limits_D u(x) g_0(x)\,dx, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Всякий элемент $f^* \in W^{-1,p'}(D)$ представим, возможно, неединственным образом в следующем виде*:

$$\langle f^*, u\rangle_* = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D g_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\,dx, \ \forall\, u(x) \in W^{1,p}_0(D), \tag{4.2}$$

*где $g_j(x) \in L^{p'}(D)$ при $j=\overline{1,N}$.*

Теперь рассмотрим вопрос об инъективном операторе, который действует из пространства $W^{1,p}_0(D)$ при $p>2$ на все пространство $W^{-1,p'}(D)$. В отличие от случая $p=2$ этот оператор является **нелинейным оператором $p$–лапласиана.**

□ Действительно, рассмотрим оператор $p$—лапласиана:

$$\Delta_p u \overset{def:}{=} \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du), \quad D=(\partial_{x_1},\ldots,\partial_{x_N}). \tag{4.3}$$

При этом мы будем рассматривать этот оператор в расширенном смысле. Оператор $D$ понимается в слабом смысле.

1. В качестве области определения возьмем

$$\operatorname{dom}\Delta_p = W^{1,p}_0(D),$$

тогда

$$D: W^{1,p}_0(D) \to \underbrace{L^p(D)\otimes\cdots\otimes L^p(D)}_{N}.$$

Рассмотрим векторную нелинейную функцию

$$\eta(x) = (\eta_1(x),\ldots,\eta_N(x)) =$$
$$= |\xi(x)|^{p-2}\xi(x) : \underbrace{L^p(D)\otimes\cdots\otimes L^p(D)}_{N} \to \underbrace{L^{p'}(D)\otimes\cdots\otimes L^{p'}(D)}_{N},$$

где $\xi(x) = (\xi_1(x), ..., \xi_N(x))$. Теперь определим функционал $\operatorname{div}(\eta(x)) \in$ $\in W^{-1,p'}(D)$ над пространством $W_0^{1,p}(D)$ следующим образом:

$$\langle \operatorname{div}(\eta(x)), \varphi(x) \rangle_* \stackrel{def:}{=} -\sum_{j=1}^{N} \int\limits_D \eta_j(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j}\, dx$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и заданной функции

$$\eta(x) = (\eta_1(x), ..., \eta_N(x)) \in \underbrace{L^{p'}(D) \otimes \cdots \otimes L^{p'}(D)}_{N}.$$

Тогда, оператор $\Delta_p$ представим в следующем виде

$$\Delta_p u \stackrel{def:}{=} \operatorname{div}(\eta(x)), \quad \eta(x) = |\xi(x)|^{p-2}\xi(x), \quad \xi(x) = Du(x)$$

при $u(x) \in W_0^{1,p}(D)$ и получим, что этот оператор действует

$$\Delta_p : W_0^{1,p}(D) \to W^{-1,p'}(D).$$

2. В дальнейшем будет доказано, что слабое решение $u(x) \in$ $\in W_0^{1,p}(D)$ задачи

$$\langle -\Delta_p u(x), \varphi(x) \rangle_* = \langle f^*(x), \varphi(x) \rangle_* \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in W_0^{1,p}(D)$$

при любом $f^*(x) \in W^{-1,p'}(D)$ существует и единственно [1)].

3. Докажем теперь, что для $\Delta_p$ выполнено следующее равенство:

$$\|\Delta_p u\|_* = \|Du\|_p^{p-1} \quad \text{для всех} \quad u(x) \in W_0^{1,p}(D).$$

Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned} \|\Delta_p u\|_* &= \sup_{\|D\varphi\|_p = 1} |\langle D_p u, \varphi \rangle| = \\ &= \sup_{\|D\varphi\|_p = 1} \left| \sum_{j=1}^{N} \int\limits_D |Du(x)|^{p-2} D_j u(x) D_j \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p = 1} \int\limits_D |Du(x)|^{p-2} \sum_{j=1}^{N} |D_j u(x)||D_j \varphi(x)|\, dx \leqslant \end{aligned}$$

---

[1)] Что может быть доказано при помощи теоремы Браудера–Минти. Том III. Нелинейный анализ. Линейный и нелинейный функциональный анализ. М. О. Корпусова и А. А. Панина.

$$\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \int_D |Du(x)|^{p-2} \left(\sum_{j=1}^N |D_j u(x)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N |D_j \varphi(x)|^2\right)^{1/2} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \int_D |Du(x)|^{p-1} |D\varphi(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|D\varphi\|_p=1} \|Du\|_p^{p-1} \|D\varphi\|_p = \|Du\|_p^{p-1}.$$

Теперь заметим, что справедливы следующие неравенства:

$$\|\Delta_p u\|_* \geqslant \left| \sum_{j=1}^N \int_D |Du(x)|^{p-2} D_j u(x) D_j \varphi(x)\, dx \right| \quad \text{при} \quad \|D\varphi\|_p = 1,$$

в котором возьмем

$$\varphi(x) = \frac{u(x)}{\|Du\|_p}$$

и получим следующее неравенство:

$$\|\Delta_p u\|_* \geqslant \|Du\|_p^{p-1}. \quad \boxtimes$$

Тематическая лекция 3

# СЛЕД ФУНКЦИЙ ИЗ $H^1(\Omega)$

В этой лекции мы рассмотрим важный вопрос о существовании следа на границе функций из пространств $H^1(\Omega)$ и $H^1(D) = W_2^{1,1}(D)$ при $D = \Omega \otimes (0, T)$.

## § 1. Некоторые утверждения для функций из $H^1(Q^+)$

Введем следующие обозначения:

$$Q \stackrel{def:}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x_i| < 1, \; i = \overline{1, N}\right\}, \quad Q^+ \stackrel{def:}{=} \{x \in Q : \, x_N > 0\},$$

$$x = (x^{'}, x_N), \quad x^{'} = (x_1, ..., x_{N-1}),$$

$$\Gamma \stackrel{def:}{=} \{x \in Q : \, x_N = 0\} = \\ = \left\{x^{'} \in \mathbb{R}^{N-1} : \, |x_i| < 1, \; i = \overline{1, N-1}\right\} \otimes \{x_N = 0\}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Для любой функции $u(x) \in H^1(Q^+)$ существует единственная функция $w(x^{'}) \in L^2(\Gamma)$ такая, что*

$$\operatorname*{ess.lim}_{x_N \to 0+0} \int\limits_{\Gamma} \left|u(x^{'}, x_N) - w(x^{'})\right|^2 \, dx^{'} = 0. \text{ [1]} \tag{1.1}$$

*Мы назовем функцию $w(x^{'})$ следом функции $u(x)$ на многообразии $\Gamma$ размерности $N-1$ и обозначим его через $\gamma u(x^{'}, 0)$.*

Доказательство.

*Шаг 1.* Докажем единственность следа. Это следует из следующей цепочки неравенств:

$$\left(\int\limits_{\Gamma} \left|w_1(x^{'}) - w_2(x^{'})\right|^2 \, dx^{'}\right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_{\Gamma} \left|u(x^{'}, x_N) - w_1(x^{'})\right|^2 \, dx^{'}\right)^{1/2} +$$

[1] Смысл обозначения ess.lim будет понятен из дальнейшего.

$$+\left(\int\limits_{\Gamma}\left|u(x^{'},x_N)-w_2(x^{'})\right|^2\,dx^{'}\right)^{1/2}\to +0$$

при $x_N\to 0+0$ в смысле предела ess.lim.

*Шаг 2.* Прежде всего заметим, что имеет место плотное вложение

$$\mathbb{C}^{\infty}(\overline{Q}^{+})\overset{ds}{\subset} H^1(Q^+).$$

Поэтому для фиксированной функции $u(x)$ существует последовательность $\{u_m\}\in\mathbb{C}^{\infty}(\overline{Q}^{+})$ такая, что

$$\lim_{m\to+\infty}\|u_m-u\|_{H^1(Q^+)}=0. \tag{1.2}$$

Фиксируем $0<2\delta<1$. Выберем гладкую функцию $\varphi(x_N)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ такую, что

$$\varphi(x_N)=\begin{cases}1, & \text{при}\quad x_N\in[0,\delta];\\ 0, & \text{при}\quad x_N\in[2\delta,1].\end{cases}$$

Заметим, что

$$\lim_{m\to+\infty}\|\varphi u_m-\varphi u\|_{H^1(Q^+)}=0. \tag{1.3}$$

При достаточно малом $\varepsilon\in[0,\delta]$ выполнено равенство

$$u_m(x^{'},\varepsilon)=-\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N}\,dx_N. \tag{1.4}$$

Поэтому имеет место цепочка неравенств [1])

$$\left|u_m(x^{'},\varepsilon)-u_n(x^{'},\varepsilon)\right|^2\leqslant\left|\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N}-\frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N}\right)\,dx_N\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant(1-\varepsilon)^2\int\limits_0^1\left|\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N}-\frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N}\right|^2\,dx_N\leqslant\int\limits_0^1\left|\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N}-\frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N}\right|^2\,dx_N.$$

Теперь проинтегрируем по $x^{'}\in\Gamma$ обе части последнего итогового неравенства. Отсюда и из (1.3) мы получим следующее выражение

$$\|u_m(x^{'},\varepsilon)-u_n(x^{'},\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant\|\varphi u_m-\varphi u\|_{H^1(Q^+)}\to +0 \tag{1.5}$$

[1]) В силу неравенства Гельдера.

при $m$ и $n \to +\infty$. Следовательно, с одной стороны, последовательность $\{u_m(x^{'}, \varepsilon)\}$ является фундаментальной в банаховом пространстве $L^2(\Gamma)$. Обозначим предел этой последовательности через $v(x^{'}, \varepsilon) \in$ $\in L^2(\Gamma)$. С другой стороны, последовательность $\{u_m\}$ сильно сходится к $u(x)$ в $L^2(Q^+)$. Но тогда существует такое множество $E \subset (0, \delta)$ нулевой меры Лебега, что для произвольного $\varepsilon \in (0, \delta)\backslash E$,

$$v(x^{'}, \varepsilon) = u(x^{'}, \varepsilon) \quad \text{для п. вс.} \quad x^{'} \in \Gamma. \tag{1.6}$$

*Шаг 3.* Таким образом, для всех $\varepsilon \in (0, \delta)\backslash E$ в силу (1.5) имеют место следующие неравенства

$$\int\limits_{\Gamma} \left|u_m(x^{'}, 0) - v(x^{'}, 0)\right|^2 dx^{'} \leqslant \|\varphi u_m - \varphi u\|_{H^1(Q^+)}, \tag{1.7}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left|u_m(x^{'}, \varepsilon) - u(x^{'}, \varepsilon)\right|^2 dx^{'} \leqslant \|\varphi u_m - \varphi u\|_{H^1(Q^+)}. \tag{1.8}$$

Кроме того, очевидно, имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Gamma} \left|u_m(x^{'}, \varepsilon) - u_m(x^{'}, 0)\right|^2 dx^{'} \leqslant \varepsilon \int\limits_{Q^+} \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_N}\right|^2 dx. \tag{1.9}$$

Наконец, комбинируя неравенства (1.7)–(1.9), мы получим неравенство

$$\begin{gathered}\left(\int\limits_{\Gamma} \left|u(x^{'}, \varepsilon) - w(x^{'})\right|^2 dx^{'}\right)^{1/2} \leqslant \left(\int\limits_{\Gamma} \left|u_m(x^{'}, \varepsilon) - u(x^{'}, \varepsilon)\right|^2 dx^{'}\right)^{1/2} + \\ + \left(\int\limits_{\Gamma} \left|u_m(x^{'}, \varepsilon) - u_m(x^{'}, 0)\right|^2 dx^{'}\right)^{1/2} + \\ + \left(\int\limits_{\Gamma} \left|u_m(x^{'}, 0) - w(x^{'})\right|^2 dx^{'}\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Устремляя одновременно $m \to +\infty$ и $\varepsilon \to +0$ по множеству $(0, \delta)\backslash E$, мы получим неравенство [1])

$$\operatorname*{ess.lim}_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\Gamma} \left|u(x^{'}, \varepsilon) - w(x^{'})\right|^2 dx^{'} =$$

[1]) Вот обещанное определение ess.lim.

$$= \lim_{\varepsilon \in (0,\delta)\setminus E,\ \varepsilon \to +0} \int\limits_{\Gamma} \left| u(x', \varepsilon) - w(x') \right|^2 \, dx' = 0,$$

где $w(x') = v(x', 0)$.

Лемма доказана.

Замечание 1. Из предельного свойства (1.7) мы имеем

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_{\Gamma} \left| u_m(x', 0) - w(x') \right|^2 \, dx' = 0. \tag{1.11}$$

В силу этого предельного свойства мы можем определить след функции $u(x)$ на $\Gamma$ как такую функцию $w(x')$, что для всякой последовательности $\{u_m(x)\} \subset \mathbb{C}^\infty(\overline{Q}^+)$ такой, что

$$\|u - u_m\|_{H^1(Q^+)} \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty$$

выполнено (1.11). Заметим, что поскольку

$$\mathbb{C}^{(1)}(\overline{Q}^+) \overset{ds}{\subset} H^1(Q^+),$$

то указанную последовательность $\{u_m\}$ можно брать из $\mathbb{C}^{(1)}(\overline{Q}^+)$. Отметим, что это определение следа эквивалентно определению следа из леммы 1.

Замечание 2. Заметим, что если $u(x) \in H^1(Q^+) \cap \mathbb{C}(\overline{Q}^+)$, тогда

$$\gamma u(x', 0) = u(x', 0) \quad \text{для почти всех} \quad x' \in \Gamma.$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $u(x) \in H^1(Q^+) \cap \mathbb{C}(\overline{Q}^+)$ и $u(x,t) = 0$ вблизи верхней крышки и боковой границы $Q^+$. Если, кроме того, $u = 0$ на основании $\Gamma$, то $u(x) \in H_0^1(Q^+)$.*

Доказательство.

*Шаг 1.* Продолжим функцию $u(x)$ на все множество $Q$ нулем:

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad x \in \overline{Q}^+; \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \setminus \overline{Q}^+. \end{cases} \tag{1.12}$$

Прежде всего, докажем, что $\widetilde{u}(x) \in H^1(Q)$. Действительно, очевидно, что измеримая функция $\widetilde{u}(x) \in L^2(Q)$ и, кроме того, в слабом смысле

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} \partial u / \partial x_i, & \text{если} \quad x \in Q^+; \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \setminus Q^+ \end{cases} \tag{1.13}$$

при $i = \overline{1, N-1}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_i} \in L^2(Q) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Осталось доказать, что в слабом смысле

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_N} = \begin{cases} \partial u/\partial x_N, & \text{если} \quad x \in Q^+; \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \backslash Q^+. \end{cases} \tag{1.14}$$

И тогда, ясно, что

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_N} \in L^2(Q).$$

С этой целью нам нужно доказать следующее равенство:

$$\int\limits_Q \widetilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx = -\int\limits_Q \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N} \varphi\, dx$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q)$. Это равенство с учетом определения $\widetilde{u}$ и (1.14) можно записать в следующем виде

$$\int\limits_{Q^+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx = -\int\limits_{Q^+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \varphi\, dx \tag{1.15}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q)$. Для доказательства этого равенства возьмем срезающую функцию $\eta(x_N) \in \mathbb{C}_0^\infty(-1,1)$, удовлетворяющую условиям

$$\eta(x_N) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x_N| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \text{если} \quad |x_N| \geqslant 2\varepsilon, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \eta(x_N) \leqslant 1, \quad |\eta^{'}(x_N)| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}, \quad -1 < x_N < 1.$$

Справедливо следующее представление:

$$\int\limits_{Q^+} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_N}\, dx = \int\limits_{Q^+} u(x) \frac{\partial \left(\eta(x_N)\varphi(x) + (1-\eta(x_N))\varphi\right)}{\partial x_N}\, dx =$$
$$= \int\limits_{Q^+} u(x)\eta^{'}(x_N)\varphi\, dx + \int\limits_{Q^+} u(x)\eta(x_N)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{Q^+} u(x) \frac{\partial ((1-\eta(x_N))\varphi)}{\partial x_N}\, dx \stackrel{def:}{=} I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon. \tag{1.16}$$

Ясно, что в силу определения функции $\eta(x_N)$ и теоремы Лебега имеем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} I_2^\varepsilon = 0.$$

Заметим, что $(1-\eta(x_N))\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q^+)$ и поэтому выражение для $I_3^\varepsilon$ пример вид

$$I_3^\varepsilon = -\int\limits_{Q^+} ((1-\eta(x_N))\varphi(x))\frac{\partial u}{\partial x_N}\,dx \to -\int\limits_{Q^+} \varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x_N}\,dx$$

при $\varepsilon \to +0$. Наконец, поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{Q}^+)$ и $u(x) = 0$ при $x_N = 0$, то имеет место цепочка неравенств

$$|I_1^\varepsilon| \leqslant \int\limits_{Q^+\cap\{x:\,|x_N|\leqslant 2\varepsilon\}} \left|u\eta'(x_N)\right|\,dx \leqslant \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{Q^+\cap\{x:\,|x_N|\leqslant 2\varepsilon\}} |u|\,dx \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$, поскольку $u(x) = 0$ при $x_N = 0$. Итак, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.16), мы получим равенство (1.15).

*Шаг 2.* Теперь нам нужно доказать, что $u(x) \in H_0^1(Q^+)$. С этой целью заметим, что можно рассмотреть срезку функции $\widetilde{u}(x)$ :

$$J_\varepsilon^- \widetilde{u}(x) = \int\limits_Q \omega_\varepsilon(x_1-y_1)\cdots\omega_\varepsilon(x_{N-1}-y_{N-1})\omega_\varepsilon(x_N-y_N-2\varepsilon)\widetilde{u}(y)\,dy,$$

где

$$\omega_\varepsilon(s) = c_1(\varepsilon)\begin{cases}\exp\left(-\varepsilon^2/(\varepsilon^2-s^2)\right), & \text{если} \quad |s| \leqslant \varepsilon;\\ 0, & \text{если} \quad |s| \geqslant \varepsilon.\end{cases}$$

Воспользуемся тем условием, что функция $\widetilde{u}(x)$ равна нулю вблизи боковой границы и на верхней крышке $Q^+$ и на $Q\backslash Q^+$. Тогда получим, что

$$J_\varepsilon^- \widetilde{u}(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\overline{Q}^+).$$

Используя свойства срезки и того, что $\widetilde{u} \in H^1(Q)$ мы получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|J_\varepsilon^-\widetilde{u} - u\|_{H^1(Q^+)} = 0,$$

но тогда согласно определению пространства $H_0^1(Q^+)$ мы получим, что $u(x) \in H_0^1(Q^+)$.

Лемма доказана.

Справедливо следующее следствие:

Следствие. *Пусть $u(x) \in H^1(Q^+) \cap \mathbb{C}(\overline{Q}^+)$ и $\widetilde{u}(x)$ — это продолжение функции $u(x)$*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \textit{если} \quad x \in Q^+;\\ u(x', 0), & \textit{если} \quad x \in Q^- = Q\backslash Q^+.\end{cases}$$

*Тогда $\widetilde{u}(x) \in H^1(Q)$.*

## § 2. След функций из $H^1(\Omega)$

Справедлива основная теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Всякая функция $u(x) \in H^1(\Omega)$ имеет единственный след $\gamma u(x) \in L^2(\partial\Omega)$, понимаемый в следующем смысле:* [1])

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |u_m - \gamma u|^2 \, d\sigma = 0, \tag{2.1}$$

*где $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это произвольная последовательность*

$$\|u - u_m\|_{H^1(\Omega)} \to +0 \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Доказательство.

*Шаг 1.* Поскольку $\partial\Omega$ гладкая граница, то каждая точка $x \in \partial\Omega$ имеет окрестность $U$ со следующим свойством: существует гладкое обратимое отображение $\Psi$, такое что

$$\Psi : Q = \{y \in \mathbb{R}^N : \ |y_i| < 1, \ i = \overline{1, N}\} \to U$$

и

$$\Psi : Q^+ = \{y \in Q : \ y_N > 0\} \to U \cap \Omega, \quad \Psi(\Gamma) = U \cap \partial\Omega,$$

где

$$\Gamma = \{y \in Q : \ y_N = 0\}.$$

Пусть $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это произвольная последовательность, сходящаяся к $u(x) \in H^1(\Omega)$, сильно в $H^1(\Omega)$. Определим следующую последовательность:

$$v_m(y) = (\eta u_m) \circ \Psi(y), \quad \eta(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(U). \tag{2.2}$$

Тогда $v_m(y) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{Q}^+)$ и $v_m = 0$ вблизи верхней крышки и боковой границы $Q^+$ и

$$\lim_{m\to+\infty} \|v_m - (\eta u) \circ \Psi\|_{H^1(Q^+)} = 0. \tag{2.3}$$

Согласно утверждению леммы 1 существует такая функция $h(y) \in$ $\in L^2(\Gamma)$ такая, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\Gamma} \left| v_m(y^{'}, 0) - h(y^{'}) \right|^2 \, dy^{'} = 0. \tag{2.4}$$

---

[1]) Который эквивалентен исходному определению следа вида (1).

Очевидно, что $h = 0$ вблизи границы $\Gamma$. Возвращаясь к переменной $x$, мы получим

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{U\cap\partial\Omega} |(\eta u_m)(\sigma) - w(\sigma)|^2 \, d\sigma = 0, \tag{2.5}$$

где

$$w(x) = h \circ \Phi|_{\Phi_N(x)=0}, \quad y = \Phi(x) = (\Phi_1(x), ..., \Phi_N(x)), \quad \Psi(y) = x.$$

$\Phi(x)$— это обратное отображение для $\Psi(y)$. Отметим, что

$$w(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U \cap \partial\Omega.$$

После продолжения функции $w(x)$ нулем на всю границу $\partial\Omega$ мы получим формулу

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |(\eta u_m)(\sigma) - w(\sigma)|^2 \, d\sigma = 0. \tag{2.6}$$

*Шаг 2*. Поскольку $\partial\Omega$ — это компактное множество существует такое конечное открытое покрытие

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i. \tag{2.7}$$

Пусть $\eta_i(x)$ при $i = \overline{1, n}$ — это разбиение единицы подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^n$. В частности, это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i(x) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

$$\eta_i(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(U_i).$$

Пусть функция $w_i(x)$ — это соответствующая функция построенная по $\eta_i(x)$ на предыдущем шаге, т. е. такая, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |(\eta_i u_m)(\sigma) - w_i(\sigma)|^2 \, d\sigma = 0. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \Rightarrow w(x) \in L^2(\partial\Omega),$$

причем

$$u_m - w = \sum_{i=1}^{n} (\eta_i u_m - w_i), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\partial\Omega}|u_m(\sigma)-w(\sigma)|^2\,d\sigma=0. \tag{2.9}$$

Это доказывает существование следа $\gamma u|_{\partial\Omega}$. Также может быть доказана единственность следа.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Если $u(x)\in H_0^1(\Omega)$, тогда*

$$\gamma u|_{\partial\Omega}=0.$$

Доказательство.

Согласно определению

$$\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)\overset{ds}{\subset}H_0^1(\Omega).$$

Поэтому существует такая последовательность $\{u_m\}\in\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, что

$$u_m\to u\quad\text{сильно в}\quad H^1(\Omega),$$

но тогда в силу результата (2.1) теоремы 1 имеем

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\partial\Omega}|u_m-\gamma u|^2\,d\sigma=\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\partial\Omega}|\gamma u|^2\,d\sigma=\int\limits_{\partial\Omega}|\gamma u|^2\,d\sigma=0, \tag{2.10}$$

Следствие доказано.

## § 3. След функций из $H^1(D)=W_2^{1,1}(D)$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Тогда всякая функция $u(x)\in H^1(D)$* [1] *имеет след $\gamma u$ на $\partial' D$ и $\gamma u\in L^2(\partial' D)$*

Доказательство.

В силу леммы 1 и замечания 1 вытекает, что для всякой последовательности $\{u_m\}\in\mathbb{C}^\infty(\overline{D})$ такой, что

$$\|u_m-u\|_{H^1(D)}\to+0\quad\text{при}\quad m\to+\infty$$

имеем

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,0)-v(x)|^2\,dx=0,$$

[1] Напомним, что $D=\Omega\otimes(0,T)$ и $\partial' D=S\cup\overline{B}$ — это параболическая граница.

где $v(x) \in L^2(\Omega)$ — это след функции $u(x,t) \in H^1(D)$ на нижней крышке $\overline{B} = \overline{\Omega} \otimes \{t = 0\}$ цилиндра $D = \Omega \otimes (0,T)$. Можно доказать, что существует такая единственная [1] функция $w(x,t) \in L^2(\partial' D)$ что,

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_{\partial' D} |u_m - w|^2 \, d\sigma = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. [2] *При условиях теоремы* 2 *если* $u(x,t) \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(D)$, *то* $\gamma u(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in \partial' D$, *а если* $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D)$, *то* $\gamma u(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in S$.

[1] С точностью до множества нулевой меры Лебега.

[2] По поводу используемых обозначений смотри тематическую лекцию 7.

Тематическая лекция 4

# ПРОИЗВОДНАЯ ФРЕШЕ И ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛОВ

В этой лекции мы напомним определение производной Фреше и получим выражения для производных Фреше некоторых важных функционалов и операторов, а также рассмотрим некоторые используемые в дальнейшем неравенства. Кроме того, мы сформулируем и докажем достаточные условия экстремума функционала на слабо замкнутом многообразии.

## § 1. Производная Фреше операторов

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

Дадим определение производной Фреше.

Определение 1. *Оператор $F$ называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в некоторой малой окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление*:

$$F(u+h) = F(u) + F_f^{'}(u)h + \omega_1(u,h), \tag{1.1}$$

*причем*

$$\lim_{\|h\|_1 \to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \tag{1.2}$$

*Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ оператор*

$$F_f^{'}(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

*называется производной Фреше оператора $F$.*

Нами в основном будет рассматриваться такая ситуация, когда $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}$ — это некоторое банахово пространство и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}^1$ относительно нормы $|\cdot|$. А оператор $F(u)$ является вещественным функционалом

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

Тогда равенства (1.1) и (1.2) в этом случае примут следующий вид:

$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi_f^{'}(u), h \right\rangle + \omega_1(u,h), \quad \lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|} = 0, \tag{1.3}$$

где
$$\psi'_f(\cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$
— это производная Фреше функционала $\psi(u)$.

Приведем без доказательства важное свойство производной Фреше.
Теорема 1. *Пусть $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ и $G : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, причем оператор $F$ дифференцируем по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, а оператор $G$ дифференцируем по Фреше в точке $F(u)$. Тогда их композиция*
$$K \equiv G \circ F$$
*дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, причем имеет место следующее равенство*:
$$K'_f(u) = G'_f(F(u))F'_f(u). \tag{1.4}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее обозначение:
$$F(u) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{B}_1; \mathbb{B}_2),$$
которое означает, что оператор $F(u)$ имеет $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ непрерывных на банаховом пространстве $\mathbb{B}_1$ производных Фреше. В частности, для вещественных функционалов $\psi(u)$ используем обозначение $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(k)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$.

Следующее утверждение нужно для получения достаточных условий экстремума функционала.
Лемма 1. *Пусть $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, тогда справедлива следующее равенство*:
$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h), \tag{1.5}$$
*где для $\omega_2(u,h)$ выполнено следующее предельное равенство*:
$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство.
Итак, пусть
$$\psi''_{ff}(u)$$
существует и непрерывна на $\mathbb{B}$. Заметим, что для $\psi'_f(u)$ в силу дифференцируемости по Фреше справедливо следующее равенство:
$$\psi'_f(u+h) = \psi'_f(u) + \psi''_{ff}(u)h + \omega_1(u,h),$$
где
$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_*}{\|h\|} = 0$$

при $u, h \in \mathbb{B}$. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h)-\psi(u)=\int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(u+th)\,dt=\int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u+th), h\right\rangle\,dt=$$
$$=\int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u)+t\psi''_{ff}(u)h, h\right\rangle\,dt+\omega_2(u,h),$$

где

$$\omega_2(u,h)=\int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th),h\rangle\,dt.$$

Значит, отсюда приходим к выражению

$$\psi(u+h)-\psi(u)=\left\langle \psi'_f(u),h\right\rangle+\left\langle \psi''_{ff}(u)h,h\right\rangle\int\limits_0^1 t\,dt+\omega_2(u,h)=$$
$$=\left\langle \psi'_f(u),h\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(u)h,h\right\rangle+\omega_2(u,h),$$

где для $\omega_2(u,h)$ справедливо равенство

$$\omega_2(u,h)=\int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th),h\rangle\,dt.$$

Стало быть, приходим к неравенству

$$|\omega_2(u,h)|\leqslant \int\limits_0^1 \|\omega_1(u,th)\|_*\,\|h\|\,dt.$$

Поэтому справедливо следующее предельное неравенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2}\leqslant \lim_{\|h\|\to 0}\int\limits_0^1 \frac{\|\omega_1(u,th)\|_*}{\|h\|}\,dt=0.$$

Тем самым, формулы (1.5) и (1.6) доказаны.

Лемма доказана.

Необходимость введения понятия производной Фреше функционала прежде всего необходимо для получения необходимых и достаточных условий экстремума функционала на банаховом пространстве $\mathbb{B}$.

## § 2. Достаточные условия экстремума функционала из $\mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$

Теперь мы в состоянии доказать один результат о необходимом условии экстремума функционала. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть функционал $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, тогда необходимыми условиями минимума (максимума) в этой точке $\widehat{u}$ являются следующие*

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi''_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ \ (\leqslant 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{B}. \tag{2.1}$$

Доказательство.

Рассмотрим разложение функционала $\psi(u)$ в окрестности точки экстремума $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ :

$$\psi(\widehat{u}+h) = \psi(\widehat{u}) + \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u}, h).$$

Прежде всего докажем следующее равенство:

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0,$$

□ Действительно, пусть

$$\psi'_f(\widehat{u}) \neq 0,$$

тогда, с одной стороны, при достаточно малом по норме $\|h\| > 0$ знак разности в точке минимума (максимума)

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant 0 (\leqslant 0).$$

С другой стороны,

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + o(\|h\|).$$

Поэтому если при данном малом по норме $h \in \mathbb{B}$ имеет место неравенство

$$\left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle > 0,$$

то меняя $h$ на $-h$, мы получим, что при малом по норме $h$, например, в точке минимума имеет место неравенства

$$0 \leqslant \psi(\widehat{u}-h) - \psi(\widehat{u}) \backsimeq -\left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle < 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0. \quad \boxtimes$$

Поэтому приходим к следующему равенству:

$$\psi(\widehat{u}+h)-\psi(\widehat{u})=\frac{1}{2}\left\langle\psi''_{ff}(\widehat{u})h,h\right\rangle+\omega_2(\widehat{u},h). \tag{2.2}$$

Предположим, что $\widehat{u}$ — это точка локального минимума (максимума), но для некоторого $h_1 \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle\psi''_{ff}(\widehat{u})h_1,h_1\right\rangle<0\ (>0).$$

Тогда для $h=\varepsilon h_1$ при $\varepsilon>0$ имеет место следующее выражение:

$$\left\langle\psi''_{ff}(\widehat{u})h,h\right\rangle=\varepsilon^2\left\langle\psi''_{ff}(\widehat{u})h_1,h_1\right\rangle<0\ (>0).$$

Теперь, выбирая $\varepsilon>0$ сколь угодно малым, получим, что в любой окрестности точки $\widehat{u}\in\mathbb{B}$ найдется точка $\varepsilon h_1\in\mathbb{B}$, что

$$\psi(\widehat{u}+\varepsilon h_1)-\psi(\widehat{u})<0\ (>0),$$

т. е. в точке $\widehat{u}\in\mathbb{B}$ нет минимума (максимума). Следовательно, необходимым условием минимума (максимума) в точке $\widehat{u}\in\mathbb{B}$ есть условие

$$\left\langle\psi''_{ff}(\widehat{u})h,h\right\rangle\geqslant 0\ (\leqslant 0)\quad\text{для всех}\quad h\in\mathbb{B}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в отличие от конечномерного анализа условие

$$\left\langle\psi''_{ff}(\widehat{u})h,h\right\rangle\geqslant 0\ (\leqslant 0)\quad\text{для всех}\quad h\in\mathbb{B}.$$

не является достаточным условием минимума (максимума). Действительно, имеет место следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной supremum–нормы:

$$\psi(u)=\int\limits_0^1 u^2(x)(x-u(x))\,dx.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h)=\int\limits_0^1(u+h)^2(x-u-h)\,dx=\int\limits_0^1 u^2(x-u)\,dx+$$
$$+\int\limits_0^1\left(2ux-3u^2\right)h\,dx+\int\limits_0^1(x-3u)h^2\,dx-\int\limits_0^1 h^3\,dx.$$

Из этого равенства приходим к выводу, что

$$\psi'_f(u) = 0$$

на двух функциях

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad u(x) = \frac{2}{3}x.$$

Заметим теперь, что

$$\left\langle \psi''_{ff}(0)h, h \right\rangle = 2\int\limits_0^1 h^2(x)x\,dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1],$$

причем,

$$\psi(0) = 0,$$

т. е. на функции $u(x) = 0$ выполнены все необходимые условия локального минимума, но, тем не менее, на функции $u(x) = 0$ функционал не достигает локального минимума. Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x, & \text{при} \quad x \in [0,\varepsilon]; \\ 0, & \text{при} \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь вычислим норму этой функции

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_\varepsilon(x)| = \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. в любой окрестности функции $u(x) = 0 \in \mathbb{C}[0,1]$ содержится функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$. Теперь вычислим значение функционала $\psi(\cdot)$ на функции $u_\varepsilon(x)$. Действительно, имеем

$$\psi(u_\varepsilon(x)) = \int\limits_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,(x - u_\varepsilon(x)) = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0 = \psi(0).$$

Тем самым, минимум у функционала $\psi(u)$ на функции $u(x) = 0$ не достигается. И это связано с тем, что, вообще говоря, нельзя не учитывать остаточные слагаемые, входящие в $\omega_2(u,h)$.

Тем не менее, можно сформулировать теорему о достаточных условиях экстремума.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$. *Тогда при условиях*

(i) $\psi'_f(\widehat{u}) = 0$;

(ii) $\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant c\|h\|^2$ ($\leqslant -c\|h\|^2$) *для всех* $h \in \mathbb{B}$ *и* $c = c(\widehat{u}) > 0$

*в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ у функционала $\psi(\widehat{u})$ достигается минимум (максимум).*

Доказательство.

Докажем достаточность условий для минимума функционала $\psi(u)$ в точке $\widehat{u}$, поскольку достаточность условий для максимума проверяется аналогичным образом. Действительно, в силу условий теоремы имеет место представление в окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ :

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(u, h). \tag{2.3}$$

Кроме того, поскольку имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0,$$

то при достаточно малом $\|h\|$ для заданного $c > 0$ будет иметь место неравенство

$$|\omega_2(u,h)| < \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Тогда из (2.3) получим неравенство для таких $h \in \mathbb{B}$ :

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant \frac{1}{2} \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle - \frac{c}{4}\|h\|^2 \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 - \frac{c}{4}\|h\|^2 = \frac{c}{4}\|h\|^2,$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ достигается минимум у функционала $\psi$.

Теорема доказана.

## § 3. Слабо коэрцитивные и слабо полунепрерывные функционалы

Дадим определения *слабо замкнутого подмножества*, *слабо полунепрерывного снизу функционала* и *слабо коэрцитивного функционала*.

Определение 2. *Множество $M \subset \mathbb{B}$ называется слабо замкнутым, если для всякой последовательности $\{u_n\} \subset M$ такой, что*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u \in M.$$

Определение 3. *Функционал $\psi(u)$ называется слабо полунепрерывным снизу на слабо замкнутом множестве $M \subset \mathbb{B}$, если для всякой последовательности $\{u_n\} \subset M$*

$$u_n \rightharpoonup u \in M \Rightarrow \psi(u) \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \psi(u_n).$$

Определение 4. *Функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$, *удовлетворяющий условию*

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \psi(u) = \infty,$$

*называется слабо коэрцитивным.*

Теорема 3. *Пусть* $\mathbb{B}$ — *это рефлексивное банахово пространство.* [1]) *Тогда*

(i) *Если* $\mathrm{M} \subset \mathbb{B}$ *слабо замкнуто в* $\mathbb{B}$;

(ii) *Если функционал* $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ *слабо коэрцитивен на* $\mathbb{B}$;

(iii) *Если функционал* $\psi(u)$ *является слабо полунепрерывным снизу на* $M$,

*то он ограничен снизу на* $\mathrm{M}$ *и достигает своего минимума на* $\mathrm{M}$ :

$$\psi(u_0) = \inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u) > -\infty.$$

Доказательство.

*Шаг 1.* Пусть

$$d > \inf_{u\in M} \psi(u).$$

Поскольку функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным на $\mathbb{B}$ найдется такое $R > 0$, что

$$\psi(u) \geqslant d \quad \text{для всех} \quad u \in B_R = \{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \geqslant R\}.$$

Следовательно,

$$\inf_{u\in M} \psi(u) = \inf_{u\in M\cap B_R} \psi(u).$$

*Шаг 2.* Пусть

$$\alpha_0 = \inf_{u\in\mathrm{M}} \psi(u)$$

и $\{u_n\} \subset \mathrm{M}$ — это минимизирующая последовательность, которая, очевидно, начиная с некоторого номера принадлежит множеству $B_R \cap \cap M$. Это значит, что

$$\|u_n\| \leqslant R \quad \text{для всех} \quad n \geqslant n_0.$$

Но тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}$ найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_n}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_n} \rightharpoonup u_0 \in B_R,$$

но при этом в силу слабой замкнутости $M$ мы получим, что $u_0 \in M$. Поэтому подпоследовательность

$$u_{n_n} \rightharpoonup u_0 \in M \cap B_R.$$

[1]) Поэтому, в частности, банахово пространство $\mathbb{B}$ в силу рефлексивности является слабо замкнутым.

В силу слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала $\psi$ на M приходим к выводу, что

$$\psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_{n_n}), \quad u_0 \in M \cap B_R.$$

Таким образом, приходим к выводу, что имеет место цепочка неравенств:

$$\inf_{u\in \mathrm{M}} \psi(u) \leqslant \psi(u_0) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_{n_n}) = \lim_{n\to+\infty} \psi(u_n) = \inf_{u\in \mathrm{M}} \psi(u),$$

из которой следует, что

$$\inf_{u\in \mathrm{M}} \psi(u) = \psi(u_0) > -\infty.$$

Теорема доказана.

## § 4. Важные вспомогательные неравенства

Пусть вектора $a, b \in \mathbb{R}^N$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$ обозначим через $(\cdot,\cdot)$. Справедливо следующее утверждение:
Лемма 3. *Справедливо тождество*

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2 + \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} - |a|^{p-2}\right)\left(|b|^2 - |a|^2\right). \quad (4.1)$$

Доказательство.

Перепишем равенство (4.1) в виде

$$I_1 = I_2.$$

С одной стороны, имеет место цепочка равенств

$$I_1 = \left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) = |b|^p + |a|^p - \left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)(a,b).$$

С другой стороны, имеем

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2 + \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} - |a|^{p-2}\right)\left(|b|^2 - |a|^2\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)\left(|b|^2 + |a|^2 - 2(a,b)\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} - |a|^{p-2}\right)\left(|b|^2 - |a|^2\right) = \\ = |b|^p + |a|^p - \left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)(a,b).$$

Лемма доказана.

Как мы видим из тождества (4.1) есть критическое для дальнейшего исследования значение $p = 2$. Справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 4. *Справедливы следующие неравенства*: [1])

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2 \geqslant 2^{2-p}|b-a|^p \quad \textit{при} \quad p \geqslant 2, \qquad (4.2)$$

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2 \quad \textit{при} \quad p \leqslant 2, \qquad (4.3)$$

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant \gamma(p)|b-a|^p \quad \textit{при} \quad p \leqslant 2, \qquad (4.4)$$

*где постоянная* $\gamma(p) > 0$. *Наконец, для любого* $1 < p < +\infty$ *имеет место следующие неравенства*:

$$c_p\left(|a| + |b|\right)^{p-2}|a-b|^2 \leqslant \left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant$$
$$\leqslant C_p\left(|a| + |b|\right)^{p-2}|a-b|^2 \qquad (4.5)$$

*для некоторых постоянных* $0 < c_p$ *и* $0 < C_p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

*Шаг 1*. Рассмотрим сначала случай $p \geqslant 2$. В этом случае функция $f(t) = t^{p-2}$ при $t \in \mathbb{R}^1_+$ является строго возрастающей и поэтому имеем

$$\left(|t_1|^{p-2}t_1 - |t_2|^{p-2}t_2\right)(t_1 - t_2) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t_1, t_2 \in {\mathbb{R}_+}^1.$$

Поэтому в силу тождества (4.1) имеем

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2. \qquad (4.6)$$

Наконец, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|b-a|^p = |b-a|^2|b-a|^{p-2} \leqslant |b-a|^2\left(|b-a|^2\right)^{(p-2)/2} =$$
$$= |b-a|^2\left(|b|^2 - 2(a,b) + |a|^2\right)^{(p-2)/2} \leqslant$$
$$\leqslant |b-a|^2 2^{(p-2)/2}\left(|b|^2 + |a|^2\right)^{(p-2)/2} \leqslant$$
$$\leqslant |b-a|^2 2^{(p-2)/2} 2^{(p-2)/(2)-1}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right) =$$

[1]) Неравенства (4.4) и (4.5) мы оставили без доказательства.

$$= 2^{p-3}|b-a|^2 \left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right).$$

Осталось применить это итоговое неравенство к неравенству (4.6) и получить оценку

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \geqslant 2^{2-p}|b-a|^p.$$

*Шаг 2.* Заметим, что при $p < 2$ функция $f(t) = t^{p-2}$ при $t \in \mathbb{R}^1_+$ является строго убывающей и поэтому

$$\left(t_1^{p-2} - t_2^{p-2}\right)(t_1 - t_2) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}^1_+.$$

Следовательно, из тождества (4.1) мы получим неравенство

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2.$$

В случае $p = 2$ имеем равенство

$$\left(|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a, b-a\right) = \frac{1}{2}\left(|b|^{p-2} + |a|^{p-2}\right)|b-a|^2.$$

Лемма доказана.

## § 5. Производные Фреше некоторых функционалов

Прежде всего нас интересует производные Фреше следующих функционалов: [1])

$$\psi_1(u) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |u|^p\,dx \quad \text{и} \quad \psi_2(u) = \frac{1}{p}\int\limits_\Omega |D_x u|^p\,dx \tag{5.1}$$

Справедливо следующее утверждение:
Лемма 5. *Пусть $p \in (1, +\infty)$. Тогда производные Фреше функционалов $\psi_1(u)$ и $\psi_2(u)$, действующих*

$$\psi_1(u) : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1, \quad \psi_2(u) : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1,$$

*равны*

$$\psi'_{1f}(u) = |u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega), \tag{5.2}$$

$$\psi'_{2f}(u) = -\Delta_p u \stackrel{def:}{=} -\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2}D_x u) \in W^{-1,p'}(\Omega). \tag{5.3}$$

[1]) Напоминаем, что $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Сначала вычислим производную Фреше функционала $\psi_1(u)$. При этом нужно раздельно рассмотреть два случая $p \geqslant 2$ и $p \in (1,2)$.

В случае $p \geqslant 2$ воспользуемся формулой Тейлора с остаточным слагаемым в форме Лагранжа и получим следующее равенство:

$$|u+h|^p = |u|^p + p|u|^{p-2}uh + \frac{p(p-1)}{2}|\xi|^{p-2}h^2, \quad u < \xi < u+h, \tag{5.4}$$

причем в этой формуле имеем

$$u = u(x) \in L^p(\Omega), \quad h = h(x) \in L^p(\Omega) \Rightarrow \xi = \xi(x) \in L^p(\Omega).$$

Теперь разделим обе части равенства (5.4) на $p$ и проинтегрируем по $x \in \Omega$. В результате получим равенство

$$\psi_1(u+h) = \psi_1(u) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx + \omega_1(u,h), \tag{5.5}$$

где

$$\omega_1(u,h) = \frac{p-1}{2}\int\limits_{\Omega} |\xi(x)|^{p-2}h^2(x)\,dx. \tag{5.6}$$

Заметим, что в силу неравенства Гельдера с показателями

$$q_1 = \frac{p}{p-2}, \quad q_2 = \frac{p}{2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1,$$

примененного к выражению $\omega_1(u,h)$, мы получим цепочку выражений:

$$|\omega_1(u,h)| \leqslant \frac{p-1}{2}\left(\int\limits_{\Omega} |\xi(x)|^p\,dx\right)^{(p-2)/p}\left(\int\limits_{\Omega} |h(x)|^p\,dx\right)^{2/p} =$$

$$= c_1\|h\|_p^2 \Rightarrow \lim_{\|h\|_p \to +0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|_p} = 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx = \left\langle \psi'_{1f}(u), h\right\rangle \Rightarrow \psi'_{1f}(u) = |u|^{p-2}u.$$

Теперь мы рассмотрим случай $p \in (1,2)$. В этом случае мы рассмотрим формулу Лагранжа

$$|u+h|^p = |u|^p + p|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h)h =$$

$$= |u|^p + p|u|^{p-2}uh + \omega(u,h), \quad \vartheta \in (0,1), \quad (5.7)$$

$$\omega(u,h) = \frac{p}{\vartheta}\left(|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h) - |u|^{p-2}u\right)\vartheta h.$$

Воспользуемся неравенством (4.4) и получим следующую оценку:

$$0 \leqslant \left(|u+\vartheta h|^{p-2}(u+\vartheta h) - |u|^{p-2}u\right)\vartheta h \leqslant \gamma(p)|\vartheta h|^p.$$

Используя эту оценку, получим

$$|\omega(u,h)| \leqslant p|h|^p|\vartheta|^{p-1} \leqslant p|h|^p. \quad (5.8)$$

Теперь разделим обе части равенства (5.7) на $p$ и проинтегрируем получившееся равенство по $x \in \Omega$. В результате приходим к равенству

$$\psi_1(u+h) = \psi_1(u) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\,dx + \omega_1(u,h), \quad (5.9)$$

где

$$\omega_1(u,h) = \int\limits_{\Omega} \omega(u(x),h(x))\,dx.$$

В силу (5.8) справедливо неравенство ($p > 1$)

$$|\omega_1(u,h)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |h(x)|^p\,dx = \|h\|_p^p \Rightarrow \lim_{\|h\|_p \to +0} \frac{|\omega_1(u,h)|}{\|h\|_p} = 0.$$

*Шаг 2.* Вычислим теперь производную Фреше функционала $\psi_2(u)$. При этом нужно воспользоваться соответствующими формулами Тейлора для вещественных функций многих переменных с остаточными слагаемыми в форме Лагранжа. Рассуждения проведенные на шаге 1 проходят почти в точностью и здесь. Нужно лишь воспользоваться при $p \in (1,2)$ формулой (4.4). Далее нужно воспользоваться следующим равенством для обобщенного оператора $p-$Лапласиана [1)]

$$\int\limits_{\Omega} \left(|D_x u|^{p-2}D_x u, D_x h(x)\right)\,dx = \langle -\Delta_p u, h\rangle \quad \text{для всех} \quad h(x) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

[1)] Смотри тематическую лекцию 3.

Тематическая лекция 5

# ПОЛУЛИНЕЙНОЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой лекции мы рассмотрим первый базовый оператор эллиптического типа следующего вида:

$$-\Delta u + f(x, u),$$

где функция $f(x, u)$ принадлежит к так называемому классу *каратеодориевых* функций.

## § 1. Оператор Немыцкого

Прежде чем рассматривать общее определение оператора Немыцкого, мы рассмотрим следующую нелинейную функцию:

$$|u|^{q-2}u \quad \text{при} \quad q > 1. \tag{1.1}$$

Ясно, что если функция $u(x) \in L^q(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область с гладкой границей, то оператор

$$F(u) \overset{def:}{=} |u(x)|^{q-2}u(x) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega), \quad q' = \frac{q}{q-1}. \tag{1.2}$$

Кроме того, $F(u) \in \mathbb{C}(L^q(\Omega); L^{q'}(\Omega))$, т. е. для любой последовательности $\{u_m\} \in L^q(\Omega)$ такой, что

$$u_m(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^q(\Omega)$$

при $m \to +\infty$, то

$$F(u_m) \to F(u) \in L^{q'}(\Omega) \quad \text{сильно в} \quad L^{q'}(\Omega)$$

при $m \to +\infty$. В частности, при $q \geqslant 2$ это утверждение получается непосредственно, если воспользоваться очевидным неравенством

$$\left| |u_1|^{q-2}u_1 - |u_2|^{q-2}u_2 \right| \leqslant (q-1) \max\left\{ |u_1|^{q-2}, |u_2|^{q-2} \right\} |u_1 - u_2| .$$

Осталось возвести обе части этого неравенства в степень $q'$ и для правой части воспользоваться неравенством Гельдера с показателями

$$q_1 = q - 1, \quad q_2 = \frac{q-1}{q-2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1.$$

И в результате получить следующую оценку:

$$\int\limits_{\Omega} |F(u_1) - F(u_2)|^{q'} \, dx \leqslant$$
$$\leqslant (q-1)^{q'} \max\left\{ \left( \int\limits_{\Omega} |u_1|^q \, dx \right)^{(q-2)/(q-1)}, \left( \int\limits_{\Omega} |u_2|^q \, dx \right)^{(q-2)/(q-1)} \right\} \times$$
$$\times \left( \int\limits_{\Omega} |u_1 - u_2|^q \, dx \right)^{1/(q-1)}.$$

Откуда сразу же получаем неравенство

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{q'} \leqslant (q-1) \max\left\{ \|u_1\|_q^{q-2}, \|u_2\|_q^{q-2} \right\} \|u_1 - u_2\|_q.$$

Из этой оценки сразу же получаем, что $F(u) \in \mathbb{C}(L^q(\Omega); L^{q'}(\Omega))$ при $q \geqslant 2$.

Это важное свойство наследует *оператор Немыцкого*. Дадим определение.

Определение 1. *Функция $f(x,u)$ называется каратеодориевой, если*

(i) *для всех $u \in \mathbb{R}^1$ функция $f(x,u)$ измерима по Лебегу по $x \in \Omega$;*

(ii) *для почти всех $x \in \Omega$ функция $f(x,u)$ непрерывна по $u \in \mathbb{R}^1$.*

Определение 2. *Оператор*

$$N_f(u) \stackrel{def:}{=} f(x, u(x)),$$

*порожденный каратеодориевой функцией $f(x,u)$ носит название оператора Немыцкого.*

Важное свойство нелинейной функции $F(u) = |u|^{q-2}u$ быть непрерывным отображением из $\mathbb{C}(L^q(\Omega); L^{q'}(\Omega))$ наследует оператор Немыцкого. А именно, справедлива важная теорема М. А. Красносельского об операторе Немыцкого.

Теорема Красносельского. *Для того чтобы оператор Немыцкого $N_f(u)$, порожденный каратеодориевой функцией $f(x,u)$ ($\Omega$ — это ограниченная область), был непрерывным отображением из $\mathbb{C}(L^p(\Omega); L^q(\Omega))$ при $p, q \geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $u \in \mathbb{R}^1$ и всех $x \in \Omega$ было выполнено неравенство*

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{p/q}, \tag{1.3}$$

*где $a, b > 0$ — это некоторые постоянные.*

Доказательство необходимости достаточно сложное. Хотя доказательство достаточности относительно просто. Однако, мы не будем доказывать эту теорему.

Заметим, что оператор Немыцкого при выполнении условия (1.3) является потенциальным оператором, т. е. существует функционал

$$\psi(u) : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^1.$$

Действительно, справедлива следующая лемма:
Лемма 1. *Пусть каратеодориева функция $f(x,u)$ удовлетворяет следующему неравенству*:

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{p/p'} \quad \textit{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \textit{и} \quad p \in (1,+\infty). \tag{1.4}$$

*Тогда функционал*

$$\psi(u) = \int\limits_{\Omega} F(x,u(x))\,dx, \quad F(x,z) = \int\limits_0^z f(x,\xi)\,d\xi, \tag{1.5}$$

*является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство*:

$$\psi_f'(u) = N_f(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in L^p(\Omega) \quad \textit{при} \quad p \in (1,+\infty). \tag{1.6}$$

Доказательство.

Для потенциальной функции $F(x,u)$, определенной формулой (1.5), имеют место следующие неравенства:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int\limits_0^{u(x)} f(x,\xi)\,d\xi \right| \leqslant a|u| + \frac{b}{p}|u|^p \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|a|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{b}{p}|u|^p = a_1 + b_1|u|^p, \tag{1.7}$$

где $a_1, b_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x,u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (1.7) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (1.5) является ограниченным и непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$. Действительно, в силу оценки (1.7) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |F(x, u(x))|\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} a_1\, dx + b_1 \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx \leqslant a_2 + b_2 \|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u, v) \equiv \psi(u + v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u, v \in L^p(\Omega).$$

$$|\omega(u, v)| \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} [F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x))]\, dx - \int\limits_{\Omega} N_f(u)(x) v(x)\, dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x)) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u(x) + tv(x))\, dt = \int\limits_0^1 f(x, u(x) + tv(x)) v(x)\, dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u, v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega} dx\, |N_f(u + tv)(x) - N_f(u)(x)|\, |v(x)| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p \to 0} \frac{|\omega(u, v)|}{\|v\|_p} \leqslant \lim_{\|v\|_p \to 0} \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'} = 0.$$

Лемма доказана.

## § 2. Постановка задачи Дирихле для уравнения $-\Delta u + f(x,u) = g(x)$

Прежде всего приведем классическую постановку задачи Дирихле с однородными граничными условиями в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Действительно, нужно найти решение $u(x) \in \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ следующей задачи:

$$-\Delta u + f(x,u) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{2.2}$$

где $g(x) \in \mathbb{C}(\Omega)$, $f(x,u) \in \mathbb{C}(\Omega \otimes \mathbb{R}^1)$. Для того чтобы предложить слабую постановку задачи Дирихле (2.1), (2.2) нужно рассмотреть обобщенный оператор Лапласа. Действительно, в соответствии со второй тематической лекцией оператор Лапласа расширяется до оператора

$$\Delta = \operatorname{div}(D_x \cdot) : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

При этом

$$D_x : H_0^1(\Omega) \to \underbrace{L^2(D) \otimes L^2(D) \otimes \cdots \otimes L^2(D)}_{N},$$

т. е. оператор градиента $D_x$ понимается как строка $(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$, состоящая из слабых частных производных, которые понимаются в смысле равенства

$$\int\limits_{\Omega} \partial_{x_k} v(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} v(x)\partial_{x_k}\varphi(x)\,dx, \quad v(x) \in H_0^1(\Omega)$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, где $\partial_{x_k} v(x)$ — это слабая производная, а $\partial_{x_k}\varphi(x)$ — классическая. Наконец, оператор div понимается в смысле производных обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$

$$\langle \operatorname{div} \xi, \varphi(x) \rangle \stackrel{def:}{=} -\int\limits_{\Omega} (\xi(x), D_x\varphi(x))\,dx$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$, $D_x\varphi(x)$ — слабый градиент,

$$\xi(x) \in \underbrace{L^2(D) \otimes L^2(D) \otimes \cdots \otimes L^2(D)}_{N},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$. Итак,

$$\langle \operatorname{div}(D_x u(x)), \varphi(x) \rangle \stackrel{def:}{=} -\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x\varphi(x))\,dx, \tag{2.3}$$

где $D_x$ — оператор слабого градиента. В силу этого оправдано следующее определение слабого решения задачи Дирихле (2.1), (2.2).

Определение 3. *Функция $u(x) \in H^1_0(\Omega)$ называется слабым решением задачи Дирихле* (2.1), (2.2), *если для всех $\varphi(x) \in H^1_0(\Omega)$ выполнено равенство*

$$\langle -\Delta u(x) + N_f(u) - g(x), \varphi(x)\rangle = 0, \tag{2.4}$$

*где $g(x) \in H^{-1}(\Omega)$, а для каратеодориевой функции $f(x,u)$ выполнено неравенство* (1.4), *причем*

$$1 < p \leqslant \frac{2N}{N-2} \quad \text{\textit{при}} \quad N \geqslant 3. \tag{2.5}$$

Замечание 3. Неравенство (2.5) необходимо для того, чтобы имело место плотное и непрерывное вложение [1])

$$H^1_0(\Omega) \overset{ds:}{\subset} L^p(\Omega) \Rightarrow L^{p'}(\Omega) \overset{ds:}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

В этом случае оператор Немыцкого $N_f(u)$, порожденный функцией $f(x,u)$, действует как

$$N_f(u) : H^1_0(\Omega) \overset{ds:}{\subset} L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega) \overset{ds:}{\subset} H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3.$$

Поэтому оператор

$$-\Delta u + f(x,u) - g(x) \in H^{-1}(\Omega).$$

Наконец, отметим, что равенство (2.4) эквивалентно равенству

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x\varphi(x))\, dx + \int\limits_{\Omega} f(x,u(x))\varphi(x)\, dx = \langle g(x), \varphi(x)\rangle \tag{2.6}$$

для всех $\varphi(x) \in H^1_0(\Omega)$.

## § 3. Метод компактности

В этом параграфе мы при некоторых условиях на нелинейную функцию $f(x,u)$ докажем разрешимость в слабом смысле задачи Дирихле (2.1), (2.2). С этой целью мы воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методом компактности.

[1]) Т. е. оператор вложения $J_p : H^1_0(\Omega) \to L^p(\Omega)$ является, в частности, сильно непрерывным.

Итак, рассмотрим линейное всюду плотное семейство функций $\{w_j\} \subset H_0^1(\Omega)$, в качестве которой можно взять систему собственных функций обобщенного оператора Лапласа в области $\Omega$

$$\langle \Delta w_j(x) + \lambda_j w_j(x), \varphi(x) \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H_0^1(\Omega), \quad j \in \mathbb{N},$$

ортонормированную условием

$$\int_\Omega (D_x w_j, D_x w_k(x))\, dx = \delta_{jk}.$$

Пусть

$$u_m(x) \overset{def:}{=} \sum_{k=1}^m c_{mk} w_k(x), \quad c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}) \in \mathbb{R}^m. \tag{3.1}$$

Дадим определения Галеркинской системы уравнений для рассматриваемой задачи.

Определение 4. *Строка $c_m \in \mathbb{R}^m$ называется решением галеркинской системы уравнений, соответствующей слабому решению задачи Дирихле* (2.4), *если $c_m = (c_{m1}, ..., c_{mm})$ является решением системы $m$ алгебраических уравнений*

$$\langle -\Delta u_m(x) + N_f(u_m) - g(x), w_j(x) \rangle = 0 \quad \textit{при} \quad j = \overline{1, m}. \tag{3.2}$$

Замечание 4. Заметим, что систему (3.2) $m \in \mathbb{N}$ алгебраических уравнений можно переписать в следующем виде:

$$\int_\Omega (D_x u_m(x), D_x w_j(x))\, dx + \int_\Omega f(x, u_m(x)) w_j(x)\, dx = \langle g(x), w_j(x) \rangle \tag{3.3}$$

при $j = \overline{1, m}$.

Предположим, что каратеодориева функция $f(x, u)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(x, u)| \leqslant a + b|u|^{q-1}, \quad f(x, u)u \geqslant a_1|u|^q - a_2 \quad \text{при} \quad q > 1, \tag{3.4}$$

где $a, b > 0$ и $a_1 > 0$, $a_2 \geqslant 0$.

Для доказательства существования решения $c_m \in \mathbb{R}^m$ системы галеркинских приближений (3.2) нам необходим результат — *лемма об остром угле.*

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее условию*

$$(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = R.$$

*Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, что $|a| \leqslant R$ и $\mathbb{T}a = 0$.*

Доказательство.

Допустим, что

$$\mathbb{T}a \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{K}_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|},$$

является непрерывным отображением из $K_R$ в $K_R$. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(\mathbb{T}a, a) = -R|\mathbb{T}a| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Система галеркинских приближений* (3.3) *имеет решение* $c_m \in \mathbb{R}^m$ *для каждого* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Рассмотрим следующий оператор:

$$T(c_m) = (T_1(c_m), ..., T_m(c_m)), \tag{3.5}$$

$$T_j(c_m) = \int\limits_{\Omega} (D_x u_m(x), D_x w_j(x)) \, dx + \\ + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) w_j(x) \, dx - \langle g(x), w_j(x) \rangle. \tag{3.6}$$

Заметим, что в силу выбора системы $\{w_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$T_j(c_m) = c_{mj} + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) w_j(x) \, dx - \langle g(x), w_j(x) \rangle.$$

Отсюда в силу второго неравенства в (3.4) получим

$$(T(c_m), c_m) = \sum_{j=1}^{m} T_j(c_m) c_{mj} = \\ = |c_m|^2 + \int\limits_{\Omega} f(x, u_m(x)) u_m(x) \, dx - \langle g(x), u_m(x) \rangle \geqslant$$

$$\geqslant |c_m|^2 + a_1 \int\limits_\Omega |u_m|^q \, dx - a_2|\Omega| - \|g\|_* \|D_x u_m\|_2. \quad (3.7)$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$\|D_x u_m\|_2 \leqslant K|c_m|, \quad K > 0,$$

где $K = K(m)$ и не зависит от $c_m$, в силу которого получим

$$(T(c_m), c_m) \geqslant |c_m|^2 - a_3 - K_1|c_m| \Rightarrow \exists\, R > 0,\ |c_m| = R,\ (T(c_m), c_m) \geqslant 0.$$

В силу леммы об остром угле найдется такое $c_m \in \mathbb{R}^m$ в замкнутом шаре $|c_m| \leqslant R$, что

$$T(c_m) = 0 \Rightarrow T_j(c_m) = 0 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}.$$

Лемма доказана.

Теперь нам нужно получить априорную оценку для галеркинских приближений, чтобы затем воспользоваться *методом компактности*. Справедлива следующая лемма:

Лемма 4. *Найдется такая постоянная* $K_2 > 0$, *не зависящая от* $m \in \mathbb{N}$, *что имеет место априорная оценка*

$$\|D_x u_m\|_2 \leqslant K_2 < +\infty \quad (3.8)$$

*для всех* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Умножим обе части равенства (3.3) на $c_{mj}$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1, m}$. В результате получим следующее равенство:

$$\int\limits_\Omega |D_x u_m(x)|^2 \, dx + \int\limits_\Omega f(x, u_m(x)) u_m(x) \, dx = \langle g(x), u_m(x) \rangle. \quad (3.9)$$

Воспользуемся теперь вторым неравенством в (3.4) и получим неравенство

$$\int\limits_\Omega |D_x u_m(x)|^2 \, dx + a_1 \int\limits_\Omega |u_m(x)|^q \, dx - a_2 \leqslant \|g\|_* \|D_x u_m\|_2,$$

из которого легко выводится оценка (3.8) с некоторой постоянной $K_2$, не зависящей от $m \in \mathbb{N}$. Действительно, имеем

$$\|D_x u_m\|_2^2 \leqslant a_2 + \|g\|_* \|D_x u_m\|_2 \leqslant a_2 + \frac{1}{2}\|D_x u_m\|_2^2 + \frac{1}{2}\|g\|_*^2.$$

Откуда получаем искомую оценку

$$\|D_x u_m\|_2 \leqslant K_2 \stackrel{def:}{=} \left(2a_2 + \|g\|_*^2\right)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем сделать следующее утверждение, как следствие *компактного вложения* пространства $H_0^1(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ при условии

$$1 < q < \frac{2N}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3. \tag{3.10}$$

Лемма 5. *Существует такая подпоследовательность* $\{u_{m_n}\} \subset \subset \{u_m\}$, *что*

$$u_{m_n}(x) \rightharpoonup u(x) \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{слабо в} \quad H_0^1(\Omega), \tag{3.11}$$

$$u_{m_n}(x) \to u(x) \in H_0^1(\Omega) \quad \textit{сильно в} \quad L^q(\Omega) \tag{3.12}$$

*при условиях* (3.10).

Доказательство.

В силу рефлексивности банахова пространства $H_0^1(\Omega)$ и результата (3.8) вытекает существование такой подпоследовательности $\{u_{m_n}\} \subset \subset \{u_m\}$, что имеет место предельное свойство (3.11). А в силу вполне непрерывного вложения [1] $H_0^1(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$ при указанных условиях на $q$ имеет место предельное свойство (3.12).

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии произвести предельный переход в равенстве (3.3). Действительно, в силу (3.11) имеем

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u_m(x), D_x w_j(x))\, dx \to \int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x w_j(x))\, dx$$

при $m \to +\infty$ и для всех $j \in \mathbb{N}$. А в силу теоремы М. А. Красносельского об операторе Немыцкого в силу (3.12) и (3.4) имеем

$$N_f(u_m) \to N_f(u) \quad \text{сильно в} \quad L^{q'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому

$$\left| \int\limits_{\Omega} [f(x, u_m(x)) - f(x, u(x))]\, w_j(x)\, dx \right| \leqslant \|N_f(u_m) - N_f(u)\|_{q'} \|w_j\|_q \leqslant$$

$$\leqslant c(j) \|N_f(u_m) - N_f(u)\|_{q'} \to +0$$

при $m \to +\infty$. Итак, переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (3.3) мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x w_j(x))\, dx + \int\limits_{\Omega} f(x, u(x)) w_j(x) = \langle g(x), w_j(x) \rangle$$

---

[1] Линейный вполне непрерывный оператор (например, вполне непрерывный оператор вложения) является полностью непрерывным, т. е. переводит всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.

для всех $j \in \mathbb{N}$. В силу плотности системы функций $\{w_j\}$ в $H_0^1(\Omega)$ мы отсюда получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x \varphi(x))\, dx + \int\limits_{\Omega} f(x, u(x))\varphi(x) = \langle g(x), \varphi(x) \rangle \tag{3.13}$$

для всякого $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$.

Таким образом, мы доказали существование слабого решения рассматриваемой задачи Дирихле.

## § 4. Метод верхних и нижних решений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Кроме того, пусть $f(x,u) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ и $f(x,u)$ для всех $x \in \Omega$ дифференцируема по $u \in \mathbb{R}^1$ и для $f(x,u)$ выполнено неравенство

$$|f(x_1, u) - f(x_2, u)| \leqslant K(u)\, |x_1 - x_2|^{\beta} \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in \Omega, \tag{4.1}$$

где $\beta \in (0,1]$ и $0 < K(u) < +\infty$ для ограниченных $|u| \leqslant M < +\infty$. Наконец, пусть

$$|f_u(x,u)| \leqslant D < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad |u| \leqslant M. \tag{4.2}$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.3}$$

Будем рассматривать классические решения этой задачи класса $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$.

Дадим определение нижнего решения (субрешения).

Определение 5. *Функция* $\underline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющая задаче*

$$-\Delta \underline{U}(x) \leqslant f(x, \underline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.4}$$

*называется нижним решением задачи* (4.3).

Дадим определение верхнего решения (суперрешения).

Определение 6. *Функция* $\overline{U}(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, *удовлетворяющая задаче*

$$-\Delta \overline{U}(x) \geqslant f(x, \overline{U}(x)) \quad \textit{в} \quad \Omega, \quad \overline{U}(x) \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.5}$$

*называется верхним решением задачи* (4.3).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\underline{U}(x)$ *и* $\overline{U}(x)$ *— это нижнее и верхнее решение задачи* (4.3) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega. \text{ [1]}$$

*Тогда следующие утверждения имеют место*:

(i) *существует решение задачи* (4.3), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\underline{U}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.6}$$

(ii) *существует минимальное и максимальное решения* $\overline{u}(x)$ *и* $\underline{u}(x)$ *задачи* (4.3) *такие, что*

$$\underline{U}(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \textit{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.7}$$

Доказательство.

*Шаг 1.* Рассмотрим функцию

$$g(x,u) \stackrel{def}{=} f(x,u) + au, \quad a \in \mathbb{R}^1. \tag{4.8}$$

Мы выберем $a \geqslant 0$ настолько большим, что отображение

$$u \to g(x,u)$$

является возрастающим на сегменте $u(x) \in [\underline{U}(x); \overline{U}(x)]$ для каждого $x \in \Omega$. С этой целью достаточно взять такое $a \geqslant 0$ и

$$a \geqslant \max\left\{-f_u(x,u);\ x \in \overline{\Omega},\ u \in [\underline{U}(x); \overline{U}(x)]\right\}. \text{ [2]} \tag{4.9}$$

*Шаг 2.* Вместо исходной задачи (4.3) рассмотрим эквивалентную ей следующую задачу:

$$-\Delta u + au = g(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.10}$$

Наконец, рассмотрим следующую линейную задачу для реккурентного определения $u_n(x)$ по $u_{n-1}(x)$:

$$-\Delta u_n + au_n = g(x, u_{n-1}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad u_n(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{4.11}$$

причем $u_0(x) = \overline{U}(x)$. Справедливо промежуточное утверждение:

Лемма 6. *Имеет место цепочка неравенств*:

$$\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \cdots \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x) \tag{4.12}$$

*для всех* $x \in \Omega$.

---

[1] Заметим, что можно привести такой пример, в котором это неравенство нарушено во всей области.

[2] Этому условию удовлетворяет, в частности, функция $f(x,u) = |u|^q u$ при $q > 0$, а также произвольного вида функция $f(u)$ такая, что $|f'(t)| \leqslant b$.

Доказательство.

Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся слабым принципом максимума. Прежде всего докажем, что

$$u_1(x) \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x).$$

Согласно определению $u_1(x)$ и $\overline{U}(x)$ мы получим неравенство

$$\begin{aligned} -\Delta\left(\overline{U}(x) - u_1(x)\right) + a\left(\overline{U}(x) - u_1(x)\right) &\geqslant \\ \geqslant g(x, \overline{U}(x)) - g(x, u_0(x)) &= \\ = g(x, \overline{U}(x)) - g(x, \overline{U}(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad &(4.13) \end{aligned}$$

$$\overline{U}(x) - u_1(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \qquad (4.14)$$

Согласно слабому принципу максимума имеем

$$\overline{U}(x) \geqslant u_1(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \qquad (4.15)$$

Теперь заметим, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} -\Delta\left(\underline{U}(x) - u_1(x)\right) + a\left(\underline{U}(x) - u_1(x)\right) &\leqslant \\ \leqslant g(x, \underline{U}(x)) - g(x, \overline{U}) \leqslant 0, \quad &(4.16) \end{aligned}$$

$$\underline{U}(x) - u_1(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \qquad (4.17)$$

В силу слабого принципа максимума имеем

$$u_1(x) \geqslant \underline{U}(x) \quad \text{в} \quad x \in \Omega. \qquad (4.18)$$

Воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_n(x) \leqslant u_{n-1}(x) &\leqslant \\ \leqslant \cdots \leqslant u_1(x) \leqslant u_0(x) = \overline{U}(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \quad &(4.19) \end{aligned}$$

Докажем, что отсюда следует

$$\underline{U}(x) \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x). \qquad (4.20)$$

Действительно, используя реккурентные формулы для $u_{n+1}(x)$ и $u_n(x)$ при $n \geqslant 1$, мы получим

$$\begin{aligned} -\Delta(u_n(x) - u_{n+1}(x)) + a\left(u_n(x) - u_{n+1}(x)\right) &= \\ = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_n) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad &(4.21) \end{aligned}$$

$$u_n(x) - u_{n+1}(x) = 0 \geqslant 0. \qquad (4.22)$$

В силу слабого принципа максимума имеем

$$u_n(x) \geqslant u_{n+1}(x) \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{4.23}$$

Теперь заметим, что в силу определения нижнего решения $\underline{U}(x)$ имеем

$$-\Delta \underline{U}(x) + a\underline{U}(x) \leqslant g(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4.24}$$

$$\underline{U}(x) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.25}$$

В силу реккурентного определения $u_{n+1}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} &-\Delta \left(u_{n+1}(x) - \underline{U}(x)\right) + a\left(u_{n+1}(x) - \underline{U}(x)\right) \geqslant \\ &\qquad\qquad \geqslant g(x, u_n) - g(x, \underline{U}) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$u_{n+1}(x) - \underline{U}(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.27}$$

Снова в силу слабого принципа максимума имеем

$$\underline{U}(x) \leqslant u_{n+1}(x) \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Промежуточная лемма доказана.

*Шаг 3.* В силу результата леммы 6 существует такая функция $u(x)$, что для всех $x \in \Omega$ выполнено предельное свойство

$$u_n(x) \searrow u(x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{4.28}$$

Наша задача перейти к пределу при $n \to +\infty$ в реккурентном равенстве (4.11) и доказать, что $u(x)$ является решением предельного равенства.

Рассмотрим функциональную последовательность

$$g_n(x) \stackrel{def:}{=} g(x, u_n(x)),$$

$$g(x, \underline{U}(x)) \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x) \leqslant g(x, \overline{U}(x)) \Rightarrow g_n(x) \in L^\infty(\Omega)$$

равномерно [1] по $n \in \mathbb{N}$, а поскольку область $\Omega$ ограничена, то

$$g_n(x) \in L^p(\Omega) \quad \text{для всех} \quad p \in [1, +\infty] \tag{4.29}$$

равномерно по $n \in \mathbb{N}$. [2]

---

[1] Т. е. имеет место оценка $|g_n(x)| \leqslant c_1 < +\infty$, где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

[2] Т. е. имеет место оценка $\|g_n(x)\|_p \leqslant c_2 < +\infty$, где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Тогда в силу известной оценки Шаудера [1] в $W^{2,p}(\Omega)$ при любом $p \in (1, +\infty)$ для решения $u_n(x)$ уравнения (4.11) выполнено следующее неравенство:

$$\|u_n\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leqslant c_3 < +\infty, \tag{4.30}$$

где постоянная $c_3 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Заметим, что при $p > N/2$ имеет место непрерывное вложение

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \alpha = 1 - \frac{N}{2p} \in (0,1).$$

Стало быть, в силу (4.29) имеет место априорная оценка

$$\|u_n\|_{\mathbb{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leqslant c_4 < +\infty, \tag{4.31}$$

где постоянная $c_4 > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $g(x,z)$ дифференцируема по $z \in \mathbb{R}^1$ в силу формула Лагранжа имеем [2]

$$\begin{aligned}
&|f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\
&\quad \leqslant |f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_1))| + |f(x_2, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\
&\quad\quad \leqslant K(u_n)|x_1 - x_2|^\beta + \\
&\quad + \max\{|f_z(x_2, u_n(x_1))|, |f_z(x_2, u_n(x_2))|\} |u_n(x_1) - u_n(x_2)| \leqslant \\
&\quad\quad \leqslant K|x_1 - x_2|^\beta + D|x_2 - x_1|.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Поскольку область $\Omega$ ограничена, то из (4.33) мы получим итоговую оценку

$$|f(x_1, u_n(x_1)) - f(x_2, u_n(x_2))| \leqslant B|x_2 - x_1|^\beta,$$

а постоянная $B > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Отсюда сразу же получаем, что

$$\begin{aligned}
&|g(x_1, u_n(x_1)) - g(x_2, u_n(x_2))| \leqslant \\
&\quad \leqslant a\,|u_n(x_1) - u_n(x_2)| + B|x_2 - x_1|^\beta \leqslant \\
&\quad\quad \leqslant D|x_2 - x_1| + B|x_2 - x_1|^\beta \leqslant M_1|x_1 - x_2|^\beta,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

[1] Существует альтернативный подход на основе использования интерполяционных неравенств для шаудеровских полунорм, который позволяет без привлечения априорных оценок Шаудера в $W^{2,p}(\Omega)$ получить разрешимость в пространстве Гельдера $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega)$. Этот подход будет в дальнейшем применен во втором параграфе восьмой тематической лекции для доказательства локальной разрешимости первой краевой задачи для параболического уравнения.

[2] Если $f(x,u) = f(u)$, то при указанных условиях получим сразу же $f(u(x)) \in \mathbb{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ и далее можно воспользоваться классической $\mathbb{C}^{2+\alpha}$ априорной оценкой Шаудера.

где постоянная $D > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу классической априорной оценки Шаудера для решения задачи (4.11) получим оценку

$$\|u_n\|_{\mathbb{C}^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leqslant c_5 < +\infty, \tag{4.34}$$

где постоянная $0 < c_5$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

*Шаг 4.* В силу известного результата существует такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что

$$u_{n_k}(x) \to u(x) \in \mathbb{C}^{2+\beta}(\overline{\Omega}) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega}) \tag{4.35}$$

при $n_k \to +\infty$. Рассмотрим соответствующую задачу

$$-\Delta u_{n_k} + a u_{n_k} = g(x, u_{n_k-1}) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{4.36}$$

$$u_{n_k}(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{4.37}$$

В силу (4.35) мы можем перейти к пределу при $n_k \to +\infty$, заметив, что для подпоследовательности $\{u_{n_k-1}\} \subset \{u_n\}$ выполнено предельное свойство

$$g(x, u_{n_k-1}) \searrow g(x,u) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty$$

для всех $x \in \Omega$. В результате получим равенства для $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$

$$-\Delta u(x) + a u(x) = g(x,u) = a u(x) + f(x, u(x)) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

*Шаг 5.* Итак, мы доказали существование решения $\overline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2,\beta}(\Omega)$, удовлетворяющего неравенству

$$\underline{U}(x) \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Если воспользоваться уже проведенной схемой доказательства при выборе $u_0(x) = \underline{U}(x)$, то мы получим в результате итерационного процесса $\{u^m(x)\}$ решение $\underline{u}(x) \in \mathbb{C}^{2+\beta}(\Omega)$, удовлетворяющего неравенству

$$\underline{U}(x) \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega$$

и

$$u^m(x) \nearrow \underline{u}(x) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Исходя из итерационного процесса можно доказать, что для всех $m, n \in \mathbb{N}$ соответствующие итерационные последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{u^m(x)\}$ связаны неравенством

$$\begin{aligned} &\underline{U}(x) \leqslant \cdots \leqslant u^m(x) \leqslant u^{m+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant \underline{u}(x) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \overline{u}(x) \leqslant \cdots \leqslant u_{n+1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant \cdots \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.38}$$

*Шаг 6.* Пусть $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это произвольное решение задачи Дирихле (4.3), тогда ,очевидно, $u(x)$ — это нижнее решение задачи Дирихле. Поэтому если в наших рассуждениях взять в качестве $\underline{U}(x) = u(x)$ и провести итерационный процесс $\{u_n(x)\}$ мы в результате получим, что

$$u(x) = \underline{U}(x) \leqslant \overline{u}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{4.39}$$

Теперь заметим, что, с другой стороны, $u(x)$ является верхним решением $\overline{U}(x)$, поэтому если рассмотреть итерационный процесс $\{u^m(x)\}$ взяв в качестве $\overline{U}(x) = u(x)$ мы получим неравенство

$$\underline{u}(x) \leqslant \overline{U}(x) = u(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \tag{4.40}$$

Итак, из неравенств (4.39), (4.40) и (4.38) мы получим неравенства

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \Omega. \text{ }^{1)}$$

Поэтому $\underline{u}(x)$ — это минимальное решение, а $\overline{u}(x)$ — это максимальное решение задачи Дирихле (4.3).

Теорема доказана.

## § 5. Метод слабых верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного уравнения Пуассона в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ с гладкой границей $\partial\Omega$

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{5.1}$$

где

$$f(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

— это непрерывная функция и

$$|f(x,u)| \leqslant a_1 + b_1|u|^{q+1}, \quad 0 < q \leqslant \frac{4}{N-2}, \tag{5.2}$$

где постоянные $a_1, b_1 \geqslant 0$ и

$$a_1 + b_1 > 0.$$

Причем либо

$$f_u'(x,u) \geqslant 0 \quad \text{либо} \quad |f_u'(x,u)| \leqslant a \tag{5.3}$$

[1] Заметим, что результат имеет смысл, поскольку исходная задача Дирихле при $f(x,u) = |u|^q u$ и $q > 0$ имеет счетное множество линейно независимых в $H_0^1(\Omega)$ решений.

для всех $x \in \Omega$ и $u \in \mathbb{R}^1$. Здесь мы будем использовать следующие обозначения [1])

$$H_0^1(\Omega) \stackrel{def:}{=} W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) \stackrel{def:}{=} W^{-1,2}(\Omega).$$

Определение 7.

(i) *Функция* $\overline{U} \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым верхним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} \left(D\overline{U}, Dv\right)\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \overline{U})v\, dx \tag{5.4}$$

*для любой функции* $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду.*

(ii) *Функция* $\underline{U} \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым нижним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D\underline{U}, Dv)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f(x, \underline{U})v\, dx \tag{5.5}$$

*для любой функции* $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geqslant 0$ *почти всюду.*

(iii) *Функция* $u \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (Du, Dv)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x, u)v\, dx \tag{5.6}$$

*для любой функции* $v \in H_0^1(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{U}, \underline{U} \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то из (5.4) и (5.5) получаем

$$-\Delta\overline{U} \geqslant f(x, \overline{U}), \quad -\Delta\underline{U} \leqslant f(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений. [2])

Теорема 2. *Пусть существует верхнее* $\overline{U}$ *и нижнее* $\underline{U}$ *решения задачи* (5.1) *такие, что*

$$\underline{U} \leqslant 0, \quad \overline{U} \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad \text{в смысле следов,} \quad \underline{U} \leqslant \overline{U} \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{5.7}$$

*Тогда существует слабое решение* $u$ *задачи* (5.1) *такое, что*

$$\underline{U} \leqslant u \leqslant \overline{U} \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega.$$

---

[1]) Смотри вторую тематическую лекцию.

[2]) Идея доказательства этого утверждения такая — пусть в какой–то точке $x_0 \in \Omega$ выражение $-\Delta\overline{U} < f(x, \overline{U})$, но тогда в силу непрерывности этого выражения и в некоторой замкнутой ее окрестности знак будет тот же. Теперь достаточно взять $v(x) \geqslant 0$ с носителем, лежащим в этой замкнутой окрестности и получить противоречие с определением слабого верхнего решения $\overline{U}(x)$.

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

*Шаг 1.* Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(x, z) + \lambda z \tag{5.8}$$

неубывающее для всех $x \in \Omega$. Такой выбор возможен в силу условия (5.3).

Теперь запишем $u_0 = \underline{U}$ и при заданных $u_k$ $(k = 0, 1, 2...)$ индуктивно определим $u_{k+1} \in H_0^1(\Omega)$ как единственное слабое решение линейной краевой задачи

$$-\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(x, u_k) + \lambda u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_{k+1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{5.9}$$

*Шаг 2.* Покажем, что

$$\underline{U} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \cdots \quad \text{п.в.} \quad \Omega. \tag{5.10}$$

1. Для этого сначала заметим, что в силу (5.9) при $k = 0$

$$\int\limits_\Omega ((Du_1, Dv) + \lambda u_1 v)\, dx = \int\limits_\Omega (f(x, u_0) + \lambda u_0)\, v\, dx \tag{5.11}$$

для любой $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая (5.11) из (5.5) [1], получим следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega [(Du_0 - Du_1, Dv) + \lambda(u_0 - u_1, v)]\, dx \leqslant 0, \quad u_0 = \underline{U},$$

и полагая

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in H_0^1(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$

находим

$$\int\limits_\Omega \big(D(u_0 - u_1), D(u_0 - u_1)^+ + \lambda(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+\big)\, dx \leqslant 0. \tag{5.12}$$

Однако,

$$D(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} D(u_0 - u_1) & \text{почти всюду на} \quad \{u_0 \geqslant u_1\}, \\ 0 & \text{почти всюду на} \quad \{u_1 \geqslant u_0\}. \end{cases}$$

[1] Предварительно нужно в неравенстве (5.5) прибавить к обеим частям этого неравенства слагаемое $\lambda\underline{U}(x)$. Напомним, что $\underline{U}(x) = u_0(x)$.

Следовательно,

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left[ |D(u_0 - u_1)|^2 + \lambda (u_0 - u_1)^2 \right] dx \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

2. Теперь по индукции предположим, что

$$u_{k-1}(x) \leqslant u_k(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.13}$$

Из (5.9) находим

$$\int\limits_{\Omega} [(Du_{k+1}, Dv) + \lambda u_{k+1} v] \; dx = \int\limits_{\Omega} (f(x, u_k) + \lambda u_k) \, v \, dx \tag{5.14}$$

и

$$\int\limits_{\Omega} [(Du_k, Dv) + \lambda u_k v] \; dx = \int\limits_{\Omega} (f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) \, v \, dx \tag{5.15}$$

для любых $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v \equiv (u_k - u_{k+1})^+ ,$$

находим

$$\int\limits_{u_k \geqslant u_{k+1}} \left[ |D(u_k - u_{k+1})|^2 + \lambda \, (u_k - u_{k+1})^2 \right] dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} [(f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(x, u_k) + \lambda u_k)] \, (u_k - u_{k+1})^+ \, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (5.13) и (5.8). Поэтому $u_k \leqslant u_{k+1}$ почти всюду в $\Omega$, как и утверждалось.

*Шаг 3.* Теперь покажем, что

$$u_k \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{5.16}$$

При $k = 0$ (5.16) верно в силу (5.7). Пусть для некоторого $k$

$$u_k \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{5.17}$$

Вычитая (5.4) из (5.14) и полагая

$$v \equiv \left(u_{k+1} - \overline{U}\right)^+ ,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1}\geqslant\overline{U}} \Big[\big|D(u_{k+1}-\overline{U})\big|^2+\lambda(u_{k+1}-\overline{U})^2\Big]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \big[(f(x,u_k)+\lambda u_k)-(f(x,\overline{U})+\lambda\overline{U})\big]\left(u_{k+1}-\overline{U}\right)^{+}\,dx \leqslant 0$$

в силу (5.17) и (5.8). Таким образом, $u_{k+1}\leqslant\overline{U}$ почти всюду в $\Omega$.

*Шаг 4.*

1. Ввиду (5.10) и (5.16)

$$\underline{U}\leqslant\cdots\leqslant u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant\overline{U}\quad\text{почти всюду в}\quad\Omega. \tag{5.18}$$

Поэтому

$$u(x)\equiv\lim_{k\to+\infty}u_k(x) \tag{5.19}$$

существует для почти всех $x\in\Omega$. Кроме того,

$$u_k\to u\quad\text{сильно в}\quad L^{q+2}(\Omega)\subset L^2(\Omega),\quad q\geqslant 0 \tag{5.20}$$

что гарантируется теоремой о мажорируемой сходимости и (5.18).

□ Действительно, имеем

$$\int\limits_{\Omega}|u_k(x)-u(x)|^{q+2}\,dx\leqslant c(q)\int\limits_{\Omega}|V(x)|^{q+2}\,dx<+\infty,$$

$$V(x)\stackrel{def:}{=}\max\left\{|\underline{U}(x)|,|\overline{U}(x)|\right\}\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

В совокупности с (5.19) получаем утверждение. ⊠

2. Наконец, в силу того, что функция $f(x,u)$ каратеодориева с условием роста (5.3), то соответствующий оператор Немыцкого

$$N_f(u):L^{q+2}(\Omega)\to L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

является сильно непрерывным, т. е., в частности, в силу (5.20)

$$\|N_f(u_n)-N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)}\to+0\quad\text{при}\quad n\to+\infty. \tag{5.21}$$

3. Из (5.9) скалярным в смысле скобок двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:H^{-1}(\Omega)\otimes H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}^1$$

умножением на $u_{k+1}\in H_0^1(\Omega)$ получаем равенство

$$\langle-\Delta u_{k+1}+\lambda u_{k+1},u_{k+1}\rangle=\langle f(x,u_k)+\lambda u_k,u_{k+1}\rangle\,.$$

После «интегрирования по частям» отсюда получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega f(x,u_k)u_{k+1}\,dx + \lambda\int\limits_\Omega u_k u_{k+1}\,dx.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_\Omega f(x,u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant a_1\int\limits_\Omega |u_{k+1}|\,dx + b_1\int\limits_\Omega |u_k|^{q+1}|u_{k+1}|\,dx \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|^2_2 + c_1(\varepsilon) + b_1\|u_k\|^{q+1}_{q+2}\|u_{k+1}\|_{q+2}. \qquad (5.22)$$

Заметим, что

$$\underline{U}(x) \leqslant u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x\in\Omega,$$

причем

$$\underline{U}(x), \overline{U}(x) \in H^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega).$$

Поэтому

$$|u_k(x)| \leqslant V(x) \overset{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|, \left|\overline{U}(x)\right|\right\} \in L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

для почти всех $x\in\Omega$. Тогда имеем

$$b_1\|u_k\|^{q+1}_{q+2}\|u_{k+1}\|_{q+2} \leqslant b_1\|V(x)\|^{q+1}_{q+2}K_{fr}\|Du_{k+1}\|_2, \qquad (5.23)$$

где $K_{fr}$ — это постоянная Фридрихса. Далее применяя трехпараметрическое с малым $\varepsilon>0$ к правой части в (5.23), мы получим неравенство

$$\left|\int\limits_\Omega f(x,u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant c_2(\varepsilon) + \varepsilon\|u_{k+1}\|^2_2 + \varepsilon\|Du_{k+1}\|^2_2. \qquad (5.24)$$

Также справедливо очевидное неравенство

$$\lambda\left|\int\limits_\Omega u_k u_{k+1}\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|^2_2 + c(\varepsilon)\|u_k\|^2_2 \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|^2_2 + c(\varepsilon)\|V(x)\|^2_2. \qquad (5.25)$$

В силу (5.22) и неравенств (5.24), (5.25) мы получим неравенство

$$(1-\varepsilon)\|Du_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + (\lambda-2\varepsilon)\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c_3(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \min\{1, \lambda/2\}) \,. \tag{5.26}$$

Из оценки (5.26) мы приходим к выводу о том, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в $H^1(\Omega)$. Поскольку гильбертово пространство $H^1(\Omega)$ рефлексивно [1]), то существует такая подпоследовательность $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, что

$$u_{k_j}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad H^1(\Omega).$$

Поскольку имеет место вполне непрерывное вложение

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega),$$

то имеет место предельное свойство

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

*Шаг 5.* Наконец, проверим, что $u$ — это слабое решение задачи (5.1). Для этого фиксируем $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Тогда из (5.9) находим

$$\int\limits_\Omega \left[\left(Du_{k_j}, Dv\right) + \lambda u_{k_j} v\right] \, dx = \int\limits_\Omega \left(f(x, u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1}\right) v \, dx. \tag{5.27}$$

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(x, u_{k_j-1}) \to f(x, u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$

$$u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

и поэтому из (5.27) получим, что имеет место предельное равенство

$$\int\limits_\Omega [(Du, Dv) + \lambda uv] \, dx = \int\limits_\Omega (f(x,u) + \lambda u) \, v \, dx.$$

Сокращая член, содержащий $\lambda$, приходим к требуемому равенству

$$\int\limits_\Omega (Du, Dv) \, dx = \int\limits_\Omega f(x,u) v \, dx \quad \text{для всех} \quad v(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Что и требовалось доказать.

Т е о р е м а  д о к а з а н а.

---

[1]) И поэтому является слабо замкнутым.

## § 6. Метод слабых верхних и нижних решений. Вариационный подход

В этом разделе мы применим вариационный подход в методе верхних и нижних решений. При этом нам удастся существенно ослабить требования на нелинейную функцию $f(x,u)$. Целью нашего исследования является разрешимость задачи

$$-\Delta u = \lambda f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

при некотором $\lambda \neq 0$, понимаемой в слабом смысле.

Действительно, предположим, что

$$f(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

является непрерывной функцией. [1] Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$f_0(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & \text{если} \quad \underline{U}(x) < t < \overline{U}(x),\ x \in \overline{\Omega}; \\ f(x,\overline{U}(x)), & \text{если} \quad t \geqslant \overline{U}(x),\ x \in \overline{\Omega}; \\ f(x,\underline{U}(x)), & \text{если} \quad t \leqslant \underline{U}(x),\ x \in \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\overline{U}(x), \underline{U}(x) \in H^1(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ — это слабые верхнее и нижнее решения соответственно. Ясно, что функция

$$f_0(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

является непрерывной. Отметим, что нелинейный эллиптический оператор

$$-\Delta u - \lambda N_{f_0}(u), \quad N_{f_0}(u) \stackrel{def:}{=} f_0(x,u)$$

является потенциальным и соответствующим функционалом $E_0(u)$, производная Фреше которого дает этот оператор, является следующий функционал

$$E_0(u) \stackrel{def:}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2\,dx - \lambda \int\limits_{\Omega} F_0(x,u(x))\,dx, \tag{6.2}$$

где

$$F_0(x,t) = \int\limits_0^t f_0(x,s)\,ds.$$

[1] Мы теперь не требуем, чтобы при некотором $a > 0$ функция $g(x,u) = f(x,u) + au$ была возрастающей.

Потребуем только, чтобы функция $f(x,u)$ удовлетворяла условию роста

$$|f(x,u)| \leqslant a + b|u|^{q+1}, \quad q > 0, \tag{6.3}$$

где $a, b \geqslant 0$ и $a + b > 0$. Докажем, что при некотором $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}^1$ задача

$$-\Delta u(x) = \lambda f_0(x,u), \quad u(x) \in H_0^1(\Omega)$$

имеет решение.

*Шаг 1.* Итак, для применения вариационного подхода рассмотрим следующее многообразие $M \subset H_0^1(\Omega)$

$$M \stackrel{def:}{=} \left\{u(x) \in H_0^1(\Omega) : \varphi(u) = c\right\}, \quad \varphi(u) \stackrel{def:}{=} \int\limits_{\Omega} F_0(x, u(x))\, dx, \tag{6.4}$$

где $0 \neq c \in \operatorname{Im}\varphi$ [1]. Докажем, что многообразие $M$ является слабо замкнутым в $H_0^1(\Omega)$.

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset M$ и

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega).$$

Заметим, что при $N \geqslant 3$ [2] и при

$$2 < q + 2 < \frac{2N}{N-2} \Rightarrow 0 < q < \frac{4}{N-2} \Rightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega),$$

т. е. имеет место вполне непрерывное вложение. Линейный и вполне непрерывный оператор (в частности, оператор вложения) является полностью непрерывным и поэтому имеем

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega).$$

Поскольку функция $f_0(x,u)$ является каратеодориевой и выполнено условие роста (6.3), то функция $F_0(x,u)$ тоже является каратеодориевой и для нее выпонено условие роста

$$|F_0(x,u)| \leqslant a_1 + b_1|u|^{q+2}.$$

Соответствующий оператор Немыцкого $N_{F_0}(u)$ является непрерывным

$$N_{F_0}(u_n) \to N_{F_0}(u) \in L^1(\Omega) \quad \text{сильно в} \quad L^1(\Omega)$$

при $n \to +\infty$. Но тогда имеет место предельное свойство

$$c = \varphi(u_n) = \int\limits_{\Omega} F_0(x, u_n(x))\, dx \to \int\limits_{\Omega} F_0(x, u(x))\, dx = c \Rightarrow u(x) \in M. \quad \boxtimes$$

---

[1] Символом $\operatorname{Im}\varphi$ мы стандартным образом обозначили область значений функционала $\varphi$.

[2] Этот случай мы и рассматриваем.

*Шаг 2.* Заметим, что функционал

$$\psi(u) \stackrel{def:}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^2 \, dx = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \tag{6.5}$$

является слабо полунепрерывным снизу на $H^1_0(\Omega)$.

□ Действительно, как квадрат нормы гильбертова пространства $H^1_0(\Omega)$ в силу рефлексивности $H^1_0(\Omega)$ функционал $\psi(u)$ как действующий

$$\psi(u) : H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^1$$

является слабо полунепрерывным снизу $H^1_0(\Omega)$, т. е. для любой последовательности

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega) \Rightarrow \psi(u) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \psi(u_n). \quad \boxtimes$$

*Шаг 3.* Наконец, очевидно, что функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным на $H^1_0(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{\|D_x u\|_2\to+\infty} \psi(u) = \lim_{\|D_x u\|_2\to+\infty} \frac{1}{2}\|D_x u\|_2^2 = +\infty.$$

*Шаг 4.* В силу результата теоремы 3 тематической лекции 3 имеем $\exists u_0 \in M$, что

$$\psi(u_0) = \inf_{u\in M} \psi(u).$$

Но тогда в этой точке согласно теоремы Лагранжа имеем

$$\langle \psi'_f(u_0) - \mu_0 \varphi'_f(u_0), \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega),$$

что эквивалентно равенству

$$\langle \Delta u_0 - \mu_0 f_0(x, u_0), \varphi\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega).$$

Возьмем в этом равенстве $\varphi(x) = u_0(x) \in H^1_0(\Omega)$ тогда получим выражение

$$-\|D_x u_0\|_2^2 = \mu_0 \int\limits_{\Omega} f_0(x, u_0(x)) u_0(x)\, dx,$$

причем поскольку $u_0(x) \in M$, а $c \neq 0$, то $u_0(x) \neq 0$, стало быть,

$$\|D_x u_0\|_2^2 > 0 \Rightarrow \mu_0 \int\limits_{\Omega} f_0(x, u_0(x)) u_0(x)\, dx < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_0 = -\|D_x u_0\|_2^2 \left(\int\limits_{\Omega} f_0(x, u_0(x)) u_0(x)\, dx\right)^{-1} < 0.$$

Таким образом разрешимость задачи доказана.

*Шаг 5.* Теперь наша задача доказать, что решение $u(x) \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ для всех $p \in [1, +\infty)$. [1]) С этой целью заметим, что функция $f_0(x,u)$ является не только непрерывной, но и ограниченной, поскольку $\overline{U}(x), \underline{U}(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, а функция $f(x,u)$ ограничена на компакте $(x,u) \in \in \overline{\Omega} \otimes \{|u| \leqslant M\}$. Следовательно, в силу классических априорных оценок Шаудера имеем

$$f_0(x,u(x)) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow -\Delta u(x) = f_0(x,u(x)) \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow u(x) \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$$

для всех $p \in [1, +\infty)$.

*Шаг 6.* Теперь заметим, что определения слабых верхних и слабых нижних решений можно записать в следующем виде:

$$\langle -\Delta \underline{U}(x) - f(x, \underline{U}(x)), \varphi(x) \rangle \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega), \tag{6.6}$$

$$\left\langle -\Delta \overline{U}(x) - f(x, \overline{U}(x)), \varphi(x) \right\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega), \tag{6.7}$$

причем $\varphi(x) \geqslant 0$ для почти всех $x \in \Omega$. При этом найденное слабое решение $u_0(x) \in H^1_0(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\langle -\Delta u_0(x) - f_0(x, u_0(x)), \varphi(x) \rangle = 0 \tag{6.8}$$

для всех $\varphi(x) \in H^1_0(\Omega)$. Сначала вычтем из (6.6) равенство (6.8) и получим следующее неравенство:

$$\langle -\Delta \underline{U}(x) + \Delta u_0(x) - f(x, \underline{U}(x)) + f_0(x, u_0(x)), \varphi(x) \rangle \leqslant 0, \tag{6.9}$$

в котором возьмем

$$\varphi(x) = (\underline{U}(x) - u_0(x))^+ \stackrel{def}{=} \max\{0, \underline{U}(x) - u_0(x)\} \in H^1_0(\Omega), \tag{6.10}$$

поскольку в смысле следов функций из $H^1(\Omega)$

$$\underline{U}(x) - u_0(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega \Rightarrow (\underline{U}(x) - u_0(x))^+ = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega.$$

После подстановки получим следующее неравенство:

$$\int\limits_\Omega \left| D_x \left( \underline{U}(x) - u_0(x) \right)^+ \right|^2 dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_\Omega \left( \underline{U}(x) - u_0(x) \right)^+ \left( f(x, \underline{U}(x)) - f_0(x, u_0(x)) \right). \tag{6.11}$$

---

[1]) Хотя нижнее слабое и верхнее слабое решения такой гладкостью могут и не обладать.

Рассмотрим два случая. Если $u_0(x) < \underline{U}(x)$, то

$$f_0(x, u_0(x)) = f(x, \underline{U}(x)).$$

Если $u_0(x) \geqslant \underline{U}(x)$, то

$$(\underline{U}(x) - u_0(x))^+ = 0.$$

В обоих случаях правая часть неравенства (6.11) равна нулю. Поэтому имеем

$$\int\limits_\Omega \left| D_x \left(\underline{U}(x) - u_0(x)\right)^+ \right|^2 dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D_x \left(\underline{U}(x) - u_0(x)\right)^+ = 0 \Rightarrow u_0(x) \geqslant \underline{U}(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Аналогичным образом можно получить, что

$$u_0(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

*Шаг 7.* Таким образом, имеем

$$\underline{U}(x) \leqslant u_0(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega.$$

Следовательно, из определения функции $f_0(x, u)$ вытекает, что

$$f_0(x, u_0(x)) = f(x, u_0(x)).$$

Стало быть, доказана разрешимость исходной задачи Дирихле.

## § 7. Метод Лере–Шаудера. Слабые решения

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0, 1]$.

Введем обозначение

$$2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & \text{если} \quad 2 < N, \\ \infty, & \text{если} \quad 2 \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой и удовлетворяет условию роста

$$|f(x, u)| \leqslant c|u|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \tag{7.2}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $q \in (1, 2^*)$, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, 2^*)$ гарантирует компактность вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \to L^q(\Omega)$.

Нашим инструментом будет следующее следствие из теоремы Шаудера:

Следствие из теоремы Шаудера. *Пусть $A$ — вполне непрерывное отображение банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Пусть существует постоянная $M$ такая, что для всех $x \in \mathbb{B}$ и $\alpha \in [0, 1]$, удовлетворяющих уравнению*

$$x = \alpha A x,$$

*справедливо неравенство*

$$\|x\| < M. \tag{7.3}$$

*Тогда оператор $A$ имеет неподвижную точку.*

Теперь сопоставим Каратеодориевой функции $f(x, u)$ оператор Немыцкого $N_f \equiv f(x, u(x))$. Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \overset{N_f}{\to} L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого $N_f$ является вполне непрерывным оператором

$$N_f : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

Определение 8. *Слабым решением задачи* (7.1) *называется функция $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta u, v\rangle = \langle N_f u, v\rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in H_0^1(\Omega), \tag{7.4}$$

*где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между сопряженными гильбертовыми пространствами $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.*

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

является изометрией Рисса–Фреше [1)]. Поэтому (7.4) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta)^{-1} N_f(u), \tag{7.5}$$

[1)] В соответствии с теоремой Рисса–Фреше об отождествлении сопряженного гильбертова пространства $H^*$ с гильбертовым пространством $H$.

с вполне непрерывным оператором

$$\mathbb{T}(\cdot) \overset{def:}{=} (-\Delta)^{-1} N_f(\cdot) : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega). \tag{7.6}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $H_0^1(\Omega)$:

$$S = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \middle| \; u = \alpha \mathbb{T}(u) \text{ для некоторого } \alpha \in [0,1] \right\}.$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= (\mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u))_{H_0^1(\Omega)} = \\ &= (D_x \mathbb{T}(u), D_x \mathbb{T}(u))_2 = \langle (-\Delta)\, \mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u) \rangle = \langle N_f(u), \mathbb{T}(u) \rangle = \\ &= \int\limits_\Omega f(x, u(x)) \mathbb{T}(u)\, dx \leqslant \int\limits_\Omega \left( c|u|^{q-1} + b(x) \right) |\mathbb{T}(u)|\, dx.\end{aligned}$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha \mathbb{T}(u)$ с некоторым $\alpha \in [0,1]$ мы имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\|\mathbb{T}(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leqslant c\alpha^{q-1} \|\mathbb{T}(u)\|_q^q + \|b\|_{q'} \|\mathbb{T}(u)\|_q \leqslant \\ &\leqslant c_1^q \alpha^{q-1} \|\mathbb{T}(u)\|^q_{H_0^1(\Omega)} + c_1 \|b\|_{q'} \|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant c_1^q \|\mathbb{T}(u)\|^q_{H_0^1(\Omega)} + c_1 \|b\|_{q'} \|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned}$$

где $c_1$ — наилучшая постоянная вложения $H_0^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{T}(u)\|^2_{H_0^1(\Omega)} - K_1 \|\mathbb{T}(u)\|^q_{H_0^1(\Omega)} - K_2 \|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant 0 \tag{7.7}$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (7.7) при $q \in \in (1,2)$ вытекает существует такая постоянная $a \geqslant 0$, что

$$\|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant a.$$

Отсюда вытекает ограниченность $S$ поскольку

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \alpha \|\mathbb{T}(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant a. \quad \boxtimes$$

Отметим, что всегда $2 < 2^*$.

Таким образом, в силу следствия из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

Теорема 3. *Если каратеодориева функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет* (7.2) *с $q \in (1,2)$, тогда оператор $(-\Delta)^{-1} N_f$ имеет неподвижную точку в $H_0^1(\Omega)$ или, что эквивалентно, задача* (7.4) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в $H_0^1(\Omega)$.*

Тематическая лекция 6

# УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ $P$–ЛАПЛАСИАНА: $\operatorname{div}(|D_X U|^{P-2} D_X U)$

В этой лекции мы рассмотрим второй базовый оператор эллиптического типа следующего вида [1]:

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) \quad \text{при} \quad p > 1.$$

## § 1. Постановка задачи Дирихле для уравнения с $\boldsymbol{\Delta_p u(x)}$

В классическом смысле задача Дирихле для неоднородного уравнения с $p$–Лапласианом при $p \in (1, +\infty)$ имеет следующий вид:

$$-\Delta_p u(x) \overset{def:}{=} -\operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.2}$$

В этой тематической лекции мы будем изучать лишь слабые решения задачи Дирихле (1.1), (1.2) в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Нам удобно будет рассмотреть две следующие задачи Дирихле:

$$-\operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.4}$$

и

$$\operatorname{div}(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x)) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.6}$$

Дадим определение слабых решений задач Дирихле (1.3), (1.4) и (1.5), (1.6).

Определение 1. *Функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющая равенству*

$$\langle -\Delta_p u(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \quad \textit{для всех} \quad \varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.7}$$

---

[1] Напомним, что градиент мы обозначаем символом $D_x$.

*где* $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *называется слабым решением задачи Дирихле* (1.3), (1.4).

Замечание 5. В силу определения обобщенного оператора $\Delta_p$, который был определен во второй тематической лекции, равенство (1.7) эквивалентно следующему равенству:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x)\right) \, dx = \langle f(x), \varphi(x) \rangle \tag{1.8}$$

для всех $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и при $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

Определение 2. *Функция* $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая равенству*

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x)\right) \, dx = 0 \tag{1.9}$$

*для всех* $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *называется слабым решением задачи Дирихле* (1.5), (1.6), *если существует продолжение функции* $g(x) \in \in W^{1,p}(\Omega)$ *такое, что*

$$u(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.10}$$

Отметим, что ниже мы будем изучать свойства так называемых $p$–гармонических функций. Дадим определение.

Определение 3. *Мы скажем, что* $u(x) \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\Omega)$ — *это слабая $p$–гармоническая функция, если выполнено следующее равенство*:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x)\right) \, dx = 0 \tag{1.11}$$

*для всех* $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Сопоставим слабому решению задачи Дирихле (1.3), (1.4) в смысле определения 1 следующий функционал Эйлера:

$$\psi_1(u) \stackrel{def:}{=} \frac{1}{p} \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p \, dx - \langle f(x), u(x) \rangle, \tag{1.12}$$

который определен на $W_0^{1,p}(\Omega)$. Используя результаты третьей тематической лекции, можно вычислить производную Фреше этого функционала, который имеет вид

$$\psi'_{1f}(u) = -\Delta_p u(x) - f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega). \tag{1.13}$$

Ясно, что точки экстремума функционала $\psi_1(u)$ удовлетворяют равенству

$$\left\langle \psi'_{1f}(u), \varphi(x) \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.14}$$

т. е. являются слабыми решениями в смысле определения 1. Таким образом, можно применить вариационный подход к функционалу $\psi_1(u)$ с целью доказать существования экстремума (точнее точки минимума) на банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь слабое решение задачи Дирихле (1.5), (1.6) в слабом смысле определения 2. Справедлива теорема.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны для* $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ :

(i) *функция* $u(x)$ *минимизирует функционал*

$$\psi_2(u) \stackrel{def:}{=} \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_\Omega |D_x v(x)|^p \, dx, \tag{1.15}$$

*в классе* $u(x) - v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) *функция* $u(x)$ *удовлетворяет следующему равенству*:

$$\int\limits_\Omega |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x \varphi(x)\right) \, dx = 0 \tag{1.16}$$

*для всех* $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Доказательство.

Доказательство импликации $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ минимизирует функционал $\psi_2(u)$. Введем функцию

$$v(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^1,$$

где $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Определим вещественный функционал

$$J(\varepsilon) \stackrel{def:}{=} \int\limits_\Omega \left|D_x \left(u(x) + \varepsilon\varphi(x)\right)\right|^p \, dx.$$

Ясно, что этот функционал достигает своего минимума при $\varepsilon = 0$ и поэтому

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^{p-2} \left(D_x u(x), D_x\varphi(x)\right) \, dx = 0.$$

Доказательство импликации $(ii) \Rightarrow (i)$. Заметим, что при $p > 1$ в силу выпуклости функции $f(t) = |t|^p$ имеет место неравенство

$$|b|^p \geqslant |a|^p + p\left(|a|^{p-2}a, b - a\right) \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathbb{R}^N.$$

Таким образом, имеем

$$\int\limits_{\Omega} |D_x v(x)|^p\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p\,dx + \\ + p\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u(x)|^{p-2} D_x u(x), D_x(v(x)-u(x))\Big)\,dx.$$

Но по условию $u(x)-v(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$ и поэтому в силу равенства (1.16), в котором $\varphi(x)=v(x)-u(x)$, получим

$$\int\limits_{\Omega} |D_x v(x)|^p\,dx \geqslant \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p\,dx$$

для всех $v(x)\in W^{1,p}(\Omega)$ и $u(x)-v(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Теорема доказана.

## § 2. Вариационный метод

Применим вариационный подход к доказательству существованию слабых решений задач Дирихле (1.3), (1.4) и (1.5), (1.6). Прежде всего рассмотрим функционал $\psi_1(u)$, определенный формулой (1.12).

1. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ *слабо полунепрерывен снизу*.

□ Действительно, функционал $\psi_1(u)$ может быть переписан в следующем виде:

$$\psi_1(u)=\frac{1}{p}\|D_x u(x)\|_p^p-\langle f(x),u(x)\rangle,$$

где первое слагаемое слабо полунепрерывно снизу как $p$–я степень нормы рефлексивного банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$, а второе является слабо непрерывным. Поэтому их сумма является слабо полунепрерывной снизу. ⊠

2. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ является слабо коэрцитивным на $W_0^{1,p}(\Omega)$.

□ Действительно, имеет место оценка снизу

$$\psi_1(u)\geqslant\frac{1}{p}\|D_x u(x)\|_p^p-\|f(x)\|_{-1,p'}\|D_x u(x)\|_p\to+\infty$$

при

$$\|D_x u(x)\|_p\to+\infty. \quad ⊠$$

3. Итак, согласно результатам третьей тематической лекции существует (может не единственная) функция $u_0(x)\in W_0^{1,p}(\Omega)$ такая, что

$$\psi_1(u_0)=\inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)}\psi_1(u)>-\infty\Rightarrow\psi_{1f}^{'}(u_0)=0,$$

т. е. $u_0(x)$ — это слабое решение задачи Дирихле (1.3), (1.4), понимаемой в смысле определения 1.

4. Осталось доказать единственность. Действительно, пусть $u_1(x), u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ — это два слабых решения задачи Дирихле. Тогда имеем

$$\int\limits_{\Omega} \Big( |D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x\varphi(x) \Big) \, dx = 0,$$

в котором положим $\varphi(x) = u_1(x) - u_2(x)$ и в результате получим, что

$$\int\limits_{\Omega} \Big( |D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), \\ D_x u_1(x) - D_x u_2(x) \Big) \, dx = 0,$$

Осталось воспользоваться неравенствами (4.5) леммы 4 третьей тематической лекции и получить для всех $p \in (1, +\infty)$ неравенство

$$0 = \int\limits_{\Omega} \Big( |D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), \\ D_x u_1(x) - D_x u_2(x) \Big) \, dx \geqslant \\ \geqslant c_p \int\limits_{\Omega} (|D_x u_1(x)| + |D_x u_2(x)|)^{p-2} |D_x u_1(x) - D_x u_2(x)|^2 \, dx.$$

Стало быть,

$$D_x u_1(x) = D_x u_2(x) \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1(x) - u_2(x) = const \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow const = 0.$$

Единственность доказана.

Теперь мы применим вариационный подход к доказательству существования слабого решения задачи Дирихле (1.5), (1.6), понимаемой в смысле определения 2. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $g(x) \in W^{1,p}(\Omega)$. Существует единственное $u(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ с условием, что $u(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ такое, что*

$$\psi_2(u) = \int\limits_{\Omega} |D_x u(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x v(x)|^p \, dx \tag{2.1}$$

*для всех $v(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ с условием, что $v(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Доказательство.

Единственность. Пусть существует две минимизирующие функционал $\psi_2(u)$ функции $u_1(x), u_2(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$u_1(x) - g(x),\ u_2(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Воспользуемся теперь неравенством, доказательство которого мы не приводим,

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p < \frac{|a|^p + |b|^p}{2}, \quad \text{если} \quad a \neq b, \quad a, b \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Если

$$D_x u_1 \neq D_x u_2$$

на множестве положительной меры Лебега, то мы можем воспользоваться неравенством (2.2) с $a = D_x u_1$ и $b = D_x u_2$. Теперь согласно определению $u_1(x)$ и $u_2(x)$ мы получим цепочку неравенств

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u_2(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \left|\frac{D_x u_1(x) + D_x u_2(x)}{2}\right| dx <$$
$$< \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u_1(x)|^p \, dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |D_x u_2(x)|^p \, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} |D_x u_2(x)|^p \, dx.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$D_x u_1(x) = D_x u_2(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x \in \Omega \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u_1(x) - u_2(x) = const \in W_0^{1,p}(\Omega) \Rightarrow const = 0.$$

Существование. Итак, пусть

$$I_0 = \inf_{v(x) \in W} \int\limits_{\Omega} |D_x v(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |D_x g(x)|^p \, dx,$$

поскольку $g(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ и $g(x) - g(x) = 0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, где

$$W \stackrel{def:}{=} \left\{v(x) \in W^{1,p}(\Omega) : \ v(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\},$$

в частности, $g(x) \in W$. Таким образом, $0 \leqslant I_0 < +\infty$.

Выберем минимизирующую последовательность $\{v_m(x)\} \subset W$ так, чтобы

$$\int\limits_{\Omega} |D_x v_m(x)|^p \, dx < I_0 + \frac{1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Докажем, что минимизирующая последовательность $\{v_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Действительно, во–первых,

$$\|D_x v_m(x)\|_p \leqslant I_0 + 1. \tag{2.3}$$

Во–вторых, $\{v_m(x) - g(x)\} \subset W_0^{1,p}$, поэтому имеем

$$\|v_m(x) - g(x)\|_p \leqslant K_{fr}\|D_x(v_m(x) - g(x))\|_p \leqslant \\ \leqslant K_{fr}\left[\|D_x v_m(x)\|_p + \|D_x g(x)\|_p\right] \leqslant \\ \leqslant K_{fr}\left[(I_0+1)^{1/p} + \|D_x g(x)\|_p\right].$$

Используя неравенство треугольника, получим отсюда

$$\|v_m\|_p \leqslant \|v_m - g\|_p + \|g\|_p \leqslant M_1.$$

Итак,

$$\|v_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant M < +\infty, \tag{2.4}$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

В силу рефлексивности банахова пространства $W^{1,p}(\Omega)$ существует такая подпоследовательность $\{v_{m_k}\} \subset \{v_m\}$, что

$$v_{m_k} \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad W^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m_k \to +\infty.$$

В частности,

$$v_{m_k} \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad m_k \to +\infty,$$

$$D_x v_{m_k} \rightharpoonup D_x u(x) \quad \text{слабо в} \quad \underbrace{L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes \cdots \otimes L^p(\Omega)}_{N}$$

при $m_k \to +\infty$. Прежде всего имеем

$$W_0^{1,p}(\Omega) \ni v_{m_k}(x) - g(x) \rightharpoonup u(x) - g(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

поскольку пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ слабо замкнуто [1])

Наконец, в силу слабой полунепрерывности снизу функционала $\psi_2(u)$ на банаховом пространстве $W^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$I_0 \leqslant \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p\, dx \leqslant \liminf_{m_k \to +\infty} \int\limits_\Omega |D_x v_{m_k}(x)|^p\, dx = I_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow I_0 = \int\limits_\Omega |D_x u(x)|^p\, dx.$$

Теорема доказана.

[1]) Поскольку является банаховым и рефлексивным.

## § 3. Слабый принцип максимума для слабых решений задачи Дирихле

Справедливо следующее утверждение:
Теорема 3. *Пусть* $u_1(x)$ *и* $u_2(x)$ *— это слабые решения задачи Дирихле класса* $W^{1,p}(\Omega)$, *т. е. имеют место следующие равенства*:

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u_k(x)|^{p-2} \left(D_x u_k(x), D_x\varphi(x)\right) \, dx = \int\limits_{\Omega} f_k(x)\varphi(x)\, dx, \quad k = 1, 2 \quad (3.1)$$

*для всех* $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *причем* $f_k(x) \in L^{p'}(\Omega)$. *Если выполнено неравенство*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega \qquad (3.2)$$

*и*

$$u_1(x) \leqslant u_2(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \qquad (3.3)$$

*т. е.*

$$(u_1(x) - u_2(x))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega), \qquad (3.4)$$

*тогда*

$$u_1(x) \leqslant u_2(x) \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega. \qquad (3.5)$$

Доказательство.
Вычитая равенство (3.1) для $u_2(x)$ из равенства (3.1) для $u_1(x)$, мы получим равенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x), D_x\varphi(x)\Big) \, dx =$$
$$= \int\limits_{\Omega} (f_1(x) - f_2(x))\varphi(x)\, dx \qquad (3.6)$$

для любого $\varphi(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Положим в этом равенстве

$$\varphi(x) = (u_1(x) - u_2(x))^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

и получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1(x)|^{p-2} D_x u_1(x) - |D_x u_2(x)|^{p-2} D_x u_2(x),$$
$$D_x (u_1(x) - u_2(x))^+\Big) \, dx \leqslant 0, \qquad (3.7)$$

из которого в силу неравенства (4.5) леммы 4 третьей тематической лекции мы отсюда для всех $p \in (1, +\infty)$ вытекает оценка

$$\int\limits_{\{u_1>u_2\}} \left(|D_x u_1(x)|^{p-2} + |D_x u_2(x)|^{p-2}\right) |D_x u_1(x) - D_x u_2(x)|^2 \, dx \leqslant 0, \tag{3.8}$$

где мы использовали обозначение

$$\{u_1 > u_2\} \stackrel{def:}{=} \{x \in \Omega : \; u_1(x) > u_2(x)\}.$$

Из неравенства (3.8) вытекает, что

$$D_x(u_1(x) - u_2(x))^+ = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega.$$

Откуда в силу неравенства Пуанкаре мы получим

$$(u_1(x) - u_2(x))^+ = 0 \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \Rightarrow u_1(x) \leqslant u_2(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$.

Теорема доказана.

## § 4. Метод монотонности в сочетании с методом Галеркина

Дадим определение.

Определение 4. *Отображение*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

*называется монотонным относительно скобок двойственности*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

*между сопряженными банаховыми пространствами* $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$, *если для всех* $u, v \in \mathbb{B}$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geqslant 0, \tag{4.1}$$

*и называется строго монотонным, если равенство в формуле* (4.1) *имеет место, тогда и только тогда, когда* $u = v$.

Для дальнейшего нам нужно ввести новое понятие *коэрцитивности*. Дадим определение.

Определение 5. *Оператор* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{4.2}$$

Докажем, что оператор псевдолапласиана является коэрцитивным. Действительно, согласно определению обобщенного $p$–лапласиана имеет место следующая формула:

$$\langle -\Delta_p u, u\rangle = \int\limits_\Omega |Du|^p\,dx = \|Du\|_p^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{4.3}$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Дадим сейчас определение очень полезного в приложениях $S^+$ свойства оператора $\Delta_p$ — псевдолапласиана.

Определение 6. *Будем говорить, что оператор $\Delta_p$ удовлетворяет так называемому $S^+$ свойству, если из того, что*

$$u_m \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega)$$

*и условия, что*

$$\limsup_{m\to+\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0, \tag{4.4}$$

*вытекает, что*

$$u_m \to u \quad \textit{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма.

Лемма 1. *Оператор $\Delta_p$ удовлетворяет $S^+$ свойству.*

Доказательство.

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Рассмотрим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, u_m - u\rangle &= \\ = \int\limits_\Omega \Big(|Du_m|^{p-2}Du_m - |Du|^{p-2}Du, Du_m - Du\Big) &\geqslant \\ \geqslant 2^{p-2}\int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p\,dx&,\end{aligned} \tag{4.5}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством из третьей тематической лекции. Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что

$$\langle \Delta_p u, u_m - u\rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{4.6}$$

поэтому переходя к пределу в неравенстве (4.5) в силу предельного свойства (4.4) получим, что

$$0 \geqslant \lim_{m\to+\infty} \int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p\,dx \geqslant 0.$$

Значит,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Лемма доказана.

Теперь мы приступим к доказательству слабой обобщенной разрешимости задачи Дирихле в смысле определения 1. Действительно, воспользуемся теперь методом Галеркина.

1. С этой целью заметим, что банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, т. е. в нем существует линейное счетное всюду плотное множество $\{w_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \tag{4.7}$$

причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\langle -\Delta_p u_m, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, m}. \tag{4.8}$$

2. Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы об остром угле. С этой целью рассмотрим следующий оператор

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = (\mathbb{T}_1(\mathbf{c}_m), ..., \mathbb{T}_m(\mathbf{c}_m)), \quad \mathbf{c}_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}).$$
$$\mathbb{T}_j(\mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, w_j \rangle - \langle f, w_j \rangle \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ в $\mathbb{R}^m$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, u_m \rangle - \langle f, w_m \rangle = \|Du_m\|_p^p - \langle f, w_m \rangle \geqslant \\ \geqslant \|Du_m\|_p^p - \|f\|_* \|Du_m\|_p = \|Du_m\|_p \left( \|Du_m\|_p^{p-1} - \|f\|_* \right) \geqslant 0\end{aligned}$$

при достаточно большом $r : \|Du_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|Du\|_p$ обозначена норма банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ :

$$\|Du\|_p \stackrel{def:}{=} \left( \int\limits_{\Omega} |Du|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u \rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

$\square$ Докажем его. Действительно, если $u = \vartheta$ — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{B}$, то неравенство выполняется. Пусть $u \neq \vartheta$, тогда в силу определения нормы $\|\cdot\|_*$ имеет место следующее равенство

$$\|f\|_* = \sup_{\|w\| \leqslant 1} |\langle f, w\rangle| \,,$$

из которого сразу же вытекает неравенство

$$|\langle f, w\rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Теперь возьмем в качестве $w$ величину

$$w = \frac{u}{\|u\|}$$

и подставим это выражение в предыдущее неравенство и получим искомое неравенство. $\boxtimes$

3. Осталось заметить, что на конечномерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$, что

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| \leqslant R,$$

т. е. алгебраическая система (4.8) имеет решение $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тем самым, у нас имеется последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений.

4. Здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

5. Прежде всего умножим равенство (4.8) на $c_{mj}$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle, \tag{4.9}$$

из которого в силу определения обобщенного $p$–лапласиана мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_m\|_p^p = \langle f, u_m\rangle \leqslant \|f\|_* \|Du_m\|_p$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|Du_m\|_p \leqslant \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому существует такая ее подпоследовательность $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, которая

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{4.11}$$

6. Теперь докажем, что выполнено свойство (4.4). Действительно, в силу (4.8) имеет место следующее равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle , \tag{4.12}$$

Выберем последовательность вида [1]

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} k_{mj} w_j \tag{4.13}$$

такую, что

$$v_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.14}$$

7. Умножим обе части равенства (4.8) на $k_{mj}$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle . \tag{4.15}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u \rangle = \\
&= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \\
&= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle f, v_m \rangle = \\
&= \langle f, u_m - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle \stackrel{def:}{=} \mathrm{I}_{1m} + \mathrm{I}_{2m}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Действительно, имеет место неравенство

$$|\mathrm{I}_{1m}| \leqslant |\langle f, u_m - v_m \rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{4.16}$$

поскольку

$$u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Оценим второе слагаемое $\mathrm{I}_{2m}$. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_{2m}| \leqslant |\langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle| \leqslant \|\Delta_p u_m\|_* \|u - v_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{4.17}$$

[1] Которая существует в силу того, что $\{w_j\}$ — это галеркинский базис банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$.

поскольку имеет место свойство (4.14) и, кроме того, так как имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_p u_m\|_* = \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} |\langle -\Delta_p u_m, \varphi\rangle| = \\
= \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left| \int_\Omega |Du_m|^{p-2}(Du_m, D\varphi)\,dx \right| \leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \int_\Omega |Du_m|^{p-1}|D\varphi|\,dx \leqslant \\
\leqslant \sup_{\|\varphi\|\leqslant 1} \left( \int_\Omega |Du_m|^p\,dx \right)^{1/p'} \left( \int_\Omega |D\varphi|^p\,dx \right)^{1/p} \leqslant \\
\leqslant \left( \int_\Omega |Du_m|^p\,dx \right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_*^p.
\end{aligned}
$$

Следовательно, имеет место свойство (4.4). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 и в силу $S^+$ свойства $p$–лапласиана получить следующий важный результат:

$$
u_{m_m} \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{4.18}
$$

8. Наша ближайшая задача доказать, что

$$
\Delta_p u_{m_m} \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{4.19}
$$

С этой целью нам нужно доказать так называемую *липшиц–непрерывность* оператора псевдолапласиана. Рассмотрим отдельно следующее выражение:

$$
\left| |\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \right| \quad \text{для любых} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n
$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку. Действительно, имеет место первая оценка

$$
\begin{aligned}
\left| |\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta \right| = \left| |\xi|^{p-2}[\xi - \eta] + \eta \left[ |\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2} \right] \right| \leqslant \\
\leqslant |\xi|^{p-2}|\xi - \eta| + (p-2)|\eta| \max\left\{ |\xi|^{p-3}, |\eta|^{p-3} \right\} |\xi - \eta|,
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

а теперь вторая

$$
\begin{aligned}
\left| |\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi \right| = \left| |\eta|^{p-2}[\eta - \xi] + \xi \left[ |\eta|^{p-2} - |\xi|^{p-2} \right] \right| \leqslant \\
\leqslant |\eta|^{p-2}|\eta - \xi| + (p-2)|\xi| \max\left\{ |\eta|^{p-3}, |\xi|^{p-3} \right\} |\eta - \xi|,
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \leqslant \min\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| + \\ + (p-2)\min\{|\xi|,|\eta|\}\frac{\max\left\{|\xi|^{p-2},|\eta|^{p-2}\right\}}{\min\{|\xi|,|\eta|\}}|\xi-\eta| = \\ = (p-1)\max\left\{|\xi|^{p-2},|\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| \quad (4.22)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 2$.

9. Теперь согласно определению нормы банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* = \sup_{\|w\|\leqslant 1} |\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, w\rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|w\|\leqslant 1}\left|\int_\Omega \left||Du|^{p-2}Du - |Du_m|^{p-2}Du_m\right||Dw|\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant (p-1)\sup_{\|w\|\leqslant 1}\int_\Omega |Du_m - Du|\max\left\{|Du|^{p-2},|Du_m|^{p-2}\right\}|Dw|\,dx = \\ = (p-1)\sup_{\|w\|\leqslant 1}\mathrm{I}, \quad (4.23)$$

где мы воспользовались неравенством (4.22).

10. Воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (4.23). Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{p}{p-2}, \quad p_3 = p, \quad r = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1.$$

И тогда получим следующее неравенство для выражения $\mathrm{I}$:

$$\mathrm{I} \leqslant \left(\int_\Omega |Du - Du_m|^p\,dx\right)^{1/p} \times \\ \times \left(\int_\Omega \max\{|Du|^p, |Du_m|^p\}\,dx\right)^{(p-2)/p}\left(\int_\Omega |Dw|^p\,dx\right)^{1/p}. \quad (4.24)$$

Таким образом из неравенств (4.23) и (4.24) вытекает следующая оценка

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* \leqslant \mu(\mathrm{R}_m)\|Du - Du_m\|_p, \quad (4.25)$$

$$\mu(\mathrm{R}_m) = c_1 \mathrm{R}_m^{p-2}, \quad \mathrm{R}_m = \max\left\{\|Du\|_p, \|Du_m\|_p\right\}.$$

В силу свойства (4.10) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(\mathrm{R}_m) \leqslant c_1 \max\left\{\|Du\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)}\right\},$$

т. е. ограничена величиной, которая не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Тем самым, мы в силу (4.18) и (4.25) приходим к выводу о том, что

$$\Delta_p u_m \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega). \tag{4.26}$$

11. Осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (4.8) и получить с учетом (4.26) следующий результат:

$$\langle -\Delta_p u, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, +\infty}, \tag{4.27}$$

из которого в силу плотности линейного счетного семейства $\{w_j\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ является слабым решением задачи Дирихле в смысле определения 1.

12. Осталось доказать единственность слабого решения. Справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle = \\ = \int\limits_{\Omega} \Big( |Du_2|^{p-2} Du_2 - |Du_1|^{p-2} Du_1, Du_2 - Du_1 \Big)\, dx \geqslant \\ \geqslant 2^{2-p} \int\limits_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^p\, dx.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Теперь возьмем в неравенстве (4.28) в качестве $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ два произвольных слабых решения задачи Дирихле в смысле определения 2, но тогда из неравенства (4.28) вытекает, равенство

$$\int\limits_{\Omega} |Du_1 - Du_2|^p\, dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность слабого решения задачи Дирихле, понимаемого в слабом смысле определения 1. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. *Для всякой $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ существует единственное слабое обобщенное решение $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ задачи Дирихле, понимаемой в слабом смысле определения* 1.

В заключение этого параграфа приведем без доказательства важный результат Браудера и Минти.

Теорема 5. *Пусть оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Тогда существует обратный оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$, и этот обратный оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен.*

Отметим, что обобщенный оператор $p$–Лапласа удовлетворяет всем условиям теоремы Браудера–Минти.

## § 5. Метод слабых верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного неоднородного уравнения $p$–лапласиана в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$

$$-\Delta_p u = f(x,u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \quad 2 < p < 3, \tag{5.1}$$

где

$$f(x,u) : \overline{\Omega} \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

— это непрерывная функция и

$$|f(x,u)| \leqslant a_1 + b_1 |u|^{q+1}, \tag{5.2}$$

$$0 < q + 2 \leqslant p^* = \frac{3p}{3-p}$$

где постоянные $a_1, b_1 \geqslant 0$ и

$$a_1 + b_1 > 0.$$

Причем либо

$$f_u'(x,u) \geqslant 0 \quad \text{либо} \quad |f_u'(x,u)| \leqslant a \tag{5.3}$$

для всех $x \in \Omega$ и $u \in \mathbb{R}^1$.

Определение 7.

(i) *Функция $\overline{U} \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ называется слабым верхним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_\Omega \left( \left| D\overline{U} \right|^{p-2} D\overline{U}, Dv \right) \, dx \geqslant \int\limits_\Omega f(x, \overline{U}) v \, dx \tag{5.4}$$

*для любой функции $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \geqslant 0$ почти всюду.*

(ii) *Функция $\underline{U} \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ называется слабым нижним решением задачи* (5.1), *если*

$$\int\limits_\Omega \left( |D\underline{U}|^{p-2} D\underline{U}, Dv \right) \, dx \leqslant \int\limits_\Omega f(x, \underline{U}) v \, dx \tag{5.5}$$

*для любой функции $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \geqslant 0$ почти всюду.*

(iii) *Функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ *называется слабым решением задачи* (5.1), *если*

$$\int_\Omega \left( |Du|^{p-2} Du, Dv \right) dx = \int_\Omega f(x,u) v \, dx \tag{5.6}$$

*для любой функции* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{U}, \underline{U} \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}(\overline{\Omega})$, то из (5.4) и (5.5) получаем

$$-\Delta_p \overline{U} \geqslant f(x, \overline{U}), \quad -\Delta_p \underline{U} \leqslant f(x, \underline{U}) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений. [1)]

Теорема 6. *Пусть существует верхнее* $\overline{U}$ *и нижнее* $\underline{U}$ *решения задачи* (5.1) *такие, что*

$$\underline{U} \leqslant 0, \quad \overline{U} \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \quad \textit{в смысле следов,} \quad \underline{U} \leqslant \overline{U} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega. \tag{5.7}$$

*Тогда существует слабое решение* $u$ *задачи* (5.1) *такое, что*

$$\underline{U} \leqslant u \leqslant \overline{U} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

*Шаг 1.* Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(x,z) + \lambda z \tag{5.8}$$

неубывающее для всех $x \in \Omega$. Такой выбор возможен в силу (5.3).

Теперь запишем $u_0 = \underline{U}$ и при заданных $u_k$ $(k = 0, 1, 2...)$ индуктивно определим $u_{k+1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ как единственное слабое решение краевой задачи

$$-\Delta_p u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(x, u_k) + \lambda u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_{k+1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{5.9}$$

*Шаг 2.* Покажем, что

$$\underline{U} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \cdots \quad \text{п.в.} \quad \Omega. \tag{5.10}$$

---

[1)] Идея доказательства этого утверждения такая — пусть в какой–то точке $x_0 \in \Omega$ выражение $-\Delta_p \overline{U} < f(x, \overline{U})$, но тогда в силу непрерывности этого выражения и в некоторой замкнутой ее окрестности знак будет тот же. Теперь достаточно взять $v(x) \geqslant 0$ с носителем, лежащим в этой замкнутой окрестности и получить противоречие с определением слабого верхнего решения $\overline{U}(x)$.

1. Для этого сначала заметим, что в силу (5.9) при $k = 0$

$$\int\limits_{\Omega} \left( \left( |Du_1|^{p-2} Du_1, Dv \right) + \lambda u_1 v \right) dx = \int\limits_{\Omega} (f(x, u_0) + \lambda u_0) \, v \, dx \qquad (5.11)$$

для любой $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Вычитая (5.11) из (5.5), получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} \left[ (|Du_0|^{p-2} Du_0 - |Du_1|^{p-2} Du_1, Dv) + \lambda(u_0 - u_1, v) \right] dx \leqslant 0, \quad u_0 = \underline{U},$$

и полагая

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$

находим

$$\int\limits_{\Omega} \Big( |Du_0|^{p-2} Du_0 - |Du_1|^{p-2} Du_1,$$
$$, D(u_0 - u_1)^+ + \lambda(u_0 - u_1)(u_0 - u_1)^+ \Big) \, dx \leqslant 0. \qquad (5.12)$$

Однако,

$$D(u_0 - u_1)^+ = \begin{cases} D(u_0 - u_1) & \text{почти всюду на} \quad \{u_0 \geqslant u_1\}, \\ 0 & \text{почти всюду на} \quad \{u_1 \geqslant u_0\}. \end{cases}$$

Кроме того, воспользуемся неравенством (4.2) леммы 4 третьей тематической лекции и получить неравенство

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left( |Du_0|^{p-2} Du_0 - |Du_1|^{p-2} Du_1, Du_0 - Du_1 \right) dx \geqslant$$
$$\geqslant 2^{2-p} \int\limits_{u_0 \geqslant u_1} |Du_0 - Du_1|^p \, dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left[ 2^{2-p} \, |D(u_0 - u_1)|^p + \lambda(u_0 - u_1)^2 \right] dx \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

2. Теперь по индукции предположим, что

$$u_{k-1}(x) \leqslant u_k(x) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.13}$$

Из (5.9) находим

$$\int_\Omega \left[\left(|Du_{k+1}|^{p-2}\, Du_{k+1}, Dv\right) + \lambda u_{k+1} v\right] dx = \\ = \int_\Omega \left(f(x, u_k) + \lambda u_k\right) v\, dx \tag{5.14}$$

и

$$\int_\Omega \left[\left(|Du_k|^{p-2}\, Du_k, Dv\right) + \lambda u_k v\right] dx = \\ = \int_\Omega \left(f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}\right) v\, dx \tag{5.15}$$

для любых $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v \equiv (u_k - u_{k+1})^+,$$

находим

$$\int_{u_k \geqslant u_{k+1}} \left[2^{2-p}\, |D(u_k - u_{k+1})|^p + \lambda\, (u_k - u_{k+1})^2\right] dx \leqslant \\ \leqslant \int_\Omega \left[(f(x, u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(x, u_k) + \lambda u_k)\right] (u_k - u_{k+1})^+\, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (5.13) и (5.8). Поэтому $u_k \leqslant u_{k+1}$ почти всюду в $\Omega$, как и утверждалось.

*Шаг 3.* Теперь покажем, что

$$u_k \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad (k = 0, 1, 2 \ldots). \tag{5.16}$$

При $k = 0$ (5.16) верно в силу (5.7). Пусть для некоторого $k$

$$u_k \leqslant \overline{U} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{5.17}$$

Вычитая (5.4) из (5.14) и полагая

$$v \equiv \left(u_{k+1} - \overline{U}\right)^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1}\geqslant\overline{U}} \left[2^{2-p}\left|D(u_{k+1}-\overline{U})\right|^p+\lambda(u_{k+1}-\overline{U})^2\right]\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\left[(f(x,u_k)+\lambda u_k)-(f(x,\overline{U})+\lambda\overline{U})\right]\left(u_{k+1}-\overline{U}\right)^+\,dx\leqslant 0$$

в силу (5.17) и (5.8). Таким образом, $u_{k+1}\leqslant\overline{U}$ почти всюду в $\Omega$.

*Шаг 4.*

1. Ввиду (5.10) и (5.16)

$$\underline{U}\leqslant\cdots\leqslant u_k\leqslant u_{k+1}\leqslant\cdots\leqslant\overline{U}\quad\text{почти всюду в}\quad\Omega. \tag{5.18}$$

Поэтому

$$u(x)\equiv\lim_{k\to+\infty}u_k(x) \tag{5.19}$$

существует для почти всюду $x\in\Omega$. Кроме того,

$$u_k\to u\quad\text{сильно в}\quad L^{q+2}(\Omega)\subset L^2(\Omega),\quad q\geqslant 0 \tag{5.20}$$

что гарантируется теоремой о мажорируемой сходимости и (5.18).

□ Действительно, имеем

$$\int\limits_{\Omega}|u_k(x)-u(x)|^{q+2}\,dx\leqslant c(q)\int\limits_{\Omega}|V(x)|^{q+2}\,dx<+\infty,$$

$$V(x)\stackrel{def:}{=}\max\left\{|\underline{U}(x)|,|\overline{U}(x)|\right\}\in\mathbb{C}(\overline{\Omega}).$$

В совокупности с (5.19) получаем утверждение. ⊠

2. Наконец, в силу того, что функция $f(x,u)$ каратеодориева с условием роста (5.3), то соответствующий оператор Немыцкого

$$N_f(u):L^{q+2}(\Omega)\to L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)$$

является непрерывным, т. е., в частности, в силу (5.20)

$$\|N_f(u_n)-N_f(u)\|_{(q+2)/(q+1)}\to+0\quad\text{при}\quad n\to+\infty. \tag{5.21}$$

3. Из (5.9) скалярным в смысле скобок двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle:W^{-1,p'}(\Omega)\otimes W_0^{1,p}(\Omega)\to\mathbb{R}^1$$

умножением на $u_{k+1}\in W_0^{1,p}(\Omega)$ получаем равенство

$$\langle-\Delta_p u_{k+1}+\lambda u_{k+1},u_{k+1}\rangle=\langle f(x,u_k)+\lambda u_k,u_{k+1}\rangle\,.$$

После «интегрирования по частям» отсюда получим следующую цепочку выражений:

$$\|Du_{k+1}\|_p^p + \lambda\|u_{k+1}\|_2^2 = \int\limits_\Omega f(x, u_k)u_{k+1}\,dx + \lambda\int\limits_\Omega u_k u_{k+1}\,dx.$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left|\int\limits_\Omega f(x, u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant a_1\int\limits_\Omega |u_{k+1}|\,dx + b_1\int\limits_\Omega |u_k|^{q+1}|u_{k+1}|\,dx \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c_1(\varepsilon) + b_1\|u_k\|_{q+2}^{q+1}\|u_{k+1}\|_{q+2}. \quad (5.22)$$

Заметим, что

$$\underline{U}(x) \leqslant u_k(x) \leqslant \overline{U}(x) \quad \text{для п. вс.} \quad x \in \Omega,$$

причем

$$\underline{U}(x), \overline{U}(x) \in W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega).$$

Поэтому

$$|u_k(x)| \leqslant V(x) \stackrel{def:}{=} \max\left\{|\underline{U}(x)|\,, \left|\overline{U}(x)\right|\right\} \in L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Тогда имеем

$$b_1\|u_k\|_{q+2}^{q+1}\|u_{k+1}\|_{q+2} \leqslant b_1\|V(x)\|_{q+2}^{q+1}K_{fr}\|Du_{k+1}\|_p, \quad (5.23)$$

где $K_{fr}$ — это постоянная Фридрихса. Далее применяя трехпараметрическое с малым $\varepsilon > 0$ к правой части в (5.23), мы получим неравенство

$$\left|\int\limits_\Omega f(x, u_k)u_{k+1}\,dx\right| \leqslant c_2(\varepsilon) + \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + \varepsilon\|Du_{k+1}\|_p^p. \quad (5.24)$$

Наконец, справедливо очевидное неравенство

$$\lambda\left|\int\limits_\Omega u_k u_{k+1}\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c(\varepsilon)\|u_k\|_2^2 \leqslant \varepsilon\|u_{k+1}\|_2^2 + c(\varepsilon)\|V(x)\|_2^2. \quad (5.25)$$

В силу (5.22) и неравенств (5.24), (5.25) мы получим неравенство

$$(1-\varepsilon)\|Du_{k+1}\|_p^p + (\lambda - 2\varepsilon)\|u_{k+1}\|_2^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_3(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0, \min\{1, \lambda/2\}) \,. \quad (5.26)$$

Из оценки (5.26) мы приходим к выводу о том, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поскольку банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ рефлексивно [1], то существует такая подпоследовательность $\{u_{k_j}\} \subset \{u_k\}$, что

$$u_{k_j}(x) \rightharpoonup u(x) \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Как и в предыдущем параграфе, можно доказать, что в силу $S^+$–свойства $p$–Лапласиана

$$u_{k_j}(x) \to u(x) \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty. \text{ [2]}$$

Отсюда, как и ранее, вытекает, что

$$\Delta_p u_{k_j}(x) \to \Delta_p u(x) \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

*Шаг 5.* Наконец, проверим, что $u$ — это слабое решение задачи (5.1). Для этого фиксируем $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Тогда из (5.9) находим

$$\int\limits_{\Omega} \left[ \left( |Du_{k_j}|^{p-2} Du_{k_j}, Dv \right) + \lambda u_{k_j} v \right] dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left( f(x, u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1} \right) v \, dx. \quad (5.27)$$

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(x, u_{k_j-1}) \to f(x, u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega),$$

$$u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

и поэтому из (5.27) получим, что имеет место предельное равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left[ \left( |Du|^{p-2} Du, Dv \right) + \lambda uv \right] dx = \int\limits_{\Omega} (f(x,u) + \lambda u) \, v \, dx.$$

Сокращая член, содержащий $\lambda$, приходим к требуемому равенству

$$\int\limits_{\Omega} \left( |Du|^{p-2} Du, Dv \right) dx = \int\limits_{\Omega} f(x,u) v \, dx \quad \text{для всех} \quad v(x) \in H_0^1(\Omega).$$

Что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

---

[1] А значит, слабо замкнуто.

[2] В частности, $u_{k_j} \to u(x)$ сильно в $L^2(\Omega)$.

## § 6. Метод Лере–Шаудера. Слабые решения

Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} -\Delta_p u \equiv -\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) = f(x,u) & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Введем обозначение

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{если} \quad p < N, \\ \infty, & \text{если} \quad p \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является Каратеодориевой и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,s)| \leqslant c|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \tag{6.2}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $q \in (1, p^*)$, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, p^*)$ гарантирует компактность вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Теперь сопоставим Каратеодориевой функции $f(x,u)$ оператор Немыцкого $N_f \equiv f(x,u(x))$. Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \xrightarrow{N_f} L^{q'}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого $N_f$ является компактным оператором

$$N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega).$$

Определение 8. *Слабым решением задачи* (6.1) *называется функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle = \langle N_f u, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{6.3}$$

*где* $\langle \cdot,\cdot\rangle$ *— скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

является ограниченным и непрерывным. Поэтому (6.3) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f u, \tag{6.4}$$

с компактным оператором

$$\mathbb{T}(\cdot) \stackrel{def:}{=} (-\Delta_p)^{-1} N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega). \tag{6.5}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$S = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \,\middle|\, u = \alpha \mathbb{T}(u) \text{ для некоторого } \alpha \in [0,1] \right\}.$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle (-\Delta_p)\, \mathbb{T}(u), \mathbb{T}(u) \rangle = \langle N_f u, \mathbb{T}(u) \rangle =$$
$$= \int\limits_{\Omega} f(x, u(x)) \mathbb{T}(u)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} \big( c|u|^{q-1} + b(x) \big)\, |\mathbb{T}(u)|\, dx.$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha \mathbb{T}(u)$ с некоторым $\alpha \in [0,1]$ мы имеем цепочку неравенств

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\alpha^{q-1} \|\mathbb{T}(u)\|^q_q + \|b\|_{q'} \|\mathbb{T}(u)\|_q \leqslant$$
$$\leqslant c_1^q \alpha^{q-1} \|\mathbb{T}(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_1 \|b\|_{q'} \|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c_1^q \|\mathbb{T}(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_1 \|b\|_{q'} \|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

где $c_1$ — это постоянная вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{T}(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - K_1 \|\mathbb{T}(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} - K_2 \|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant 0 \tag{6.6}$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (6.6) при $q \in \in (1, p)$ вытекает существует такая постоянная $a \geqslant 0$, что

$$\|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant a.$$

Отсюда вытекает ограниченность $S$ поскольку

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \alpha \|\mathbb{T}(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant a. \quad \boxtimes$$

Отметим, что всегда $p < p^*$.

Таким образом, в силу следствия из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

Теорема 7. *Если каратеодориева функция* $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *удовлетворяет* (6.2) *с* $q \in (1, p)$, *тогда оператор* $(-\Delta_p)^{-1} N_f$ *имеет неподвижную точку в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *или, что эквивалентно, задача* (6.3) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

## § 7. Метод Лере–Шаудера. Классические решения

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство. Заметим, что справедлива следующий вариант теоремы Лере–Шаудера о существовании неподвижной точки компактного отображения, зависящего от параметра:
Теорема 8. *Отображение* $T(u, \sigma)$

$$T(u, \sigma) : \mathbb{B} \otimes [0, 1] \to \mathbb{B}, \tag{7.1}$$

*удовлетворяет следующим условиям*:
(i) $T$ — *это компактное отображение;*
(ii) $T(u, 0) = 0$ *для всех* $u \in \mathbb{B}$;
(iii) *Существует постоянная* $M > 0$ *такая, что если*

$$u = T(u, \sigma) \quad \text{для некоторого} \quad \sigma \in [0, 1], \quad u \in \mathbb{B},$$

*то отсюда вытекает, что* $\|u\| \leqslant M$. [1])
*Тогда отображение* $T(\cdot, 1)$ *имеет неподвижную точку, т. е. существует* $u \in \mathbb{B}$, *что*

$$T(u, 1) = u.$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\operatorname{div}(a(u) D_x u) + b(u) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{7.2}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{7.3}$$

где

$$a(u) = (u^2 + 1)^{m/2}, \quad b(u) = |u|^{\gamma - 1} u, \quad f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega}) \tag{7.4}$$

при $m > 0$, $\gamma > 1$. Справедлива следующая теорема:
Теорема 9. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$. *Тогда*
(i) *Существуют постоянные* $0 < \beta < 1$ *и* $M > 0$, *не зависящие от* $u(x)$, *что для любого решения* $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ *задачи Дирихле* (7.2), (7.3) *имеет место априорная оценка*

$$|u|_{1+\beta;\Omega} \leqslant M. \tag{7.5}$$

(ii) *Задача Дирихле* (7.2), (7.3) *имеет решение класса* $u(x) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

---

[1]) Постоянная $M$ на зависит от $u \in \mathbb{B}$ и от $\sigma \in [0, 1]$.

Доказательство. Отметим, что свойство (i) доказывается достаточно сложно и относится к тонкой технике получения априорных оценок типа классических априорных оценок Шаудера [1]. Поэтому предполагаем свойство (i) выполненным.

*Шаг 1.* Выберем $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$. Для любого $v(x) \in \mathbb{B}$ и $\sigma \in [0, 1]$ рассмотрим задачу

$$-\sigma \operatorname{div}(a(v)D_x u) - (1-\sigma)\Delta u + \sigma b(v) = \sigma f(x), \quad x \in \Omega, \tag{7.6}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{7.7}$$

В силу классических априорных оценок Шаудера линейная относительно $u(x)$ задача (7.6), (7.7) имеет единственное решение класса $u(x) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Определим отображение

$$T : (v, \sigma) \in \mathbb{B} \otimes [0, 1] \to u(x) \in \mathbb{B}.$$

Теперь наша задача проверить, что выполнены свойства (i)–(iii) указанного отображения $T(v, \sigma)$ из теоремы Лере–Шаудера 8.

*Шаг 2.* Поскольку пространство $\mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ вполне непрерывно вложено в $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, то оператор $T$ является компактным.

*Шаг 3.* Свойство (ii). Пусть $\sigma = 0$, тогда задача (7.6), (7.7) примет следующий вид:

$$-\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Эта задача, понимаемая в классическом смысле, имеет лишь тривиальное решение. Значит, свойство (ii) теоремы Лере–Шаудера 8 выполнено:

$$T(v, 0) = 0 \quad \text{для всех} \quad v(x) \in \mathbb{B}.$$

*Шаг 4.* Наконец, предположим, что при некотором $\sigma \in [0, 1]$ существует неподвижная точка $u(x) \in \mathbb{B}$ отображения $T(\sigma, v)$. Именно, функция $u(x)$ удовлетворяет задаче

$$-\sigma \operatorname{div}(a(u)D_x u) - (1-\sigma)\Delta u + \sigma b(u) = \sigma f(x), \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad x \in \partial\Omega.$$

В соответствии с утверждением (i) теоремы 9 существует постоянная $0 < \beta < 1$ и константа $M > 0$, не зависящая от $u(x)$ и $\sigma$ такая, что

$$|u|_{1+\beta;\Omega} \leqslant M. \tag{7.8}$$

Теперь перепишем уравнение для $u(x)$ в следующей форме:

$$-\left(\sigma a(u) + 1 - \sigma\right)\Delta u = \sigma\left(a'(u)|D_x u|^2 - b(u) + f(x)\right). \tag{7.9}$$

---

[1] Даже получение классической оценки Шаудера для уравнения Пуассона непросто.

В силу априорной оценки (7.8) коэффициенты уравнения (7.9) принадлежат классу $\mathbb{C}^{\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. В соответствии с теорией Шаудера линейных уравнений справедлива априорная оценка

$$|u|_{2+\alpha\beta;\Omega} \leqslant K, \tag{7.10}$$

где постоянная $K > 0$ на зависит от $u$, но систематически зависит от постоянной $M$ из оценки (7.8). Но в силу очевидного вполне непрерывного [1] вложения

$$\mathbb{C}^{2+\alpha\beta}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{C}^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$$

мы получим, что

$$\|u\| \stackrel{def:}{=} |u|_{1+\alpha;\Omega} \leqslant M < +\infty,$$

где постоянная $M > 0$ и не зависит от $u$ и от $\sigma$.

Итак, в силу теоремы Лере–Шаудера 8 существует такое $u(x) \in \mathbb{B}$, что

$$T(u, 1) = u \in \mathbb{C}^{1+\alpha}(\Omega).$$

Далее используя классические априорные оценки Шаудера для линейных эллиптических уравнений можно получить, что на самом деле указанная неподвижная точка $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

[1] т. е. компактного и непрерывного.

Тематическая лекция 7

# ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА И С. Л. СОБОЛЕВА

В этой лекции мы

## § 1. Параболические пространства Гельдера

Пусть $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это область с гладкой границей $\partial\Omega$. Далее символом $\partial' D$ мы обозначаем параболическую границу области $D$ [1])

$$\partial' D \overset{def:}{=} \overline{B} \cup S, \quad B \overset{def:}{=} \Omega \otimes \{t=0\}, \quad S \overset{def:}{=} \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$B_T \overset{def:}{=} \Omega \otimes \{t=T\}, \quad \partial B_T \overset{def:}{=} \partial\Omega \otimes \{t=T\}.$$

Полный курс теории линейных параболических уравнений выложен также на сайте кафедры математики в разделе «Специальные курсы//Параболические уравнения.»

Ниже мы использовали следующие обозначения:

$$|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \overset{def:}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{2+\alpha;1+\alpha/2;D} < +\infty, \quad (1.1)$$

где

$$[u]_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \overset{def:}{=} [u_t]_{\alpha,\alpha/2;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\alpha,\alpha/2;D}, \quad (1.2)$$

$$[u]_{\alpha,\alpha/2;D} \overset{def:}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^{\alpha}(z_1, z_2)}, \text{ [2])} \quad (1.3)$$

$$|u|_{\alpha,\alpha/2;D} \overset{def:}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\alpha,\alpha/2;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \quad (1.4)$$

---

[1]) Напомним, что полная граница $\partial D = \overline{B}_T \cup \overline{B} \cup S$.

[2]) Параболическое расстояние: $\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}$.

для $\alpha \in (0,1]$. Через $\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ мы обозначаем пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\alpha,\alpha/2;D} < +\infty$, а через $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ определим как банахово пространство вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в $D$ и таких, что конечна *норма* $|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < +\infty$.

В дальнейшем нам потребуется следующие оценки величины $|h|_{\alpha,\alpha/2;D}$ для функции $h(x,t,u) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{D}\otimes\mathbb{R}^1)$ при условии, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. Прежде всего имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
&|h|_{\alpha,\alpha/2;D} = \\
&= |h|_{0;D} + \sup_{(z_1,u_1)\neq(z_1,u_2)} \frac{|h(x_1,t_1,u_1)-h(x_2,t_2,u_2)|}{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}\frac{\rho^\alpha((z_1,u_1),(z_2,u_2))}{\rho^\alpha(z_1,z_2)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant |h|_{0;D} + K_1\Bigl(1+|u_t|_{0;D}+\sum_{i=1}^N |u_{x_i}|_{0;D}\Bigr) \leqslant \\
&\qquad \leqslant |h|_{0;D} + K_1 + \varepsilon|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c_1(\varepsilon)|u|_{0;D}, \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

$$
\rho(z_1,z_2) \stackrel{def:}{=} |x_1-x_2| + |t_1-t_2|^{1/2},
$$

$$
\rho((z_1,u_1),(z_2,u_2)) \stackrel{def:}{=} \rho(z_1,z_2) + |u_1-u_2|,
$$

где мы воспользовались известным интерполяционным неравенством из книги Н. В. Крылова [1]:

$$
\begin{aligned}
&|u_{xx}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + |u_x|_{\alpha,\alpha/2;D} + |u|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \varepsilon|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c(\varepsilon)|u|_{0;D} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

для всех $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ и всех $\varepsilon > 0$.

## § 2. Интеграл Бохнера

Рассмотрим теперь банаховы пространства функций $u(t) \in L^q(0,T;\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — это банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$. Для аккуратного введения этого пространства нам нужно сначала ввести понятие *интеграла Бохнера*.

Перейдем к построению интеграла Бохнера. Как и в случае интеграла Лебега пусть у нас имеется тройка $([0,\mathrm{T}],\mathcal{M},\mu)$ — это измеримое пространство, состоящее из отрезка $[0,\mathrm{T}] \subset \mathbb{R}^1_+$, $\sigma-$алгебры его подмножеств $\mathcal{M}$ и положительной меры Лебега $\mu$, определенной на $\mathcal{M}$. Конечно, как и интеграл Лебега интеграл Бохнера можно строить и для множеств не только на прямой $\mathbb{R}^1$. Но нас в дальнейшем будет интересовать интеграл Бохнера на «временном» отрезке $[0,\mathrm{T}]$. Дадим следующее определение.

О п р е д е л е н и е 1. *Простой функцией* $h(t)$ *на сегменте* $[0, \mathrm{T}]$ *со значениями в банаховом пространстве* $\mathbb{B}$ *мы назовем следующую функцию*:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_i(t) \quad b_i \in \mathbb{B}, \tag{2.1}$$

*где для каждого* $i = \overline{1, n}$ *функция* $\chi_i(t)$ — *это характеристическая функция некоторого множества* $S_i \in \mathcal{M}$:

$$\chi_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in S_i; \\ 0 & \text{при} \quad t \in [0, \mathrm{T}] \backslash S_i. \end{cases}$$

*Причем* $S_i \cap S_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$.

Теперь мы можем определить интеграл Бохнера для простых функций. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Интегралом Бохнера от простой функции* $h(t)$ *называется следующая величина*:

$$\int\limits_{0}^{\mathrm{T}} h(t)\, \mu(dt) = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(S_i). \tag{2.2}$$

Наконец, можно ввести интеграл Бохнера для произвольной $\mathbb{B}-$ $-$значной функции $f(t)$. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 3. *Интегралом Бохнера от произвольной* $\mathbb{B}-$ $-$*значной функции называется следующая величина*:

$$\int\limits_{0}^{\mathrm{T}} f(t)\, \mu(dt) = \lim_{n \to +\infty} \int\limits_{0}^{\mathrm{T}} h_n(t) \mu(dt), \tag{2.3}$$

*где предел понимается в сильном смысле банахова пространства* $\mathbb{B}$ *при условии, что существует такая последовательность* $\{h_n(t)\}$ *простых функций, сходящаяся* $\mu$ *почти всюду на* $[0, \mathrm{T}]$ *сильно в* $\mathbb{B}$ *к функции* $f(t)$, *причем*

$$\lim_{n \to +\infty} \int\limits_{0}^{\mathrm{T}} \|f(t) - h_n(t)\|\, \mu(dt) = 0. \tag{2.4}$$

Здесь есть один тонкий момент. Мы пока не доказали, что скалярная функция

$$\|f(t) - h_n(t)\|,$$

стоящая под знаком интеграла Лебега (2.4) $\mu-$измерима на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Действительно, это необходимо проверить. Для ответа на этот вопрос мы немного углубимся в теорию измеримости $\mathbb{B}$—значных функций.

Дадим определение сильной измеримости.

Определение 4. *$\mathbb{B}$—значная функция $f(t)$ называется $\mu$—сильно измеримой на отрезке $[0, \mathrm{T}]$, если существует последовательность $\{h_n(t)\}$ простых функций на отрезке $[0, \mathrm{T}]$, сильно сходящаяся в $\mathbb{B}$ к $f(t)$ $\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$.*

Теперь мы можем доказать важную теорему, принадлежащую Бохнеру.

Теорема 1. *Для того чтобы сильно $\mu$—измеримая функция $f(t)$ была интегрируемой по Бохнеру на отрезке $[0, \mathrm{T}]$, необходимо и достаточно, чтобы $\|f(t)\|$ была $\mu$—интегрируемой на этом же отрезке.*

Доказательство.

*Шаг 1. Необходимость.* Имеет место следующее неравенство треугольника:

$$\|f(t)\| \leqslant \|h_n(t)\| + \|f(t) - h_n(t)\|.$$

Из этого неравенства вытекает $\mu$—интегрируемость функции $\|f(t)\|$.

*Шаг 2. Достаточность.* Пусть $\{h_n(t)\}$ это последовательность простых функций, $\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$ сильно в $\mathbb{B}$ сходящаяся к функции $f(t)$. Рассмотрим новую последовательность простых функций:

$$w_n(t) = \begin{cases} h_n(t), & \text{при} \quad \|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + n^{-1}\right); \\ 0, & \text{при} \quad \|h_n(t)\| > \|f(t)\| \left(1 + n^{-1}\right). \end{cases}$$

Ясно, что

$$\lim_{n \to +\infty} \|f(t) - w_n(t)\| = 0$$

$\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Кроме того,

$$\|f(t) - w_n(t)\| \leqslant 2\|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Теперь в силу $\mu$—интегрируемости функции $\|f(t)\|$ можно воспользоваться теоремой Лебега и доказать, что

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - w_n(t)\| \, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим еще некоторые свойства интеграла Бохнера. Во-первых, интеграл Бохнера обладает свойством линейности.

Л е м м а 1. *Пусть функции* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *интегрируемы по Бохнеру, тогда для любых постоянных* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^1$ *имеет место следующее равенство*:

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]\ \mu(dt) = \alpha_1 \int\limits_0^{\mathrm{T}} f_1(t)\,\mu(dt) + \alpha_2 \int\limits_0^{\mathrm{T}} f_2(t)\,\mu(dt).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Для доказательства этого утверждения достаточно взять соответствующие аппроксимирующие последовательности и перейти к пределу, поскольку для простых функций это равенство имеет место.

Л е м м а д о к а з а н а.

Кроме того, имеет место важное в приложениях неравенство.

Л е м м а 2. *Пусть функция* $f(t)$ $\mu$*−интегрируема по Бохнеру на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$, *тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) \right\| \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t)\|\,\mu(dt).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Надо взять аппроксимирующую последовательность простых функций $\{h_n(t)\}$, для которых указанное неравенство имеет место, а затем перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить требуемое неравенство. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) \right\| \leqslant \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) - \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) - \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|h_n(t)\|\,\mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mu(dt) - \int\limits_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\,\mu(dt) \right\| + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - h_n(t)\|\,\mu(dt) + \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t)\|\,\mu(dt).$$

Теперь надо перейти к пределу при $n \to +\infty$, воспользовавшись определением 3.

Л е м м а д о к а з а н а.

Наконец, справедлива следующая важная лемма.

Л е м м а 3. *Пусть функция* $f(t)$ *интегрируема по Бохнеру на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$, *тогда функция* $u(t)$, *определенная формулой*

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\mu(ds), \tag{2.5}$$

*является сильно дифференцируемой для почти всех* $t \in [0, \mathrm{T}]$.

Доказательство.

1. Итак, пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3, причем без ограничения общности можно предположить, что имеет место следующее неравенство (сравни с теоремой 2):

$$\|h_n(t)\| \leqslant \|f(t)\| \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

В силу определения 3

$$h_n(t) \to f(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}$$

$\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, \mu(ds) - f(t_0) = \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} [f(s) - h_n(s)]\ \mu(ds) + \\ + \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\, \mu(ds) - f(t_0).$$

Отсюда получаем следующую цепочку неравенств:

$$\left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, \mu(ds) - f(t_0) \right\| \leqslant \frac{1}{|t - t_0|} \int\limits_{t_0}^{t} \|f(s) - h_n(s)\|\ \mu(ds) + \\ + \left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} h_n(s)\, \mu(ds) - h_n(t_0) \right\| + \|h_n(t_0) - f(t_0)\| = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3. \tag{2.6}$$

2. Прежде всего отметим, что в силу того, что $h_n(t)$ — это простая функция, то выражение $\mathrm{I}_2$ равно нулю $\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$ при достаточно малой длине отрезка $|t - t_0|$. Выражение для $\mathrm{I}_1$ в пределе при $t \to t_0$ дает следующее предельное равенство:

$$\lim_{t \to t_0} \mathrm{I}_1 = \|h_n(t_0) - f(t_0)\|$$

$\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$. Таким образом, из (2.6) получим в пределе при $t \to t_0$ следующее неравенство:

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{1}{t - t_0} \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, \mu(ds) - f(t_0) \right\| \leqslant 2\, \|h_n(t_0) - f(t_0)\| \tag{2.7}$$

$\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$.

3. Теперь достаточно перейти к пределу при $n \to +\infty$ и получить из неравенства (2.7) следующее равенство:

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} f(s)\, \mu(ds) - f(t_0) \right\| = 0$$

$\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$.

Лемма доказана.

Имеет место такое утверждение.

Лемма 4. *Пусть $f(t)$ функция, интегрируемая по Бохнеру. Тогда для каждого $f^* \in \mathbb{B}^*$ имеет место следующее равенство*:

$$\left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, \mu(dt) \right\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, f(t) \rangle\ \mu(dt). \tag{2.8}$$

Доказательство.

1. Пусть $\{h_n(t)\}$ — это последовательность простых функций из определения 3 для функции $f(t)$. Для каждой функции из этой последовательности имеет место равенство (2.8):

$$\left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\, \mu(dt) \right\rangle = \int_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t) \rangle\ \mu(dt).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered}
\left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\, \mu(dt) \right\rangle = \left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} [f(t) - h_n(t)]\ \mu(dt) \right\rangle + \\
+ \left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} h_n(t)\, \mu(dt) \right\rangle = \left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} [f(t) - h_n(t)]\ \mu(dt) \right\rangle + \\
+ \int_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t) \rangle\ \mu(dt) = \left\langle f^*, \int_0^{\mathrm{T}} [f(t) - h_n(t)]\ \mu(dt) \right\rangle + \\
+ \int_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t) - f(t) \rangle\ \mu(dt) + \int_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, f(t) \rangle\ \mu(dt).
\end{gathered} \tag{2.9}$$

2. Справедливы следующие оценки:

$$\left|\left\langle f^*, \int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t) - h_n(t)]\ \mu(dt)\right\rangle\right| \leqslant \|f^*\|_* \left\|\int\limits_0^{\mathrm{T}} [f(t) - h_n(t)]\ \mu(dt)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|f(t) - h_n(t)\|\, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\left|\int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle\ \mu(dt)\right| \leqslant \int\limits_0^{\mathrm{T}} |\langle f^*, h_n(t) - f(t)\rangle|\ \mu(dt) \leqslant$$

$$\leqslant \|f^*\|_* \int\limits_0^{\mathrm{T}} \|h_n(t) - f(t)\|\, \mu(dt) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

С учетом этих оценок из (2.9) переходом к пределу при $n \to +\infty$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, \mu(ds) \quad t_0, t \in [0, \mathrm{T}].$$

*Тогда если* $f(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$, *то* $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$.

Доказательство.

Из леммы 5 вытекает, что $u(t)$ $\mu$ почти всюду на отрезке $[0, \mathrm{T}]$ сильно дифференцируема причем $u^{'}(t) = f(t)$. Но поскольку $f(t) \in \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$, то $u^{'}(t)$ после изменения на множестве нулевой меры $\mu$ имеем $u^{'}(t) \in \mathbb{C}([0, \mathrm{T}]; \mathbb{B})$.

Теорема доказана.

## § 3. Пространства $L^p(0, T; \mathbb{B})$

Теперь определим класс функций, интегрируемых по Бохнеру. Дадим определение.

Определение 5. *Классом функций* $\mathcal{L}^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$ *при* $p \in [1, + +\infty)$ *назовем множество сильно* $\mu-$*измеримых на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$ $\mathbb{B}-$*значных функций, для которых функция времени* $\|f(t)\|^p$ $\mu-$ $-$*интегрируема на отрезке* $[0, \mathrm{T}]$.

Замечание 2. Пространство $\mathcal{L}^p([0, \mathrm{T}], \mu; \mathbb{B})$ не является линейным, поскольку нулевой элемент является не единственным.

Обозначим через $\mathcal{J}_0([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ подмножество множества $\mathcal{L}^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$, состоящее из $\mu-$измеримых $\mathbb{B}-$значных функций равных нулю почти всюду в $[0,\mathrm{T}]$. И рассмотрим следующее факторпространство:

$$\mathcal{L}^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}). \tag{3.1}$$

Это факторпространство является линейным пространством, поскольку мы отождествили все функции, отличающиеся лишь на множестве нулевой $\mu-$меры Лебега. Значит, отождествлены и все функции равные нулю почти всюду по $\mu-$мере Лебега. Как и всякое факторпространство, введенное факторпространство состоит из дизъюнктных классов эквивалентности. Мы будем использовать этот факт в дальнейшем.

Дадим следующее определение.

Определение 6. *Через $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ обозначим факторпространство $\mathcal{L}^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty)$.*

Отдельно нужно рассмотреть случай $p=+\infty$.

Определение 7. *Через $\mathcal{L}^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ обозначим множество $\mu-$измеримых функций, которые почти всюду по норме пространства $\mathbb{B}$ ограничены.*

И аналогично определению 7 дадим следующее:

Определение 8. *Через $L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ обозначим факторпространство $\mathcal{L}^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})/\mathcal{J}_0([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$.*

Так введенные множества $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty)\cup\{\infty\}$ являются линейными пространствами. Естественно, возникает вопрос: можно ли сделать банаховыми пространствами относительно некоторой нормы?

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3. *Пространство $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ является банаховым при $p\in[1,+\infty)$ относительно нормы*

$$\|u\|_p\equiv\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}}\|u(t)\|^p\,\mu(dt)\right)^{1/p}. \tag{3.2}$$

Теорема 4. *Векторное пространство $L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ является банаховым относительно нормы*

$$\|u\|_\infty\equiv\underset{t\in[0,\mathrm{T}]}{\mathrm{vraimax}}\|u(t)\|. \tag{3.3}$$

Справедливо следующее неравенство Гельдера.

Лемма 5. *Пусть $u(t)\in L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p\in[1,+\infty]$, а $v(t)\in$ $\in L^q([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*)$, где*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

*то*

$$\langle v(t), u(t)\rangle \in L^1([0,\mathrm{T}],\mu)$$

*и справедливо следующее неравенство Гельдера* [1])

$$\int\limits_0^{\mathrm{T}} |\langle v(t), u(t)\rangle|\ \mu(dt) \leqslant \|u\|_p \|v\|_q^*, \tag{3.4}$$

*где*

$$\|u\|_p \equiv \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|u(t)\|^p\,\mu(dt)\right)^{1/p}, \quad \|v\|_q^* \equiv \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} \|v(t)\|_*^q\,\mu(dt)\right)^{1/q}.$$

Доказательство.

Пусть $\{u_n(t)\}$ — это последовательность простых функций для функции $u(t)$, а $\{v_n(t)\}$ — это последовательность простых функций для функции $v(t)$. Тогда

$$\langle v_n(t), u_n(t)\rangle \to \langle v(t), u(t)\rangle \quad \mu \quad \text{почти всюду на} \quad [0,\mathrm{T}].$$

Но тогда функция $\langle v(t), u(t)\rangle$ является $\mu-$измеримой на отрезке $[0,\mathrm{T}]$. Кроме того, имеет место неравенство

$$|\langle v(t), u(t)\rangle| \leqslant \|v(t)\|_* \|u(t)\|.$$

Теперь осталось воспользоваться неравенством Гельдера для скалярных функций.

Лемма доказана.

Справедлива следующее важное утверждение, доказательство которого мы не будем приводить, поскольку оно достаточно длинное и трудоемкое.

Теорема 5. *Пусть банахово пространство $\mathbb{B}$ является либо рефлексивным либо сепарабельным, тогда формулой*

$$\int\limits_0^T \langle v(t), u(t)\rangle\ dt$$

*задаются все линейные и непрерывные функционалы над пространством $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p \in (1,+\infty)$. Более того, можно отождествить пространство*

$$(L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}))^*$$

[1]) Символом $\|\cdot\|_*$ мы обозначили $*-$норму сопряженного пространства $\mathbb{B}^*$.

*с пространством*

$$L^q([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*) \quad \textit{при} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Следствие 1. *При условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}$ из этой теоремы вытекает рефлексивность пространства $L^p([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ при $p \in (1,+\infty)$.*

Кроме того, справедлив также следующий результат:
Теорема 6. *Пусть пространство $\mathbb{B}$ рефлексивное банахово пространство. Тогда каждый линейный и непрерывный функционал над $L^1([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})$ представим в следующем виде*:

$$\langle \Phi, f\rangle = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \langle f^*(t), f(t)\rangle\ \mu(dt) \quad \textit{для всех} \quad f(t) \in L^1([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}), \tag{3.5}$$

*где*

$$f^*(t) \in L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*).$$

*Более того, можно отождествить пространство*

$$\left(L^1([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B})\right)^* \quad \textit{с пространством} \quad L^\infty([0,\mathrm{T}],\mu;\mathbb{B}^*).$$

В дальнейшем нас будут интересовать пространства $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ и $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ с показателем $p>1$,

$$p' = \frac{p}{p-1},$$

а также пространство $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

## § 4. t–Анизотропные пространства С. Л. Соболева

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $p \in [1,+\infty)$. Дадим определение анизотропного пространства С. Л. Соболева $W_p^{2k,k}(D)$.

Определение 9. *Множество*

$$\{u(x,t):\ D_x^\alpha D_t^r \in L^p(D),\ \textit{для всех}\ \alpha,\ r,\ |\alpha|+2r \leqslant 2k\}$$

*пополненное по норме*

$$\|u\|_{W_p^{2k,k}(D)} \stackrel{def:}{=} \left(\int\limits_D \sum_{|\alpha|+2r\leqslant 2k} |D_x^\alpha D_t^r u(x,t)|^p\ dx\,dt\right)^{1/p}$$

*называется пространством $W_p^{2k,k}(D)$.*

Частный случай этого пространства — это пространство $W_p^{2,1}(D)$ с нормой [1])

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(D)} = \left(\int\limits_D \left[|u|^p + |D_t u|^p + \sum_{i=1}^{N} |D_{x_i} u|^p + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|D^2_{x_i x_j} u\right|^p\right] dx\,dt\right)^{1/p}.$$

Кроме того, рассмотрим банахово пространство $W^{m,k}(D)$ с целыми неотрицательными числами $m, k \geqslant 0$.

Определение 10. *Множество*

$$\{u(x,t) :\ D_x^\alpha u(x,t),\ D_t^r u(x,t) \in L^p(D), \quad |\alpha| \leqslant m,\ r \leqslant k\}$$

*пополненное относительно нормы*

$$\|u\|_{W_p^{m,k}(D)} \stackrel{def:}{=} \left(\int\limits_D \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} |D_x^\alpha u(x,t)|^p + \sum_{r\leqslant k} |D_t^r u(x,t)|^p\right) dx\,dt\right)^{1/p}$$

*обозначается как* $W_p^{m,k}(D)$.

Частным важным случаем этого пространства является $W_p^{1,1}(D)$, которое при $p = 2$ совпадает с пространством Соболева $H^1(D)$.

Отметим, что в теории параболических уравнений важную роль играют параболическая граница $\partial' D = S \cup \overline{B}$. В связи с этим помимо пространства $\mathbb{C}_0^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемых функций $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(D)$ с компактным носителем $\operatorname{supp} u \subset D$ рассматриваются еще два пространства бесконечно дифференцируемых функций.

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{D}$, равных нулю вблизи боковой границы $S = \partial\Omega \otimes (0,T)$ цилиндра $D$. Кроме того, обозначим через $\overset{\bullet}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\overline{D}$, равных нулю вблизи параболической границы $\partial' D = S \cup \overline{B}$.

Дадим определения.

Определение 11. *Обозначим через* $\overset{\circ}{W}{}_p^{2k,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{2k,k}(D)$; *через* $\overset{\circ}{W}{}_p^{m,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{m,k}(D)$; *через* $\overset{\bullet}{W}{}_p^{2k,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\bullet}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{2k,k}(D)$; *через* $\overset{\bullet}{W}{}_p^{m,k}(D)$ *замыкание пространства* $\overset{\bullet}{\mathbb{C}}_\infty(\overline{D})$ *в банаховом пространстве* $W_p^{m,k}(D)$.

[1]) Символами $D_{x_i}$ и $D^2_{x_i x_j}$ мы обозначили слабые производные первого и второго порядков.

Отметим, что справедлива следующая важная теорема: [1])
Теорема 7. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *— это ограниченная область с гладкой границей. Тогда всякая функция* $u(x,t) \in H^1(D)$ *имеет след* $\gamma u(x,t)$ *на параболической границе* $\partial' D$, *причем* $\gamma u(x,t) \in L^2(\partial' D)$.

## § 5. Теорема компактности Лионса–Обэна

Перейдем к рассмотрению одной ситуации, довольно часто возникающей в приложениях при исследовании нелинейных краевых задач.

Итак, пусть $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}_1$ — это три банаховых пространства, причем $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$ [2]). Пусть банаховы пространства $\mathbb{B}_0$ и $\mathbb{B}_1$ являются рефлексивными. Введем следующее нестандартное пространство распределений с интегрируемыми производными:

$$\mathbb{W} \equiv \left\{ u(t): \ u(t) \in L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0), \quad u'(t) \in L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1) \right\}, \tag{5.1}$$

где $p_0, p_1 \in (1,+\infty)$. Справедлива следующая лемма.
Лемма 6. *Векторное пространство* $\mathbb{W}$ *является банаховым относительно следующей нормы*:

$$\|u\|_{\mathbb{W}} \equiv \|u\|_{p_0} + \|u'\|_{p_1}, \tag{5.2}$$

*где*

$$\|f\|_{p_0} \equiv \left( \int\limits_0^T \|f(t)\|^{p_0}_{\mathbb{B}_0}\, dt \right)^{1/p_0}, \quad \|f\|_{p_1} \equiv \left( \int\limits_0^T \|f(t)\|^{p_1}_{\mathbb{B}_1}\, dt \right)^{1/p_1}.$$

Доказательство.
Пусть $\{u_n(t)\} \subset \mathbb{W}$ — есть фундаментальная последовательность относительно нормы (5.2). Тогда $\{u_n(t)\}$ является фундаментальной в $L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)$. Следовательно, эта последовательность сходится сильно в этом пространстве к некоторой функции $u(t) \in L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)$.

С другой стороны, $\{u_n'(t)\} \subset L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1)$ и фундаментальна в этом пространстве, значит, сходится сильно в этом пространстве к функции $v(t) \in L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1)$. С другой стороны,

$$u_n' \to u' \quad \text{в} \quad \left( \mathcal{D}'(0,T;\mathbb{B}), \tau_w^* \right).$$

В силу отделимости топологии $\tau_w^*$ приходим к выводу, что $v(t) = u'(t)$. Тем самым, утверждение доказано.

[1]) Смотри третью тематическую лекцию.

[2]) Символом $\hookrightarrow\hookrightarrow$ мы обозначаем вполне непрерывное вложение, а символом $\subset$ мы обозначаем непрерывное вложение.

Лемма доказана.

Пусть $T < +\infty$ и $p = \min\{p_0, p_1\}$. Поскольку $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}_1$ имеем

$$L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0) \subset L^p(0,T;\mathbb{B}_0) \subset L^p(0,T;\mathbb{B}_1),$$

$$L^{p_1}(0,T;\mathbb{B}_1) \subset L^p(0,T;\mathbb{B}_1),$$

тогда

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{W}^{1,p}(0,T;\mathbb{B}_1).$$

Кроме того, имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{W}^{1,p}(0,T;\mathbb{B}_1) \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \text{при} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{p}.$$

Следовательно, имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \text{при} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{p}.$$

Тем самым, доказана следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $p = \min\{p_0, p_1\} \in (1, +\infty)$, тогда имеет место вложение*

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^{0,\lambda}([0,T];\mathbb{B}_1) \quad \textit{при} \quad \lambda = 1 - \frac{1}{p}. \tag{5.3}$$

Для получения одного результата о компактном вложении введенного банахова пространства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$, где $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{B}_1$ — это банаховы пространства. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $c(\varepsilon) > 0$, что*

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leqslant \varepsilon \|u\|_{\mathbb{B}_0} + c(\varepsilon)\|u\|_{\mathbb{B}_1}. \tag{5.4}$$

Доказательство.

Предположим, что неравенство (5.4) не выполняется. Тогда найдется такая последовательность $\{v_n\} \subset \mathbb{B}_0$ такая, что имеет место обратное неравенство

$$\|v_n\|_{\mathbb{B}} \geqslant \varepsilon \|v_n\|_{\mathbb{B}_0} + c_n \|v_n\|_{\mathbb{B}_1},$$

причем $c_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Введем новую последовательность

$$w_n \equiv \frac{v_n}{\|v_n\|_{\mathbb{B}_0}},$$

для которой мы получаем неравенство

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}} \geqslant \varepsilon + c_n \|w_n\|_{\mathbb{B}_1}. \tag{5.5}$$

Заметим, что имеет место непрерывное вложение $\mathbb{B}_0 \subset \mathbb{B}$ и поэтому

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}} \leqslant c\|w_n\|_{\mathbb{B}_0} = c,$$

где $c > 0$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Но тогда из (5.5) приходим к выводу, что

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}_1} + \frac{\varepsilon}{c_n} \leqslant \frac{c}{c_n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е.

$$\|w_n\|_{\mathbb{B}_1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{5.6}$$

С другой стороны, $\|w_n\|_{\mathbb{B}_0} = 1$ и $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B}$, [1]) поэтому найдется такая подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$ последовательности $\{w_n\}$, что

$$w_{n_k} \to w \in \mathbb{B} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но по условию имеет место непрерывное вложение $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$, поэтому указанная подпоследовательность $\{w_{n_k}\}$ сходится сильно и в $\mathbb{B}_1$ к тому же элементу $w$, следовательно, имеет место следующее предельное равенство:

$$\|w_{n_k}\|_{\mathbb{B}_1} \to \|w\|_{\mathbb{B}_1} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но в силу (5.6) приходим к выводу, что $w = 0$. Значит,

$$w_{n_k} \to 0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Но это противоречит неравенству (5.5).

Лемма доказана.

Приведем без доказательства следующую лемму:

Лемма 9. *Банахово пространство $\mathbb{W}$ является рефлексивным.*

Наконец, мы в состоянии доказать основной результат этого параграфа. Справедлива следующая теорема о компактном вложении Лионса–Обэна.

Теорема 8. *Пусть $T > 0$ конечно. Тогда при условиях данного параграфа имеет место вполне непрерывное вложение*:

$$\mathbb{W} \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(0, T; \mathbb{B}).$$

Доказательство.

*Шаг 1.* Непрерывность вложения $\mathbb{W}$ в $L^{p_0}(0, T; \mathbb{B})$ следует из непрерывности вложения $\mathbb{B}_0$ в $\mathbb{B}$. Поэтому нам осталось доказать компактность указанного в теореме вложения.

*Шаг 2.* По лемме 9 банахово пространство $\mathbb{W}$ является рефлексивным, а значит, из любой ограниченной в $\mathbb{W}$ последовательности $\{v_n\}$ можно выделить слабо в $\mathbb{W}$ сходящуюся подпоследовательность. Итак, наша задача упрощается. Без ограничения общности, нам достаточно доказать следующее утверждение: *Пусть $\{v_n\} \subset \mathbb{W}$ — это слабо в $\mathbb{W}$ к нулю сходящаяся последовательность, тогда эта последовательность сходится сильно к нулю в банаховом пространстве $L^{p_0}(0, T; \mathbb{B})$.*

---

[1]) Вполне непрерывное вложение банахова пространства $\mathbb{B}_0$ в $\mathbb{B}$.

*Шаг 3.* В силу леммы 8 для любого $\eta > 0$ найдется такое $c(\eta) > 0$, что имеет место следующее неравенство:

$$\|u\|_{\mathbb{B}} \leqslant \eta \|u\|_{\mathbb{B}_0} + c(\eta)\|u\|_{\mathbb{B}_1}.$$

Возведем обе части этого неравенства в степень $p_0 > 1$, тогда после очевидных преобразований получим следующее неравенство:

$$\|u\|^{p_0}_{\mathbb{B}} \leqslant \eta c(p_0)\|u\|^{p_0}_{\mathbb{B}_0} + c_1(p_0, \eta)\|u\|^{p_0}_{\mathbb{B}_1}.$$

Откуда интегрированием по $t \in [0, T]$ получим неравенство

$$\|u\|^{p_0}_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B})} \leqslant \eta c(p_0)\|u\|^{p_0}_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)} + c_1(p_0, \eta)\|u\|^{p_0}_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_1)}.$$

Теперь возведем в степень $p_0^{-1}$ и получим после ряда несложных преобразований неравенство, в которое подставим $v_n \in L^{p_0}(0, T; \mathbb{B}_0)$

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B})} \leqslant \eta c_2(p_0)\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)} + c_3(p_0, \eta)\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_1)}. \qquad (5.7)$$

Поскольку по условию

$$v_n \rightharpoonup \vartheta \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{W},$$

то эта последовательность сильно ограничена:

$$\|v_n\|_{L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0)} \leqslant c_4 < +\infty,$$

где $c_4$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

*Шаг 4.* Пусть $\varepsilon > 0$, тогда выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$\eta c_2(p_0) c_4 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь заметим, что в силу леммы 7 настоящей главы имеет место вложение

$$\mathbb{W} \subset \mathbb{C}^{0,\mu}([0, T]; \mathbb{B}_1) \quad \text{при} \quad \mu \in \left[0, 1 - \frac{1}{p}\right], \quad p = \min\{p_0, p_1\}.$$

Следовательно,

$$\|v_n\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant c,$$

где $c > 0$ и не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для того чтобы доказать, что

$$v_n \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad L^{p_0}(0, T; \mathbb{B}_1)$$

нам достаточно доказать, что

$$v_n(s) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{для всех} \quad s \in [0, T].$$

Поскольку $s$ не играет никакой специальной роли, то достаточно доказать, что
$$v_n(0)\to\vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1.$$

*Шаг 5.* Рассмотрим новую функцию
$$w_n(t)=v_n(\lambda t) \quad \text{при} \quad \lambda\in(0,1).$$

Справедливы следующие цепочки неравенств:
$$\left(\int\limits_0^T \|w_n(t)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,dt\right)^{1/p_0} = \left(\int\limits_0^T \|v_n(\lambda t)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,dt\right)^{1/p_0} =$$
$$= \lambda^{-1/p_0}\left(\int\limits_0^{\lambda T} \|v_n(\tau)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,d\tau\right)^{1/p_0} \leqslant \lambda^{-1/p_0}\left(\int\limits_0^{T} \|v_n(\tau)\|_{\mathbb{B}_0}^{p_0}\,d\tau\right)^{1/p_0} \leqslant c\lambda^{-1/p_0},$$

$$\left(\int\limits_0^T \|w_n'(t)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} = \left(\int\limits_0^T \|v_n'(\lambda t)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\lambda^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1} =$$
$$= \lambda^{1-1/p_1}\left(\int\limits_0^{\lambda T} \|v_n'(\tau)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\,d\tau\right)^{1/p_1} \leqslant \lambda^{1-1/p_1}\left(\int\limits_0^{T} \|v_n'(\tau)\|_{\mathbb{B}_1}\,d\tau\right)^{1/p_1} \leqslant$$
$$\leqslant c\lambda^{1-1/p_1}.$$

Пусть функция $\varphi\in\mathbb{C}^{(1)}[0,T]$, причем $\varphi(0)=-1$ и $\varphi(T)=0$. Тогда справедливо следующее равенство:
$$w_n(0)=\int\limits_0^T \left(w_n(t)\varphi(t)\right)'\,dt=\int\limits_0^T w_n'(t)\varphi(t)\,dt+\int\limits_0^T w_n(t)\varphi'(t)\,dt=\beta_n+\gamma_n.$$

Докажем, что $w_n(0)\to\vartheta$ сильно в $\mathbb{B}_1$. Действительно, имеет место следующее неравенство:
$$\|w_n(0)\|_{\mathbb{B}_1}\leqslant\|\beta_n\|_{\mathbb{B}_1}+\|\gamma_n\|_{\mathbb{B}_1}.$$

Но
$$\|\beta_n\|_{\mathbb{B}_1}\leqslant c\left(\int\limits_0^T \|w_n'(t)\|_{\mathbb{B}_1}^{p_1}\,dt\right)^{1/p_1}\leqslant c\lambda^{1-1/p_1}.$$

Поэтому мы можем выбрать $\lambda \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$\|\beta_n\|_{\mathbb{B}_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь поскольку $w_n \rightharpoonup \vartheta$ слабо в $\mathbb{W}$, значит,

$$w_n \rightharpoonup \vartheta \quad \text{слабо в} \quad L^{p_0}(0,T;\mathbb{B}_0).$$

Значит, $\gamma_n \rightharpoonup \vartheta$ слабо в $\mathbb{B}_0$, но $\mathbb{B}_0 \hookrightarrow \mathbb{B} \subset \mathbb{B}_1$, поэтому

$$\gamma_n \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Следовательно,

$$\|w_n(0)\|_{\mathbb{B}_1} \to 0,$$

и вместе с ней и

$$v_n(0) \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Тем самым, утверждение теоремы доказано.

Теорема доказана.

Тематическая лекция 8

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

В этой лекции мы рассмотрим базовые операторы параболического типа следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_p u - f(x,t,u),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - m\operatorname{div}\left(\left(u^2+\varepsilon^2\right)^{(m-1)/2} D_x u\right)$$

при $p > 1$.

## § 1. Метод компактности в сочетании с методами монотонности и Галеркина

Рассмотрим следующую задачу Коши–Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_p u + f(x,t,u) \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T], \quad p \geqslant 2, \tag{1.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \otimes (0,T], \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.3}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Относительно функции

$$f(x,t,u) : D \otimes \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

предположим, что она является непрерывной класса $\mathbb{C}(\overline{D} \otimes \mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$ и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,t,u)| \leqslant a + b|u|^{q+1}, \quad a, b > 0, \tag{1.4}$$

причем оператор Немыцкого $N_f(u)$, порожденный функцией $f(x,t,u)$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т. е.

$$\|N_f(u_1) - N_f(u_2)\|_{(q+2)/(q+1)} \leqslant \mu(R)\|u_1 - u_2\|_{q+2}, \tag{1.5}$$

где $\mu(\cdot)$ — это неубывающая функция, ограниченная на компактах, и

$$R = \max\left\{\|u_1\|_{q+2}, \|u_2\|_{q+2}\right\},$$

$$q \in (0, p^* - 2), \quad p^* \stackrel{def}{=} \begin{cases} Np/(N-p), & \text{если} \quad N > p; \\ +\infty, & \text{если} \quad N \leqslant p. \end{cases} \tag{1.6}$$

При выполнении условия (1.6) имеет место вполне непрерывное вложение

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega).$$

Сформулируем определение слабого решения задачи Коши–Дирихле (1.1)–(1.3).

Определение 1. *Функция $u(x,t)$ класса*

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x,t) \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

*называется слабым решением задачи Коши–Дирихле* (1.1)–(1.3), *если для любого $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(D)$ выполнено равенство*

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big[u'(x,t)\varphi(x,t) + |D_x u(x,t)|^{p-2} \left(D_x u(x,t), D_x \varphi(x,t)\right) - \\ - f(x,t,u(x,t))\varphi(x,t)\Big]\, dx\, dt = 0, \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.8}$$

Замечание 1. Отметим, что пространство

$$W_1 \stackrel{def}{=} \left\{v(x,t):\ v(x,t) \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),\ v'(x,t) \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))\right\}$$

вложено в пространство $\mathbb{C}([0,T]; L^2(\Omega))$. И поэтому начальное условие (1.8) имеет смысл.

Наша цель — это доказать, что при некотором малом $T > 0$ существует слабое решение задачи Коши–Дирихле (1.1)–(1.3) в смысле определения 1. С этой целью мы воспользуемся методом Галеркина в сочетании с методами компактности и с учетом свойств монотонности оператора $p$–Лапласиана.

*Шаг 1. Галеркинские приближения.* Поскольку банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, то в нем существует «галеркинский» базис, т. е. такое счетное линейное множество, которое всюду плотно в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Обозначим это множество как

$$\{w_j(x)\}_{j=1}^{+\infty} \stackrel{ds}{\subset} W_0^{1,p}(\Omega).$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m]), \quad k = \overline{1,m}. \quad (1.9)$$

Дадим определение системы галеркинских уравнений для слабого решения в смысле определения 1.

Определение 2. *Функции* $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T_m])$ *при* $k = \overline{1,m}$ *называются решением галеркинской системы уравнений, если эти функции удовлетворяют задаче Коши для следующей системы дифференциальных уравнений первого порядка*:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[u_m^{'}(x,t) w_j(x) + |D_x u_m(x,t)|^{p-2} \left(D_x u_m(x,t), D_x w_j(x)\right) -$$

$$- f(x,t,u_m(x,t)) w_j(x)\Big] \, dx = 0, \quad (1.10)$$

*при* $j = \overline{1,m}$, *где мы используем обозначение* (1.9). *При дополнительном условии*

$$u_{m0} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k(x) \to u_0(x) \quad \textit{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1.11)$$

*при* $m \to +\infty$.

Прежде всего нам нужно доказать, что система галеркинских уравнений имеет решение класса $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T_m]$ при некотором $T_m > 0$, которое вообще говоря зависит от $m \in \mathbb{N}$. С этой целью заметим, что систему уравнений (1.10) можно представить в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{dc_{mk}(t)}{dt} = F_j(t,c_m), \quad F_j(t,c_m) \stackrel{def:}{=} F_{1j}(c_m) + F_{2j}(t,c_m), \quad (1.12)$$

$$F_{1j}(c_m) \stackrel{def:}{=} -\int\limits_{\Omega} |D_x u_m(x,t)|^{p-2} \left(D_x u_m(x,t), D_x w_j(x)\right) dx, \quad (1.13)$$

$$F_{2j}(t,c_m) \stackrel{def:}{=} \int\limits_{\Omega} f(x,t,u_m(x,t)) w_j(x) \, dx, \quad (1.14)$$

причем матрица $A = (a_{kj})$ при производной по времени для каждого $m \in \mathbb{N}$ является невырожденной. Докажем, что функции $F_j(c_m)$ является ограниченно липшиц–непрерывной. Действительно, имеем

$$\left|F_{1j}(c_m^1) - F_{1j}(c_m^2)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \Big| |D_x u_m^1(x,t)|^{p-2} D_x u_m^1(x,t) - |D_x u_m^2(x,t)|^{p-2} D_x u_m^2(x,t) \Big| \, |D_x w_j| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant (p-1) \int\limits_\Omega \max \Big\{ |D_x u_m^1|^{p-2}, |D_x u_m^2|^{p-2} \Big\} \Big| D_x u_m^1 - D_x u_m^2 \Big| \, |D_x w_j| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \mu_{1j}(R) \|D_x u_m^1 - D_x u_m^2\|_p \leqslant a_1(m) \mu_{1j}(R) |c_m^1 - c_m^2|, \quad (1.15)$$

где мы воспользовались обобщенным неравенством Гельдера с параметрами

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} = 1, \quad q_1 = \frac{p}{p-2}, \quad q_2 = p, \quad q_3 = p$$

и ввели обозначение

$$\mu_{1j}(r) = (p-1) \|D_x w_j\|_p R^{p-2}, \quad R = \max \Big\{ \|D_x u_m^1\|_p, \|D_x u_m^2\|_p \Big\} .$$

Кроме того, мы использовали легко проверяемое неравенство

$$\|D_x u_m^1 - D_x u_m^2\|_p \leqslant a_1(m) |c_m^1 - c_m^2|$$

с некоторой константой $a_1(m)$, зависящей от $m \in \mathbb{N}$. Точно также рассмотрим функцию $F_{2j}(t, c_m)$. Действительно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\Big| F_{2j}(t, c_m^1) - F_{2j}(t, c_m^2) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \Big| f(x,t,u_m^1(x,t)) - f(x,t,u_m^2(x,t)) \Big| \, |w_j(x)| \, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \Big| N_f(u_m^1) - N_f(u_m^2) \Big| \, |w_j(x)| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \|N_f(u_m^1) - N_f(u_m^2)\|_{(q+2)/(q+1)} \|w_j\|_{q+2} \leqslant$$

$$\leqslant \mu_{2j}(R) \|u_m^1 - u_m^2\|_{q+2} \leqslant a_2(m) \mu_{2j}(R) |c_m^1 - c_m^2|, \quad (1.16)$$

где

$$\mu_{2j}(R) = \mu(R) \|w_j\|_{q+2}$$

и мы воспользовались неравенством

$$\|u_m^1 - u_m^2\|_{q+2} \leqslant a_2(m) |c_m^1 - c_m^2|$$

с некоторой постоянной $a_2(m) > 0$, зависящей от $m \in \mathbb{N}$. Итак, правая часть $F_j(t, c_m)$ является непрерывной по $t \in [0, T_m]$ и ограниченно липшиц–непрерывной по $c_m \in \mathbb{R}^m$, поэтому задача Коши для системы уравнений (1.12) имеет единственное решение $c_{km}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m])$ при $k = \overline{1, m}$ и при некотором $T_m > 0$, зависящим, вообще говоря, от $m \in \mathbb{N}$.

*Шаг 2. Априорные оценки.* Для вывода априорных оценок умножим обе части равенства (1.10) на $c_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и получим в результате равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_p^p = \int\limits_{\Omega} f(x, t, u_m) u_m \, dx. \tag{1.17}$$

Заметим, что в силу условия роста (1.4) и неравенства Юнга имеет место неравенство

$$|f(x, t, s)s| \leqslant a_1 + b_1 |s|^{q+2}, \quad a_1 = \frac{q+1}{q+2} a^{(q+2)/(q+1)}, \quad b_1 = b + \frac{1}{q+2}.$$

Отсюда и из (1.17) получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_p^p \leqslant c_1 + b_1 \|u_m\|_{q+2}^{q+2}, \quad c_1 = a_1 |\Omega|. \tag{1.18}$$

Теперь мы должны воспользоваться интерполяционным неравенством. Заметим, что при условии (1.6) и в силу ограниченности области $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывные вложения

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega),$$

причем выполнено неравенство

$$\|v\|_{q+2} \leqslant K \|D_x v\|_p^{\alpha} \|v\|_2^{1-\alpha} \quad \text{для всех} \quad v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.19}$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+2}\right)\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

Потребуем выполнения основного условия

$$p > \frac{N}{N+2}(q+2) \Rightarrow \alpha(q+2) < p. \tag{1.20}$$

Тогда в силу интерполяционного неравенства (1.19) и трехпараметрического неравенства Юнга с параметрами

$$q_1 = \frac{p}{\alpha(q+2)}, \quad q_2 = \frac{q_1}{q_1 - 1} = \frac{p}{p - (q+2)\alpha}$$

справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\|v\|_{q+2}^{q+2} \leqslant K \|D_x v\|_p^{\alpha(q+2)} \|v\|_2^{(1-\alpha)(q+2)} \leqslant \varepsilon \|D_x v\|_p^p + c_2(\varepsilon) \|v\|_2^{2r}, \tag{1.21}$$

где
$$r = \frac{q+2}{2}\frac{p}{p-\alpha(q+2)}(1-\alpha).$$
Теперь применим неравенство (1.21) к правой части неравенства (1.18). В результате получим
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 + (1-\varepsilon b_1)\|D_x u_m\|_p^p \leqslant c_1 + b_1 c_2(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r} \tag{1.22}$$
при
$$0 < \varepsilon b_1 < 1.$$
Из неравенства (1.22) вытекает следующее дифференциальное неравенство:
$$\frac{d}{dt}\|u_m\|_2^2 \leqslant 2c_1 + 2b_1 c_2(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r}. \tag{1.23}$$
В силу свойства (1.11) получим
$$\|u_{m0}\|_2 \leqslant M_1 < +\infty,$$
где постоянная $M_1 > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Для всякого $r > > 0$ интегрируя (1.23) по времени, мы для достаточно малого $T > 0$ получим априорную оценку
$$\|u_m\|_2(t) \leqslant M_2(T) < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \tag{1.24}$$
где постоянная $M_2(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь нам нужно вывести еще одно априорное неравенство. С этой целью умножим обе части равенства (1.10) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1,m}$, тогда получим равенство
$$\|u'_m\|_2^2 + \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|D_x u_m\|_p^p = \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega F(x,t,u_m)\,dx, \tag{1.25}$$
где
$$F(x,t,s) = \int\limits_0^s f(x,t,\sigma)\,d\sigma.$$
Интегрируя по времени равенство (1.25) мы получим равенство
$$\int\limits_0^t \|u'_m\|_2^2(\tau)\,d\tau + \|D_x u_m\|_p^p(t) =$$
$$= \|D_x u_{m0}\|_p^p - \int\limits_\Omega F(x,t,u_{m0})\,dx + \int\limits_\Omega F(x,t,u_m)\,dx. \tag{1.26}$$

В силу условия роста (1.4) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|F(x,t,s)| \leqslant a|s| + \frac{b}{q+2}|s|^{q+2} \leqslant \frac{q+1}{q+2}a^{(q+2)/(q+1)} + \frac{b+1}{q+2}|s|^{q+2}.$$

С другой стороны, функция $F(x,t,s)$, очевидно, является каратеодориевой. Поэтому оператор Немыцкого $N_F(u)$ является сильно непрерывным

$$N_F(u) : L^{q+2}(\Omega) \to L^1(\Omega),$$

поэтому в силу свойства (1.11)

$$\left|\int\limits_{\Omega} F(x,t,u_{m0})\,dx\right| \leqslant K_1 < +\infty, \quad \|D_x u_{m0}\|_p^p \leqslant K_2 < +\infty,$$

где постоянные $K_1$ и $K_2$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$. Поэтому из (1.26), (1.21) и (1.24) получим цепочку неравенств

$$\int\limits_0^t \|u_m'\|_2^2(\tau)\,d\tau + \|D_x u_m\|_p^p(t) \leqslant K_3 + K_4\|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leqslant$$
$$\leqslant K_3 + \varepsilon K_4 \|D_x u_m\|_p^p(t) + c(\varepsilon)\|u_m\|_2^{2r} \leqslant$$
$$\leqslant K_3 + \varepsilon K_4 \|D_x u_m\|_p^p(t) + K_5(T) \quad (1.27)$$

при $t \in [0,T]$ и малом $T > 0$. Выбирая теперь достаточно малую величину $\varepsilon > 0$ мы получим еще две априорные оценки

$$\|D_x u_m\|_p(t) \leqslant M_3(T) < +\infty \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T], \quad (1.28)$$

$$\int\limits_0^T \|u_m'\|_2^2(\tau)\,d\tau \leqslant M_4(T) < +\infty, \quad (1.29)$$

где постоянные $M_3(T), M_4(T) > 0$ не зависят от $m \in \mathbb{N}$, а $T > 0$ достаточно мало.

*Шаг 3. Предельный переход.* В силу априорных оценок (1.28) и (1.29) вытекает, что функциональная последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, а функциональная последовательность $\{u_m'\}$ равномерно ограничена в $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Поэтому существует такое $u(x,t)$, что

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad * -\text{слабо в} \quad L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad (1.30)$$

$$u_m' \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (1.31)$$

Теперь заметим, что в силу априорных оценок (1.28) и (1.29) вытекает, что функциональная последовательность $\{u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве

$$W \stackrel{def:}{=} \Big\{ v: \ v \in L^2(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)), \ v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \Big\}. \qquad (1.32)$$

В силу условия (1.6) имеет место вполне непрерывное вложение

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$$

и, кроме того, в силу ограниченности области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ имеет место непрерывное вложение

$$L^{q+2}(\Omega) \subset L^2(\Omega).$$

Поэтому в силу теоремы компактности Обэна–Лионса, доказанной в седьмой тематической лекции, существует такая подпоследовательность [1] $\{u_m\}$, что имеет место предельное свойство

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T; L^{q+2}(\Omega)) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \qquad (1.33)$$

Заметим, [2] что имеет место равенство

$$\|\Delta_p u_m\|_* = \|D_x u_m\|_p^{p-1} \Rightarrow \|\Delta_p u_m\|_*^{p'} = \|D_x u_m\|_p^p, \qquad (1.34)$$

где $\|\cdot\|_*$ — это норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ сопряженного к $W_0^{1,p}(\Omega)$. Поэтому в силу априорной оценки (1.28) функциональная последовательность $\{\Delta_p u_m\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в рефлексивном банаховом пространстве $L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$. Поэтому существует такая подпоследовательность, [3] что

$$-\Delta_p u_m \rightharpoonup \chi \quad \text{слабо в} \quad L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \qquad (1.35)$$

З а м е ч а н и е 6. Отметим, что при $p > 1$ сопряженным банаховым пространством к банахову пространству $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ является банахово пространство $L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$, причем скобками двойственности между этими банаховыми пространствами является следующая величина

$$\langle f, g \rangle_T \stackrel{def:}{=} \int_0^T \langle f(t), g(t) \rangle \, dt,$$

---

[1] Подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ мы для удобства обозначаем также как и исходную последовательность.

[2] Смотри тематическую лекцию 1.

[3] Мы проинтегрировали обе части равенства в (1.34) по $t \in [0,T]$.

где
$$f(t) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \quad g(t) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$
а величина $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$.

С одной стороны, предельное свойство (1.33) означает, что существует такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что
$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad L^{q+2}(\Omega) \quad \text{для п.вс.} \quad t \in [0,T]. \tag{1.36}$$
А с другой стороны, имеет место непрерывное вложение
$$L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \subset L^{q+2}(D), \quad D \overset{def:}{=} \Omega \otimes (0,T).$$
Неравенство (1.21) в сочетании с априорными оценками (1.24) и (1.28) означает, что имеет место априорная оценка
$$\int_0^T \|u_m\|_{q+2}^{q+2}(t)\,dt \leqslant M_5(T) < +\infty, \tag{1.37}$$
где постоянная $M_5(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. В силу ограниченности области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и условия роста (1.4) получим, что последовательность $\{f(x,t,u_m)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $L^{(q+2)/(q+1)}(D)$ :
$$\int_0^T \|f(x,t,u_m)\|_{(q+2)/(q+1)}^{(q+2)/(q+1)}(t)\,dt \leqslant M_6(T) < +\infty, \tag{1.38}$$
где постоянная $M_5(T) > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$. С одной стороны, в силу предельного свойства (1.36) и свойств операторов Немыцкого имеем
$$f(x,t,u_m) \to f(x,t,u) \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega) \tag{1.39}$$
для почти всех $t \in [0,T]$. С другой стороны, в силу (1.38) имеем для некоторой подпоследовательности
$$f(x,t,u_m) \rightharpoonup g(t) \in L^{(q+2)/(q+1)}(D) \quad \text{слабо в} \quad L^{(q+2)/(q+1)}(D). \tag{1.40}$$
В силу теоремы Лебега и (1.39) имеет место неравенство
$$g(t) = f(x,t,u) \quad \text{для почти всех} \quad (x,t) \in D. \tag{1.41}$$

*Шаг 4. Метод монотонности.* Теперь наша задача доказать, что функция $\chi(t) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ в предельном свойстве (1.35) равна
$$\chi(t) = -\Delta_p u \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.42}$$

Сначала перепишем систему галеркинских приближений (1.10) в эквивалентном виде

$$\left\langle u_m^{'} - \Delta_p u_m - f(x,t,u_m), w_j \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.43}$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,T)$ и проинтегрируем по времени, а затем перейдем к пределу при $m \to +\infty$ с учетом предельных свойств (1.31), (1.35), (1.40) и (1.41) получим равенство

$$\int\limits_0^T \left\langle u^{'} + \chi - f(x,t,u), w_j \right\rangle \varphi(t)\, dt = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,+\infty} \tag{1.44}$$

для всех $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty(0,T)$. Теперь воспользуемся основной леммой вариационного и получим, что

$$\left\langle u^{'} + \chi - f(x,t,u), w_j \right\rangle = 0 \quad \text{при} \quad j = \overline{1,+\infty} \tag{1.45}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Поскольку $\{w_j\}$ — это галеркинский базис в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, то равенство (1.45) эквивалентно равенству

$$\left\langle u^{'} + \chi - f(x,t,u), w \right\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad w \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.46}$$

для почти всех $t \in [0,T]$. Возьмем в этом равенстве $w(t) = u(x,t)$. Тогда после интегрирования по времени $t \in [0,T]$ мы получим равенство

$$\int\limits_0^T \langle \chi, u \rangle\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t,u) u \, dx\, dt + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u\|_2^2(T). \tag{1.47}$$

Введем величину.

$$X_m \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^T \langle A(u_m) - A(v), u_m - v \rangle \; dt \tag{1.48}$$

для всех $v(t) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, где мы ввели обозначение

$$A(w) \stackrel{def:}{=} -\Delta_p w.$$

В силу монотонности оператора

$$-\Delta_p(\cdot) : L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \to L^{p^{'}}(0,T;W^{-1,p^{'}}(\Omega))$$

выполнено неравенство $X_m \geqslant 0$. Равенство для $X_m$ можно переписать в следующем виде:

$$X_m = \int_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle \, dt - \int_0^T \langle A(u_m), v\rangle \, dt - \int_0^T \langle A(v), u_m - v\rangle \, dt. \quad (1.49)$$

Умножим обе части равенства (1.10) на $c_{mj}$, просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и проинтегрируем по $t \in [0, T]$. Тогда в результате получим равенство

$$\int_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle \, dt = \int_0^T \int_\Omega f(x, t, u_m) u_m \, dx \, dt + \frac{1}{2}\|u_{m0}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u_m\|_2^2(T). \quad (1.50)$$

Заметим, что из (1.36) вытекает

$$u_m(t) \to u(t) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad (1.51)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Кроме того, как мы заметили ранее, после изменения но множестве нулевой меры Лебега на $[0, T]$ функция $u(t) \in \in \mathbb{C}([0, T]; L^2(\Omega))$. Поэтому из (1.51) вытекает, что

$$\|u_m\|_2(T) \to \|u\|_2(T) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \quad (1.52)$$

В силу предельного свойства (1.11) имеем

$$\|u_{m0}\|_2 \to \|u_0\|_2 \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \quad (1.53)$$

Тогда в силу (1.36), (1.40) и (1.52), (1.53) мы получим предельное свойство

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle \, dt = \\ = \int_0^T \int_\Omega f(x, t, u) u \, dx \, dt + \frac{1}{2}\|u_0\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u\|_2^2(T). \quad (1.54)$$

В силу (1.47) имеем

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T \langle A(u_m), u_m\rangle \, dt = \int_0^T \langle \chi, u\rangle \, dt. \quad (1.55)$$

Теперь из (1.49) в пределе при $m \to +\infty$ получим неравенство

$$0 \leqslant \int_0^T \langle \chi, u\rangle\, dt - \int_0^T \langle \chi, v\rangle\; dt - \int_0^T \langle A(v), u-v\rangle\; dt =$$
$$= \int_0^T \langle \chi - A(v), u-v\rangle\; dt \quad (1.56)$$

для всех $v(t) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Положим в последнем неравенстве

$$v = u - \lambda w, \quad \lambda > 0, \quad w \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Тогда получим

$$\int_0^T \langle \chi - A(u-\lambda w), w\rangle\; dt \geqslant 0.$$

В этом равенстве в силу свойства радиальной непрерывности $p$–Лапласиана мы получим в пределе при $\lambda \to +0$ неравенство

$$\int_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\; dt \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad w \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)). \qquad (1.57)$$

Если предположить, что $\chi \neq A(u)$, тогда при некотором $w \in$ $\in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ будет строгое неравенство

$$\int_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\; dt > 0,$$

но если в нем поменять $w$ на $-w$ мы получим неравенство

$$\int_0^T \langle \chi - A(u), w\rangle\; dt < 0,$$

противоречащее неравенству (1.57).

Значит, $\chi = A(u) = -\Delta_p u$. Следовательно, существует слабое решение исходной задачи Дирихле.

Замечание 7. Отметим, что если в качестве $v$ в выражении (1.48) взять само решение $u$, то, с одной стороны, в пределе мы получим

$$\lim_{m\to+\infty} X_m = 0.$$

А с другой стороны, для $X_m$ при $v = u$ имеет место предельное неравенство

$$X_m \geqslant 2^{2-p} \int_0^T \int_\Omega |D_x u_m - D_x u|^p \, dx \, dt.$$

Следовательно,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Для любой* $u_0(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *при выполнении условий* (1.4), (1.5), *а также неравенств*

$$2 < q + 2 < \min\left\{p^*, p\frac{N+2}{N}\right\}$$

*существует слабое решение задачи Дирихле* (1.1)–(1.3) *в смысле определения* 1 *при некотором малом* $T > 0$.

## § 2. Метод верхних и нижних решений

В этом параграфе мы рассмотрим метод верхних и нижних решений для доказательства существования классического решения класса $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$ первой краевой задачи для полулинейного параболического уравнения в $D \in \Omega \otimes (0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую первую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) = f(x,t,u) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad (x,t) \in \partial' D, \tag{2.2}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{def}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t) u(x,t), \tag{2.3}$$

где

$$a_{ij}(x,t), \quad b_i(x,t), \quad c(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha, \alpha/2}(\overline{D}), \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{2.4}$$

причем найдутся такие постоянные $\lambda > 0$ и $\Lambda > 0$, что

$$\lambda |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leqslant \Lambda |\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N \tag{2.5}$$

для всех $(x,t) \in D$. Предположим кроме того, что функция $f(x,t,u) \in \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2,\alpha}(\overline{D} \otimes \mathbb{R}^1)$, а функция $g(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ при некотором $\alpha \in (0,1]$. [1])

Отметим, что в силу классической априорной оценки Шаудера [2]) имеет место априорная оценка для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) = \widehat{f}(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \tag{2.6}$$

$$u(x,t) = g(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \text{ }^{3)} \tag{2.7}$$

следующего вида:

$$|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant K(N,D,\alpha)\left(|\widehat{f}|_{\alpha,\alpha/2} + |g|_{2+\alpha,1+\alpha/2}\right). \tag{2.8}$$

Дадим определения верхних и нижних решений первой краевой задачи (2.1), (2.2).

Определение 3. *Функция* $\overline{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *называется верхним решением первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *если*

$$\frac{\partial \overline{U}(x,t)}{\partial t} - L\overline{U}(x,t) \geqslant f(x,t,\overline{U}) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D, \tag{2.9}$$

$$\overline{U}(x,t) \geqslant g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{2.10}$$

Определение 4. *Функция* $\underline{U}(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *называется нижним решением первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *если*

$$\frac{\partial \underline{U}(x,t)}{\partial t} - L\underline{U}(x,t) \leqslant f(x,t,\underline{U}) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D, \tag{2.11}$$

$$\underline{U}(x,t) \leqslant g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{2.12}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что верхнее решение $\overline{U}(x,t)$ и нижнее решение $\underline{U}(x,t)$ упорядочены [4])

$$\overline{U}(x,t) \geqslant \underline{U}(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{2.13}$$

---

[1]) Очевидно, с необходимостью функция $g(x,t)$ удовлетворяет следующему уравнению $g_t - Lg = f(x,t,g)$ на параболической границе $\partial' D$.

[2]) Более детально смотри, например, книгу [1] Крылова Н. В. или конспект лекций автора по курсу «Параболические уравнения».

[3]) Здесь имеется в виду, что существует продолжение функции $g(x,t)$ с параболической границы $\partial' D$ на замыкание $\overline{D}$ указанного класса.

[4]) Это не всегда так.

Дадим определение.

Определение 5. *Для любой упорядоченной пары* $\overline{U}(x,t)$ *и* $\underline{U}(x,t)$ *мы определим множество*

$$\left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle \stackrel{def:}{=} \Big\{ u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) : \\ \underline{U}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D} \Big\}. \qquad (2.14)$$

Предположим, что нелинейная функция $f(x,t,u)$ удовлетворяет одностороннему условию Липшица

$$f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2) \geqslant -\underline{c}(u_1 - u_2), \quad \underline{U} \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \overline{U}, \qquad (2.15)$$

где $\underline{c}$ — это постоянная.

ПРИМЕР 1. Например, функция

$$f(x,t,u) = f_0(x,t)|u|^{p-2}u, \quad f_0(x,t) \geqslant 0, \quad p > 1$$

удовлетворяет условию (2.15) с постоянной $\underline{c} = 0$.

Заметим, что в силу условия (2.15) функция

$$F(x,t,u) \stackrel{def:}{=} \underline{c}u + f(x,t,u) \qquad (2.16)$$

является монотонно неубывающей по $u$ для всех $(x,t) \in D$ и для всех $u \in \left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle$. Поэтому уравнение (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu(x,t) + \underline{c}u = F(x,t,u) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D. \qquad (2.17)$$

Рассмотрим итерационную схему

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - Lu_k(x,t) + \underline{c}u_k = F(x,t,u_{k-1}) \quad \text{в} \quad (x,t) \in D. \qquad (2.18)$$

$$u_k(x,t) = g(x,t) \quad \text{на} \quad (x,t) \in \partial^{'} D, \qquad (2.19)$$

где в качестве $u_0(x,t)$ мы выбираем пока произвольную функцию класса $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$.

Как известно из линейной $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}$–теории параболических уравнений [1)] первая итерация

$$u_1(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}),$$

а последующие итерации

$$u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad k = 2,3,....$$

---

[1)] Смотри книгу Н. В. Крылова [1].

Теперь мы в качестве начального приближения $u_0(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ возьмем либо

$$u_0(x,t) = \overline{U}(x,t) \quad \text{либо} \quad u_0(x,t) = \underline{U}(x,t), \tag{2.20}$$

которые удовлетворяют условию (2.13). При этом итерационную последовательность решений задачи (2.18), (2.19) с начальным условием $u_0(x,t) = \overline{U}(x,t)$ мы обозначим через $\overline{u}_k(x,t)$ при $k \in \mathbb{N}$, а с начальным условием $u_0(x,t) = \underline{U}(x,t)$ обозначим через $\underline{u}_k(x,t)$ при $k \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть* $\overline{U}(x,t)$, $\underline{U}(x,t)$ *— это упорядоченные верхнее и нижнее решения соответственно первой краевой задачи* (2.1), (2.2) *и функция* $f(x,t,u)$ *удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда последовательности* $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ *и* $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ *обладают следующим свойством монотонности*:

$$\underline{U}(x,t) = \underline{u}_0(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t) \leqslant \underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \\ \leqslant \overline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_0(x,t) = \overline{U}(x,t) \tag{2.21}$$

*для всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Пусть

$$w(x,t) = \overline{u}_0(x,t) - \overline{u}_1(x,t) = \overline{U}(x,t) - \overline{u}_1(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда $w(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — это решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw + \underline{c}w \geqslant F(x,t,\overline{U}) - F(x,t,\overline{U}) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w(x,t) \geqslant g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Слабый принцип максимума [1]) дает неравенство $w(x,t) \geqslant 0$ на $\overline{D}$, т. е.

$$\overline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{u}_0(x,t) = \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\underline{u}_1(x,t) \geqslant \underline{u}_0(x,t) = \underline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

*Шаг 2.* Пусть теперь

$$w_1(x,t) = \overline{u}_1(x,t) - \underline{u}_1(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

---

[1]) По поводу слабого принципа максимума для классических решений смотри конспект автора по специальному курсу «Параболические уравнения».

Тогда $w_1(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ удовлетворяет

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - Lw_1 + \underline{c}w_1 = F(x,t,\overline{U}) - F(x,t,\underline{U}) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w_1(x,t) \geqslant g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Снова в силу слабого принципа максимума имеем

$$w_1(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Следовательно, имеем

$$\underline{u}_0(x,t) = \underline{U}(x,t) \leqslant \underline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{u}_1(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t) = \overline{u}_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

*Шаг 3.* Предположим, что

$$\underline{u}_{k-1}(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t) \leqslant \overline{u}_{k-1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Тогда функция

$$w_k(x,t) = \overline{u}_k(x,t) - \overline{u}_{k+1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}$$

удовлетворяет

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} - Lw_k + \underline{c}w_k \geqslant F(x,t,\overline{u}_{k-1}) - F(x,t,\overline{u}_k) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w_k(x,t) = g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

В силу слабого принципа максимума имеем $w_k(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}$, т. е.

$$\overline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \underline{u}_k(x,t), \quad \underline{u}_{k+1}(x,t) \leqslant \overline{u}_{k+1}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы переходим к доказательству основной теоремы о существовании. Прежде всего, заметим, что итерационная последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ является монотонно невозрастающей и ограниченной снизу нижним решением $\underline{U}(x,t)$, а итерационная последовательность $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху верхним решением $\overline{U}(x,t)$. Следовательно, существуют пределы

$$\lim_{k\to+\infty} \overline{u}_k(x,t) = \overline{u}(x,t), \lim_{k\to+\infty} \underline{u}_k(x,t) = \underline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}, \qquad (2.22)$$

причем

$$\underline{U}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t) \leqslant \overline{U}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Ниже мы докажем, что обе функции $\overline{u}(x,t)$ и $\underline{u}(x,t)$ являются решениями первой краевой задачи (2.1), (2.2). Более того, если существует константа $\overline{c} \leqslant \underline{c}$ такая, что

$$f(x,t,u_1) - f(x,t,u_2) \leqslant -\overline{c}(u_1 - u_2), \quad \underline{U} \leqslant u_2 \leqslant u_1 \leqslant \overline{U}, \tag{2.23}$$

тогда решение первой краевой задачи даже единственно.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $\overline{U}(x,t)$ и $\underline{U}(x,t)$ упорядоченные верхнее и нижнее решения первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *а функция $f(x,t,u)$ удовлетворяет условию* (2.15). *Тогда*

(i) *Последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ сходится монотонно сверху к решению $\overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ первой краевой задачи* (2.1), (2.2), *а последовательность $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ сходится монотонно снизу к решению $\underline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ той же первой краевой задачи, причем*

$$\underline{u}(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}; \tag{2.24}$$

(ii) *Всякое решение $u^*(x,t) \in \langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$ первой краевой задачи* (2.1), (2.2) *удовлетворяют неравенству*

$$\underline{u}(x,t) \leqslant u^*(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}; \tag{2.25}$$

(iii) *Если в дополнение выполнено условие* (2.23), *тогда $\overline{u}(x,t) = \underline{u}(x,t)$ является единственным* [1] *решением в $\langle \underline{U}, \overline{U} \rangle$.*

Доказательство.

*Шаг 1.* Поскольку последовательность $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ монотонно сверху сходится к $\overline{u}(x,t)$, то в силу монотонности функции $F(x,t,u)$ последовательность $\{F(x,t,\overline{u}_k)\}$ монотонно сверху сходится к $F(\overline{u},x,t)$ для всех $(x,t) \in \overline{D}$. Аналогично последовательность $\{F(\underline{u}_k,x,t)\}$ монотонно снизу сходится к $F(\underline{u},x,t)$. Ранее мы указали на то, что

$$\underline{u}_1(x,t),\ \overline{u}_1(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}),$$

$$\underline{u}_k(x,t),\ \overline{u}_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad k = 2,3,\ldots.$$

В силу классических априорных оценок Шаудера для обеих итерационных схем (2.18)–(2.20) имеют место следующие оценки:

$$|\overline{u}_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant K\left(|g|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + |F(x,t,\overline{u}_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D}\right), \tag{2.26}$$

$$|\underline{u}_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant K\left(|g|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + |F(x,t,\underline{u}_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D}\right) \tag{2.27}$$

---

[1] Очевидно, что решение единственно вообще.

при $k \geqslant 2$, где постоянная $K = K(N, D, \alpha) > 0$ и не зависит от $k \in \in \mathbb{N}$. В силу итогового неравенства (1.5) первого параграфа седьмой тематической лекции вытекает цепочка неравенств [1])

$$|F(x,t,u_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \underline{c}|u_{k-1}|_{\alpha,\alpha/2;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c_2(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{0;D} +$$
$$+ K_1 + \varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + c_3(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} =$$
$$= 2\varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + K_1 + c_4(\varepsilon)|u_{k-1}|_{0;D} + |f(x,t,u_{k-1})|_{0;D}. \quad (2.28)$$

Отметим, что

$$|u_{k-1}|_{0;D} \leqslant \sup_{x\in D}\left\{|\underline{U}(x)|, |\overline{U}(x)|\right\} = c_4$$

и

$$|f(x,t,u_{k-1})|_{0;D} \leqslant c_5.$$

Теперь в силу неравенств вида (2.26), (2.27) и итогового неравенства (2.28) получим неравенство

$$|u_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant 2\varepsilon K|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + K_2(\varepsilon). \quad (2.29)$$

Переобозначим для удобства

$$2\varepsilon K \to \varepsilon$$

и получим из неравенства (2.30) неравенство

$$|u_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant \varepsilon|u_{k-1}|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} + K_3(\varepsilon) \quad \text{при} \quad k \geqslant 3. \quad (2.30)$$

Рассмотрим отдельно итерационное неравенство

$$z_{k+1} \leqslant \varepsilon z_k + d, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad k \geqslant 2$$

Из него вытекает оценка

$$z_k \leqslant z_2 + K_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n = K_4(\varepsilon) < +\infty \quad \text{при} \quad k \geqslant 2.$$

Следовательно, обе последовательности $\{\underline{u}_k(x,t)\}$ и $\{\overline{u}_k(x,t)\}$ равномерно по $k \geqslant 2$ ограничены в пространстве $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. Поэтому существуют подпоследовательности [2])

$$\{\overline{u}_\mu\}, \quad \{\underline{u}_\mu\}$$

---

[1]) В этом неравенстве мы обе итерационные последовательности обозначаем как $\{u_k(x,t)\}$.

[2]) Смотри книгу Е. М. Ландиса [3].

такие, что

$$\overline{u}_\mu \to \overline{u} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

$$\underline{u}_\mu \to \underline{u} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D}) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

причем предельные функции

$$\underline{u}(x,t), \quad \overline{u}(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}).$$

Тем самым, свойство (i) доказано.

*Шаг 2.* Заметим, что если $u^*(x,t) \in \left\langle \underline{U}, \overline{U} \right\rangle$ — это решение класса $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$, тогда, очевидно, одновременно $u^*(x,t)$ — это верхнее и нижнее решение. Поэтому если рассмотреть упорядоченные пары

$$\left\langle u^*, \overline{U} \right\rangle \quad \text{и} \quad \langle \underline{U}, u^* \rangle$$

мы после рассмотрения указанной ранее итерационной схемы получим, что

$$u^*(x,t) \leqslant \overline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u^*(x,t) \geqslant \underline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Таким образом, свойство (ii) доказано.

*Шаг 3.* Для того, чтобы доказать свойство (iii) достаточно показать, что

$$\overline{u}(x,t) \leqslant \underline{u}(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{2.31}$$

Действительно, функция

$$w(x,t) = \underline{u}(x,t) - \overline{u}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}$$

удовлетворяет

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = f(x,t,\underline{u}) - f(x,t,\overline{u}) \geqslant -\overline{c}w \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$w(x,t) = g(x,t) - g(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Следовательно, в силу слабого принципа максимума имеем $w(x,t) \geqslant 0$ в $\overline{D}$. Таким образом, свойство (iii) доказано.

Теорема доказана.

## § 3. Метод Лере–Шаудера. Классические решения

В этом параграфе мы рассмотрим следующую первую краевую задачу: [1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = m \operatorname{div} \left( \left( u^2 + \varepsilon^2 \right)^{(m-1)/2} D_x u \right), \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \quad (3.1)$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T), \quad (3.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (3.3)$$

где $\varepsilon > 0$ — это параметр. Поскольку $\varepsilon > 0$, то уравнение (3.1) является невырожденным параболическим уравнением. В силу принципа максимума имеет место априорные неравенства

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D. \quad (3.4)$$

Нас интересует классическая разрешимость первой краевой задачи (3.1)–(3.3) в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ при некотором $\alpha \in (0,1)$. С этой целью мы воспользуемся теоремой Лере–Шаудера 8 шестой тематической лекции.

Введем следующее банахово пространство:

$$\mathbb{B} = \left\{ u(x,t) : \ u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}), \ D_x u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}) \right\}.$$

Кроме того, рассмотрим следующую линейную относительно $u(x,t)$ задачу с параметром $\sigma \in [0,1]$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = m\sigma \operatorname{div} \Big( (v^2 + \varepsilon^2)^{(m-1)/2} D_x u \Big) + \\ + (1-\sigma)\Delta u, \quad (x,t) \in D, \quad (3.5)$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T), \quad (3.6)$$

$$u(x,0) = \sigma u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (3.7)$$

Введем отображение $T(v,\sigma)$, определенного следующим образом:

$$T : \ (v(x,t), \sigma) \in \mathbb{B} \otimes [0,1] \to \mathbb{B}, \quad (3.8)$$

которое сопоставляет функции $v(x,t) \in \mathbb{B}$ решение $u(x,t)$ линейной первой краевой задачи (3.5)–(3.7) с параметром $\sigma \in [0,1]$. В силу классических априорных оценок Шаудера решение этой задачи $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$. Кроме того, имеет место вполне непрерывное вложение

$$\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B}.$$

---

[1]) Символом $D_x$ мы обозначили градиент.

Поэтому оператор $u = T(v, \sigma)$ является компактным оператором. Кроме того, при $\sigma = 0$ задача (3.5)–(3.7) примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (x, t) \in D,$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial' D = S \cup \overline{B},$$

классическое решение которой единственно в силу принципа максимума и равно нулю $u(x, t) = 0$. Следовательно, $T(v, 0) = 0$ для всех $v(x, t) \in \mathbb{B}$.

Используя тонкую и очень непростую технику, аналогичную классической технике Шаудера, можно получить априорные оценки следующего вида — если $u_0(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и $u(x, t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$ — это решение первой краевой задачи (3.1)–(3.1), то существует такая постоянная $M > 0$, не зависящая от $u(x, t)$, что

$$|u|_{\beta, \beta/2; D} \leqslant M, \quad |D_x u|_{\beta, \beta/2; D} \leqslant M, \quad \beta \in (0, 1). \tag{3.9}$$

Пусть теперь при некотором $\sigma \in [0, 1]$ оператор $T(v, \sigma)$ имеет неподвижную точку в $\mathbb{B}$

$$u = T(u, \sigma). \tag{3.10}$$

Выпишем это уравнение.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t, \sigma) \Delta u + f(x, t, \sigma), \tag{3.11}$$

где

$$a(x, t, \sigma) \stackrel{def:}{=} 1 - \sigma + \sigma m \left( u^2(x, t) + \varepsilon^2 \right)^{(m-1)/2}, \tag{3.12}$$

$$f(x, t, \sigma) \stackrel{def:}{=} \sigma m(m-1) \left( u^2(x, t) + \varepsilon^2 \right)^{(m-3)/2} |D_x u(x, t)|^2. \tag{3.13}$$

Тогда $u(x, t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(D)$ и в соответствии с априорной оценкой (3.9) имеем

$$a(x, t, \sigma) \in \mathbb{C}^{\gamma, \gamma/2}(\overline{D}), \quad f(x, t, \sigma) \in \mathbb{C}^{\gamma, \gamma/2}(\overline{D})$$

при некотором $\gamma \in (0, 1)$. Но тогда существует такая постоянная $K > 0$, не зависящая от $u(x, t)$ и $\sigma$, но систематически зависящая от $M$ [1]), такая, что в силу классической априорной оценки Шаудера

$$|u|_{2+\gamma, 1+\gamma/2; D} \leqslant K,$$

но поскольку имеет место непрерывное (вполне непрерывное) вложение

$$\mathbb{C}^{2+\gamma, 1+\gamma/2}(\overline{D}) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathbb{B},$$

[1]) Постоянная в правых частях априорных оценок (3.9).

то
$$\|u\|_{\mathbb{B}} \stackrel{def}{=} |u|_{\beta,\beta/2;D} + |D_x u|_{\beta,\beta/2;D} \leqslant K_1 < +\infty, \tag{3.14}$$
где постоянная $K_1$ не зависит от $u(x,t)$.

Итак, выполнены все условия теоремы Лере–Шаудера 8 из шестой тематической лекции. Поэтому существует неподвижная точка $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ оператора $T(u,1)$, т. е. существует решение указанного класса первой краевой задачи (3.1)–(3.3).

Замечание 8. Отметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (3.1) примет следующий вид:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m,$$
задачу Коши для которого мы изучим в десятой тематической лекции.

## § 4. Степень отображения Лере–Шаудера

Прежде, чем приступать к рассмотрению степени отображения Лере–Шаудера нам необходимо изучить классическую степень отображения Брауэра.

**1. Степень отображения Брауэра.**

Пусть $\Omega$ — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f(x)$ — это отображение из $\Omega$ в $\mathbb{R}^N$. Грубо говоря, степень отображения Брауэра — целочисленная функция от функции $f$ и от множества $\Omega$.

Прежде всего определим степень отображения Брауэра для функций класса $f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, а затем расширим до функций класса $f(x) \in \mathbb{C}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Пусть
$$f(x) = \Big(f^1(x), f^2(x), ..., f^N(x)\Big) \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^N).$$
Тогда для любого $x \in \Omega$ производная Фреше
$$f^{'}(x) = \left(\frac{\partial f^i(x)}{\partial x_j}\right)_{N\otimes N} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$
Дадим определение.

Определение 6. *Точка $x \in \Omega$ называется регулярной точкой отображения $f$, если ранг матрицы производной Фреше $f^{'}(x)$ равен $N$. В противном случае эта точка называется критической, а точка $y = f(x)$, соответствующая критической точке $x$ отображения $f(x)$, называется критическим значением. В противном случае точка $y = f(x)$ носит название регулярного значения $f$.*

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть $\Omega$ — это открытое множество в $\mathbb{R}^N$ и $f(x) \in \in \mathbb{C}^{(1)}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Тогда мера Лебега критических значений в $\mathbb{R}^N$ отображения $f(x)$ равна нулю.*

Пусть $\Omega$ — это ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^N$, $f(x) \in \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ и $p \in \mathbb{R}^N \backslash \{f(\partial\Omega)\}$. Мы определим степень отображения Брауэра $\deg(f, \Omega, p)$ отображения $f$ в $\Omega$ в точке $p$ следующим образом:

(i) Если $p$ — это регулярное значение $f$, тогда положим

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sign}\left(\det f^{'}(x)\right),$$

где $\det f^{'}(x)$ — это определитель матрицы производной Фреше $f^{'}(x)$;

(ii) Если $p$ — это критическое значение отображения $f$, тогда выберем регулярное значение $p_1$ отображения $f$ следующим образом:

$$\|p_1 - p\| < \text{distance}(p, f(\Omega))$$

и положим

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p_1).$$

Можно доказать, что $\deg(f, \Omega, p)$ не зависит от выбора регулярного значения $p_1$.

Теперь мы можем определить степень отображения $f \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Выберем $f_1(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ таким образом, чтобы

$$\sup_{x \in \Omega} \|f(x) - f_1(x)\| < \text{distance}(p, f(\partial\Omega)).$$

Тогда определим степень отображения

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f_1, \Omega, p).$$

Можно доказать, что степень отображения $\deg(f, \Omega, p)$ не зависит от выбора функции $f_1$.

Справедливы основные свойства степени отображения Брауэра.

(i) Справедливо свойство тождественного отображения

$$\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \in \Omega; \\ 0, & \text{если} \quad p \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

где $id$ — это тождественное отображение;

(ii) Если $\Omega_1$, $\Omega_2$ — это два открытых подмножества $\Omega$, причем $\Omega_1 \cap \cap \Omega_2 = \varnothing$ и $p \notin f\left(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cap \Omega_2)\right)$, тогда

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(iii) Пусть

$$H : \overline{\Omega} \otimes [0, 1] \to \mathbb{R}^N$$

— это непрерывное отображение и обозначим через

$$h_t(x) \stackrel{def:}{=} H(x, t).$$

Предположим, что отображение

$$p(t):\ [0,1] \to \mathbb{R}^N$$

является непрерывным и $p(t) \notin h_t(\partial\Omega)$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда

$$\deg(h_t, \Omega, p(t)) \quad \text{не зависит от} \quad t \in [0,1].$$

Основным результатом теории степени отображения Брауэра.
Теорема 4. *Пусть $\Omega$ — это открытое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^N$, причем*

$$f(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N), \quad p \in \mathbb{R}^N \backslash \{f(\partial\Omega)\}.$$

*Если $p \notin \{f(\overline{\Omega})\}$, тогда*

$$\deg(f, \Omega, p) = 0$$

*и если*

$$\deg(f, \Omega, p) \neq 0,$$

*то уравнение $f(x) = p$ имеет по меньшей мере одно решение.*

**2. Степень отображения Лере–Шаудера.**

Степень отображения Брауэра была обобщена на случай вполне непрерывных отображений [1] Лере и Шаудером. Основой для этого отображения является следующая теорема:
Теорема 5. *Пусть $X$ и $Y$ — это два линейных нормированных пространства и $M \subset X$ — это ограниченное и замкнутое подмножество. Если отображение*

$$F : M \subset X \to Y$$

*— это вполне непрерывное отображение, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ограниченное и непрерывное отображение*

$$F_k : M \subset X \to Y_k \subset Y, \quad \dim Y_k = k,$$

*такое что*

$$\sup_{x \in M} \|F(x) - F_k(x)\| < \varepsilon.$$

*Более того, если пространство $Y$ банахово, то указанное условие является также достаточным для вполне непрерывности отображения $F$.*

[1] Компактных и непрерывных.

Пусть $\Omega \subset X$ — ограниченное и открытое множество в нормированном пространстве $X$ и

$$F : \overline{\Omega} \to X$$

— это вполне непрерывное отображение. Тогда определим вполне непрерывное поле

$$f(\cdot) \stackrel{def:}{=} id \cdot - F(\cdot)$$

и $p \in X \backslash \{f(\partial\Omega)\}$. В силу теоремы 5 существует конечномерное подпространство $X_k \subset X$, $p_k \in X_k$ и ограниченное, непрерывное отображение

$$F_k : \overline{\Omega} \to X_k$$

такое, что

$$\|p - p_k\| + \sup_{x\in\Omega} \|F(x) - F_k(x)\| < \operatorname{distance}(p, f(\partial\Omega)). \tag{4.1}$$

Обозначим

$$\Omega_k = X_k \cap \Omega, \quad f_k = id - F_k.$$

Тогда

$$f_k \in \mathbb{C}(\overline{\Omega}_k, X_k), \quad p_k \in X_k \backslash \{f_k(\partial\Omega_k)\}$$

и, следовательно, определена степень отображения Брауэра

$$\deg(f_k, \Omega_k, p_k).$$

Определим степень отображения Лере–Шаудера.

Определение 7. *Степенью отображения Лере–Шаудера вполне непрерывного поля $f$ относительно множества $\overline{\Omega}$ и значения $p$ называется величина*

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f_k, \Omega_k, p_k)$$

*при выполнении неравенства* (4.1).

Можно доказать, что $\deg(f, \Omega, p)$ не зависит от выбора $X_k$, $p_k$ и $F_k$.

Справедливы свойства степени отображения Лере–Шаудера. Пусть $\Omega$ — это открытое ограниченное подмножество вещественного нормированного пространства $X$, $f = id - F$ — это вполне непрерывное поле на $\overline{\Omega}$, $p \in X \backslash \{f(\partial\Omega)\}$.

(i) Справедливо свойство тождественного отображения

$$\deg(id, \Omega, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p \in \Omega; \\ 0, & \text{если} \quad p \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

где $id$ — это тождественное отображение;

(ii) Если $\Omega_1$, $\Omega_2$ — это два открытых подмножества $\Omega$, причем $\Omega_1 \cap \cap \Omega_2 = \varnothing$ и $p \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)\right)$, тогда

$$\deg(f, \Omega, p) = \deg(f, \Omega_1, p) + \deg(f, \Omega_2, p);$$

(iii) Пусть

$$H: \ \overline{\Omega} \otimes [0,1] \to X$$

— это непрерывное отображение и обозначим через

$$h_t(x) \overset{def:}{=} H(x,t).$$

Предположим, что отображение

$$p(t): \ [0,1] \to X$$

является непрерывным и $p(t) \notin h_t(\partial\Omega)$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда

$$\deg(h_t, \Omega, p(t)) \quad \text{не зависит от} \quad t \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Кроме того, для степени отображения Лере–Шаудера выполнены свойства степени отображения Брауэра и, наконец, справедлива следующая теорема существования решения:

Теорема 6. *Пусть $\Omega$ — это открытое и ограниченное множество из вещественного линейного нормированного пространства $X$, причем*

$$f(\cdot) = id \cdot - F(\cdot)$$

*— это вполне непрерывное поле, определенное на $\overline{\Omega}$, $p \in X \setminus \{f(\partial\Omega)\}$. Если $p \notin \{f(\overline{\Omega})\}$, тогда*

$$\deg(f, \Omega, p) = 0$$

*и если*

$$\deg(f, \Omega, p) \neq 0,$$

*то уравнение $f(x) = p$ имеет по меньшей мере одно решение в $\Omega$.*

**3. Существование решения уравнения теплопроводности с нелинейным источником.**

В качестве приложения метода на основе степени отображения Лере–Шаудера мы рассмотрим следующую нелинейную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \quad p > 1, \tag{4.3}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D = S \cup \overline{B}, \tag{4.4}$$

где $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\alpha}$ при $\alpha \in (0,1)$ и $T > 0$.

Заметим, что следующая задача имеет единственное решение в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \quad p > 1, \tag{4.5}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D = S \cup \overline{B}, \tag{4.6}$$

где $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ и $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, причем имеет место классическая априорная оценка Шаудера

$$|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant c_0 \left(|f|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}\right), \tag{4.7}$$

где постоянная $c_0 = c_0(N,\Omega,\alpha,T) > 0$. Наша цель — доказать разрешимость нелинейной первой краевой задачи (4.3), (4.4).

Предположим, что $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$. Определим отображение

$$F : (f(x,t),\sigma) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) \otimes [0,1] \to u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}),$$

где $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ — это решение следующей задачи с параметром $\sigma \in [0,1]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \sigma f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.8}$$

$$u(x,t) = \varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D. \tag{4.9}$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 2. *Отображение $F$ является компактным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Предположим, что $\{f_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ и $\{\sigma_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset [0,1]$ и существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|f_k|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant M \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.10}$$

Обозначим

$$u_k(x,t) = F(f_k(x,t),\sigma_k), \quad u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$$

— это решение задачи

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - \Delta u_k = \sigma_k f_k, \quad u_k(x,t) = \varphi(x,t).$$

В силу классической априорной оценки Шаудера имеем

$$|u_k|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} \leqslant c_0 \left(\sigma_k |f_k|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}\right) \tag{4.11}$$

с постоянной $c_0 > 0$, независящей от $k \in \mathbb{N}$. В силу (4.10) из (4.11) получим, что последовательность $\{u_k\}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, которое вполне непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$. Это означает, что оператор $F$ компактен.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Отображение $F$ является непрерывным.*

Доказательство.

Предположим, что

$$\{f_k(x,t)\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad \{\sigma_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset [0,1],$$
$$f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad \sigma \in [0,1],$$

причем

$$\lim_{k\to+\infty} |f_k - f|_{\alpha,\alpha/2;D} = 0, \quad \lim_{k\to+\infty} \sigma_k = \sigma.$$

Обозначим

$$u_k = F(f_k, \sigma_k), \quad u = F(f,\sigma).$$

По определению отображения $F$ имеем $w = u_k - u \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = \sigma_k f_k - \sigma f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$
$$w(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

В силу классической априорной оценки Шаудера имеем

$$\begin{aligned}|u_k - u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} &\leqslant c_0 |\sigma_k f_k - \sigma f|_{\alpha,\alpha/2;D} \leqslant \\ &\leqslant c_0 \left(\sigma_k |f_k - f|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\sigma_k - \sigma||f|_{\alpha,\alpha/2;D}\right) \leqslant \\ &\leqslant c_0 \left(|f_k - f|_{\alpha,\alpha/2;D} + |\sigma_k - \sigma||f|_{\alpha,\alpha/2;D}\right) \to +0 \qquad (4.12)\end{aligned}$$

при $k \to +\infty$. В силу непрерывного вложения [1]

$$\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}) \subset \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$$

имеем

$$|u_k - u|_{\alpha,\alpha/2;D} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Лемма доказана.

Наконец, мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 7. *Предположим, что $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ и*

$$|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D} < \frac{1}{2c_0}\left(2(p+1)c_0\right)^{1/(1-p)}, \qquad (4.13)$$

*где постоянная $c_0$ — это постоянная Шаудера в априорной оценке* (4.7). *Тогда задача* (4.3), (4.4) *имеет единственное решение класса $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ при достаточно малом размере области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$.* [2]

---

[1] На самом деле вполне непрерывное вложение

[2] Т. е. мера Лебега $|D|$ области $D = \Omega \otimes (0,T)$ мала.

Доказательство.

*Шаг 1.* Рассмотрим следующее нелинейное отображение:

$$\Phi(v) = |v|^p : \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) \to \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$$

при $p > 1$. Можно доказать, что это непрерывное отображение. Поскольку отображение $F$ является вполне непрерывным, то можно доказать, что отображение

$$F(\Phi(\cdot), \cdot) : \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) \otimes [0,1] \to \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$$

тоже вполне непрерывно.

Заметим, что задача (4.3), (4.4) в классе $\mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ эквивалентна задаче

$$u - F(\Phi(u), 1) = 0 \tag{4.14}$$

в классе $\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$.

*Шаг 2.* Мы собираемся воспользоваться теорией степени отображения Лере–Шаудера. С этой целью нам нужно выбрать такое число $R > 0$, чтобы

$$(id - F(\Phi(\cdot), \sigma))\,(\partial B_R) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \sigma \in [0,1], \tag{4.15}$$

где $B_R(0) = \left\{u(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}) : \, |u|_{\alpha,\alpha/2;D} < R\right\}$. В том случае, если свойство (4.15) доказано, то для того чтобы доказать существование хотя бы одного решения уравнения (4.14) нужно доказать, что

$$\deg\,(id - F(\Phi(\cdot), 1), B_R(0), 0) \neq 0. \tag{4.16}$$

Более того, если выполнено неравенство (4.15), тогда в силу свойства (iii) степени отображения Лере–Шаудера (см. (4.2)) справедливо равенство

$$\deg\,(id - F(\Phi(\cdot), 1), B_R(0), 0) = \deg\,(id - F(\Phi(\cdot), 0), B_R(0), 0)\,. \tag{4.17}$$

Согласно определению отображения $F$ имеем

$$F(\Phi(v), 0) = \widehat{u} \in \mathbb{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D}),$$

где $\widehat{u}(x,t)$ — это единственное решение следующей задачи:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} - \Delta \widehat{u} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.18}$$

$$\widehat{u}(x,t) = \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.19}$$

Теперь рассмотрим следующее отображение:

$$G(v, \sigma) = v - \sigma \widehat{u}, \quad v(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D}), \quad \sigma \in [0,1].$$

Прежде всего заметим, что
$$G(\cdot,0)=id,\quad G(\cdot,1)=id-F(\Phi(\cdot),0).$$
Если
$$G(\partial B_R(0),\sigma)\neq 0\quad\text{для всех}\quad \sigma\in[0,1],\tag{4.20}$$
тогда можно применить свойство (iii) степени отображения Лере–Шаудера (см. (4.2)) и получить цепочку равенств
$$\deg\,(id-F(\Phi(\cdot),0),B_R(0),0)=\deg\,(id,B_R(0),0)=1.\tag{4.21}$$
В силу (4.21) из (4.17) мы получим, что выполнено неравенство (4.16).

*Шаг 3.* Осталось доказать (4.15) и (4.20).

С этой целью предположим, что $v(x,t)\in\partial B_R(0)$, т.е. $v(x,t)\in\in\mathbb{C}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$ и
$$|v|_{\alpha,\alpha/2;D}=R.$$
Для любого $\sigma\in[0,1]$ классические априорные оценки Шаудера дают следующую цепочку неравенств:
$$\begin{aligned}|F(\Phi(v),\sigma)|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}&=|u|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}\leqslant\\ &\leqslant c_0\left(|\sigma\Phi(v)|_{\alpha,\alpha/2;D}+|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}\right)\leqslant\\ &\leqslant c_0\left(||v|^p|_{\alpha,\alpha/2;D}+|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}\right).\end{aligned}\tag{4.22}$$
Заметим, что имеет место цепочка неравенств
$$\begin{aligned}||v|^p|_{\alpha,\alpha/2;D}&=||v|^p|_{0;D}+[|v|^p]_{\alpha,\alpha/2;D}\leqslant\\ &\leqslant|v|^p_{0;D}+p|v|^{p-1}_{0;D}[v]_{\alpha,\alpha/2;D}\leqslant R^p+pR^{p-1}R=(p+1)R^p.\end{aligned}\tag{4.23}$$
Потребуем выполнения равенства
$$(p+1)R^p=\frac{1}{2c_0}R\Rightarrow R=\frac{1}{(2c_0(p+1))^{1/(p-1)}}.\tag{4.24}$$
В силу (4.24) из (4.23) получим неравенство
$$||v|^p|_{\alpha,\alpha/2;D}\leqslant\frac{R}{2c_0}.\tag{4.25}$$
Предположим, что
$$|\varphi|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}<\frac{R}{2c_0},\tag{4.26}$$
тогда из (4.22) в силу неравенств (4.25) и (4.26) получим следующее неравенство:
$$|F(\Phi(v),\sigma)|_{2+\alpha,1+\alpha/2;D}<c_0\left(\frac{R}{2c_0}+\frac{R}{2c_0}\right)=R.\tag{4.27}$$

Таким образом,

$$|F(\Phi(v), \sigma)|_{2+\alpha, 1+\alpha/2; D} < R \quad \text{для всех} \quad v \in \partial B_R(0), \quad \sigma \in [0, 1].$$

Поскольку $|v|_{\alpha, \alpha/2; D} = R$ это показывает, что

$$F(\Phi(v), \sigma) \neq v \quad \text{для всех} \quad v \in \partial B_R(0), \quad \sigma \in [0, 1].$$

Таким образом, свойство (4.15) при таком выборе $R > 0$.

Заметим теперь, что имеет место оценка для $\widehat{u} \in \mathbb{C}^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{D})$ имеет место оценка

$$|\widehat{u}|_{\alpha, \alpha/2; D} \leqslant K_1 |\widehat{u}|_{2+\alpha, 1+\alpha/2; D} \leqslant c_0 |\varphi|_{2+\alpha, 1+\alpha/2; D} < \frac{R}{2}, \tag{4.28}$$

поскольку константа $K_1 = K_1(|D|) \leqslant 1$ при достаточно малой мере Лебега $|D|$ области $D$. Таким образом, имеем

$$|G(v, \sigma)|_{\alpha, \alpha/2; D} = |v - \sigma \widehat{u}|_{\alpha, \alpha/2; D} \geqslant$$
$$\geqslant |v|_{\alpha, \alpha/2; D} - \sigma |\widehat{u}|_{\alpha, \alpha/2; D} > R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2} \tag{4.29}$$

для всех $v(x, t) \in \partial B_R(0)$ и для всех $\sigma \in [0, 1]$. Стало быть, доказано свойство (4.20).

Теорема доказана.

Тематическая лекция 9

# ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

В этой лекции мы рассмотрим слабый принцип максимума для линейных и нелинейных уравнений эллиптического и параболического типов.

## § 1. Слабый принцип максимума для слабых решений уравнения Лапласа и Пуассона

Дадим определение некоторых величин для функций $u(x) \in H^1(\Omega)$.

$$\sup_{\Omega} u \stackrel{def:}{=} \inf\left\{l : \ (u(x)-l)_+ = 0 \quad \text{п. вс. в} \quad \Omega\right\}, \tag{1.1}$$

$$\sup_{\partial\Omega} u \stackrel{def:}{=} \inf\left\{l : \ (u(x)-l)_+ \in H^1_0(\Omega)\right\}, \tag{1.2}$$

$$\inf_{\Omega} = -\sup_{\Omega}(-u), \quad \inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u), \tag{1.3}$$

где мы использовали следующее обозначение:

$$s_+ \stackrel{def:}{=} \max\left\{s, 0\right\}.$$

Замечание 1. В том случае, когда $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{\Omega})$ имеют место неравенства

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{x\in\Omega} u(x), \quad \sup_{\partial\Omega} u = \sup_{x\in\partial\Omega} u(x).$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область. Рассмотрим уравнение Лапласа

$$-\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

В слабом смысле решение $u(x) \in H^1(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (1.4), если

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x \varphi(x))\, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi(x) \in H^1_0(\Omega). \tag{1.5}$$

Справедливо следующее утверждение, которое имеет смысл слабого принципа максимума для слабых решений уравнения Лапласа:

Лемма 1. *Пусть* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *— это слабое решение уравнения Лапласа в смысле равенства* (1.5). *Тогда*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u.$$

Доказательство.

Пусть

$$l = \sup_{\partial\Omega} u \Rightarrow (u(x)-k)_+ \in H_0^1(\Omega)$$

для всех $k > l$. Заметим, что имеет место следующее равенство в слабом смысле:

$$\frac{\partial(u(x)-k)_+}{\partial x_i} = \begin{cases} \partial u/\partial x_i, & \text{если} \quad u(x) > k; \\ 0, & \text{если} \quad u(x) \leqslant k. \end{cases}$$

Выбирая в качестве функции $\varphi(x)$ в равенстве (1.5) функцию

$$\varphi(x) = (u(x)-k)_+ \in H_0^1(\Omega)$$

мы получим равенство

$$\int_{\Omega} |D_x(u(x)-k)_+|^2 \, dx = 0.$$

Осталось воспользоваться неравенством Фридрихса и получить неравенство

$$\int_{\Omega} |(u(x)-k)_+|^2 \, dx \leqslant K_{fr} \int_{\Omega} |D_x(u(x)-k)_+|^2 \, dx = 0,$$

из которого вытекает, что

$$(u(x)-k)_+ = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega$$

для всех $k > l$. Следовательно,

$$\sup_{\Omega} u \leqslant l = \sup_{\partial\Omega} u.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Для всякого слабого решения* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *уравнения Лапласа имеет место неравенство*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leqslant \inf_{\Omega} u.$$

Доказательство.

Достаточно заметить, что $-u(x) \in H^1(\Omega)$ — это тоже слабое решение уравнения Лапласа. Поэтому из теоремы получим неравенство

$$\sup_{\Omega}(-u) \leqslant \sup_{\partial\Omega}(-u) \Rightarrow -\sup_{\partial\Omega}(-u) \leqslant -\sup_{\Omega}(-u) \Rightarrow \inf_{\partial\Omega} u \leqslant \inf_{\Omega} u.$$

Следствие доказано.

Для дальнейшего нам необходимо доказать следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $\varphi(t)$ является неотрицательной и невозрастающей функцией на луче $[k_0, +\infty)$, удовлетворяющая*

$$\varphi(h) \leqslant \left(\frac{M}{h-k}\right)^{\alpha} \varphi^{\beta}(k) \quad \text{для всех} \quad h > k \geqslant k_0 \tag{1.6}$$

*для некоторых постоянных $M > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$. Тогда найдется такое $d > 0$,* [1] *что*

$$\varphi(h) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \geqslant k_0 + d. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Положим

$$k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.8}$$

с некоторой постоянной $d > 0$, подлежащей определению. Положим в неравенстве (1.6)

$$h = k_{n+1} = k_0 + d - \frac{d}{2^{n+1}}, \quad k = k_n = k_0 + d - \frac{d}{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h - k = k_{n+1} - k_n = \frac{d}{2^{n+1}} \Rightarrow \varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{M^{\alpha} 2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha}} \varphi^{\beta}(k_n). \tag{1.9}$$

Докажем по индукции, что имеет место следующее неравенство:

$$\varphi(k_n) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{1.10}$$

Действительно, в силу (1.9) имеет место цепочка неравенств

$$\varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{M^{\alpha} 2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha}} \varphi^{\beta}(k_n) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^{n+1}} \frac{M^{\alpha} 2^{(n+1)\alpha}}{d^{\alpha} r^{n(\beta-1)-1}} \varphi^{\beta-1}(k_0). \tag{1.11}$$

Теперь положим

$$r = 2^{\alpha/(\beta-1)} > 1.$$

[1] Выражение для величины $d > 0$ будет получено в процессе доказательства утверждения.

Тогда
$$\varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^{n+1}} \frac{M^\alpha 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}}{d^\alpha} \varphi^{\beta-1}(k_0).$$
Отсюда видно, что если величина $d > 0$ удовлетворяет равенству
$$\frac{M^\alpha 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}}{d^\alpha} \varphi^{\beta-1}(k_0) = 1 \Rightarrow d = M 2^{\beta/(\beta-1)} \varphi^{(\beta-1)/\alpha}(k_0),$$
то мы получим неравенство
$$\varphi(k_{n+1}) \leqslant \frac{\varphi(k_0)}{r^{n+1}}.$$

Отсюда в силу неотрицательности функции $\varphi(t)$ и того, что она является невозрастающей приходим к выводу, что
$$\varphi(k_0 + d) = \lim_{n \to +\infty} \varphi(k_n) \leqslant 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi(k_0 + d) = 0 \Rightarrow \varphi(h) = 0 \quad \text{для всех} \quad h \geqslant k_0 + d.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать принцип максимума для слабых решений уравнения Пуассона
$$-\Delta u(x) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{1.12}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in L^\infty(\Omega)$ *и* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *— это слабое решение уравнения Пуассона* (1.12). *Тогда имеет место неравенство*
$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u + c\|f\|_{L^\infty}, \tag{1.13}$$
*где постоянная* $c$ *зависит только от* $N$ *и* $\Omega$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Напомним, что слабое решение уравнения Пуассона удовлетворяет равенству
$$\int\limits_\Omega (D_x u(x), D_x \varphi(x))\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \tag{1.14}$$
для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$. Пусть
$$l \stackrel{def:}{=} \sup_{\partial\Omega} u, \quad \varphi(x) = (u(x) - k)_+ \in H_0^1(\Omega), \quad k > l.$$

После подстановки функции $\varphi(x)$ в (1.14) мы получим равенство [1)]
$$\int\limits_\Omega |D_x\varphi(x)|^2\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx$$

[1)] Поскольку $D_x(u(x) - k) = D_x u(x)$.

и, следовательно,

$$\int\limits_{\Omega} |D_x \varphi(x)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |f(x)\varphi(x)|\, dx. \tag{1.15}$$

Заметим, что в силу неравенства Фридрихса имеет место непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad 2 < p < p^*.$$

Поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\varphi|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant c \left(\int\limits_{\Omega} |D_x \varphi|^2\, dx\right)^{1/2},$$

где постоянная $c = c(N, p, \Omega) > 0$. В силу этого неравенства мы из неравенства (1.15) получим неравенство

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\varphi|^p\, dx\right)^{2/p} \leqslant c \int\limits_{\Omega} |f(x)\varphi(x)|\, dx,$$

которое с учетом определения функции $\varphi(x) = (u(x) - k)_+$ может быть переписано в следующем виде:

$$\left(\int\limits_{A(k)} |\varphi|^p\, dx\right)^{2/p} \leqslant c \int\limits_{A(k)} |f(x)\varphi(x)|\, dx, \tag{1.16}$$

где

$$A(k) \stackrel{def:}{=} \{x \in \Omega :\ u(x) > k\}. \tag{1.17}$$

*Шаг 2.* В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_{A(k)} |f(x)\varphi(x)|\, dx \leqslant \left(\int\limits_{A(k)} |\varphi|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_{A(k)} |f|^q\, dx\right)^{1/q},$$

где

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1.$$

Отсюда и из (1.16) получим неравенство

$$\left(\int\limits_{A(k)} |\varphi|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant c \left(\int\limits_{A(k)} |f|^q\, dx\right)^{1/q}. \tag{1.18}$$

Отметим, что при $h > k$ в силу определения (1.17) имеет место вложение $A(h) \subset A(k)$. Кроме того, при $x \in A(h)$ выполнена цепочка неравенств

$$u(x) > h \Rightarrow u(x) - k + k > h \Rightarrow (u(x) - k)_+ + k > h \Rightarrow \varphi(x) > h - k.$$

Поэтому имеет место цепочка неравенств

$$\int\limits_{A(k)} |\varphi|^p \, dx \geqslant \int\limits_{A(h)} |\varphi|^p \, dx \geqslant (h-k)^p |A(h)| \text{ [1]} \tag{1.19}$$

В силу (1.18) и (1.19) вытекает неравенство

$$(h-k)|A(h)|^{1/p} \leqslant c\|f\|_{L^\infty(\Omega)} |A(k)|^{1/q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |A(h)| \leqslant \left( \frac{c\|f\|_{L^\infty(\Omega)}}{h-k} \right)^p |A(k)|^{p/q}.$$

*Шаг 3.* Применим лемму 2 к функции $\varphi(t) = |A(t)|$, заметив, что при $p > 2$ получим
$$p > q = \frac{p}{p-1}.$$

Тогда получим, что

$$\varphi(l+d) = |A(l+d)| = 0,$$

где

$$d = c\|f\|_{L^\infty(\Omega)} |A(l)|^{(p-q)/(pq)} 2^{p/(p-q)} \leqslant c|\Omega|^{(p-q)/(pq)} 2^{p/(p-q)} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

В силу определения (1.17) получим неравенство

$$u(x) \leqslant l + c|\Omega|^{(p-q)/(pq)} 2^{p/(p-q)} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $f(x) \in L^\infty(\Omega)$ *и* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *— это слабое решение* 1.12. *Тогда*

$$\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u - c\|f\|_{L^\infty(\Omega)},$$

*где постоянная* $c = c(N, \Omega)$.

---

[1] Символом $|A(h)|$ мы обозначаем обычно меру Лебега множества $A(h)$, которое, очевидно, является измеримым в силу измеримости функции $u(x) \in H^1(\Omega)$.

## § 2. Слабый принцип максимума для слабых решений уравнения теплопроводности

Дадим определения некоторых величин, используемых в данном параграфе. Пусть $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$, $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область.

$$\sup_D u = \inf \{ l : \ (u(x,t) - l)_+ = 0 \quad \text{п. вс. в} \quad D \},$$

$$\sup_{\partial' D} u = \inf \left\{ l : \ (u(x,t) - l)_+ \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(D) \right\},$$

$$\inf_D u = -\sup_D(-u), \quad \inf_{\partial' D} u = -\sup_{\partial' D}(-u).$$

Прежде всего рассмотрим однородное уравнение теплопроводности.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{2.1}$$

Справедлива следующая лемма:

Л е м м а 3. *Пусть* $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение однородного уравнения теплопроводности* (2.1). *Тогда*

$$\sup_D u \leqslant \sup_{\partial' D} u. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Согласно определению слабого решения $u(x)$ класса $W_2^{1,1}(D)$ имеет место равенство

$$\int_D (u_t(x,t)\varphi(x,t) + (D_x u(x,t), D_x\varphi(x,t)))\, dx\, dt = 0 \tag{2.3}$$

для всех $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}_\infty (\overline{D})$ и, следовательно, для всякой функции $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D)$. Положим

$$l \overset{def:}{=} \sup_{\partial' D} u \ ^{1)}$$

и положим

$$\varphi(x,t) = (u(x,t) - k)_+, \quad k > l.$$

Тогда

$$\varphi(x,t) \in \overset{\bullet}{W}{}_2^{1,1}(D) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(D).$$

---

1) Ясно, что величина $l$ не зависит от времени $t \in [0,T]$.

После подстановки этой функции в равенство (2.3) мы получим выражение

$$\int_0^T\int_\Omega (u(x,t)-k)_t(u(x,t)-k)_+\,dx\,dt+ \\ +\int_0^T\int_\Omega \left(D_x(u(x,t)-k), D_x(u(x,t)-k)_+\right)\,dx\,dt=0,$$

из которого получим уравнение

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-k)_+^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega \left|D_x(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt=0. \tag{2.4}$$

Прежде всего заметим, что

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t)-k)_+^2\,dx\,dt=\int_\Omega (u(x,T)-k)_+^2\,dx-\int_\Omega \left(\gamma(u(x,0)-k)_+\right)^2\,dx, \tag{2.5}$$

причем в силу теоремы 7 и того факта, что $k>l=\sup\limits_{\partial' D} u$ имеем

$$\gamma(u(x,0)-k)_+=0 \quad \text{для почти всех} \quad x\in\overline{\Omega}.$$

Отсюда и из (2.4), (2.5)

$$\int_0^T\int_\Omega \left|D_x(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt\leqslant 0. \tag{2.6}$$

В силу неравенства Фридрихса имеем

$$\int_0^T\int_\Omega \left|(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt\leqslant K_{fr}\int_0^T\int_\Omega \left|D_x(u(x,t)-k)_+\right|^2\,dx\,dt\leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u(x,t)\leqslant k \quad \text{для всех} \quad k>l \quad \text{для почти всех} \quad (x,t)\in D.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $u(x,t)\in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение уравнения* (2.1). *Тогда*

$$\inf_{\partial' D} u\leqslant \inf_D u.$$

Теперь мы приступим к доказательству слабого принципа максимума для слабых решений неоднородного уравнения теплопроводности [1])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in D. \tag{2.7}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Пусть* $f(x,t) \in L^{\infty}(D)$ *и* $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ *— это слабое решение неоднородного уравнения* (2.7). *Тогда*

$$\sup_D u \leqslant \sup_{\partial' D} u + c\|f\|_{L^{\infty}(D)}, \tag{2.8}$$

*где постоянная* $c = c(N,\Omega) > 0$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Напомним определение слабого решения $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ неоднородного уравнения теплопроводности (2.7)

$$\int_D (u_t(x,t)\varphi(x,t) + (D_x u(x,t), D_x\varphi(x,t)))\, dx\, dt = \\ = \int_Q f(x,t)\varphi(x,t)\, dx\, dt \tag{2.9}$$

для всех $\varphi(x,t) \in \overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\infty} (\overline{D})$. Обозначим через

$$l \overset{def:}{=} \sup_{\partial' D} u.$$

Для $k > l$ и $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ мы определим функцию $\varphi(x,t)$ следующим образом:

$$\varphi(x,t) = \chi_{[t_1,t_2]}(t)(u(x,t)-k)_+, \quad \chi_E(t) \overset{def:}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in E; \\ 0, & \text{если} \quad t \notin E. \end{cases}$$

Подставим эту функцию $\varphi(x,t)$ в равенство (2.9) и получим равенство

$$\int_D (u-k)_t(u-k)_+\chi_{[t_1,t_2]}(t)\, dx\, dt + \int_D \chi_{[t_1,t_2]}(t)\,|D_x(u-k)_+|^2\, dx\, dt = \\ = \int_D f(x,t)(u-k)_+\chi_{[t_1,t_2]}(t)\, dx\, dt.$$

[1]) На самом деле правильнее было бы назвать неравенство (2.9) априорной оценкой, а не слабым принципом максимума, хотя и такое название оправдано.

Отсюда в силу определения характеристической функции $\chi_{[t_1,t_2]}(t)$ отрезка $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ получим неравенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} (u-k)_+{}^2\, dx\, dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \left|D_x\,(u-k)_+\right|^2\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\, dx\, dt,$$

из которого получим неравенство

$$\frac{1}{2}\left(I_k(t_2) - I_k(t_1)\right) + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} |D_x(u-k)_+|^2\, dx\, dt \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\, dx\, dt, \quad (2.10)$$

где

$$I_k(t) \stackrel{def:}{=} \int\limits_{\Omega} (u(x,t)-k)_+^2\, dx. \quad (2.11)$$

*Шаг 2.* Предположим. что абсолютно непрерывная функция $I_k(t)$ достигает максимума в точке $\sigma \in [0, T]$. Поскольку $I_k(0) = 0$ и $I_k(t) \geqslant 0$ мы можем предположить, что $\sigma > 0$. Теперь положим

$$t_1 = \sigma - \varepsilon, \quad t_2 = \sigma$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при этом в силу определения $\sigma > 0$

$$I_k(\sigma) - I_k(\sigma - \varepsilon) \geqslant 0.$$

При таких $t_1$ и $t_2$ из неравенства (2.10) получим неравенство

$$\int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |D_x(u-k)_+|^2\, dx\, dt \leqslant \int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\, dx\, dt.$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |D_x(u-k)_+|^2\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\sigma}^{\sigma-\varepsilon}\int\limits_{\Omega} |f|(u-k)_+\, dx\, dt.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ мы получим неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |D_x(u(x,\sigma)-k)_+|^2\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} |f(x,\sigma)|(u(x,\sigma)-k)_+\, dx. \quad (2.12)$$

Введем обозначения

$$A_k(t) \stackrel{def:}{=} \{x \in \Omega:\ u(x,t) > k\}, \quad \mu_k \stackrel{def:}{=} \sup_{0<t<T} |A_k(t)|. \tag{2.13}$$

Аналогично выводу неравенства (1.18) мы получим в силу неравенства Фридрихса неравенство

$$\left(\int\limits_{A_k(\sigma)} (u(x,\sigma) - k)_+^p\right)^{1/p} \leqslant c \left(\int\limits_{A_k(\sigma)} |f(x,\sigma)|^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant c\|f\|_{L^\infty(D)} |A_k(\sigma)|^{1/q} \leqslant c\|f\|_{L^\infty(D)} \mu_k^{1/q} \tag{2.14}$$

при условиях

$$2 < p < 2^*, \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

В силу ограниченности области $\Omega$ для функции $I_k(\sigma)$, определенной формулой (2.11) в силу неравенства Гельдера с показателями

$$q_1 = \frac{p}{2} > 1, \quad q_2 = \frac{q_1}{q_1 - 1} = \frac{p}{p-2}$$

в силу (2.14) мы получим неравенство

$$I_k(\sigma) \leqslant \left(\int\limits_{A_k(\sigma)} (u-k)_+^p\, dx\right)^{2/p} |A_k(\sigma)|^{(p-2)/p} \leqslant$$
$$\leqslant (c\|f\|_{L^\infty(D)})^2 \mu_k^{(3p-4)/p}. \tag{2.15}$$

Следовательно, в силу определения числа $\sigma > 0$ для всех $t \in [0,T]$ имеем место неравенство

$$I_k(t) \leqslant I_k(\sigma) \leqslant (c\|f\|_{L^\infty(D)})^2 \mu_k^{(3p-4)/p}. \tag{2.16}$$

*Шаг 3.* В силу определения (2.13) величины $A_k(t)$ имеем для всех $h > k$ и при любом $t \in [0,T]$

$$I_k(t) \geqslant \int\limits_{A_h(t)} (u(x,t) - k)_+^2\, dx \geqslant (h-k)^2 |A_h(t)|,$$

а с учетом (2.16) мы получим неравенство

$$(h-k)^2 \mu_h \leqslant (c\|f\|_{L^\infty(D)})^2 \mu_k^{(3p-4)/p},$$

т. е.

$$\mu_h \leqslant \left(\frac{c\|f\|_{L^\infty(D)}}{h-k}\right)^2 \mu_k^{(3p-4)/p}, \quad \frac{3p-4}{p} = 1 + \frac{2p-4}{p} > 1.\ ^{1)} \qquad (2.17)$$

В силу результата леммы 2 получим, что

$$\mu_{l+d} = \sup_{0<t<T} |A_{l+d}(t)| = 0,$$

где

$$d = c\|f\|_{L^\infty(D)}\mu_l^{1-2/p}2^{(3p-4)/(2p-4)} \leqslant c|\Omega|^{1-2/p}2^{(3p-4)/(2p-4)}\|f\|_{L^\infty(D)}.$$

Отсюда согласно определению $A_{l+d}(t)$ получим, что

$$u(x,t) \leqslant l + c|\Omega|^{1-2/p}2^{(3p-4)/(2p-4)}\|f\|_{L^\infty(D)} \quad \text{для п. вс.} \quad (x,t) \in D.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $f(x,t) \in L^\infty(D)$ и $u(x,t) \in W_2^{1,1}(D)$ — это слабое решение неоднородного уравнения теплопроводности. Тогда*

$$\inf_D u \geqslant \inf_{\partial' D} u - c\|f\|_{L^\infty(D)},$$

*где постоянная $c = c(N,\Omega) > 0$.*

---

[1]) Поскольку $p > 2$.

Тематическая лекция 10

# ВЫРОЖДАЮЩЕЕСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой тематической лекции мы рассмотрим задачу Коши для вырождающегося параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \quad m > 1$$

в случае неотрицательных решений $u(x,t) \geqslant 0$.

## § 1. Постановка задачи Коши

В этой лекции мы рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Существуют различные определения слабых решений задачи Коши (1.1), (1.1). Дадим определение.

Определение 1. *Неотрицательная функция $u(x,t)$ называется слабым решением задачи Коши* (1.1), (1.2) *в области $D = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$, если $u(x,t), u^m(x,t) \in L^1_{loc}(D)$ и функция $u(x,t)$ удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_D \left( u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0 \tag{1.3}$$

*для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обращается в ноль при $|x| > r > 0$ и при $t = T$ для некоторого $r > 0$.*

Замечание 1. Если

$$\frac{\partial u^m}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(D), \quad i = \overline{1,N},$$

тогда интегрированием по частям из (1.3) мы получим равенство

$$\int\limits_{D} \left( u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} - (D_x u^m(x,t), D_x \varphi(x,t)) \right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0. \quad (1.4)$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Если* $u(x,t)$ *— это слабое решение задачи Коши* (1.1), (1.2) *в смысле определения* 1, *тогда для любого* $\tau \in (0,T)$ *справедливо равенство*

$$\int\limits_{D_\tau} \left( u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0 \quad (1.5)$$

*для всякой* $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, *обращающейся в нуль при* $|x| > r$ *при некотором* $r > 0$, *где* $D_\tau = \mathbb{R}^N \otimes (0,\tau)$.

Доказательство.

Для доказательства леммы выберем в качестве пробной функции в равенстве (1.3) функцию $\varphi(x,t)\eta_\varepsilon(t)$, где

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in [0, \tau-\varepsilon]; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [\tau, T], \end{cases} \qquad \eta_\varepsilon(t) \in \mathbb{C}^\infty([0,T]), \qquad \left|\eta'_\varepsilon(t)\right| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}.$$

В силу равенства (1.3) получим равенство

$$\int\limits_{D_\tau} \eta_\varepsilon(t) \left( u(x,t)\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t)\Delta\varphi(x,t) \right) dx\,dt + \\ + \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\varphi(x,t)\eta'_\varepsilon(t)\,dx\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx = 0.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^\tau \eta'_\varepsilon(t)\,dt = \eta_\varepsilon(\tau) - \eta_\varepsilon(0) = -1.$$

Поэтому имеем

$$\left|\int\limits_{D_\tau} u(x,t)\varphi(x,t)\eta_\varepsilon^{'}(t)\,dx\,dt + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{D_\tau} \eta_\varepsilon^{'}(t)\left(u(x,t)\varphi(x,t) - u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\right)\,dx\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(u(x,t)\varphi(x,t) - u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\right)\,dx\right|\,dt \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Отметим, что из равенства (1.5), очевидно, вытекает равенство (1.3) для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обращается в ноль при $|x| > r$ и при $t = T$ при некотором $r > 0$.

## § 2. Единственность слабого решения задачи Коши

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Предположим, что*

$$0 \leqslant u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

*Тогда задача Коши* (1.1), (1.2) *может иметь не более одного слабого решения в* $L^1(D) \cap L^\infty(D)$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Из леммы 1 вытекает два равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_i(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)\,dx =$$

$$= \int\limits_{D_\tau}\left(u_i(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + u_i^m(x,t)\Delta\varphi(x,t)\right)\,dx\,dt \qquad (2.1)$$

при $i = 1, 2$ для любого $\tau \in (0,T)$ и для любой функции $\varphi(x,t) \in \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обращается в ноль при $|x| > r > 0$ при некотором $r > 0$. Положим

$$u(x,t) \stackrel{def:}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Тогда вычитая одно равенство (2.1) из другого, мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} \left( u(x,t)\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + (u_1^m(x,t) - u_2^m(x,t))\Delta\varphi(x,t)\right) dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + a(x,t)\Delta\varphi(x,t)\right) dx\,dt, \quad (2.2)$$

где

$$a(x,t) = \begin{cases} \frac{u_1^m(x,t)-u_2^m(x,t)}{u_1(x,t)-u_2(x,t)}, & \text{если} \quad u_1(x,t) \neq u_2(x,t); \\ m u_1^{m-1}(x,t), & \text{если} \quad u_1(x,t) = u_2(x,t), \end{cases} \quad (2.3)$$

при $(x,t) \in D_\tau$.

*Шаг 2.* Рассмотрим следующую функцию:

$$a_k(x,t) \overset{def:}{=} \rho_k(x,t) * a(x,t) + \frac{1}{k}, \quad (x,t) \in D, \quad (2.4)$$

где $\rho_k(x,t)$ — это гладкое ядро, а символом $*$ мы обозначили свертку по всем переменным $(x,t)$. Кроме того, рассмотрим следующую первую краевую задачу в цилиндре

$$D_{\tau,R} = B_R \otimes (0,\tau), \quad B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\} :$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} + a_k(x,t)\Delta\varphi(x,t) = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in D_{\tau,R}, \quad (2.5)$$

$$\varphi(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad |x| = R, \quad 0 < t < \tau, \quad (2.6)$$

$$\varphi(x,\tau) = g(x) \quad \text{при} \quad |x| < R, \quad (2.7)$$

где $R > R_0 + 1$, а $R_0 > 0$ выбирается таким образом, чтобы

$$\operatorname{supp}\{g(x)\} \subset B_{R_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R_0\right\}.$$

Ядро $\rho_k(x,t)$ выбираем таким образом, чтобы

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} (a(x,t) - \rho_k(x,t) * a(x,t))^2 \, dx\,dt \leqslant \frac{1}{k^2}. \quad (2.8)$$

Пусть $\varphi_k(x,t)$ — это гладкое решение первой краевой задачи (2.5)–(2.7). Продолжим это решение нулем на все $D_\tau$ :

$$\widetilde{\varphi}_k(x,t) = \begin{cases} \varphi_k(x,t), & \text{если} \quad (x,t) \in D_{\tau,R}; \\ 0, & \text{если} \quad (x,t) \in D_\tau \backslash D_{\tau,R}. \end{cases} \quad (2.9)$$

*Шаг 3.* Рассмотрим следующую пробную функцию $\xi_R(x) \in \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ :

$$\xi_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < R-1; \\ 0, & \text{если} \quad |x| > R - \frac{1}{2}, \end{cases} \quad |D_x\xi_R(x)| + |\Delta_R\xi(x)| < c. \quad (2.10)$$

Выберем теперь в качестве функции $\varphi(x,t)$ в равенстве (2.2) следующим образом:

$$\varphi(x,t) = \xi_R(x)\widetilde{\varphi}_k(x,t). \tag{2.11}$$

При этом

$$\Delta\varphi(x,t) = \xi_R(x)\Delta\widetilde{\varphi}_k(x,t) + 2(D_x\xi_R(x), D_x\widetilde{\varphi}_k(x,t)) + \widetilde{\varphi}_k(x,t)\Delta\xi_R(x).$$

Тогда равенство (2.2) примет следующий вид:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)\varphi(x,\tau)\,dx = \int\limits_{D_\tau} u(x,t)\left(a(x,t) - a_k(x,t)\right)\Delta\varphi(x,t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{D_\tau} (u_1^m - u_2^m)\left(2(D_x\xi_R(x), D_x\widetilde{\varphi}_k(x,t)) + \widetilde{\varphi}_k(x,t)\Delta\xi_R(x)\right)\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{D_\tau} u\xi_R(x)\Delta\widetilde{\varphi}_k(x,t) \stackrel{def:}{=} I_k + J_k. \tag{2.12}$$

*Шаг 4.* Теперь мы готовы оценить интегралы $I_k$ и $J_k$. Сначала получим априорные оценки на $\varphi_k(x,t)$ — решения первой краевой задачи (2.5)–(2.7). Умножим обе части уравнения (2.5) на $\Delta\varphi_k(x,t)$ и после интегрирования по частям по области $B_R \otimes (t,\tau)$ мы получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_R} |D_x\varphi_k(x,t)|^2\,dx + \int\limits_t^\tau \int\limits_{B_R} a_k(x,t)\left(\Delta\varphi_k\right)^2\,dx\,ds = \frac{1}{2}\int\limits_{B_R} |D_x g|^2\,dx,$$

из которого вытекают априорные оценки

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} |D_x\varphi_k|^2\,dx\,dt \leqslant c, \tag{2.13}$$

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} a_k|\Delta\varphi_k|^2\,dx\,dt \leqslant c. \tag{2.14}$$

Воспользуемся тем, что по условию теоремы $u_i(x,t) \in L^\infty(D)$, тогда мы получим следующую цепочек неравенств: [1)]

---

[1)] Заметим, что носители функций $|D_x\xi_R(x)|$ и $\Delta\xi_R(x)$ лежат в шаровом слое $B_R \backslash B_{R-1}$.

$$|I_k| \leqslant c\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1^m + u_2^m)\,(|D_x\varphi_k| + 1)\;dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1^m + u_2^m)\;dx\,dt +$$

$$+\,c\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1^m + u_2^m)^2\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} |D_x\varphi_k|^2\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1 + u_2)\;dx\,dt +$$

$$+\,c\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} u_1\,dx\,dt\right)^{1/2} + c\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} u_2\,dx\,dt\right)^{1/2}. \qquad (2.15)$$

Используя неравенство Гельдера, условие $u = u_1 - u_2 \in L^\infty(D)$ и априорную оценку (2.14), мы получим для $J_k$ цепочку неравенств

$$|J_k| \leqslant c\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} \frac{(a-a_k)^2}{a_k}\,dx\,dt\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} a_k(\Delta\varphi_k)^2\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} \frac{(a-a_k)^2}{a_k}\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{k}\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} \left(a - \rho_k * a - \frac{1}{k}\right)^2\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c\sqrt{k}\,\frac{1}{k} + c\sqrt{k}\left(\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R} (a - \rho_k * a)^2\,dx\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{c}{\sqrt{k}}. \qquad (2.16)$$

Итак, в силу оценок (2.15) и (2.16) из равенства (2.12) мы получим оценку

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau)g(x)\xi_R(x)\,dx\right| \leqslant |I_k| + |J_k| \leqslant c\int\limits_0^\tau \int\limits_{B_R\setminus B_{R-1}} (u_1 + u_2)\;dx\,dt +$$

$$+ c \left( \int_0^\tau \int_{B_R \setminus B_{R-1}} u_1 \, dx \, dt \right)^{1/2} + c \left( \int_0^\tau \int_{B_R \setminus B_{R-1}} u_2 \, dx \, dt \right)^{1/2} + \frac{c}{\sqrt{k}} \to +0.$$

при $R \to +\infty$ и при $k \to +\infty$, поскольку по условию имеем $u_1, u_2 \in L^1(D)$. Следовательно, в силу теоремы Беппо Леви мы получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x,\tau) g(x) \, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad g(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Из основной леммы вариационного исчисления получим

$$u(x,\tau) = 0 \quad \text{для п. вс.} \quad (x,\tau) \in D.$$

Теорема доказана.

## § 3. Существование слабого решения задачи Коши (1.1), (1.2)

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Предположим, что* $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *и* $u_0(x) \geqslant 0$. *Тогда задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение класса* $L^1(D) \cap L^\infty(D)$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Прежде всего рассмотрим такие две числовые последовательности $\{R_k\}$ и $\{\eta_k\}$, что имеют место следующие свойства:

$$R_k \to +\infty, \quad \eta_k R_k^N \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \; ^{1)} \tag{3.1}$$

Кроме того, построим такую последовательность функций $\{u_{0k}(x)\} \subset \mathbb{C}_0^\infty(B_{R_k})$ [2] таких, что

$$\|u_{0k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \tag{3.2}$$

$$\|u_{0k} - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to +0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.3}$$

Теперь мы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \Delta u_k^m \quad \text{при} \quad (x,t) \in B_{R_k} \otimes (0,T), \tag{3.4}$$

---

[1] Последнее предельное свойство нужно для стремления к нулю выражения $\eta_k \int_{B_{R_k}} dx \to +0$ при $k \to +\infty$.

[2] Такая последовательность существует и может быть построена применением операции срезки, например, с ядром «шапочка».

$$u(x,t) = \eta_k \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial B_{R_k} \otimes (0,T), \tag{3.5}$$

$$u(x,0) = u_{0k}(x) + \eta_k \quad \text{при} \quad x \in B_{R_k}. \tag{3.6}$$

Из классической теории квазилинейных параболических уравнений известно, [1] что существует классическое решение первой краевой задачи (3.4)–(3.6) класса $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, где $D_k = B_{R_k} \otimes (0,T)$.

*Шаг 2.* На этом шаге мы займемся выводом априорных оценок для решений задачи (3.4)–(3.6).

Используя классический слабый принцип максимума для первой краевой задачи (3.4)–(3.6), мы получим следующую априорную оценку:

$$\eta_k \leqslant u_k(x,t) \leqslant u_{0k}(x) + \eta_k \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_k,$$

из которой в силу неравенства (3.2) получим априорную оценку

$$\eta_k \leqslant u_k(x,t) \leqslant \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \eta_k \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D}_k. \tag{3.7}$$

Теперь мы умножим обе части уравнения (3.4) на $pu_k^{p-1}(x,t)$ и получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_k^p}{\partial t} = pu_k^{p-1}\Delta u_k^m = p\,\mathrm{div}\left(u_k^{p-1} D_x u_k^m\right) - p\left(D_x u_k^{p-1}, D_x u_k^m\right) = \\ = p\,\mathrm{div}\left(u_k^{p-1} D_x u_k^m\right) - mp(p-1)u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Заметим, что поскольку на боковой границе $S = \partial B_{R_k} \otimes (0,T)$ достигается минимум функции $u_k(x,t)$, то выполнено неравенство

$$\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial n_x} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{3.9}$$

где $n_x$ — это внешняя нормаль к боковой границе $S$. Поэтому интегрируя обе части равенства (3.8) по $(x,\tau) \in B_{R_k} \otimes (0,t)$, мы получим цепочку выражений

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_{R_k}} u_k^p(x,t)\,dx - \int\limits_{B_{R_k}} \left(u_{0k}(x) + \eta_k\right)^p\,dx = p\int\limits_0^t \int\limits_{\partial B_{R_k}} u_k^{p-1}\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial n_x}\,d\sigma\,d\tau - \\ - mp(p-1)\int\limits_0^t \int\limits_{B_{R_k}} u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,d\tau \leqslant \\ \leqslant -mp(p-1)\int\limits_0^t \int\limits_{B_{R_k}} u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.10}$$

---

[1] Например, это можно доказать методом Лере–Шаудера.

Таким образом, из неравенства (3.10) мы получим априорную оценку

$$\int\limits_{B_{R_k}} u_k^p(x,t)\,dx + mp(p-1)\int\limits_0^t\int\limits_{B_{R_k}} u_k^{m+p-3}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,d\tau \leqslant \leqslant \int\limits_{B_{R_k}} (u_{0k}(x)+\eta_k)^p\,dx \quad \text{при} \quad t\in(0,T]. \tag{3.11}$$

Используя (3.1)–(3.3), мы получим, что

$$\int\limits_{B_{R_k}} (u_{0k}(x)+\eta_k)^p\,dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0^p(x)\,dx \quad \text{при} \quad k\to+\infty.$$

В частности, тогда при $p=1$ и при $p=m+1$ мы из (3.11) получим априорные оценки

$$\int\limits_{B_{R_k}} u_k(x,t)\,dx \leqslant c_1(T) < +\infty, \quad t\in(0,T], \tag{3.12}$$

$$\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} \left|D_x u_k^m\right|^2\,dx\,dt \leqslant m^2\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} u_k^{2(m-1)}\left|D_x u_k\right|^2\,dx\,dt \leqslant c_2(T) < +\infty. \tag{3.13}$$

Умножим теперь обе части уравнения (3.4) на

$$m u_k^{m-1}\frac{\partial u_k}{\partial t}$$

и тогда получим равенство

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u_k^m}{\partial t} D_x u_k^m\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|D_x u_k^m\right|^2. \tag{3.14}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\partial B_{R_k}\otimes(0,T).$$

Проинтегрируем обе части равенства (3.14) по $B_{R_k}\otimes(t,T]$ и получим цепочку выражений

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_t^T\int\limits_{B_{R_k}}\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,T)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2\,dx \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \qquad (3.15)$$

Теперь проинтегрируем обе части неравенства (3.15) по $t \in (0,T)$ и получим неравенство

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt =$$

$$= \frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_t^T\int\limits_{B_{R_k}} \left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2\,dx\,dt. \qquad (3.16)$$

Заметим, кроме того, что имеет место следующие равенства:

$$\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^m}{\partial t}\right)^2 dx\,dt = m^2\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t u_k^{2(m-1)}\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}\right)^2 dx\,dt =$$

$$= \frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t u_k^{m-1}\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt. \qquad (3.17)$$

Воспользуемся неравенством (3.7) и получим оценку

$$\frac{4m}{(m+1)^2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t u_k^{m-1}\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4m}{(m+1)^2}\left(d + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)^{m-1}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} t\left(\frac{\partial u_k^{(m+1)/2}}{\partial t}\right)^2 dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(d + \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)^{m-1}\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_{B_{R_k}} |D_x u_k^m(x,t)|^2\,dx\,dt \leqslant c_3(T) < +\infty. \qquad (3.18)$$

*Шаг 3.* Итак, из (3.17) и (3.18) мы получим априорную оценку

$$\int_0^T \int_{B_{R_k}} t \left( \frac{\partial u_k^m}{\partial t} \right)^2 dx\, dt \leqslant c_3(T) < +\infty. \tag{3.19}$$

В частности, из этой оценки вытекает, что

$$\int_\delta^T \int_{B_{R_k}} \left( \frac{\partial u_k^m}{\partial t} \right)^2 dx\, dt \leqslant \frac{c_3(T)}{\delta} < +\infty. \tag{3.20}$$

Из оценки (3.13) получим

$$\int_\delta^T \int_{B_{R_k}} |D_x u_k^m|^2 \, dx\, dt \leqslant c_2(T) < +\infty. \tag{3.21}$$

Наконец, в силу (3.7) и (3.12) мы получим

$$\int_\delta^T \int_{B_{R_k}} u_k^m \, dx\, dt \leqslant c_4(T) < +\infty. \tag{3.22}$$

Из оценок (3.20)–(3.22) мы получим, что последовательность $\{u_k^m(x,t)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена в банаховом пространстве $H^1(D_{R,\delta})$, где

$$D_{R,\delta} \stackrel{def:}{=} (\delta, T) \otimes B_R$$

для любого $\delta \in (0,T)$ и для любого $R > 0$. Но в силу вполне непрерывного вложения

$$H^1(D_{R,\delta}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(D_{R,\delta})$$

последовательность $\{u_k^m\}$ сильно компактна в $L^2(D_{R,\delta})$. В этом случае существует такая подпоследовательность $\{u_k^m\}$ [1], что

$$u_k^m \to v \quad \text{сильно в} \quad L^2(D_{R,\delta}),$$

но отсюда вытекает, что опять для некоторой подпоследовательности $\{u_k^m\}$ имеем

$$u_k^m(x,t) \to v(x,t) \quad \text{п. вс. в} \quad D_{R,\delta} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

[1] Подпоследовательность мы обозначили так же как и последовательность.

Но отсюда в силу произвольности $R > 0$ и произвольности $\delta \in (0, T)$ получим, что

$$u_k^m(x,t) \to v(x,t) \quad \text{п. вс. в} \quad D \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.23}$$

Отсюда сразу же получим, что

$$u_k(x,t) \to u(x,t) = v^{1/m}(x,t) \quad \text{п. вс. в} \quad D \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{3.24}$$

*Шаг 4.* Осталось заметить, что классическое решение $u_k(x,t)$ первой краевой задачи (3.4)–(3.6) удовлетворяет равенству [1]) при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_D \left( u_k(x,t) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u_k^m(x,t) \Delta \varphi(x,t) \right) dx\, dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (u_{0k}(x) + \eta_k)\, \varphi(x,0)\, dx = 0 \tag{3.25}$$

для любой функции $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\overline{D})$, которая обнуляется при $|x| > > r > 0$ и при $t = T$ для некоторого $r > 0$. Теперь при фиксированной $\varphi(x,t)$ мы можем с учетом (3.23) и (3.24) перейти к пределу при $k \to \to +\infty$ и получить из (3.26) равенство

$$\int\limits_D \left( u(x,t) \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} + u^m(x,t) \Delta \varphi(x,t) \right) dx\, dt + \\ + \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x,0)\, dx = 0, \tag{3.26}$$

которое означает, что $u(x,t) \in L^\infty(D) \cap L^1(D)$ — это слабое решение первой краевой задачи (1.1), (1.2).

Теорема доказана.

[1]) Что может быть доказано умножением уравнения (3.4) на функцию $\varphi(x,t)$ с указанными ниже условиями и интегрированием по частям.

# Предметный указатель

# Список литературы


1. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
2. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
3. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
4. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
5. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
7. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.
8. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
9. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
10. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
11. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.