Лекция 9

11) Поскольку мы теперь знаем, что такое a^r при любом полож-м a и произвол-м вещ-м α:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ и $\forall a > 0 \Rightarrow a^\alpha$,

то, фиксируя показ-ль α и рассм-я основание как перем-ю величину (т.е. поступая наоборот по сравн-ию со случаем показат-й ф-ии a^x), приходим к степенной ф-ии $y = x^\alpha$:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow y = x^\alpha : D_f = (0, +\infty)$

Опираясь на основные св-ва показат-й и логарифм-й ф-й (вытекающие из опр-й этих ф-й), убеждаемся в том, что

$$x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x} \equiv e^{\varphi(x)} \equiv g(\varphi(x)) \equiv y(x)$$

взаимно обр-ые ф-ии

рав-ва по опр-ю

$g(\varphi) = e^\varphi$, $\varphi(x) = \alpha \ln x$

Но тогда на основании теоремы о непр-ти сложной ф-ии из непр-ти f и $\varphi \Rightarrow$ непр-ть $y(x) = x^\alpha$:

g и φ – непр $\Rightarrow y(x) = x^\alpha$ – непр-на

Зам-ие. В случае $\alpha \in \mathbb{N}$ (натур-го пок-ля) степенная ф-я опр-на и непр-на на всей вещ-й оси!

В заключение этого §-фа дадим опр-ие

класса элем-х ф-й. Это опр-ие опира- | 9.2
ется, в свою очередь, на уже фактически введённое нами понятие основной элем-й ф-ии, опр-ие кот-й мы также сейчас сформулируем

Опр Ф-ии вида 1)–11) наз-ся основными или простейшими элем-ми ф-ми

Опр Элементарной ф-ей наз-ся ф-я, получаемая из основных элем-х ф-й с помощью конечного числа арифм-х операций и суперпозиций. Мн-во всех эл-х ф-й наз-ся классом элемент-х ф-й

Дополн-но: Ф-я $y=f(x)\equiv C : D_f=\mathbb{R}$ формально может быть представлена, напр, в виде $y=C^{\frac{1+x^2}{1+x^2}}$ или $y=C^{x^0}$, если договорились, что $0^0=1$

Напр: $\cos 3x + x^3$, $e^{-x} + \operatorname{tg}\ln x$

Зам-ие. Из непр-ти основных эл-х ф-й вытекает непр-ть любой эл-й ф-ии (во всех предельных точках её обл-ти опр-я)

т.о. $y=C$ – элемент-я ф-я (но не основная элем-я ф-я)

Непр-ть осн-х элем-х ф-й $\Longrightarrow$ непр-ть элем-х ф-й (при $\forall x$ из D_f, являющемся её предельной т-ой)

(у осн-х эл-х ф-й все т-ки обл-ти опр-я – предельные)

т.е. x должен и $\in D_f$ и быть её пред-й точкой

§5 Замечательные пределы

Всего имеется два замечат-х предела. Начнём с первого из них

которые так и наз-ют: 1-й и 2-й зам-й пределы

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \text{ — неопр-ть } \frac{0}{0}$$

Зам-ие. Первым замечат-м пределом наз-ют как само это рав-во, так и предел, стоящий в его левой части (это зам-ие относится и ко второму зам-му пределу)

Δ Ранее было док-но, что $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, +\frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow |\sin x| \underset{\substack{\uparrow \\ \forall x \in \mathbb{R}}}{<} |x| \underset{\substack{\uparrow \\ \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}}}{<} |\operatorname{tg} x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|} \quad \Big| \times \frac{1}{|\sin x|}$$

Отсюда после деления на $|\sin x|$ имеем

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \frac{1}{|\cos x|} \text{ или } |\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1$$

С учётом того, что при рассм-ых $x \Rightarrow \cos x > 0$, $\frac{\sin x}{x} > 0$, это нер-во принимает вид (модули можно просто опустить):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & < & \dfrac{\sin x}{x} & < & \dfrac{1}{\cancel{\cos x}} \to 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array} \quad x \to 0$$

$\leftarrow$ В силу непр-ти ф-ии $\cos x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

Заметим, что $1 \to 1$ и $1/\cos x \to 1$ при $x \to 0$. Тогда из последнего нер-ва и теоремы о двух полицейских мгновенно следует искомый результат

$\blacktriangle$

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$$ – неопр-ть 1^{∞}

Для док-ва данного соотн-я нам понадобится одно вспомогат-ое утв-ие. Это утв-ие является естеств-ым дополнением к теореме о непрерыв-ти сложной ф-ии, поэтому прежде чем его сформулир-ть вспомним и немного переосмыслим (с целью выявления указанной взаимосвязи с последующим утв-ем) содержание данной теоремы

Итак, я напомню что если ф-ии f и φ удовл-ют усл-ям теоремы о непр-ти сложной ф-ии, то

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)) = \left[\begin{array}{ll} f(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)) - & \text{в силу непр-ти } \varphi(x) \text{ в т. } a \\ \lim\limits_{y\to\varphi(a)} f(y) - & \text{в силу непр-ти } f(y) \text{ в т. } \varphi(a) \end{array}\right.$$

а $f(\varphi(a))$, в свою очередь, можно представить как в виде □, так и в виде □

Каждое из полученных соотн-й даёт свой вариант интерпретации теоремы о непр-сти сложной ф-ии:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x))$

Это рав-во естеств-но интерпрет-ть как возможность внесения знака предела в аргумент непр-ой ф-ции

2) $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim\limits_{y\to b} f(y)$, $b = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ (=\varphi(a))$

А это рав-во предст-ет собой формулу замены переменной (т.е. формулу перехода от предела по x к пределу по y) под знаком предельного перехода

Заметим без док-ва, что для справедлив-ти каждого из соотн-й 1) и 2) дост-но непр-ти одной лишь внешней ф-ии f, а от ф-ии φ требуется только, чтобы она имела предел при $x\to a$:

дост-но, чтобы (сущ $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \equiv b$) + ($f(x)$ непр в т. b)

Дополн-но:

Убедиться в справ-ти последнего зам-ия очень легко. Для этого при необход-ти (т.е., если $\varphi(a)\neq b$) надо лишь переопр-ть или доопред-ть ф-ю $\varphi(x)$ в т. a своим предельным зн-ем в этой точке: $\varphi(a)\equiv b$ (в результате такого опред-я она станет непр-й) и после этого применить теорему о непр-ти сложной ф-ии:

$f(\varphi(x)) \to f(\varphi(a)) = f(b)$ при $x\to a$

Пусть теперь внутренняя ф-я $\varphi(x)\to\infty$ при $x\to a$. Что на сей раз можно сказать отн-но предела ф-ции $f(\varphi(x))$? Оказыв-ся, спр-во утв-ие, фактически обобщающее формулу замены перем-й под знаком пред-го перехода на случай ∞-го пред-го зн-я: $b=\infty$ ф-ции $\varphi(x)$

Утв. Пусть сложная ф-я $h(x)=f(\varphi(x))$:

1) $\varphi(x)\to\infty$, $x\to a$

2) $f(y)\to c$, $y\to\infty$

Тогда

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x))=\lim_{y\to\infty} f(y)=c$$

О непр-ти ф-ции $f(x)$ в т. $x=b$, т.е. в т. $x=\infty$ мы уже не говорим, поск-ку у нас нет понятия непр-ти ф-ции в ∞ удален-й т-ке

Зам-ие. Сформул-ое утв-ие спр-во и при $x\to a\pm 0$, ∞, $\pm\infty$

Вернёмся ко второму замечат-му пределу и док-ем, что он сущ-ет и $=e$

Δ Я напомню, что по своему опр-ю число e равно

$$e=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{f_n\equiv f(n)}$$

Т.о., нам надо док-ть, что исходный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ сущ-ет и равен пределу посл-ти f_n

Чтобы в этом убедиться, прежде всего сделаем замену перем-й во втором замеч-м пре-

деле, так чтобы перейти от предела в т. 0 $\boxed{9.7}$
к пределу на ∞-ти

$\cancel{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}$ $\quad \frac{1}{x}\equiv\varphi(x)=y\to\infty,\ x\to 0\ $ (и $y\neq 0$)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}}=\lim_{x\to 0}f(\varphi(x))=$$

но это и есть ф-я $f(\varphi(x))$ – см. выше опр ф-ии f

$$=\lim_{y\to\infty}f(y)=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

сущ-ие и величина предела не зависят от того, какой буквой обозн-ся предельная перем-ая (т.е. перем-я, по которой берётся предел)

Т.о., мы свели исходный предел вот к такому пределу

Заметим далее, что

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=e\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=e\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=e$$

(это утв-ие мгновенно следует из опр-я пределов на ∞-ти и остаётся в кач-ве несложного самост-го упр-я)

I) Покажем сперва, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n=e$

здесь $x\in\mathbb{R}$ $\quad$ а здесь $n\in\mathbb{N}$

Рассм-м след-ую сложную ф-ю

$$\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}=f([x])\equiv f(\varphi(x)),\ \text{где}$$

$[x] \equiv \psi(x) = y \to +\infty,\ x \to +\infty$
и $y \in \mathbb{N}$ при $x \geq 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(\psi(x)) = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\geq 1}} f(\psi(x)) = \lim_{\substack{y\to+\infty \\ y\in\mathbb{N}}} f(y) \equiv$$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} f_n$$

при исслед-ии предела на $+\infty$-ти мы можем огран-ить себя зн-ми $x \geq$ любому наперёд заданному x_0 (легко убедиться в том, что зн-ия $f(x)$ при $x < x_0$ на сущ-ие и величину такого предела не влияют)

Итак, $\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}}_{f([x])} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Дополн-но:

⌈В дальнейшем мы не будем вводить промежуточных обозн-й (наподобие $[x] = \psi(x)$), как в последнем случае), а будем сразу переходить к новой перем-й (подразум-я применение теоремы о непр-ти сложной ф-ии или дополняющего её утв-я о пределе сложной ф-ии с ∞-но большой "внутр-ей" ф-ей). Напр

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ x\geq 1}} \Big(1+\frac{1}{\underbrace{[x]}_{=y}}\Big)^{[x]} = \lim_{\substack{y\to\infty \\ y\in\mathbb{N}}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} f_n = e$$
⌊

Для док-ва сущ-я предела на $+\infty$ и у самой ф-ии $f(x)$ (а не только у $f([x])$), воспользуемся теор-й о двух милиц-х (применение этой т-мы одновременно докажет, что $\lim f(x) = e$)

Чтобы применить эту теорему, нам надо соответств-м образом оценить снизу и сверху ф-ю $f(x)$. Получим необходимые оценки.

Начнём с очевидного нер-ва

$$[x] \le x < [x]+1 = [x+1] \Rightarrow \frac{1}{[x+1]} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \Rightarrow$$

на самом деле здесь даже $<$, но ~~для~~ пусть для симметрии будет $\le$ (нам этого дост-но)

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{[x+1]} \le 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{[x]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \Rightarrow$$

(разум-ся, мы учитываем также, что основания >1)

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x+1]}\right)^{[x+1]}}_{\to e}\left(1+\underbrace{\frac{1}{[x+1]}}_{\to 0}\right)^{-1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}}_{\to e}\left(1+\underbrace{\frac{1}{[x]}}_{\to 0}\right)$$

e при $x\to\infty$ 0 $\qquad$ e при $x\to\infty$ 0

смещение арг-та на единицу величины предела не меняет

Поскольку левая и правая части последнего нер-ва $\to$ к одному и тому же числу e, то из теоремы о двух милиц-х мгновен-

но вытекает требуемый результат:
$\Rightarrow f\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e,\ x\to+\infty$ Δ_{I}

II) Для завершения док-ва теоремы остаётся показать, что
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = e$$
Сделаем замену переменной под знаком этого предела: $y=-x$ $(x\to-\infty \Rightarrow y\to+\infty)$
т.е. мы фактически сводим предел к уже рассм-му выше в I-й части
Тогда
$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{+y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y-1+1} =$$
$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\to e}\left(1+\underbrace{\frac{1}{y-1}}_{\to 0}\right) \to e \text{ при } y\to+\infty,$$
а значит $f(x)\to e,\ x\to-\infty$ Δ_{II}
Док-во того, что второй замеч-й предел $=e$ полностью завершено Δ

В заключение этого §-фа (а вместе с тем и всей III главы о непр-х ф-ях) рассм-м несколько примеров примен-я зам-х пред-в
Примеры
1) Асимптотическая формула для sin-a
$$\frac{\sin x - x}{x} = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} - 1 \to 0,\ x\to 0$$
$\Rightarrow \sin x - x = \bar{\bar{o}}(x)$ или $\underline{\sin x = x + \bar{\bar{o}}(x)}$ в т. $x=0$

2) Асимптотическая формула для логарифма

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} - 1 \xrightarrow{\text{в силу непр-ти натур-го логарифма}} \ln e - 1 = 0,\ x \to 0$$

($(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$)

$\Rightarrow \ln(1+x) - x \overset{e}{=} \bar{o}(x)$ или $\underline{\ln(1+x) = x + \bar{o}(x)}$ в т. $x=0$

Глава IV

Дифференцируемые функции

§1 Определение производной

Пусть дана ф-я $y = f(x)$: $D_f = (a, b)$

Пусть далее x и $x + \Delta x$ – нек-ые зн-я арг-та x:

$\underset{\text{фикс-но}}{x}$, $\underset{\text{произвольно}}{x + \Delta x} \in (a, b)$

Будем считать, что x – фиксированно, а Δx – произвольно. В таком случае величину Δx наз-ют приращением аргумента ф-ии f (в точке x)

Теперь введём понятие приращ-ия ф-ии

Пусть

$x \to y = f(x)$

$x + \Delta x \to y + \Delta y = f(x + \Delta x)$

Тогда $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Величину Δy и наз-ют прираш-ем ф-ии $y=f(x)$ в т-ке x

Введённые понятия прираш-я арг-та Δx и прираш-я ф-ии Δy позволяют сформулировать след-ее опр-ие произв-й

Опр Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он наз-ся произв-й ф-ии $y=f(x)$ в т. x

Обозн $f'(x), y'(x)$

Зам-ие 1. Если аргумент ф-ии f имеет физический смысл времени, то его, как правило, обозн-ют буквой t, а произв-ю по этому аргументу - точкой над характеристикой ф-ии: $\dot{f}(t)$ или $\dot{y}(t)$

Зам-ие 2. Мы можем рассм-ать прираще-ние Δy в любой т-ке x интервала (a, b). Т.о., Δy зависит ~~от~~ не только от Δx, но и от x: $\Delta y = \Delta y(x, \Delta x)$, причём зависимость от x по существу явл-ся парам-й, поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ может рассм-ся хоть и при произв-ом, но фиксиров-ом (при $\Delta x \to 0$) зн-ии x из нашего интервала. Т.к. величина $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ от Δx, разум-ся, уже не зависит, то произв-ая f'

ф-ии f зависит только от парам-ра x: $f' = f'(x)$. Заметим также, что производная $f'(x)$ может быть опр-на не при всех x из (a,b) (и даже может не сущ-ть ни при одном зн-ии x), $\overbrace{\text{иными словами}}$ $D_{f'} \subset D_f = (a,b)$ и при этом вполне может $\neq (a,b)$ (т.е. быть лишь частью этого интервала) **9.13**

Примеры

1) Ф-я $y = \sin x$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) =$$

У нас есть асимптот-я ф-ла для $\sin x$, $x \to 0$. В данном случае в роли x выступает $\frac{\Delta x}{2} \to 0$

$$= 2\left(\frac{\Delta x}{2} + \underbrace{\bar{\bar{o}}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}_{=\bar{\bar{o}}(\Delta x)}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$=\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ – я напомню, что $\bar{\bar{o}}(c\cdot\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\Delta x)$ и что $c\cdot\bar{\bar{o}}(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\Delta x)$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(1 + \frac{\overbrace{2\bar{\bar{o}}(\Delta x)}}{\Delta x}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \to 0, \quad \Delta x \to 0$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$

2) Ф-я $y = \ln x$, $x > 0$. Имеем

1 + "нечто малое" $(\to 0)$

$$\Delta y = \ln(x+\Delta x) - \ln x = \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{\Delta x}{x} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{\Delta x} \to 1, \quad \Delta x \to 0$$

(делить на x я уже не пишу, сразу заменяя $\frac{\bar{\bar{o}}(\Delta x)}{x}$ на $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$)

Итак, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Заметим, что $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

возможность вынесения константы-множителя за знак производной будет обоснована ниже.

(кроме обратных тригон-х ф-й)

Задание. Получить производные остальных элем-х ф-й (используя непосредственно замечат-ые пределы ~~или~~ асимптот-ие формулы, получаемые с помощью этих пределов)

Односторонние производные

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv f'(x+0)$, то он наз-ся правой производной ф-ии $y=f(x)$ в т. x

Левая произв-я в т. x опр-ся ан-но

Пример $y=f(x)=|x|$. Найдём односторонние произв-ые в т. $x=0$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=0} = \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1, & \Delta x > 0 \\ -1, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$f'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +1$$

$$f'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

Заметим, что поскольку левый предел $\frac{\Delta y}{\Delta x} \neq$ правому пределу, то "общего" предела при $\Delta x \to 0$ этого отношения не сущ-ет, ~~т.е. не~~ а значит не сущ-ет "общей" произв-й ф-ии f в т. $x=0$:

$f'(-0) \neq f'(+0) \Rightarrow \nexists f'(0)$

§2 Физический и геометрический смысл производной

Физический смысл

Пусть дана ф-я $x = f(t)$, где t - время, x - координата нек-й точки, движущейся вдоль оси x

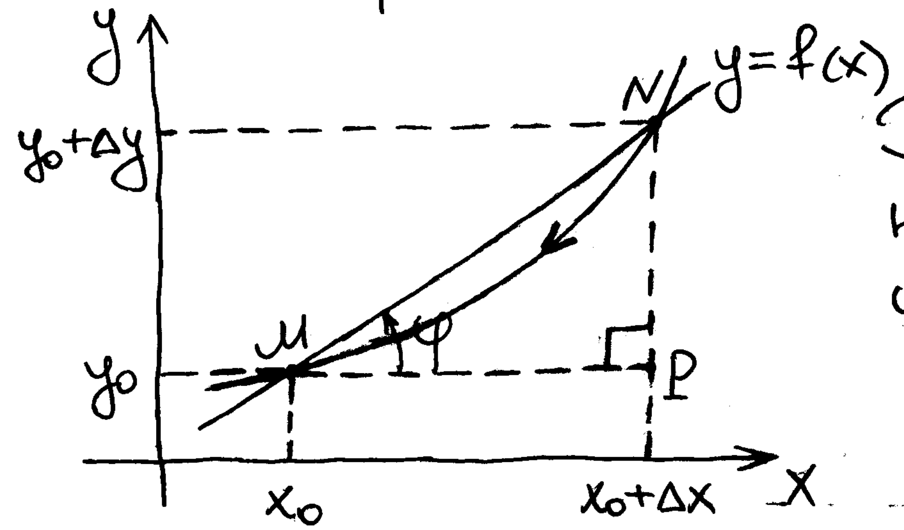
$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ - средняя скорость на отрезке времени от t до $t+\Delta t$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{cp} \equiv v(t) = \dot{x}(t)$,

т.е. мгновенная скорость точки в некоторой момент времени t есть производная координаты x этой точки при данном t (в этом и состоит физич-й смысл произв-ой координаты x по времени t)

Однако произв-я имеет физич-й смысл не только, когда в роли аргумента выступает время, а роли ф-ии - координата. В общем случае зависимости между двумя величинами y и x (могущими иметь любой смысл): $y=f(x)$, произв-я $f'(x)$ характеризует скорость изменения величины y, вызываемого измен-ем величины x (скорость изм-я y относит-но изм-я x)

Геометрический смысл



Рассм-м график нек-й непрерывной ф-ии $y=f(x)$

Пусть $M(x_0, y_0)$ и $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y_0)$ – две точки этого графика (Δx может быть $\forall$ знака, но для наглядности мы изображаем случай, когда $\Delta x>0$). Проведём прямую MN и построим ΔMNP (см. рисунок)

Прямая MN наз-ся секущей к графику ф-ии $y=f(x)$

Угол φ между секущей и осью x опред-ся из следующей системы

$$\varphi: \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$ – угол между прямой MN и осью OX

Т.о., если $\frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{cases} >0 \Rightarrow \varphi = +\angle NMP > 0 \\ <0 \Rightarrow \varphi = -\angle NMP < 0 \\ =0 \Rightarrow \varphi = 0 \end{cases}$

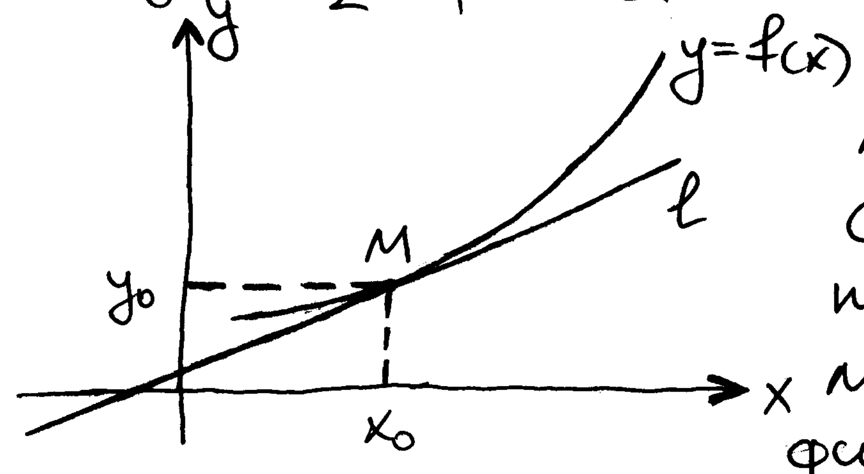
т.е. φ может быть положит-ным, отрицат-ным или равным нулю, но в любом случае по модулю $< \pi/2$ (острый): $|\varphi| < \pi/2$

$\operatorname{tg}\varphi$ – угловой коэффициент прямой MN

Фиксируем x_0. Тогда $\varphi = \varphi(\Delta x)$ (точнее от x_0 величина φ, конечно, также зависит, но как от параметра, т.е. мы считаем, что при каждом x_0 у нас есть своя ф-я $\varphi(\Delta x)$)

Устремим $\Delta x \to 0$ (при этом точка N на графике устремится к т-ке M) и рассм-м предел угла наклона $\varphi(\Delta x)$

Пусть $\varphi(\Delta x) \to \varphi_0$ при $\Delta x \to 0$ (обращаю внимание на то, что в общем случае предела может и не сущ-ать). Заметим, что поскольку $-\frac{\pi}{2} < \varphi(\Delta x) < +\frac{\pi}{2}$, то в силу теоремы о двух полиц-х $-\frac{\pi}{2} \le \varphi_0 \le +\frac{\pi}{2}$



Предельным положением (при $\Delta x \to 0$) секущей MN явл-ся прямая l, называемая касат-й к графику ф-ии $y=f(x)$ в т.M

Более строгое опр-ие касат-ой выглядит след-им образом

Опр Если сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)\equiv\varphi_0$, то **9.18**
прямая l с угловым коэф-ом $k=\operatorname{tg}\varphi_0$, проходящая через т-ку $M(x_0,y_0)$, наз-ся касательной к графику ф-ии $y=f(x)$ в т. M

Пусть $\varphi_0\neq\mp\frac{\pi}{2}$, т.е. график ф-ии имеет невертикальную касат-ую в т. M

Тогда $k=\operatorname{tg}\varphi_0=\operatorname{tg}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=$

т.к. tg - непр-ая ф-я

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ - в этом как раз и состоит геометр-й смысл произв-ой, т.е. в том, что произв-я в т. x_0 равна угловому коэф-ту касат-й в т. $M(x_0,y_0)$

Лекция 10

На прошлой лекции мы установили, что если существует неверт-ая касат-ая к графику ф-ии в т. $M(x_0, y_0)$, то эта ф-ия имеет произв-ую в т. x_0, причём $f'(x_0) = k$ - угловому касат-ой. Оказ-ся, справедливо и обратное утв-ие

Утв Если ф-я $y = f(x)$: сущ-ет $f'(x_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ график ф-ии имеет касат-ую в т. $M(x_0, y_0)$, причём угловой коэфф-ент касат-й $k = f'(x_0)$

Δ Док-ть самост-но

Уравнение касательной

В заключение §-фа запишем ур-ие касат-ой к графику ф-ии $y = f(x)$.

Пусть x и y - координаты произвольной точки касат-ой (x и y: $N(x, y) \in l$). Напомню, что ур-ие прямой, проходящей через т-ку $M(x_0, y_0)$ и имеющую угловой коэф-ент k имеет вид:

$$y - \underset{f(x_0)}{\underset{\parallel}{y_0}} = \underset{f'(x_0)}{\underset{\parallel}{k}}(x - x_0)$$

В нашем случае $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$, поэтому данное ур-ие принимает вид:

$$\underline{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$ ← искомое ур-ие кас-й к гр-ку ф-ии $y = f(x)$ в т. $M(x_0, f(x_0))$

§3 Определ-ие дифференцируемости

Общее опр-ие диффрен-ти предварим одним наглядным примером

Пусть $y = f(x) = x^{\sqrt{2}}$. Рассм-им

$$f(1+\Delta x) = (1+\Delta x)^{\sqrt{2}} = 1 + \underbrace{\sqrt{2}}_{f'(1)}\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x) \leftarrow \text{цв-ая асимпт-я формула}$$

Дополн-но:

Если не сказано явно в какой точке та или иная ф-я $= \bar{\bar{o}}(x)$, то подраз-ся, что она $= \bar{\bar{o}}(x)$ в т. $x=0$. Напр, запись $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ по умолчанию означает $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$

Замечая, что $1 = f(1)$, имеем ~~последнее соотн-ие предст~~

$$f(1+\Delta x) - f(1) = \underline{\Delta y = \sqrt{2}\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x)}, \text{ при } \Delta x \to 0 \text{ и } x = 1$$

Последнее соотн-ие предст-ет собой асимпт-ую формулу для приращения Δy ф-ии $f(x)$ при $\Delta x \to 0$ и $x = 1$

Возникает вопрос: для каких ф-й $f(x)$ и при каких знач-ях x её арг-та можно написать подобную асимпт-ую формулу? Прежде чем отвечать на этот вопрос, сформулируем опр-ие, в котором дадим назва-ние для ф-й, допускающих такое представление

Опр Ф-ия $y=f(x)$ наз-ся дифф-ой в т-ке x, если её приращение в этой т-ке можно представить в виде 10.3

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где A – нек-ое число, а $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$

Зам 1 В опр-ии ничего не говорится о единств-ти постоянной A — формально таких постоянных может быть сколь угодно (и даже ∞-но) много. Но даже если константа A, ~~представл~~ опред-ющая асимпт-ую формулу для Δy, всегда одна (ниже будет показано, что действ-но так), то при разных x её величина может быть различна (т.е., если ф-я $f(x)$ дифф-ма, скажем, в тт. x_1 и x_2, то константы A у асимптотических формул для приращений ф-ии в тт. x_1 и x_2, вообще говоря, различны):

$A = A(x) \leftarrow$ т.о., A постоянно лишь в том что не зависит от Δx

Зам 2 $\alpha(\Delta x)\to 0$, $\Delta x \to 0$, но это не означает, что $\alpha(0)=0$, т.к. б.м. в т-ке $\Delta x = 0$ ф-я вполне может быть разрывна в этой точке. Заметим, что $\Delta y = 0$ при $\Delta x = 0$ независимо от того, чему равно $\alpha(0)$. Тем не менее, мы потребуем, чтобы $\alpha(0)=0$. Это соглашение, никак не отражаясь на существе опр-ния, позволяет упростить док-во теоремы о диф-ти сложной ф-ции

Зам 3 $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x = \bar{\bar{o}}(\Delta x)$ (по опр-нию $\bar{\bar{o}}$-го), т.е. условие диф-ти ф-ции $f(x)$ можно также представить в виде

$$\Delta y = A\cdot\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x),\quad \Delta x\to 0$$

(при этом мы считаем, что $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ при $\Delta x=0$ обращ-ся в нуль: $\bar{\bar{o}}(0)=0$)

Т.о., диф-сть ф-ции в нек-й точке означает справ-ть для её приращ-ия в этой точке асимпт-ой формулы специального вида (линейной по Δx). Напр, вновь обращаясь к ф-ции $y=x^{\sqrt{2}}$, мы видим, что она диф-ма в т-ке $x=1$ и при этом константа $A=\sqrt{2}$

Вернёмся к вопросу о том, для каких ф-й $f(x)$ и при каких x возможно подобное асимпт-ое предст-ие, т.е. (согласно ~~новому~~ последнему опр-нию) к вопросу о том явл-ся ли та или иная ф-я диф-й в нек-й точке.

Оказ-ся, сущ-ет очень простой крите- | 10.5
рий (т.е. необход-ое и дост-ое усл-ие) диф-ти ф-ии

Теорема

Диф-ть ф-ии f в т. x $\Longleftrightarrow$ Сущ-ние произв-ой ф-ии f в т. x

$\square$

I) Сущ-ие $f'(x) \Rightarrow$ диф-ть f в т. x

Δ $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, α – б.м. при $\Delta x \to 0$

Т.о., при $\Delta x \neq 0$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)}_{\equiv A}\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$$

Но при $\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta y \equiv f(x+0) - f(x) = 0$, а значит и при $\Delta x = 0$ это представление спр-во $\blacksquare$

II) Диф-ть f в т. $x \Rightarrow$ Сущ-ие $f'(x)$

Δ $\Delta y = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$

Отсюда при $\Delta x \neq 0$ получаем

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. при $\Delta x \to 0$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \to A$, $\Delta x \to 0$ То, что $\Delta x \neq 0$ не страшно, т.к. когда мы берём предел от $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ~~то рассм-ем~~ эту дробь мы рассм-ем при $\Delta x \neq 0$

Т.о., сущ-ет $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = A$

$\blacksquare$

Может возникнуть вопрос: а зачем нам нужно понятие диф-ти ф-ии, если диф-фер-ть ⟺ сущ-ию произв-ой? Нельзя ли обойтись одним лишь понятием произв-ой?

В одномерном случае, т.е. в случае ф-й одного арг-та (который мы сейчас и изучаем) в принципе можно. ~~Тем не менее~~ Но существуют, по крайней мере, две причины, по которым такое дублирование понятий целесообразно.

новый абзац

Во-первых, в случае функций двух и большего числа аргументов диф-ть ф-ии (соотв-м образом обобщ-ая на ф-ии произвольного числа арг-в) уже не равносильна сущ-ию произв-ых по этим аргументам. Т.о., ради сохр-ия единства с многомерным случаем, опр-ие диф-ти уместно ввести и для ф-ий одного арг-та (несмотря на то, что для них она эквив-на сущ-ию производной) — было бы странным, если бы у нас ~~было~~ имелось понятие диф-ой ф-ии, скажем, двух арг-ов, но не было понятия диф-ой ф-ии одного арг-та

Во-вторых, ~~опр-ие диф-ти~~ при док-ве многих теорем (напр, т-мы о произв-ой сложной ф-ии) удобнее пользоваться именно опр-ем диф-ти, а не опр-ем произв-ой (кроме того, по форме оно удобнее и с точки зрения применения к приближённым вычислениям). Т.о., опр-ие диф-ти полезно и вне контекста взаимосвязи с ф-ми многих переменных

Зам 1 Ввиду док-й теоремы (т.е. ввиду равносильности $\exists$-ия произв-й и диф-ти ф-ии в т. x), вместо слов ф-ия имеет произв-ую в т. x, мы часто будем говорить – ф-я диф-ма в т. x (потому, что так короче)

Зам 2 Из док-ой теоремы видно, что константа **A** из условия диф-ти определяется единств-ым образом и равна $f'(x)$:

$A = f'(x)$ т.е. фактически рассм-ся $\exists$-ие произв-й как синоним диф-ти

Следов-но, прираш-е Δy диф-ой в т. x ф-ии на самом деле имеет след-ий вид:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$$

Теорема

Диф-ть $f(x)$ в т. a $\overset{\Longrightarrow}{(\not\Leftarrow)}$ Непр-ть $f(x)$ в т. a

Δ Нам надо док-ть, что

$f(x) \to f(a)$, $x \to a$

Сделаем замену перем-ой, перейдя от предела по x к пределу по Δx

$\Delta x = x - a \to 0$, $x \to a$

Получим

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) \overset{\text{должен равняться}}{=} f(a),$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(a+\Delta x) - f(a)] \equiv \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0}$$

Последнее усл-ие наз-ся разностной (т.к. Δy – это разность $f(a+\Delta x)$ и $f(a)$) формой усл-я непр-ти ф-ии $y = f(x)$ в т. a

Но справедл-ть этого соотн-ия сразу же следует из опр-я диф-ти в т. a ф-ии $y = f(x)$

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{0} + \underbrace{\bar{o}(\Delta x)}_{0} \to 0, \quad \Delta x \to 0$$

Зам-ие. Непр-ть $\overset{\text{не влечёт}}{\not\Rightarrow}$ Диф-ть. Напр, ф-я $y = |x|$ непр-на в т. $x = 0$, но не имеет произв-й, т.е. не диф-ма в этой точке

Дифференциал функции

Рассм-им ещё раз прираш-е Δy нек-ой диф-ой в т. x ф-ии $y = f(x)$ независ-й перм x

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\cdot\Delta x}_{} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

линейная относительно Δx часть приращ-я Δy (при фиксир-м x линейн-я ф-я Δx)

Её обозначают через dy:

$$dy \equiv f'(x)\,\Delta x$$

и наз-ют диф-ом ф-ии $y=f(x)$ в т. x

Если $f'(x)\neq 0$, то dy хоть и $\to 0$ при $\Delta x\to 0$, но при этом $\gg \bar{\bar{o}}(\Delta x)$:

$$dy \gg \bar{\bar{o}}(\Delta x),\ \Delta x\to 0,$$

а поэтому в случае $f'(x)\neq 0$ диф-л dy наз-~~ся~~ют также главной частью приращ-я Δy ф-ии $y=f(x)$

Введём понятие диф-ла незав-й перем-ой. Положим по опр-ю

$$dx \equiv \Delta x \text{ — диффер-ал незав-й пер-ой } x$$

$$\Rightarrow \boxed{dy = f'(x)dx}$$

Заметим, что это выр-ие, введённое нами для случая независимой перем-ой x, остаётся в силе и тогда, когда перем-ая x сама явл-ся ф-ей нек-ой перем-ой (т.е. является зависимой перем-ой). Такая универсальность выр-ия для dy, носящая название инвариантности ~~нор~~ формы первого

дифф-ла (об этой инвар-ти ещё пред- 10.10
стоит более подробный разговор) на самом деле явл-ся прямым следствием ~~введённого~~ данного нами опр-ия диф-ла незав-ой переменной, т.е. того, что $dx \equiv \Delta x$. Можно было бы поступить и наоборот: постулировать инв-ть формы 1-го диф-ла и из этого постулата вывести выражение для dx, т.е. док-ть, что $dx = \Delta x$

Из ~~выр~~-ия для dy получается, что при $dx \neq 0$

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$ – читается: dy по dx

Подчеркну дополн-но, что было бы неверным воспринимать это рав-во как введение ещё одного обозн-ия для произв-ой ф-ии f (т.е. как рав-во по опр-ию). Его справ-ть вытекает из опр-ий диф-ов dy - завис-й и dx - независ-й перем-х

Примеры

1) Пусть $y = f(x) = x^2$

$dy = d(x^2) = (x^2)'dx = 2x\,dx$

не путать с $dx^2 \equiv (dx)^2$

В частности,

$dy|_{x=1} = \overset{f'(1)}{2}\,dx$, т.е., как и =лo ожидать,

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = 2 = f'(1)$

Зам-ие. Не следует считать, что dx и dy обязат-но малы — на самом деле они могут равн-ся чему угодно. Напр, в двух последних равенствах можно положить

$dx = 1000 \Rightarrow dy = 2000$

$dx = 0{,}01 \Rightarrow dy = 0{,}02$

Разум-ся, в любом случае, т.е. при любом значении dx, отношение dy к dx даёт нам величину производной

2) Пусть $y = f(x) = \sqrt{x}$

С помощью диф-ла найдём приближённое зн-ие $\sqrt{3{,}96}$: $\sqrt{3{,}96} = ?$

Мы знаем, что $\sqrt{4} = 2$, поэтому удобно считать, что $x = 4$, $\Delta x = -0{,}04 \Rightarrow x + \Delta x = 3{,}96$

Далее,

$$\Delta y = \underbrace{f(4+\Delta x)}_{\sqrt{3{,}96}} - \underbrace{f(4)}_{\sqrt{4}=2} = \overbrace{f'(4)\cdot\Delta x}^{dy} + \bar{\bar{o}}(\Delta x)$$

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

в дальнейшем с помощью формулы Тейлора мы научимся оценивать погрешности подобных приближений

$$\sqrt{3{,}96} = f(4+\Delta x) \quad f(4) + f'(4)\Delta x + \bar{\bar{o}}(\Delta x) \approx$$

$$\approx 2 + \frac{1}{4}(-0{,}04) = 2 \underbrace{-0{,}01}_{dy\text{ - поправка к } y=2} = 1{,}99$$

после подстановки на место Δx его зн-ия $(-0{,}04)$ писать $\bar{\bar{o}}$ + $\bar{\bar{o}}$-ое, т.е. $+\bar{\bar{o}}(-0{,}04)$, уже некорректно, т.к.

не имеет смысла говорить о том, что то или иное слагаемое $= \bar{\bar{o}}(\Delta x)$ при фиксированном Δx. Мы можем сказать, что некотарая величина ~~$=$~~ составляет $\bar{\bar{o}}(\Delta x)$ только рассматривая её как ф-ию Δx и ~~устремляя~~ уменьшая неограниченно этот аргумент, т.е. устремляя $\Delta x \to 0$

Физический смысл диф-ла

Пусть известно, что скорость автомобиля в некоторый момент времени t равна 80 км/ч. Вопрос: что такое в данном случае 80 км и что такое 1 час?

Как известно, 80 км – это длина воображаемого пути, который бы проехал автомобиль, если бы он в течении одного часа двигался с постоянной скоростью, равной мгновенной скорости ~~в~~ v_0 начальный момент времени t_0. Разум-ся, в реальности ему заведомо не удастся проехать в течении всего часа (да, впрочем, и в течении любого другого отрезка времени тоже) с постоянной скоростью v – даже если водитель очень захочет – технически это принципиально неосуществимо (не говоря уж о том, что помешает рельеф местности, городская застройка, кривизна поверхности Земли, инспектор может остановить, в конце концов, и т. д. и т.п.)

Запишем в дифференциалах выражение для скорости v. Пусть автомобиль движется вдоль оси y по закону $y = f(t)$

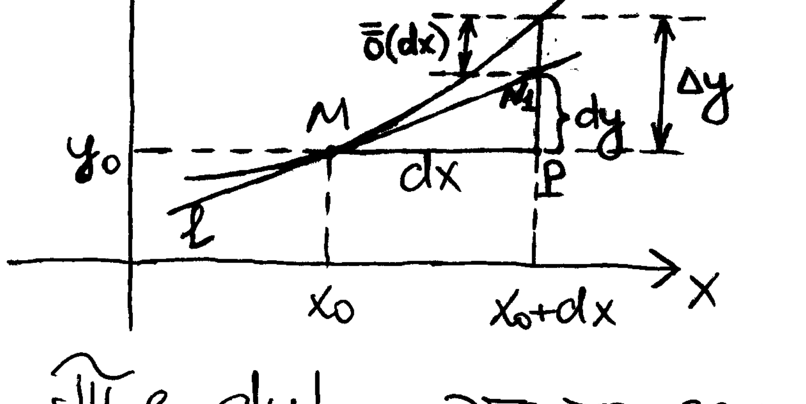
$$\Rightarrow v = \frac{dy}{dt} = \frac{80\text{ км}}{1\text{ ч}} = \frac{40\text{ км}}{0{,}5\text{ ч}}$$

В первом случае $dt = 1$ ч, $dy = 80$ км

Во втором случае $dt = 0{,}5$ ч, $dy = 40$ км

Итак, $dy|_{t=t_0}$ — это то, насколько изменилась бы величина $f(t)$ на промежутке $[t_0, t_0+dt]$, если бы скорость её изм-ия на нём была пост-ой и $= f'(t_0)$

Геометрический смысл диф-ла



$$PN_1 = \operatorname{tg}\varphi_0\, dx = f'(x_0)dx = dy$$

↑ по геометр-му смыслу производной

Т.е. $dy|_{x_0}$ — это то, чему равнялось бы $\Delta y|_{x_0}$ ($y=f(x)$), если бы график ф-ии совпадал с прямой l — касат-ой к этому графику в т. $M(x_0, y_0)$

§4 Правила дифферн-ция

Теорема Если ф-ии $u(x)$ и $v(x)$ диф-мы в т. x, то ф-ии $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, а если $v(x) \neq 0$, то и $u(x)/v(x)$ также диф-мы в т. x, причём

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Δ2) Пусть $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда

$\Delta y = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)v(x)$

Т.к. $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, а значит

$u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$,

и аналогично

$v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$,

то $\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = (\Delta u)v + u(\Delta v) + (\Delta u)(\Delta v)$

Разделив последнее рав-во на Δx, будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} v + u \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} + \underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta x}}_{u'} \underbrace{\frac{\Delta v}{\Delta x}}_{v'} \underbrace{\Delta x}_{0} \to u'v + uv'$$

при $\Delta x \to 0$

Сл-но предел левой части (т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$) также сущ-ет, причём ~~Но с другой стороны~~ по опр-ию произв-ой

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = (uv)' \Rightarrow (uv)' = u'v + uv'$ ▲2)

Формулы 1) и 3) док-ть самост-но

(в отличие от случая с теоремой об арифм-х операциях над ф-ми, имеющими пред-ое значение, док-во утв-ия для частного в качественном отношении не сложнее док-ва утв-ия для произведения)

Примеры

1) $(\underset{\text{const}}{c} \cdot y(x))' = \cancel{c'}^{\,0} \cdot y + c \cdot y' = c \cdot y'(x)$

const – не зависит от x

(т.е. constanty-множитель можно выносить за знак произв-ой)

2) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\operatorname{ctg} x)' = \text{—"—} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

расписать самост-но

Зам-ие. Последние две произв-ые достаточно просто выводятся и из асимптот-их формул, но с помощью формулы для произв-ой частного результат получается ещё быстрее

§5 Производная обратной ф-ии

Теорема (о произв-ой обр-ой ф-ии)

Пусть ф-я $y = f(x)$:

1) определена
2) строго монотонна
3) ~~дифф-ма~~ непр-на

в нек-ой окр-ти т. x_0

4) диф-ма в т. x_0 ← т.е. сущ-ет $f'(x_0)$ | 10.16

и $f'(x_0) \neq 0$

Тогда 1) найдётся такая окр-ть т. $y_0 = f(x_0)$, в которой

сущ-ет $x = f^{-1}(y)$

2) $f^{-1}(y)$ диф-ма в т. y_0 ← т.е. сущ-ет $(f^{-1}(y_0))'$

и $(f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

↑

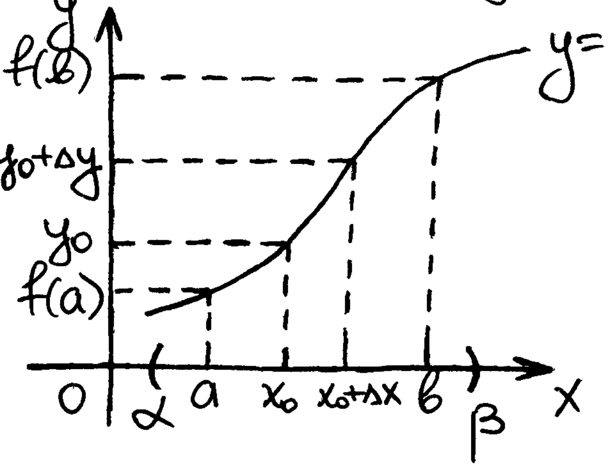
произв-ая ф-ии f^{-1} в т. y_0

Δ Докажем в след-ий раз

Лекция 11

В конце прошлой лекции я сформулировал теорему о произв-ой сложной ф-ии. Теперь док-ем эту теорему

Δ Чтобы сделать док-во более наглядным, сопроводим его изображением графика подходящей (т.е. удовл-ей усл-ям теоремы) ф-ии



На рисунке изображён случай возрастающей ф-ии, но для нашего док-ва это не принципиально — оно использует лишь строгую монот-ть (т.е. ф-я вполне может и убывать)

Δ1) Пусть (α,β) — окрестность т. x_0, в кот-й выполнены усл-я 1)–3) доказываемой теоремы (в самой точке x_0 вып-но усл-ие 4))

Рассм-м любой отр-к $[a,b]$: $x_0 \in [a,b] \subset (\alpha,\beta)$

Тогда ~~Заметим, что~~ на отр-ке $[a,b]$ также выполнены усл-ия 1)–3) настоящей теоремы (ф-я определена, строго монотонна и непр-на). Но т.к. эти усл-я одновр-но явл-ся усл-ми теоремы о существ-ии обратной ф-ии, то:

11.2

1) $x \in [a,b] \equiv X \Leftrightarrow y \in [f(a), f(b)] \equiv Y$

Иными словами, если мы рассм-ем ф-ю $f(x)$ на отр-ке X, то мн-м её знач-й явл-ся отр-к Y, т.е. если $D_f \equiv X$, то $E_f = Y$ (дальше только на этом отр-ке её и рассм-ем)

2) сущ-ет $x = f^{-1}(y) : D_{f^{-1}} = Y$

3) f^{-1} строго монотонна

4) f^{-1} непрерывна

$\Big\}$ на Y

Для завершения док-ва первой части теоремы остаётся заметить, что поскольку $a < x_0 < b$, то $f(a) < f(x_0) = y_0 < f(b)$, т.е. $y_0 \in (f(a), f(b)) \subset Y = D_{f^{-1}}$

Т.о. получается, что обратная ф-я $x = f^{-1}(y)$ опред-на в окр-ти $(f(a), f(b))$ точки y_0 Δ 1)

Зам 1 В начале док-ва мы искусственно сузили обл-ть опр-я ф-ии f с интервала (α, β) до отр-ка $[a, b]$. Это связано с тем, что теорема о сущ-ии обр-ой ф-ии, на которую мы опирались, была сформулирована и док-на для случая ф-ии, опред-ой ~~не~~ именно на отр-ке. Соотв-но в конце док-ва нам также пришлось ~~ещё~~ ~~раз~~ искусственно сужать ещё и обл-ть опр-я ф-ии f^{-1}

~~интервала~~ с отр-ка $[f(a), f(b)]$ до интервала $(f(a), f(b))$, т.к. нам формально требовалось док-ть, что обр-ая ф-я опр-на в нек-й окр-ти т. y_0, т.е. на нек-ом интервале (а не отр-ке!), содерж-ем эту точку. Впрочем, если ~~бы мы~~ распространить теорему о сущ-ии обратной ф-ии на случай ф-ии, опред-ой на инт-ле, то указанных манипуляций можно избежать (~~не~~ при этом мы сразу получаем обратную ф-ю f^{-1}, опр-ую в окр-ти $(f(a), f(b))$ точки y_0)

Зам 2 На самом деле мы док-ли даже больше, чем требуется, а именно, мы доказали, что обр-ая ф-я f^{-1} не ~~только~~ просто сущ-ет, но и обладает свойствами строгой монот-ти и непр-ти в окр-ти $(f(a), f(b))$ точки y_0 (см. 3) и 4)). Тем не менее, эти результаты также необх-мы, т.к. будут использованы во второй части док-ва теоремы

Δ2) Пусть ~~Δy~~ $\Delta y \neq 0$ мало настолько, что:

$y_0 + \Delta y \in (f(a), f(b)) \subset Y = D_{f^{-1}}$

Будем рассм-ать Δy как приращение в т. y_0 арг-та обр-ой ф-ии $x = f^{-1}(y)$. Тогда приращение ~~Δy~~ Δx этой ф-ии равно

$$\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) = \Delta x(\Delta y)$$

~~Поскольку~~ Из того, что $y_0+\Delta y \neq y_0 \Rightarrow f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) \Rightarrow$ т.к. f^{-1} строго монотонна

$\Rightarrow \Delta x \neq 0$

Отсюда вытекает, что отношение $\frac{\Delta x(\Delta y)}{\Delta y}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta x(\Delta y)}{\Delta y} \equiv \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} \quad \Delta x \neq 0 \quad \text{тождество по } \Delta y \qquad (*)$$

Если существует отличный от нуля предел при $\Delta y \to 0$ знаменателя последней дроби (т.е. предел $\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}$), то по теореме о пределе частного существ-т и предел всей дроби, равный единице, делённой на предел знамен-ля

В свою очередь, чтобы решить вопрос о существ-ии предела знам-ля и найти величину этого предела, сделаем замену переменной, перейдя от предела по Δy к пределу по Δx, для чего прежде всего выразим Δy через Δx

~~$f^{-1}(y_0+\Delta y) = f^{-1}(y_0)+\Delta x$~~ Из опр-я Δx следует, что

$$f^{-1}(y_0+\Delta y) = f^{-1}(y_0)+\Delta x = x_0+\Delta x \quad \Big\} f(\ )$$

$$y_0+\Delta y = f(x_0+\Delta x)$$

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta y(\Delta x)$$

Т.о., мы убедились в том, что если ~~Δy~~ Δx есть приращение обр-й ф-ии, ~~в~~ отвечающее Δy, то Δy — это прираще-ие исходной ф-ии, отвечающее прир-ию Δx (впрочем, у приведённого выше рисунка это видно сразу)

~~Т.е.~~ При этом, мы фактически решили уравнение (причём однозначно)

$\Delta x = \Delta x(\Delta y)$ относит-но Δy: обратные ф-ии как бы сокращаются

$$\Delta x = \Delta x(\Delta y) \Leftrightarrow \Delta y = \Delta y(\Delta x): \ \Delta x(\Delta y(\Delta x)) \equiv \Delta x$$

Далее следуют два варианта продолжения док-ва теоремы

Вариант для лекций (более короткий, но менее строгий, предполагающий умение ~~дать~~ давать обоснование некоторым внешне очевидным, но по существу требующим дополнительного док-ва переходам)

Заметим, что

$$\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) \to 0, \ \Delta y \to 0,$$

т.к. f^{-1} по доказ-му ранее (в части 1) — непрерывная ф-я

Тогда, беря предел от правой части тождества (*) и подставляя на место Δy его выражение через Δx: $\Delta y = \Delta y(\Delta x)$, получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Но раз сущ-ет предел правой части 11.6
≡-ва (*), то ~~сущ-ет~~ предел его левой части также сущ-ет и равен пределу правой части

$$\underbrace{\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x(\Delta y)}{\Delta y}}_{\equiv {f^{-1}}'(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Напомню, что $f'(x_0)$ по предполож-ю теоремы $\neq 0$

$\equiv {f^{-1}}'(y_0)$ — но с другой стороны этот предел по опред-ию произв-ой равен произв-ой обр-ой ф-ии $x = f^{-1}(y)$ в т. y_0

Итак, мы установили, что произв-ая обр-ой ф-ии в т. y_0 сущ-ет и равна $1/f'(x_0)$:

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ч.т.д.} \qquad \Delta 2)$$

Теорема о произв-ой обр-ой ф-ии полностью док-на Δ

Дополн-но

(Второй вариант (более честный) продолжения ~~окончания~~ док-ва теоремы о произв-ой обр-ой ф-ии):

~~Т~~ При этом мы фактически решили (причём однозначно) ур-ие $\Delta x = \Delta x(\Delta y)$ отн-но Δy:

$$\Delta x = \Delta x(\Delta y) \Leftrightarrow \Delta y = \Delta y(\Delta x): \quad \Delta y(\Delta x(\Delta y)) \equiv \Delta y$$

обр-ые ф-ии как бы сокращ-ся

~~Т.о., ф-ии~~ (Можно ещё сказать, что мы убедились в том, что ~~ф-ии~~ $\Delta y(\Delta x)$ и $\Delta x(\Delta y)$ явл-ся взаимно обратными ф-ми.)

Заметим, что

$\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) \to 0,\ \Delta y \to 0,$

т.к. f^{-1} по доказ-му ранее (в части 1) - непрерывная ф-я

Тогда, беря предел от правой части тождества (*) и делая замену переменной под знаком предельного перехода (т.е. переходя от предела по Δy к пределу по Δx), имеем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(\Delta x(\Delta y))}{\Delta x(\Delta y)}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Зам На самом деле у нас не было теоремы о пределе сложной ф-ии $f(g(x))$, у которой образующие её ф-ии f и g имеют пределы в соотв-х точках (а здесь бы она как раз сработала), так что предложенный трюк с заменой переменной тоже не вполне строг. Но зато у нас была теорема о непр-ти сложной ф-ии, которая легко позволяет сделать наше док-во "абсолютно строгим". Для этого дост-но доопред-ть ф-ю $\frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x)$ в точке $\Delta x = 0$ её предельным зн-ем $f'(x_0)$: $\frac{\Delta y}{\Delta x}(0) \equiv f'(x_0)$. Тогда в силу непрер-ти ф-ции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в т. $\Delta x = 0$ и ф-ции $\Delta x(\Delta y)$ в точке $\Delta y = 0$ на основании теоремы о непрер-ти сложной ф-ции будет следовать, что ф-я

$\frac{\Delta y(\Delta x(\Delta y))}{\Delta x(\Delta y)} \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta x(\Delta y))$ непр-на в точке $\Delta y = 0$,

а значит
$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x(\Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(\Delta x(\Delta y))}{\Delta x(\Delta y)} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta y(\Delta x)) =$$
$$= \frac{\Delta y}{\Delta x}(\Delta y(0)) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(0) = f'(x_0)$$

Но раз сущ-ет предел правой части $\equiv$-ва $(*)$, то — и — (см. окончание первого варианта)

Пример

Рассм-м ф-ю $y = f(x) = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$

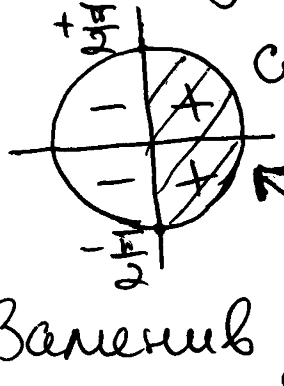
При данных x эта ф-я опр-на, возр-ет и непр-на, и, кроме того,

$f'(x) = \cos x > 0$ (для нас главное, что $\neq 0$)

Тогда из док-ой только что теоремы вытекает сущ-ие $x = f^{-1}(y) \equiv \arcsin y$, $y \in (-1, +1)$, причём

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$(\sin x = y)$



$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x}$

Заменив $y \to x$, окончательно получим $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Задание. Вывести

11.9

а) Произв-ые остальных arc-функций

б) Произв-ую показат-ой ф-ии, рассм-ой как обратной по отношению к ф-ии $y=\log_a x$, т.е.: считая изв-ой произв-ую ф-ии $y=f(x)=\log_a x$, получить пр-ую ф-ии $x=f^{-1}(y)=a^y$ (с дальнейшей заменой $y\to x$)

(Напомню, что пр-ую показ-ой ф-ии можно также получить, исполь-я соотв-ую асимптотич-ую формулу — с точки зрения сложности и объёма выкладок эти способы сопоставимы)

§6 Производная сложной функции

Рассм-м сложную ф-ю $y=f(x)$, где $x=\varphi(t)$, т.е. ф-ю $y=f(\varphi(t))\equiv h(t)$

Теорема ~~Пусть~~ (о произв-ой сложной ф-ии)

Пусть ф-ия $x=\varphi(t)$ диф-ма в т. t_0, а ф-я $y=f(x)$ диф-ма в т. $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда сложная ф-я $h(t)=f(\varphi(t))$ диф-ма в т. t_0, причём

$$F'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0)=f'(\varphi(t_0))\cdot\varphi'(t_0)$$

Δ Из диф-ти ф-ии $x=\varphi(t)$ в т. t_0

$\Rightarrow \Delta x = \varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\Delta t +$
$+ \alpha(\Delta t)\cdot \Delta t = \underline{\Delta x(\Delta t)}$ — давайте подчеркнём (1)

где $\alpha(\Delta t) \to 0$, $\Delta t \to 0$ и $\alpha(0)=0$

Из дифф-ти ф-ии $y=f(x)$ в т. x_0

$\Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \beta(\Delta x)\Delta x = \Delta y(\Delta x)$, (2)

где $\beta(\Delta x) \to 0$, $\Delta x \to 0$ и $\beta(0)=0$

Т.к. соотн-ие (2) справ-во при совершенно любом Δx: $x_0+\Delta x \in D_f$, то оно спр-во и при любом значении $\Delta x = \Delta x(\Delta t)$ из соотн-ия (1), где Δt: $t_0+\Delta t \in D_\varphi$ (напомню, что по опр-ию сложной ф-ии $E_\varphi = D_f$, а значит $x_0+\Delta x(\Delta t)$ заведомо $\in D_f$)

Теперь рассм-м приращ-ие ф-ии $y=h(t)$

$$\Delta y = h(t_0+\Delta t) - h(t_0) = f(\underbrace{\varphi(t_0+\Delta t)}_{\varphi(t_0)+\Delta x(\Delta t)}) - f(\underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0}) =$$

$$= f(x_0+\Delta x(\Delta t)) - f(x_0) \overset{(2)}{=} f'(x_0)\Delta x(\Delta t) + \beta(\Delta x(\Delta t))\Delta x(\Delta t) \overset{(1)}{=}$$

$$= f'(x_0)[\varphi'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t] + \beta(\Delta x(\Delta t))[\varphi'(t_0)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t] =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0)\Delta t + [f'(x_0)\alpha(\Delta t) + \beta(\Delta x(\Delta t))(\varphi'(t_0)+\alpha(\Delta t))]\Delta t$$

при $\Delta t \to 0$ $\quad 0 \quad 0 \quad$ $[\ ] \equiv \gamma(\Delta t)$

Док-ем, что $\beta(\Delta x(\Delta t))$ действ-но $\to 0$ при $\Delta t \to 0$

Казалось бы: $\Delta x(\Delta t)\to 0$, $\beta(\Delta x)\to 0$, т.е. **11.11**

$\beta(\Delta x(\Delta t))$ = б.м.(б.м.) в т. $\Delta t=0$, а значит вроде бы должно $\to 0$ при $\Delta t\to 0$. Но дело в том, что б.м.(б.м.), вообще говоря, $\neq$ б.м.

Контрпример

Пусть $\Delta x(\Delta t)\equiv 0$, а $\beta(\Delta x)=\begin{cases}0, & \Delta x\neq 0\\ 1, & \Delta x=0\end{cases}$!

Тогда $\Delta x(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$, $\beta(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, но $\beta(\Delta x(\Delta t))\equiv\beta(0)=1\not\to 0$ при $\Delta t\to 0$

Т.о., мы не можем сказать, что $\overbrace{\beta(\Delta x(\Delta t))}^{\text{слож-ая ф-я}}\to$ $\to 0$ при $\Delta t\to 0$ только потому, что составляющие её ф-ии $\beta(\Delta x)$ и $\Delta x(\Delta t)$ – б.м. малые.

Для того, чтобы убедиться в этом, воспольз-ся теоремой о непр-ти сложной ф-ии

$$\begin{cases}\Delta x(\Delta t)\to 0=\Delta x(0),\ \Delta t\to 0 \leftarrow \text{т.е. ф-я } \Delta x \text{ непр. в т. } \Delta t=0\\ \beta(\Delta x)\to \underline{0=\beta(0)},\ \Delta x\to 0\leftarrow \text{т.е. ф-я } \beta \text{ непр. в т. } \Delta x=0\end{cases}$$

Согласно опр-ию диф-ти ф-ии $f(x)$ в т. $x=x_0$ (см. выше). Напомню, что в своё время мы специально так модифицировали опр-ие диффер-ти ф-ии (раз-ся, не изменяя его суть), чтобы фигурирующая в нём б.м. ф-я (в нашем случае $\beta(\Delta x)$) обращалась в нуль при нулевом значении приращения (т.е. была непр-на в точке нуль). Здесь мы впервые восполь~~зуемся~~овались этим условием

$\Rightarrow$ (по теореме о непр-ти сложной ф-ии)

$\beta(\Delta x(\Delta t))$ непр-на в т. $\Delta t = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \beta(\Delta x(\Delta t)) = \beta(\Delta x(0)) = \beta(0) = 0 \Rightarrow$$

(это самый тонкий момент док-ва)

$$\Rightarrow [\quad] \equiv \gamma(\Delta t) \to 0, \ \Delta t \to 0$$

Итак,

$$\Delta y = \underbrace{f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)}_{\equiv A} \overbrace{\ }^{\Delta t} + \gamma(\Delta t) \cdot \Delta t,$$

как легко видеть из опр-ия $\gamma(\Delta t)$

где $\gamma(\Delta t)$ – б.м. при $\Delta t \to 0$ и $\gamma(0) = 0$, а значит ф-я $y = h(t)$ действ-но диф-ма в т. t_0, причём константа A из опр-я диф-ти равна

$$A = f'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)$$

Но с другой стороны A опр-ся !-ым образом и всегда равна произв-ой диф-ой ф-ии:

$A = h'(t_0)$, т.е.

$$h'(t_0) = f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)$$

$\measuredangle$

Пример Найдём произв-ую ф-ии

$$y(x) = u(x)^{v(x)}, \ u(x) > 0$$

Ф-ию $y(x)$ наз-ют показ-но-степенной ф-ей (т.к. у этой ~~ф-ии~~ степени и основание, и показ-ль явл-ся перем-ми величин-ами)

Заметим, что ф-я $y(x)$ по сути является сложной ф-ей переменной x, у которой "внешняя" ф-я зависит от двух перем-х u и v:

$y = F(u(x), v(x))$, $F(u, v) = u^v$

Но мы пока что не умеем диф-ть такие ф-ии, т.к. доказ-ая нами теорема о произв-ой сложной ф-ии относится к случаю, когда "внешняя" ф-ия зависит лишь от одного аргумента: $y = F(\varphi(t))$

В след-ем семестре мы обобщим теорему о произв-ой сложной ф-ии на случай многих переменных и тогда сможем решить данную задачу, что назыв-ся "в лоб"

Однако продиф-ть ф-ию $y(x)$ можно и не используя указанного обобщения (и это хорошо, поскольку не хотелось бы откладывать вопрос о поиске её произв-ой до след-го семестра). Один из способов заключается в представлении этой ф-ии в след-ем виде:

$y(x) = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u} \equiv e^{\varphi(x)}$

(напомню, что этим приёмом мы уже пользовались при обосновании непр-ти ф-ции x^x)

Тогда

$$y'(x) = (e^\varphi)'\Big|_{\varphi=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = \overbrace{e^{v \ln u}}^{u^v}(v \ln u)' =$$

$$= u^v(v' \ln u + v(\ln u)') = u^v(v' \ln u + \frac{v}{u} \cdot u')$$

вновь диф-ем как сложную ф-ю

§7 Инвариантность формы первого дифференциала

Напомню, что диф-ал ф-ции $y(x)$ для случая, когда x – незав-ая перем-ая (т.е., образно выражаясь, для случая "простой" ф-ции $y(x)$), по опред-нию равен

(*) $dy = f'(x)dx$,

где $dx \equiv \Delta x$ – диф-ал незав-ой переменной

dy наз-ют также первым диф-ом ф-ции $f(x)$

Покажем, что выражение (*) для первого диф-ла остаётся в силе и в случае, когда перем-ая x сама явл-ся ф-ей независимой перем-ой t

Итак, пусть теперь $x = \varphi(t)$. Тогда y является сложной ф-ей аргумента t:

$\Rightarrow y = f(\varphi(t)) \equiv F(t)$

Поскольку t – незав-ая перем-ая, то согласно опред-ию диф-ла ф-ии независимого арг-та

$dy = F'(t)dt$, а $dx = \varphi'(t)dt$

Но по теореме о произв-ой сложной ф-ии

$F'(t) = f(\varphi(t))' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, а поэтому

$$dy = f'(\underbrace{\varphi(t)}_{x}) \cdot \underbrace{\varphi'(t)dt}_{dx} = f'(x)dx$$

Т. о.,

$(*)$ $dy = f'(x)dx$, $\leftarrow$ инвариантность формы первого дифференциала

даже когда $x = \varphi(t)$

Обнаруженная универсальность выр-ия $(*)$ для первого диф-ла (т.е. его справедливость как для случая, когда x – незав-ый арг-нт, так и для случая, когда x – зависимая перем-ая) и наз-ют инвариант-ю формы первого диф-ла

Отметим, что если $x = \varphi(t)$, то

$\Delta x = \varphi'(t)dt + \bar{\bar{o}}(dt) = dx + \bar{\bar{o}}(dt) \neq dx$

$\uparrow$ в общем случае

$\Rightarrow dy = f'(x)dx \neq f'(x)\Delta x$

Если же x – незав-ая перем-ая, то **11.16**

$dy = f'(x)\Delta x$

Именно поэтому, если мы хотим, чтобы первый диф-ал обладал свойством инвар-сти формы, то Δx в последнем случае следует обозначить за dx

Итак, мы видим, что

инвар-ть формы 1-го диффер-ла $\Longleftrightarrow$ $dx \equiv \Delta x$ для независимой переменной x

Зам-ие. Из инв-ти формы 1-го диф-ла следует, что если $y = f(x) = f(\varphi(t))$, то

$$f'(x) \equiv f'(\varphi(t)) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy(x(t))}{dx(t)},$$

т.е., что произв-ая (по арг-ту x) ф-ии ($f(x)$) равна отношению диф-ов и в том случае, когда x – ф-я некоторой независимой переменной t. (Можно сказать, что из инв-ти формы первого диф-ла $dy = f'(x)dx$ вытекает инв-ть формы (выраж-ия) $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ первой произв-ой.)

Сделаем ещё одно замеч-ие, которое касается двух последних теорем (о произв-ой обратной и сложной ф-й)

Если в этих теоремах для обозначения произв-ых использ-ть диф-лы, то выражения для производной обратной и сложной ф-й приобретут наглядный алгебраический смысл 11.17

$y=y(x),\ x=x^{-1}(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ← числитель и знаменатель поделили на dy

$y=y(x(t)) \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ ← числитель и знаменатель домножили на dx

Следует, однако, подчеркнуть, что подобными манипуляциями с диф-ми доказывать теоремы о произв-ой обр-ой и слож-й ф-й нельзя. Наоборот, именно эти теоремы позволяют обращаться с произв-ми, выраженными через отношения диф-ов, как с обыкновенными дробями

Дополн-но:

В некоторых учебниках предлагается док-во того, что в случае независимой пер-ой x её прир-ие $\Delta x = dx$ (не связанное с инв-ю формы 1-го д-ла). ~~Для~~ Авторы рассм-ют ф-ю $y=x$ и записывают опр-ие диф-ла этой ф-ии: $dy = x'\Delta x = \Delta x$, откуда, поскольку $y=x$, приходят к выводу, что $dx=\Delta x$

Такое док-во нельзя признать удовлет-вор-ым, т.к. оно опирается на весьма распро-стран-ое, но не вполне корректное обозн-ие ф-ии $f : x \to f(x)$ посредством её частного зна-чения $f(x)$. Строго говоря, следовало бы писать $f = \{(x,y) \mid x \in D_f, y = f(x)\}$ или $f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$, или в крайнем случае $f = \{(x, f(x))\}$ (т.е. ф-я это на са-мом деле мн-во упорядоченных пар $(x, f(x))$)

Разум-ся, все математики об этом знают, но сознат-но исполь-т упрощ-ое обозн-ие $f(x)$ про-сто в силу его краткости и удобства (похожая ситуация сложилась и выр-ем $\int f(x)dx = F(x) + C$). Од-нако с этим обозн-ем след-ет проявлять осторож-ность, т.к. в нек-х тонких вопросах при его исп-ии может получ-ся некор-ый результат

Вернёмся к диф-лу dx. Теперь мы видим, что на самом деле всего лишь док-ли, что $d\{(x,x)\} = \Delta x$, но отнюдь не что $dx = \Delta x$, где x – незав-ый арг-т. В принципе нам ничто не мешало положить $dx = 2\Delta x$, просто тогда 1-й диф-л не обладал бы ~~св.~~ инв-ю формы. При таком опр-ии, между прочим, нам пришлось бы отличать dx, где x – незав-й арг-т, от dx, где x – ф-я $f(x) = x$, и во избежание путаницы диф-л послед-й обозн-ть хотя бы через $d(x)$ (подчеркну, что $d(x)$, по-прежнему $= \Delta x$)

§8 Производные высших порядков

Пусть ф-ия $y=f(x)$: $\forall x \in (a,b)$ сущ-ет $f'(x)$

Тогда произв-ую $f'(x)$ можно рассм-вать как ф-ию, обл-тью опр-ия кот-ой явл-ся интервал (a,b):

$\Rightarrow y=f'(x)$: $D_{f'}=(a,b)\subset D_f$ (мы допускаем, что ф-я f может быть опред-на и при других, т.е. не $\notin$-их инт-лу (a,b) значениях x)

Опр Если ф-я $f'(x)$ диф-ма в нек-ой точке $x\in(a,b)$, то произв-ая от ф-ии $f'(x)$ в точке x наз-ся второй произв-ой ф-ии $f(x)$ в точке x

Обозн $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{II}(x)$, $\ddot{f}(t)$ и т.д.

Итак, $f''(x)\equiv(f'(x))'$

n-ая произв-ая ф-ии $f(x)$ опр-ся как произв-ая от $(n-1)$-ой произв-ой:

$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ – n-я произв-ая или произв-ая n-го порядка

(Я не буду приводить развёрнутого опр-ия произв-ой n-го порядка, ограничившись для краткости лишь данной формулой для n-й произв-ой, т.к. это опр-ие совершенно ан-но опр-ю

2-ой произв-ой.)

Такой способ опр-ия n-ой произв-ой (т.е. через предыд-ие произв-ые наз-ся рекуррентным. Он опирается на принцип математической индукции, в силу которого мы теперь вправе считать, что n-ая произв-ая опред-на для любого натур-го n

Для упрощения записи некот-х формул, а также для упрощ-я формулировок ряда теорем и утв-ий, удобно ввести понятие производной нулевого порядка: $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$

Примеры

1) $(x^{10})''' = (10 \cdot x^9)'' = (10 \cdot 9 \cdot x^8)' = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot x^7 =$

$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} x^7 = \dfrac{10!}{7!} x^7$

2) $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

Задание: с помощью метода матем-ой индукции док-ть, что

Напомню, что $0! \equiv 1$

1) $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow (x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$

Если $\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow (-m)! \equiv \infty$ (т.е. если фактори-

ал любого целого отр-го числа считать $=$ сам ∞),
Так что $\frac{1}{(-m)!}=0$, то формулу для n-ой производ x^m можно записать одной строчкой:
$\cancel{(x^m)^{(n)}=}$ $\forall m\in\mathbb{N} \Rightarrow (x^m)^{(n)}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$
(при $n>m$ знамен-ль обр-ся в ∞, а произв-ая – в нуль)
2) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\frac{\pi n}{2})$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{\pi n}{2})$

Формулы для производных n-го порядка

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ имеют произв-ые n-го порядка в т. x. Тогда
1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$
имеется в виду в точке x, но для краткости не пишем
2) $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$, ← формула Лейбница (для n-ой произв-ой)
где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ← биномиальный коэф-нт

Заметим, что последнее выражение похоже на формулу для бинома Ньютона: $(a+b)^n$

Поэтому, если мы помним, напр, чему равно $(a+b)^2$, то по аналогии можем сразу же записать, что
$(uv)''=u''\underset{\uparrow\atop v^{(0)}}{v}+2u'v'+\underset{\uparrow\atop u^{(0)}}{u}\cdot v''$ (степени заменяются производными)
и т. д.

Формулы 1) и 2) доказ-ся по индукции, при этом:

Δ1) тривиально и остаётся в кач-ве самост-го упр-ия

Δ2) будет док-на на ближайшей консультации (см. также Ильин, Позняк)

Рассм-м ещё раз формулу для C_n^k:

$$C_n^k = \frac{n!}{\underset{\underset{i}{\parallel}}{k!}\,\underset{\underset{j}{\parallel}}{(n-k)!}} \qquad i+j=n \qquad i,j=\overline{0,n} \leftarrow 0\ldots n$$

и обозначим k и $n-k$ из знаменателя этой формулы через i и j соотв-но: $k \equiv i$, $n-k \equiv j$. Разум-ся (поскольку величина n в формуле Лейбница считается фиксированной), ~~индексы~~ величины i и j не являются независимыми — их сумма всегда равна n: $i+j=n$ (в остальном это произвольные целые неотрицат-ые переменные, пробегающие зн-ия от 0 до n). Тогда с помощью новых целочисленных переменных (также как и k называемых индексами суммирования) ф-лу Лейбница можно представить в след-ем виде:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!\,j!} u^{(i)} v^{(j)},$$

где суммиров-ие ведётся по всем i и $j = \overline{0,n}$: $i+j=n$

В такой симметричной форме формула Лейбница легко и естественно обобщ-ся на случай произв-го числа сомножителей. Напр,

$$(uvw)^{(n)} = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} u^{(n_1)} v^{(n_2)} w^{(n_3)}$$

§9 Дифференциалы высших порядков

Для облегчения дальнейшего изложения удобно ввести след-ее опр-ие

Опр Ф-я $y=f(x)$ наз-ся дифф-ой на мн-ве X, если она дифф-ма в каждой точке этого мн-ва

Пусть ф-я $y=f(x)$ дифф-ма ~~на~~ интервале (a,b). Тогда в каждой точке инт-ла (a,b) опр-ён диффер-ал этой ф-ии

$$dy = f'(x)\,dx, \quad dx = \Delta x$$

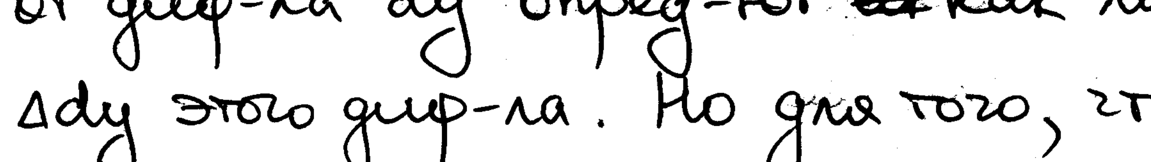
Далее считаем, что x - незав-ая переменная, а поэтому $dx = \Delta x$

Сейчас мы должны ввести понятие второго диффер-ла ф-ии $y(x)$. Его естеств-но опред-ть как диф-ал от первого диф-ла (~~или просто~~ диф-ф-ал первого диф-ла). Но что такое диф-ал первого диф-ла? В каком смысле его понимать? Для того, чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, как мы опред-яли 1-ый диф-ал, т.е. диф-ал от ф-ии $y(x)$ (или просто диф-ал ф-ии $y(x)$). Диф-ал dy ф-ии $y(x)$ в т. x — это линейная часть приращ-ия Δy этой ф-ии в т. x:

$$dy|_x = \text{лин-ая часть приращ-ия } \Delta y|_x$$

По аналогии с диф-ом от ф-ии $y(x)$ диф-ал от диф-ла dy опред-ют как лин-ую часть Δdy этого диф-ла. Но для того, чтобы выделить лин-ую часть прир-ия диф-ла dy, нам надо сперва осознать, что представляет собой само это прир-ие

Для придания большей наглядности последующим рассужд-ям, воспользуемся иллюстрац-ей



т.А условно наз-ём начальной, а т.В — конечной

Замечу, что в фиксиров-ой т-ке x диф-ал dy явл-ся ф-ей приращ-ия Δx:

$$dy|_x = f'(x)\Delta x = dy(\Delta x),$$

при этом x и Δx мы рассм-ем как самост-ые (независ-ые) перем-ые (при каждом x прираш-ие Δx может принимать любые зн-ия, лишь бы $x+\Delta x \in (a,b)$, т.е., зная x, мы не можем сказать чему $= \Delta x$ и наоборот, зная чему $= \Delta x$, мы не можем однозначно опр-ить к какой точке x оно отнесено)

Наша ближайшая ~~цель~~ задача – составить разность диф-ов dy в нек-х точках x и $x+\Delta x$ оси x (эта разность и будет по опр-ию искомым приращением диф-ла dy в т. x). Но дело в том, что диф-лы dy в этих точках являются ф-ми перем-ой, которую мы также обозначаем через Δx, но кот-я, как было подчёркнуто, никак не связана с точками x и $x+\Delta x$, в которых рассм-ся первый диф-ал (x и $x+\Delta x$ в настоящем контексте явл-ся фиксир^ов-ми т-ми, а арг-нт диф-в Δx – перем-ой величиной). Т.о., нам следует отличать Δx – как прираще-ние того зн-ия x (той точки x), при котором рассм-ся диф-л, от Δx – как аргумента диф-ла (арг-нт диф-ла – это тоже приращ-ие перем-ой x, но как бы повторное, т.е. мы можем "приращивать" (изменять перем-ую x) как в начальной точке x (т-ке A на рис-ке), так и в конечной т-ке $x+\Delta x$ (т-ка B там же)). Ещё раз подчеркну, что, по крайней мере, пока, эти приращ-ия явл-ся независ-ми величинами, и, тем самым, вовсе не обязаны быть равными друг другу. Поэтому, чтобы избежать путаницы, мы обозначим их разными символами: пусть $\Delta_1 x$ – это арг-т диф-ла dy (т.е. прир-ие пер-ой x в тт. A и B оси x), а $\Delta_2 x$ – расстояние между т-ми A и B, в кот-х вычисляется диф-л dy (см. рисунок)

Итак, рассм-м д-лы $dy|_x$ и $dy|_{x+\Delta_2 x}$:

$$dy|_x = dy|_x(\Delta_1 x) = f'(x)\Delta_1 x$$

$$dy|_{x+\Delta_2 x} = dy|_{x+\Delta_2 x}(\Delta_1 x) = f'(x+\Delta_2 x)\Delta_1 x$$

Напомню ещё раз, наша цель – сравнить (составить разность) эти диф-лы, воспринимаемые теперь как ф-ии перем-ой $\Delta_1 x$. Обращаю внимание на то, что при вычитании

$dy|_{x+\Delta_2 x}$ и $dy|_x$ мы, как и при вычитании любых других ф-й, разум-ся, ~~считаем, что~~ рассм-ем $\Delta_1 x$ как единый (общий) аргумент, и соотв-но вычитаем их при одних и тех же знач-ях $\Delta_1 x$ — даром, что $\Delta_1 x$ в этих диф-ах означает приращ-ие перем-й x в разных т-ах A и B ("прикладывается" к разным т-ам)*

*: \footnote{Мы не исключаем совпадения точек A и B ($\Delta_2 x$ может $=0$), но в общем случае они различны}

подстрочное примечание

Т.о., искомое приращение Δdy диф-ла dy, (которое рассм-ся нами приращение этого диф-ла в точке x) по опр-ию равно

$$(*)\quad \Delta dy|_x \equiv dy|_{x+\Delta_2 x} - dy|_x = [f'(x+\Delta_2 x) - f'(x)]\,\Delta_1 x = $$
$$= \Delta dy|_x(\Delta_1 x, \Delta_2 x)$$

Теперь, после того как мы уже вычли первые диф-лы, получив выражение для Δdy — приращ-ия первого диф-ла, будем воспринимать приращ-е $\Delta_2 x$ как произвольную величину, тем самым, рассм-ая его (наравне с $\Delta_1 x$) как полноценный арг-нт (а не параметр) ф-ии Δdy. Точку x мы по-прежнему считаем фиксированной, что отражается в самом наименовании: приращение 1-го диф-ла dy в точке x

Далее, для получения диф-ла от диф-ла dy нам предстоит выделить линейную часть (или, как ещё говорят – линеаризовать) прираш-я $\Delta dy|_x$ этого диф-ла. Как мы только что договорились, приращение $\Delta dy|_x$ рассм-ся нами как ф-я прираш-й $\Delta_1 x$ и $\Delta_2 x$ пер-й x, причём из выр-ия (*) для $\Delta dy|_x$ видно, что отн-но $\Delta_1 x$ эта ф-я уже линейна (я напомню, что линейной ф-ей $f(x)$ наз-ся ф-я вида $f(x) = kx$, где k не зависит от x). Но, разум-ся, линеар-ывать выр-ие для Δdy нужно по приращению $\Delta_2 x$, т.к. прираш-е 1-го диф-ла было образовано посредством задания именно этого приращения переменной x. (Условно можно сказать, что в записи Δdy буква d относится к прир-ю $\Delta_1 x$, и относит-но этого прир-я Δdy уже линейно, а буква Δ – к прир-ю $\Delta_2 x$, отн-но кот-го Δdy св-ом линейн-ти ещё не обладает. Нам же теперь фактически требуется заменить букву Δ на букву d: $\Delta dy \to ddy$ так, чтобы ~~новое~~ выр-ие

для ddy было лин-ым уже и по $\Delta_2 x$.) $\boxed{12.11}$
Замечу, что, говоря о линейности Δdy отн-но $\Delta_1 x$, я подраз-аю, что Δdy – линейная ф-ия $\Delta_1 x$ при каждом фиксир-ом $\Delta_2 x$. Соотв-но и наоборот, говоря о выделении из выр-ия (*) для Δdy лин-ой относит-но $\Delta_2 x$ части, я подраз-ую её линейность при каждом фиксир-ом $\Delta_1 x$

Итак, рассм-м $\Delta dy|_x(\Delta_1 x, \Delta_2 x)$, считая $\Delta_1 x$ фиксир-ой величиной (т.е. воспринимая его просто как некоторый коэффиц-т после квадратных скобок в выр-ии (*) для $\Delta dy|_x$) и выделим его лин-ую по $\Delta_2 x$ часть. Но выделение лин-ой части из Δdy фактически означает выдел-ие лин-ой части от разности из квадр-х скобок выр-ия (*) для Δdy, т.е. от $f'(x+\Delta_2 x) - f'(x)$

Т.о., мы должны суметь представить эту разность в виде

$$f'(x+\Delta_2 x) - f'(x) = \overbrace{A\,\Delta_2 x}^{\text{лин-я часть}} + \bar{\bar{o}}(\Delta_2 x)$$

Но согласно опр-ю диф-ти, эта представимость и означает диф-ть ф-ии $f'(x)$ в т-ке x, что, ~~в свою~~ как мы уже хорошо знаем, в свою очередь, означает сущ-ие у ф-ии $f'(x)$ произв-ой в т-ке x, т.е. сущ-ие в этой т-ке второй произв-ой самой ф-ии $f(x)$. Пот- | 12.12

ребуем этого, т.е. будем считать, что ф-я $f(x)$ имеет 2-ую произв-ую в рассм-мой (фиксиров-й) т-ке x. Тогда, вспоминая, что $A=(f'(x))'$, получаем

$$f'(x+\Delta_2 x)-f'(x)=f''(x)\Delta_2 x+\bar{\bar{o}}(\Delta_2 x)$$

Подставив это представление в выр-ие (*) для Δdy, будем иметь

$$\Delta dy|_x=f''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x+\bar{\bar{o}}(\Delta_2 x)\Delta_1 x=\underbrace{f''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x}+\bar{\bar{o}}(\Delta_1 x\Delta_2 x)$$

искомая лин-ая часть! (причём как по $\Delta_1 x$, так и по $\Delta_2 x$)

Отсюда видно, что

искомый диф-л от 1-го диф-ла

$$(**)\quad d(dy)|_x\equiv ddy|_x=f''(x)\Delta_1 x\Delta_2 x$$

Опр Ф-я $ddy|_x(\Delta_1 x,\Delta_2 x)$ наз-ся повторным диф-ом ф-ии $y=f(x)$ в точке x

Теперь мы, наконец, можем дать опр-ие второго диф-ла. Прежде чем это сделать, напомню, какие требов-я должны быть наложены на ф-ю $f(x)$ (только при их выполнении опр-ия повторного и 2-го диф-ов имеют смысл)

под двукратной диф-тью в т. x мы подразумеваем (просто по опр-ию) сущ-ие 2-й произвой в этой точке

Пусть ф-я $f(x)$:
1) диф-ма на (a,b), 2) дважды диф-ма в нек-й т. $x\in(a,b)$

Опр Ф-я $ddy|_x(\Delta x, \Delta x) \equiv d^2y|_x(\Delta x)$ | 12.13

наз-ся вторым диф-ом ф-ии $y=f(x)$ в точке x

Вспоминая про то, что x – независ-я перем-я, в соотв-ии с чем $\Delta x \equiv dx$ (кстати, выше в повторном диф-ле тоже вполне можно было положить $\Delta_1 x \equiv d_1 x$, $\Delta_2 x \equiv d_2 x$) и учитывая выраж-ие (*) для повтор-го диф-ла, имеем

(***) $\boxed{d^2y|_x = f''(x)dx^2}$ ← случай независимой перем-ой x! $\Rightarrow f''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

Выр-ие (***) формально может быть получено с помощью одного нехитрого правила о взятии диф-ла от выраж-й, содерж-их диф-ал независ-й перем-й x. Естеств-но, это правило не будет давать строгого обоснования выр-ию (***) для второго диф-ла (слова о формальности получения это как раз и отражают). Ровно наоборот, опираясь на ~~выр-ие~~ соотн-ие (***), а также на формулу для диф-ла от произв-ия двух ф-ий, мы и придём к указанному правилу.

Рассм-м ещё раз выр-ие для 1-го диф-ла: $dy = f'(x)dx$, и попытаемся применить (формально) к этому произведению формулу для диф-ла произв-ия двух ф-ий $u(x)$ и $v(x)$: $\boxed{12.14}$

$d(uv) = v\,du + u\,dv \leftarrow$ эта формула мгновенно (делением на dx) получается из формулы для $(uv)'$

(Формально, поскольку данная формула относится только к произв-ям двух "обычных" ф-й перемен-й x, и каким образом её распространить на случай, когда одним из сомножителей явл-ся dx, нам как раз и предстоит осознать)

Итак, действуя по аналогии с раскрытием диф-ла от $u \cdot v$, имеем

$$d\,dy = dx \cdot \underbrace{d f'(x)}_{= f''(x)dx} + f'(x)\, \underbrace{ddx}_{0}$$

Отсюда видно, что для того, чтобы в результате такого формального взятия диф-ла у нас получилось выраж-ие (***) для второго диф-ла, мы должны принять два след-ие соглашения (они, совместно с формулами для диф-ов от сумм и произв-ий, и будут образовывать искомое правило взятия диф-ов от выр-ий, содерж-их диф-лы x):

1) $ddx \equiv d^2x \equiv 0$ (т.е. при взятии диф-ла от dx, последний восприн-ся нами как константа: $dx = const$)

2) Новый диф-ал dx, появляющийся при раскрытии диф-ла $f'(x)$: $df'(x) = f''(x)dx$, следует сразу же полагать равным старому диф-лу dx (~~уже~~ присутств-ему в выр-ии для ddy ещё до раскр-ия $df'(x)$). Если мы этого не сделаем (т.е. будем считать~~, что~~ новый диф-ал dx отличным от старого диф-ла), то получим повторный диф-ал

Зам-ие. Соглашение 2) распростр-ся и на случай диф-ов от выраж-ий более общего вида, нежели $f'(x)dx$. Тогда, в результате формального диф-ия (с применением правил диф-я произвед-й, сумм и т.д.) могут образоваться сразу несколько диф-ов от различных ф-й перем-ой x. Соглашение 2) в таком случае действует совершенно универсально: все диф-лы dx, появляющ-ся при раскрытии диф-ов от этих ф-ий, считаются равными старому диф-лу (т.е. новых диф-ов dx возникать не должно)

Пусть теперь x явл-ся нек-ой ф-ей независимой перем-ой t: $x=\varphi(t)$. Тогда

12.16

$$y=f(x)=f(\varphi(t))\equiv F(t)$$

и $d^2y=F''(t)dt^2$, $dx=\varphi'(t)dt$, $d^2x=\varphi''(t)dt$

Распишем $F''(t)$:

$$F''(t)=(F'(t))'=(f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t))'=$$ $\{\times dt^2$ ~~и учтём~~

$$=f''(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot\varphi'(t)+f'(\varphi(t))\cdot\varphi''(t)$$

Домножая ~~левую~~ и правую части на dt^2, имеем $\Rightarrow$ $\underbrace{F''dt^2}_{d^2y}=f''\underbrace{\varphi'dt}_{dx}+f''\underbrace{\varphi'dt}_{dx}+f'\underbrace{\varphi''dt^2}_{d^2x}$, или

$$\boxed{d^2y=f''(x)dx^2+f'(x)d^2x} \quad (4*)$$

~~Отсюда видно~~ Заметим, что по сравнению со случаем, когда x являлся независ-й пер-ой, т.е. по сравнению с выр-ем (***), в выр-ии (4*) для d^2y появилось дополнит-ое слагаемое: $f'(x)d^2x$. В связи с этим часто говорят о неинвар-сти формы 2-го диф-ла, тем самым подразумевая под этой формой выр-ие (***). В то же время, в отличие от выр-я (***), выр-ие (4*) пригодно как для случая зависимой пер-й x, так и для случая, ~~когда~~ незав-го арг-та, ибо если x — нез-ая пер-ая, то $d^2x\equiv0$ и (4*) переходит в (***). Иными словами, выр-ие (4*) для 2-го диф-ла свойством inv-ти формы обладает. | 12.17

Т.о., говоря об inv-ти или неinv-ти формы 2-го диф-ла, мы должны уточнять какое именно выр-ие мы под этой формой подраз-ем

Замечу, ещё, что выр-ие (4*), также как и выр-ие (***) может быть получено путём формального ~~ди~~ взятия диф-ла от соотн-ия $dy = f'(x)dx$ (при этом, также как и в случае независ-го арг-та x, у нас не будут появл-ся новые (отличные от старых) диф-лы dx, но зато d^2x уже $\neq 0$):

$$d^2y = d[f'(x)dx] = [df'(x)]dx + f'(x)d^2x =$$
$$= f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

Разум-ся, этот приём нельзя рассм-ать как строгий вывод выр-ия (4*) для 2-го диф-ла. Наоборот, справедл-ть формулы (4*) даёт обоснование использованному правилу ~~диф~~ взятия диф-ла от $f'(x)dx$

Пример $y = \sin x(t) = \sin t^2$, $d^2y = ?$

Воспользуемся формулой: $d^2y = y''(t)dt$

Вспомним, как можно было легко получить (но конечно формально) выр-ие для первой произв-ой ~~сложной~~ ф-ии $y(t)$: **12.18**

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}=y'(x)x'(t),$$ или ещё проще:

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}=\frac{y'(x)dx}{dt}=y'(x)x'(t)$$

Казалось бы, поступая аналогично со 2-й произв-ой ф-ии $y(x(t))$, можно получить, что

$$y''(t)=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{dx^2}{dt^2}=y''(x)\cdot\varphi'(t)^2$$

Но это неправильный результат! Почему? Да потому, что, как видно из (4*), в случае когда x - зависимая перем-ая, $\frac{d^2y}{dx^2}\neq y''(x)$

На самом деле правильный результат пол-ть также совсем не сложно - для этого достаточно воспольз-ся всё тем же выр-ем (4*) для d^2y:

$$y''(t)=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{f''(x)dx^2+f'(x)d^2x}{dt^2}=f''(x)\varphi'(x)^2+f'(x)\varphi''(x)$$

Следует только подчеркнуть, что этот способ нельзя рассм-ать как строгое установление выр-ия для 2-ой произв-ой сложной ф-ии $y(x(t))$, поскольку он основан на применении выр-ия (4*) для d^2y, которое, в свою очередь, было получено с помощью выр-ия для этой произв-ой

12.19

Зам-ие. Запоминать формулу для второй произв-ой сложной ф-ии необязат-но. Достаточно помнить как она получается

Вернёмся к ф-ии $y = \sin t^2$. Дифференц-я два раза $\sin t^2$ (или исп-уя полученную формулу для второй произв-ой сложной ф-ии $y(x(t))$), имеем

$$y'(t) = (\sin t^2)' = (\cos 2t)\cdot 2t$$

$$y''(t) = [(\cos 2t)\cdot 2t]' = -4t^2 \sin 2t + 2\cos 2t$$

$$\Rightarrow d^2y = \underbrace{(-4t^2 \sin 2t)\,dt^2}_{= \sin'' x(t)\, dx(t)^2} + \underbrace{2\cos 2t\, dt^2}_{= \sin' x(t)\, d^2x(t)} \quad x(t) = t^2$$

убедитесь в самост-но

Диф-ал произвольного порядка n (≥ 2), так же как и произв-ая n-го порядка, опр-ся с помощью рекуррентного соотн-ия:

$$d^n y|_x(dx) \equiv d\, d^{n-1} y|_x(dx, dx),$$ ← x-независимая переменная

т.е. как диф-ал от $(n-1)$-го диф-ла. При этом диф-ал от $d^{n-1}y$ понимается как линейная часть приращ-ия $(n-1)$-го диф-ла $\Delta d^{n-1} y$ ~~точно~~ ровно в таком же смысле, в котором ddy явл-ось лин-ой частью приращ-ия 1-го диф-ла. Несложно убедиться в том, что все согла-шения и договорённости, касающиеся упрощённого способа поиска диф-ов от выр-й, содерж-их диф-лы dx (как в случае зависимого, так и независ-го арг-та x) успешно работают и при получении выр-ия (формы) для диф-ла n-го порядка

Получим, напр, формулу для 3-го диф-ла (предполаг-ся, что ф-я $y(x)$ имеет 3-ю произв-ую в т. x)

$$d^3y = dd^2y = d(f''dx^2 + f'd^2x) = (df'')dx^2 + f''d(dx)^2 +$$
$$+ df'd^2x + f'd(d^2x) = f'''dx\,dx^2 + f''2dx\,d(dx) +$$
$$+ f''dx\,d^2x + f'd^3x = f'''dx^3 + 3f''d^2x\,dx + f'd^3x$$

Заметим, что если x – независимая перем-ая, то $dx = \text{const}$: $d^2x = d^3x \equiv 0$ и выр-ие для d^3y принимает совсем простой вид:

$$d^3y = f'''(x)dx^3 \Rightarrow f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

И вообще в случае независ-й пер-й $x \Rightarrow$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$ Вставить пример (см. конец лекции)

<u>Параметрическое задание функций</u>

Пусть даны ф-ии

$$(*)\ \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} : D_\varphi = D_\psi = T, \overbrace{E_\varphi = X, E_\psi = Y}^{\text{нек-ые промежутки}}$$

Далее, пусть ф-я $x = \varphi(t)$: сущ-ет $t = \varphi^{-1}(x)$, причём ф-я $\varphi^{-1}(x)$ диф-ма на X и $\varphi^{-1}(x)' \neq 0$

Тогда ур-ия (*) опр-ют сложную ф-ию

$$y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))\equiv f(x),$$ ← которую наз-ют ф-ей, заданной параметрически,

причём

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\Bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad (1)$$

фактически мы последов-но применили теоремы о производной сложной и обратной ф-ий

Дополн-но:

Формально этот результат можно получить ещё проще: расписав диф-лы dy и dx

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot\psi(t)dt}{\dot\varphi(t)dt}=\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)},\ t=\varphi^{-1}(x) \qquad (2)$$

или ~~даже~~ сразу поделив на dt числитель и знаменатель дроби $\frac{dy}{dx}$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)},\ t=\varphi^{-1}(x) \qquad (3)$$

Соотношения (2) и (3), однако, нельзя рассматривать как полноценный вывод выраж-ия для произв-ой ф-ии $f(x)$ (в отличие от соотн-ий (1)). На самом деле всё наоборот: справедл-ть равенств $\frac{dy}{dx}=\frac{\dot\psi(t)dt}{\dot\varphi(t)dt}$ и $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}$ ~~сама, в свою очередь~~, следует из того, что $f'(x)=\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$

Т.о., мы видим, что выражение для первой производной $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ явл-ся универсальным не только в том смысле, что аргумент x ф-ии y в этом выр-ии сам может быть дифференцируемой ф-ей нек-ой перем-й t, но и в том смысле, что обе переменные y и x могут явл-ся диф-ми ф-ми третьей переменной t (единственное, мы требуем, чтобы $x'(t)$ было отличным от нуля)

Пример (разместить перед парам-м заданием ф-ий)

$y=\sin x$, x – независимая перем-ая

$d^4y=(\sin x)^{IV}dx^4=\sin x\,dx^4$

Вычисление старших производных функций, заданных параметр-ки выносится на семинары