Лекция 1

Математический анализ – раздел математики, изучающий различные св-ва действ-х функций конечного числа аргументов

Основные отличие от алгебры
Св-ва: непр-ть, дифф-ть, инт-ть
в матем-м анализе все они связаны с пред-м переходом

При этом под действ-ми функциями подразум-ся такие функции, обл-ми опр-ия и мн-ми значения которых явл-ся нек-ые подмн-ва мн-ва действ-х чисел

Ф-ии, зн-ми и/или арг-ми кот-х явл-ся компл-ые числа, рассм-ся в рамках ТФКП – теории ф-й комплексной переменной

Наряду с числовыми ф-ми (т.е. функциями арг-ми и зн-ми кот-х служат некот-е числа) в математике рассм-ся ф-ии более сложной природы, называемые операторами.

Отличие опер-в от числовых ф-й состоит в том, что арг-~~тами~~ и зн-~~ми~~ опер-в сами явл-ся функциями (природа которых, в свою очередь, может быть ~~самой~~ весьма разнообразной). Т.е. оператор ставит в соотв-ие одной функции – другую функцию.

Операторы систематически изучаются в рамках курса функцион-го анализа

Иногда термин "математический анализ" трактуется в более широком смысле с включением в него ТФКП и функц-го анализа. Но мы будем понимать его преимущественно в указанном выше узком смысле (с незначительным привлечением элементов смежных дисциплин) отдельных разделов

В связи с этим и под термином функция по умолчанию ~~всегда~~ далее будет подразумеваться числовая, а точнее действ-я функция, т.е. такая, значениями и аргументами которой явл-ся вещ-ые числа

Итак, мы видим, что для того даже, чтобы понять чем занимается математический анализ, в чём состоит этот предмет, нам ~~надо~~ прежде всего надо выяснить, что такое веществ-ое число, что такое функция и разобраться с понятиями непр-ти, диф-ти и ∫-ти действ-х ф-й

Начнём с теории веществ-х чисел

Глава I

Вещественные числа

§1 Рациональные числа

Как изв-но самыми простыми из чисел ~~они~~ явл-ся натур-ые числа, исполь-ые при естеств-м счёте или при нумерации предметов. Мн-во натур-х чисел принято обозн-ть буквой $\mathbb{N}$ и зап-ть в виде натур-го ряда

$$\mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$$

Исп-ие { } призвано подчеркнуть, что речь здесь идёт не об отд-х нат-х числах, а о сов-ти или мн-ве всех нат-х чисел. 1.3

Число "0" как правило не вкл-ют в мн-во нат-х чисел, однако иногда по тем или иным причинам начинать нумер-ю удобно именно с этого числа. Для такого случая предусм-но обозначение

$$\cancel{\mathbb{N}_0}\ \mathbb{N}_0 \equiv \{\mathbb{N}\} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

(В целях сокр-я записи вместо $\stackrel{def}{=}$ мы исп-м $\equiv$, также исп-ый для обозн-я тождеств)

Исторически человек начал исп-ть нат-ые числа раньше других чисел. Все ост-ые числа так или иначе могут быть опр-ны через натур-ые числа. Вопрос о том явл-ся ли сами нат-ые числа первичными может решаться по-разному.

Одна из точек зрения по этому вопросу выражена в широко изв-м изречении знаменитого матем-ка Леопольда Кронекера „Бог создал натуральные числа, всё остальное — дело рук человека".

Надо сказать, что это заявление носило полемический характер и было высказано в противовес нарождавшемуся в то время теоретико-множ-му взгляду на природу нат-х чисел, согласно кот-му на основа-

ние аксиом теории мн-в натураль- **1.4**
ные числа предст-ся как мн-ва спец-го вида

Впрочем, данный вопрос выходит за рамки нашего курса и мы в любом случае будем расс-ть нат-ые числа как изначально заданные, вне зависимости от того ~~кто~~ их создал и чем они явл-ся на самом деле

Разум-ся, мы считаем, что над натуральными числами опр-ны арифм-ие операции и операции ср-я, удовл-ие ряду из-в-х св-в (коммут-ть и ассоц-ть сл-я и умн-я, дистр-ть умн-я отн-но сл-я и т.д.)

Обратим внимание на то, что операции выч-я и дел-я опр-ны не для всех нат-х чисел. Стремление иметь возм-ть вычитать любые числа естеств-~~но~~м образом ~~приводит~~ нас к появлению целых чисел

$$\mathbb{Z} \equiv \{\ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\},$$

а дальнейшее стр-ие ~~обеспечения~~ иметь возможность разделить любые два числа — — к появлению рац-х чисел

$$\mathbb{Q} \equiv \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$ — мн-во всех ~~дробей~~ обыкновенных дробей вида $\frac{m}{n}$, в кот-х $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

Т.о., с появл-м целых чисел у нас возни-кает возможность неогр-го вычит-я, а с появлением рац-х – ещё и неогр-го деления чисел

Заметим, что одному и тому же рац-му числу отв-т ∞ много обыкн-х дробей, напр

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\ldots=\frac{2k}{5k}=\ldots\quad k\in\mathbb{Z}\text{ и }k\neq 0$$

В принципе отдельные дроби можно воспринимать как разные, но $=$ые друг другу числа, но мы будем считать, что все эти дроби представляют одно и то же число

Напомню как опр-ны операции сл-я и умн-я, а также правила ср-я рац-х чисел

1) $\frac{m_1}{n_1}\vee\frac{m_2}{n_2}$ $\quad\vee\in\{<,>,=\}$
$\Updownarrow$ – связаны тем же знаком
$m_1n_2\vee n_1m_2$

При этом считается, что нам, в свою очередь, изв-ны правила ср-я целых чисел

2) $\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$

3) $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$

Вычитание и деления опр-ся как оп-ции обр-ые соот-но сл-ю и умн-ю изв-х

Эти правила обладают рядом св-в, о ~~кот-х~~ части из кот-х я уже упоминал и кот-е позволяют произв-ть соотв-ие преобр (как то, перестановки и групп-ки числ-х выр-й) а ~~осущ-ть равносильные~~ разл-ые сла-х и сомн-й), а также осуществлять равносильные переходы ~~от одних~~ равенств или нер-в к другим и получать законные сл-я из тех или иных соотн-й. Напр

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c \text{ — транзитивность знака } ">"$$

Св-ва правил ср-я и арифм-х опер-й над рац-ми числами вытекают из соотв-х св-в натур-х и целых чисел. Я не буду перечислять их все (тем более, что это невозм-но, поск-ку их ∞ много). Замечу лишь, что все они сводятся к 13 основным св-м, наз-м также аксиомами рац-х чисел, в том смысле, что все ост-ые св-ва могут быть выведены из этих 13 аксиом (подробнее Зорич; Ильин, Позняк)

Оказ-ся, однако, что рац-х чисел недостаточно для измер-я нек-х величин. Напр-р, диагональ квадрата с единичной стор-й не явл-ся рац-м числом. Отношение длины окр-ти к её радиусу также не может быть выражено обыкн-й дробью. Эти, а также многие др-ие пр-ры указ-т на необх-ть расш-я мн-ва рац-х чисел. Таким расш-м и явл-ся мн-во вещ-х чисел

§2 Вещественные числа

Вещ-ые числа мы опр-м с помощью т.н. ∞-х десят-х дробей

Беск-й десят-й дробью будем называть дробь сл-го вида

$\pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$, Если перед дробью не стоит никакого знака, то она считается пол-й

где $\alpha_0 \in \cancel{\mathbb{Z}}\, \mathbb{N}_0$ (целое неотр число), $\alpha_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, а из двух знаков плюс и минус берётся какой-то один (если взят "+", то дробь наз-т пол-й, а если "–" – отр-й)

α_0 – целая часть дроби

α_i, $i \geq 1$ – десятичные знаки (цифры)

~~Особый сл-й: $\pm 0{,}000\ldots = \pm 0{,}(0) = 0$ (без знака)~~ – потом

Опр Веществ-м числом наз-ся ∞ десят-я дробь

Обозн $\mathbb{R}$ нельзя предст-ть в виде ряда

$\exists$ масса других опр-й вещ-х чисел: напр-р через ∞ 2-чные, 3-чные и вообще абстрактные q-чные дроби (см., напр., Зорич), через Дедекиндовы сечения (см. Фихтенгольц) на мн-ве рац-х чисел или с помощью аксиом-го метода (когда мн-во вещ-х чисел опр-я как нек-ое абстр-ое мн-во, эл-ты которого удовл-ют заранее выдвинутому списку аксиом)

Т.о., мы огр-ся лишь одной из возм-х реализ-й мн-ва вещ-х чисел

Примеры вещ-х чисел. Прежде всего заметим, что ∞ дес-ые дроби бывают двух видов: период-ие и непериод-ие 1.8

Периодические дроби:

$0{,}363636\ldots \equiv 0{,}(36) = \frac{4}{11}$

$3{,}333\ldots = 3{,}(3) = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

$0{,}5000 = 0{,}5(0) = \frac{1}{2}$ ← также наз-ют конечной дес-ой дробью

Оказ-ся, любое рац-ое число может быть представлено в виде ∞ пер-й дес-й дроби и наоборот – каждой ∞ пер-й дес-й дроби отв-ет вполне опр-ое рац-ое число. Процедуры перехода от одного пр-ия к другому описаны в школьном курсе и них я останавл-ся не буду $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Приведём примеры ∞ непериод-х д-х др-й

$0{,}1010010001\ldots1\overbrace{0\ldots0}^{n}1\ldots$

Док-во непериод-ти данной десят-й дроби оставляю в кач-ве несл-го сам-го упр-я

Другие примеры

$1{,}414213\ldots = \sqrt{2}$ – диагональ кв-та

$3{,}14159265358979\ldots = \pi$

Опр Иррац-м числом наз-ся ∞ неп-я дес-я дробь

← Вставка на стр. 10

§3 Сравнение вещ-х чисел

Начнём с одного небольшого, но сущ-го замеч-я

Зам-ие. Для отл-х от нуля рац-х чисел, у кот-х десят-я дробь имеет в периоде 0, существ-т иное предст-ие в виде ∞ десят-й дроби, напр

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5(0)$$
$$\frac{1}{2} = 0{,}4999\ldots = 0{,}4(9)$$

Можно считать, что 0,5(0) и 0,4(9) два разных, но равных друг другу числа, но мы будем считать, что это просто два разных предст-я одного и того же числа

Этот тонкий момент надо иметь в виду при сравнении вещ-х чисел, т.к. если сравн-ть их согл-но общему алг-му ср-я вещ-х чисел (о кот-м речь пойдёт ниже), то получ-ся, что

$$0{,}4(9) < 0{,}5(0)$$

Чтобы избежать этого недораз-я, при сравнении вещ-х чисел следует огр-ваться только одной из указанных форм предст-я подобных рац-х чисел

Казалось бы логично было бы вообще отк-ся от чисел с "9" в периоде, но это всё же не вполне удобно по целому ряду сообр-й.

Напр., если

$10:3=3,(3)$

$(3,(3)\times 3 = 9,(9)$

при естеств-м поразр-м умн-ии

Но после $:3$ и $\times 3$ должно получиться исходное число, так что мы естественно счит-м что

$9,(9)\equiv 10,(0)$ ~~Поместить перед § -м о срав-ии~~

Далее мы введём правила срав-я, сл-я и умн-я вещ-х чисел, причём так, что

1) осн-ые св-ва данных оп-й, справ-ые для рац-х чисел будут сохр-ны и для в-х чисел

2) применение ~~этих~~ данных правил к ∞ ~~десят-м~~ период-м дробям будет давать тот же рез-тат, что и при исполь-ии обыкн-х дробей, предст-х эти рац-ые числа

Напр $0,(3):3=0,(1)$

$$\frac{1}{3}:3=\frac{1}{9}$$

Т.е. результат операций не будет зависеть от формы предст-я рац-х чисел

§3 Правило ср-я вещ-х чисел

0) Рац-ое число 0 имеет двоякое предст-ие в виде ∞ дес-й дроби

~~0=~~ $\pm 0,000\ldots=\pm 0,(0)\equiv 0$ ← в дальнейшем используем это краткое пр-ие

Пусть $a = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots$

$a = 0 \Leftrightarrow a = \pm 0,(0)$ – независимо от знака

т.е. $\forall k = 0, 1, \ldots \Rightarrow \alpha_k = 0$ $\quad (k = \overline{0, \infty})$

$a \neq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_0 : \alpha_k \neq 0$

$\forall$ – квантор всеобщности (для любого, для каждого ...)

$\exists$ – квантор существ-я (существ., найдётся и т.д.)

Пусть $a \neq 0$, тогда $a \gtrless 0$

$a > 0$, если $a = +\alpha_0, \alpha_1 \ldots$

$a < 0$, если $a = -\alpha_0, \alpha_1 \ldots$

Случай, когда хотя бы одно из ~~сл~~ сравн-х чисел $= 0$ полн-то рассм-н

Пусть далее $a \neq 0$, $b \neq 0$

$a = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \quad b = \pm\beta_0, \beta_1 \ldots$

1) $a = b$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} \text{они имеют один-й знак} \\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \alpha_k = \beta_k \end{cases}$

$a \neq b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > b \\ a < b \end{array} \right.$ ибо $\forall$ два числа должны быть сравнимы

2) Пусть $a > 0$, $b > 0$

$a \neq b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{либо разный знак} \leftarrow \text{отпадает} \\ \exists k \in \mathbb{N}_0 : \alpha_k \neq \beta_k \end{array} \right.$

если $k = 0$, то просто $\alpha_0 \neq \beta_0$ без первой строчки – это всегда подразуме~~вается~~

Пусть k – наименьший из таких номеров, при которых $\alpha_k \neq \beta_k$. Это значит, что

$\begin{cases} \alpha_i = \beta_i \quad \forall i = 0, \ldots, k-1 \quad (i = \overline{0, k-1}) \\ \alpha_k \neq \beta_k \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha_k > \beta_k \\ \alpha_k < \beta_k \end{array} \right. \text{ два целых числа всегда ср-мы} \end{cases}$

1.12

Будем считать, что

$a>b$, если $\alpha_k > \beta_k$

$a<b$, если $\alpha_k < \beta_k$

3) $\begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases} \Rightarrow a>b$

4) $a<0$ и $b<0$

$a>b$, если $|a|<|b|$

$a<b$, если $|a|>|b|$

$|\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots| \equiv +\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$

Из правил ср-я следует, что

если $a=+\alpha_0,\alpha_1\cancel{\alpha_2}\ldots\alpha_n\ldots$, то

$\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n \leq a \leq \alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n + \frac{1}{10^n}$

если $a=-\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots$, то

$-\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n - \frac{1}{10^n} \leq a \leq -\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n$

Т.о., $\forall$ вещ-ое число можно приблизить рацион-м числом с точностью до $1/10^n$ (т.е. за счёт выбора n дост-но большим – с любой наперёд зад-й точностью

Выполнять арифм-ие операции над вещ-ми числами удобнее всего поразрядным способом с использ-м операции пред-го перехода

Напр., чтобы сложить два вещ-х числа, можно отбросить все 10-чные знаки, кроме некоторого их конечного числа, скажем десяти.

Эта операция превратит их в рац-ые числа. Складываем два получившихся рац-х числа и имеем нек-й промежуточный рез-тат. Точность такого рез-та тем выше, чем больше разр-в склад-х вещ-х чисел мы удерживали. Т.о. ~~удерживая~~ всё большее кол-во разрядов (напр. ~~10~~, 20, 30, 40, ...) в пределе получаем точный результат. Но дело всё в том, что опер-я пред-го перехода будет опр-на позже и это будет сделано сразу для всех вещественозн-х фун-й. Но для того, чтобы ввести опер-ю пр-го перехода для вещ-нозн-х ф-й нам уже надо уметь выполнять арифм-е операции над вещ-ми числами. Т.о. перед нами встаёт задача такого способа введения арифм-х оп-й над вещ-ми числами, кот-й не использ-л бы в явном виде опер-ю пред-го перехода. Это можно сделать, если ввести понятие точных граней огр-х числовых множ-в

§4 Точные грани огр-го числово мн-ва

Пусть X - мн-во вещ-х чисел (только такие мы пока и будем рассм-ть) т.е.: $X \subset \mathbb{R}$ и пусть $X \neq \emptyset$ (не пустое мн-во, т.е. такое, кот-ое сод-т хотя бы один элемент)

Опр-ие. Мн-во X наз-ся огр-м сверху (снизу), если сущ-ет число M (m) такое, что для любого эл-та $x \in X$ вып-ся нер-во

$$x \leq M \quad (x \geq m)$$

~~При~~ Число M при этом наз-ся ~~вег~~ верхней гранью или мажорантой мн-ва X, а число m — нижней гр-ю или минорантой этого мн-ва

Запишем данное опр-ие с помощью кванторов. ~~Мн-во~~
Мн-во X наз огр-м сверху, если

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M$$

$\exists$ - существует $\nexists$ или $\bar{\exists}$ - не существ-т
$\exists!$ - сущ-т единств-й $\forall$ - для любого
$:$ - такой, что... $\Rightarrow$ - следует, спр-во
($:$ и $\Rightarrow$ синтаксическая ф-я, их часто не ставят)

Сформулируем отр-ие опр-я огр-го сверху мн-ва. Проще всего заявить (и это будет формально правильным), что мн-во наз-ся неогр-м, если оно не явл-ся огр-м. Однако с практической точки зрения такое опр-ие не пригодно. ~~Чтобы~~ Для того, чтобы убедиться в том, что данное мн-во не явл-ся огр-м сверху, нам необ-

1.15

ходима позитивная ~~огр-я~~ форма опр-я огр-го сверху мн-ва, т.е. некоторое утв-ие, проверив вып-ие которого, мы смогли бы дать положит-й ответ на вопрос о его неогр-ти сверху (тог- ~~Построим такое опр-ие~~ но так же, как и в случае ~~огр-го~~ опр-я огр-го мн-ва)

Итак, опираясь на опр-ие огр-го сверху мн-ва, получим позит-у форму опр-я того, что мн-во не явл-ся огр-м сверху

В опр-ии огр-го сверху мн-ва утв-ся, что

$\exists M \in \mathbb{R}$: нек усл-ие

Сл-но в случае неогр-го сверху мн-ва такая константа M не должна сущ-ть

$\nexists M \in \mathbb{R}$: данное усл-ие

т.е. $\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow$ отр-ие нашего усл-я

В чём состоит отриц-ое усл-ие:

$\forall x \in X \Rightarrow x \leq M$

Значит $\cancel{\forall} x \in X \Rightarrow x \leq M$

т.е. $\exists x \in X : x > M$

В итоге оконч-но получаем

$\forall M \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in X : x > M$

Кванторная форма опр-я неогр-го сверху мн-ва может быть автом-ки получена из кват-й формы опр-я огр-го сверху мн-ва путём применения след-х 3-х правил:

1) Заменой $\exists \longleftrightarrow \forall$

2) Заменой $: \longleftrightarrow \Rightarrow$

3) Заменой усл-я огр-ти: $x \le M$ на ему противоп-ое (усл-ие неогр-ти): $x > M$

Замеч-ие. При построении отр-я области принадл-ти пер-х остаются прежними, т.е. $\in \not\to \notin$

Привед-й принцип постр-я отр-й явл-ся универсальным — он может применяться к кванторным опр-м любого рода

Опр Мн-во наз-ся огр-м, если оно огр-но и сверху и снизу

Рассм-м сл-ее мн-во:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 10\} \equiv X$$

Задание. Написать с помощью кванторов опр-я огр-го и огр-го снизу мн-в, а также отр-я этих опр-й

Это мн-во огр-но снизу любым неположительным числом. Вообще, если у мн-ва есть нижняя и/или верхняя грань, то их всегда ∞ много. Среди нижних граней этого мн-ва есть наибольшая — число нуль. Это число одновременно ~~есть наибольшая из нижних~~ является минимальным эл-м нашего мн-ва. Рассматр-мое мн-во также огр-но сверху (а значит и просто огр-но). Любое число ≥ 10 (напр, 100, 1000 и т.д.) — его верхняя грань. Мн-во X не имеет max-го эл-та. Число 10, являясь в некотором (пока не уточнённом нами) смысле его верхней границей и потому претендующее на такую роль, ~~не~~ всё же не явл-ся max-м элем-м нашего мн-ва, поскольку ему не принадлежит (если к мн-ву X добавить число 10, то это число станет его max-м эл-м). В то же время любое число меньшее ~~10~~ прин-ее мн-ву, а значит меньшее 10 не может быть его max-м эл-м, т.к. между этим числом и 10 всегда найдётся ещё одно число

Возникает идея создания такого обобщения понятий max-го и min-го эл-в, чтобы они ∃-ли для любых огр-х мн-в. В нашем примере ~~ка~~ в качестве кандидата на роль такого обобщ-го max-го эл-та ест-м образом претендует число 10. Заметая, что 10 явл-ся наим-й из его верхних граней, так же как 0 явл-ся наибольшей из нижних, приходим к след-м опр-м

Опр Точной верхней гранью огр-го сверху мн-ва X наз-ся наим-я из верхних граней этого мн-ва. Точной нижней гранью огр-го снизу мн-ва X наз наиб-я из его нижних граней

Обозн $\sup X \equiv \bar{X}$ $\inf X \equiv \underline{X}$ ← для краткости

верхняя нижняя

supremum (наивысший) infimum (наинизший)

Вот эти самые точная верхняя и точные нижняя грани и явл-ся обобщ-ми ~~соот~~ понятий ~~но~~ max-~~но~~ и min-го эл-в соотв-но

Мы не случайно потреб-ли огр-ти мн-ва X в опр-ии точных граней. Если бы мн-во X, напр, не было огр-но сверху, то у него не сущ-ло бы ни одной верхней грани, а значит выбирать наим-ую из них было бы просто не из чего. Т.о., требование огр-ти призвано обеспечить корректность опр-я. Однако ~~это ещё~~ эту корр-ть ещё надо док-ть. Дело в том, что из факта сущ-ия у мн-ва, напр, ~~точных~~ верхних гр-й ещё не след-т, что среди них найдётся наим-я. А вдруг найдётся такое сложно устр-ое мн-во X, что каждое число $\geq$, скажем, 10, $\approx$ большее 10, будет его верхней гр-ю, а ≤ 10 – нет. Тогда у мн-ва верхних граней такого мн-ва X, очевидно, не будет min-го эл-та, а значит не будет и точной верхней грани самого ~~X~~ мн-ва X. Можно, однако, док-ть, что подобных сложно устр-х мн-в $\nexists$т, т.е. можно док-ть, что у огр-го мн-ва всегда $\exists$-ют точные грани. Для док-ва этого утв-я нам понадобятся кванторные опр-я точных гр-й. Приведём кван-ое опр точной в-й гр-и (мы огр-ся док-м $\exists$-я точной верхней грани, док-во $\exists$-я точной ниж-й гр пол-ю ан-но):

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \leq \bar{x}$ ← $\bar{x}$ – одна из верхних граней

2) $\forall \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \exists x \in X : x > \tilde{x}$ ← $\forall$ число, меньшее $\bar{x}$ – уже не верхняя грань, т.е. $\bar{x}$ – наим-ая из верх-х граней

Лекция 2

Теорема. Огр-ое сверху мн-во имеет точную верхнюю грань

Δ Пусть X - огр-ое сверху мн-во, т.е. пусть $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M$

Могут предст-ся два случая:

1) $\exists x \in X : x \geq 0$ (у мн-ва X есть хотя бы один неотр-й эл-т)

2) $\forall x \in X \Rightarrow x < 0$ (все эл-ты ~~x~~ мн-ва X отр-ны)

Док-во случая 1) (также как и док-во сл-я два) разбивается на две части

В первой части док-ва предлагается некоторый процесс, в рез-те которого получается число $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots$ претендующее на то, чтобы наз-ся точной верхней гранью (этот процесс наз-ют формальным постр-м точной верх-й грани). Во второй части док-ва обосн-ся, что постр-ое нами число $\bar{x}$ дейст-но явл-ся точной верхней гр-ю мн-ва X.

Первая часть док-ва содержит в себе некий эвристический момент (элемент угадывания, открытия). Опираясь на интуицию и опыт работы с вещ-ми числами мы должны догадаться, увидеть искомую процедуру построения точной верхней грани, совершив ма~~ле~~ленькое научное открытие. Вторая часть док-ва (как это обычно бывает в подобного рода док-х) более громоздка и менее интересна, но всё же необходима — иногда ~~часто~~ оказ-ся, что процесс конструирования той или иной величины, сколь бы правдоподобным и очев-м он не казался, приводит к ложному рез-ту

Заметим, что подобный способ док-ва (связанный с разделением его на указанные ~~две части~~) очень часто исп-ся при док-ве сущ-я ~~за~~ различных величин (напр, реш-й диф-х ур-й). С этим подходом Вы ещё не раз столкнётесь как в рамках анализа, так и при изучении других мат-х дисциплин

Итак, в соот-вии со сказанным

I) строим $\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots$ ← нек-ое вещ-ое число

II) док-ем, что $\bar{x} = \sup X$

Сперва формально строим некое число $\bar{x}$ = -и-, а после этого док-ем, что оно явл-ся точной верх-й гр-ю. $x \geq 0$

I) Рассм-м мн-во $X_+ \equiv \{x \in X \mid x = +x_0, x_1 \ldots\} \neq \emptyset$

$\forall x \in X_+ \Rightarrow x_0 \leq x \leq M \Rightarrow x_0 \leq M$ ← в силу транзит-ти знака $\leq$

$\{x_0\}$ — мн-во целых частей чисел $\in X_+$

У огр-го сверху мн-ва целых чисел всегда $\exists$ет max-й эл-т. Это св-во может быть выведено из осн-х св-в целых чисел, но мы не будем ~~его выводить~~ этого делать, используя его сразу как изв-ое св-во мн-ва целых чисел. Оно довольно очевидно. Напр., мн-во натур-х чисел ≤ 100 заведомо имеет max-й эл-т, даже если 100 и не прин-т этому мн-ву | 2.3

$\max\limits_{X_+}\{x_0\} \equiv \bar{x}_0$ – max-я из целых частей чисел, $\in$-х X_+

Рассм-м мн-во $X_0 \equiv \{x \in X \mid x = \bar{x}_0, x_1 \ldots\}$ ← "+" подр-ся

$\{x_1\}$ - мн-во первых десят-х знаков чисел из X_0

$\max\limits_{X_0}\{x_1\} \equiv \bar{x}_1$ (среди цифр всегда можно выбрать наибольшую)

Рассм-м мн-во $X_1 \equiv \{x \in X \mid x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 x_2 \ldots\}$

$\max\limits_{X_1}\{x_2\} \equiv \bar{x}_2$

—— " ——

Опишем еще произвольный промежут-й k-й шаг, фиксир-й $\bar{x}_k$. При фиксации $\bar{x}_1$ мы расс-м мн-во X_0, при фиксации $\bar{x}_2$ – мн-во X_1. Ясно, что для фиксации $\bar{x}_k$ надо рассм-ть мн-во

$X_{k-1} \equiv \{x \in X \mid x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{k-1} x_k \ldots\}$

т.е. должны быть фиксированы целая часть и все десят-ые знаки вплоть до (k-1)-го вкл-но

$\max\limits_{X_{k-1}}\{x_k\} \equiv \bar{x}_k$

—— " ——

Продолжая неогр-но этот процесс, мы опр-м $\bar{x}_k$ для всех k

II) Рассм-м число

$\bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots$

и док-м, что $\bar{x} = \sup X$. Нап-м, что согласно опр-ю $\sup X$ это значит, что

а) $\forall x \in X \Rightarrow x \leq \bar{x}$

б) $\forall \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \exists x \in X : x > \tilde{x}$

(а) и б), чтобы не путать с 1) и 2))

В б) будем док-ть конструктивно! (если $x<0$, то очевидно, а если $x \geq 0$, то по шагам)

Δ а) От противного. Предположим, что вып-но отр-ие а), т.е. что

Эх, а по-моему всё-таки лучше более ~~конструктивное~~ конструктивное док-во а)! (как в Ильине-Позняке)

$\exists x \in X : x > \bar{x}$

Далее, исходя из этого пред-я, получим нек-ое противоречие, ~~которое~~ наличие с логической точки зрения будет означать, что выдвинутое предп-ие неверно

Прежде всего заметим, что поск-ку $\bar{x}$ по построению ≥ 0, то ~~число x~~ расcм-ое нами число x (превосх-ее $\bar{x}$) обяз-но имеет пол-й знак

$\bar{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0$

Предст-м x в виде $x = +x_0, x_1 \ldots$

Т.к. по предпол-ю $x > \bar{x}$, то согласно правилу ср-я в-х чисел

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} x_i = \bar{x}_i & \forall i = \overline{0, k-1} \\ x_k > \bar{x}_k \end{cases},$$

т.е. $x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{k-1} x_k \ldots$, а значит $\in X_{k-1}$ (по опр-ю X_{k-1})

С другой стороны, из опр-я $\bar{x}_k$ вытекает, что

нер-во $\square$ действ-но должно вып-ся

$$x_k \leq \bar{x}_k = \max_{X_{k-1}} \{x_k\}$$

($\bar{x}_k$ – max-я k-я десят-я цифра из всех чисел X_{k-1}) $\ni x$

Получ-ое противор-е опров-ет наше пред-ие о том, что $\exists x \in X : x > \bar{x}$, т.е. $\forall x \in X \Rightarrow x \leq \bar{x}$ Δ а)

Δ б) Рассм-м произвое $\tilde{x}$: $\tilde{x} < \bar{x}$ и покажем, что при $\forall$ таком $\tilde{x}$ найдётся $x \in X$ его превосходящее

Напомню, что док-во теоремы пока проводится в рамках случая 1), т.е. случая такого мн-ва X, которое имеет хотя бы один неотр-й эл-т

$\exists x \in X : x \geq 0$

Но тогда, если $\tilde{x} < 0$, то в качестве искомого $x \in X$, превосход-го $\tilde{x}$ дост-но взять $\forall$ неотр-й эл-т мн-ва X:

поскольку $\tilde{x} < 0 \leq x \Rightarrow \tilde{x} < x$

Пусть теперь $0 \leq \tilde{x} = \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \ldots < \bar{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots$

Согласно правилу ср-я вещ-х чисел последнее нер-во означает, что

$$\exists k \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} \tilde{x}_i = \bar{x}_i & \forall i = \overline{0, k-1} \\ \tilde{x}_k < \bar{x}_k \end{cases},$$

т.е. $\tilde{x} = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{k-1} \tilde{x}_k \ldots$

Но тогда в кач-ве иск-го x дост-но взять $\forall x \in X_k$. Убедимся в этом

Возьмём $\forall x \in X_k$. По опр-ю мн-ва X_k такое x имеет вид

$x = \bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k x_{k+1} \ldots$)

а значит, поск-ку $\bar{x}_k > \tilde{x}_k$, то в самом деле спр-во $x > \tilde{x}$

Итак, мы док-ли, что

$\forall \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \exists x \in X : x > \tilde{x}$ ∆ б)

2) Обратимся к сл-ю 2):

$\forall x \in X \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -x_0, x_1 \ldots$ (имеет десят-ое предст-ие со знаком "–")

Заметим, что отр-ое число тем больше, чем его модуль, а значит и его целая часть и послед-ие десят-ые знаки меньше

В соотв-ии с этим замеч-м число $\bar{x}$ строится в виде

$$\bar{x} = -\bar{x}_0, \bar{x}_1 \ldots$$

При этом $\bar{x}_0 \equiv \min\limits_{X} \{x_0\}$ – мин-я из целых частей чисел мн-ва X

Далее вводится мн-во $X_0 \equiv \{x \in X \mid x = -\bar{x}_0, x_1 \ldots\}$ и $\bar{x}_1$ полаг-ся равным

$$\bar{x}_1 \equiv \min\limits_{X_0} \{x_1\}$$ – min-я среди первых десят-х цифр чисел из X_0

—— " —— и т.д.

Док-во того, что постр-ое $\bar{x} = \sup X$ полн-ю ан-но док-ву для случая 1

Теорема доказана ⊠

Задание: сформул-те и док-те теорему о $\exists$-ии $\inf X$ у огр-го снизу мн-ва

Число $\bar{x}$, постр-ое при рассм-ии случая 1), вполне может оказ-ся пер-й дес-й дробью, имеющей периодом цифру 9. Так будет, напр, в случае мн-ва $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$

При построении $\bar{x}$ для этого мн-ва сначала мы выберем числа с наиб-й целой частью, т.е. ~~9~~ числа вида 9,...

Далее ~~выберем~~ из этих чисел выберем числа с max-м знач-м первого разряда, т.е. числа вида 9,9...

Продолжая ~~этот~~ данный процесс, получим в итоге, что $\bar{x} = 9{,}999... = 9{,}(9)$

~~Из~~ Это ещё одна причина, по кот-й не вполне удобно отк-ваться от дес-х дробей с 9-кой в периоде. Если бы мы отк-сь от такого пред-ния, то нам ~~бы~~ пришлось модифиц-ть док-во так, чтобы избежать появл-я подоб-х чисел. При использ-ии же двоякого пред-я (т.е. дробей его как с нулём, так и с 9-й в периоде) в данной модификации нет необх-ти. При желании (или если это вдруг действ-но понадобится, напр при сравнении $\bar{x}$ с другими числами) мы всегда можем, по окончании процесса постр-я супремума заменить пер-ю дробь с 9-кой в периоде на равную ей, ~~с периодом и~~ имеющую периодом нуль (напр, 9,(9) на 10,(0))

§5 Арифметические операции над вещ-ми числами

Сложение и умн-ие вещ-х чисел можно опр-ть соотв-но через сл-ие и умн-ие рац-х чисел и использ-ие точных граней числ-х мн-в

I) Сложение в-х чисел

Пусть треб-ся сл-ть два вещ-х числа x и y. | 2.8

Как мы выяснили ранее

$\forall x$ и $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists\, x_r, \bar{x}_r$ и $y_r, \bar{y}_r \in \mathbb{Q}$:

$x_r \leq x \leq \bar{x}_r$ и $y_r \leq y \leq \bar{y}_r$

~~Понятно, что~~,

$\sup\{x_r \mid x_r \leq x\} = x$

индекс r здесь и далее означает рац-ть (чтобы каждый раз не писать $\in \mathbb{Q}$)

Потому что $\exists$-т рац-ые числа сколь угодно близкие к данному вещ-му числу x

При этом, если x само рац-но, то одно из x_r вообще с ним совпадает, а если x - ир-но, то все $x_r < x$

Ан-но $\sup\{y_r \mid y_r \leq y\} = y$

Тогда естественно считать, что

$\underbrace{\sup\{x_r + y_r \mid x_r \leq x,\ y_r \leq y\}}_{\equiv S} \equiv x+y$ (сумма рац-х чисел опр-ся по правилу слож-я рац-х чисел)

Опр $x+y = \sup S$

Т.о., исп-я $\sup$-м, мы опр-лили сумму вещ-х чисел через сумму рац-х

Чтобы этот $\sup$-м ~~всегда~~ заведомо $\exists$-л (т.е., чтобы опр-ие суммы было корректным), мн-во рассм-х сумм $x_r + y_r$ всегда должно быть огр-но сверху. Док-м это

Док-во кор-ти опр-я суммы

Δ $\left.\begin{matrix} x_r \le x \le \bar{x}_r \Rightarrow x_r \le \bar{x}_r \\ y_r \le y \le \bar{y}_r \Rightarrow y_r \le \bar{y}_r \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_r + y_r \le \underbrace{\bar{x}_r + \bar{y}_r}_{\text{искомая мажоранта}}$

Т.о., $\{x_r + y_r\}$ - огр-но $\Rightarrow$ sup S сущ-т $\Rightarrow$ опр кор-но $\blacktriangle$

Зам-ие 1. Мы не могли огр-ть $x_r + y_r$ суммой $x+y$ - это было бы тавтологично, ибо $x+y = \sup S$, а мы ещё не убедились в том, что этот sup-м $\exists$-ет (мы это как раз и док-м)

Зам-ие 2. Сумму вещ-х чисел можно также опр-ть как точную ~~нижнюю~~ грань мн-ва всех сумм ~~превосх-щ~~ их. рац-х чисел и док-ть, что такое опр-ие совпадает с нашим

II) Произв-ие вещ-х чисел

1) Пусть $x > 0$ и $y > 0$ - перемн-ые вещ-ые числа

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x > 0, y > 0 \Rightarrow \exists\, x_r, \bar{x}_r$ и $y_r, \bar{y}_r$:

$0 < \overset{\le x}{x_r} \le \bar{x}_r$ и $0 < \overset{\le y}{y_r} \le \bar{y}_r$

дост-но занулить все десят-ые знаки x,y после первого ненулевого разряда

Опр $x \cdot y = \sup\{x_r \cdot y_r \mid x_r \le x, y_r \le y\}$

перемн-ся по правилу ум-я рац-х чисел

Док-во кор-ти опр-я произв-я, т.е. док-во $\exists$-я sup-ма, полностью ан-но док-ву кор-ти опр-я суммы

2) $\forall x \in \mathbb{R} \overset{\text{полагаем}}{\Longrightarrow} x \cdot 0 = 0$

Пусть теперь x и y – ∀ вещ-ые числа

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ полагаем

$$x \cdot y = \begin{cases} +|x| \cdot |y|, & \text{если } x \text{ и } y \text{ одного знака} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{— " — разного знака} \end{cases}$$

перемн-ть неотр-ые числа мы уже умеем

Вычитание и деление опр-ся как действ-я обратные соот-но сл-ю и умн-ю

III) Можно док-ть, что $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! z \in \mathbb{R}$: $y + z = x$, назыв-ое разн-ю x и y и обозн-ое через $x - y$: $z \equiv x - y$

IV) Ан-но можно док-ть, что $\forall x \in \mathbb{R}$ и $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists! z \in \mathbb{R}$: $y \cdot z = x$, наз-ое частным x и y и обозн-ое через x/y : $z \equiv \frac{x}{y}$] вещ-ые числа!

Некот-е св-ва оп-й над в-ми числами

а) $-|a| \le a \le +|a|$

б) $|a+b| \le |a| + |b|$

} вытекают из опр-я $|\,|$ и + (док-ть сам-но)

в) $|a-b| \ge |a| - |b|$

Δ $\underbrace{|(a-b)+b|}_{=|a|} \overset{б)}{\le} |a-b| + |b|$ $\blacktriangle$

Ан-но $(a \leftrightarrow b)$ $|a-b| \ge |b| - |a|$

$\Rightarrow |a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$

§6 Геометрическое изображение вещественных чисел

Из аксиом геометрии сл-ет, что между мн-м вещ-х чисел и ~~между~~ мн-м точек любой прямой можно установить взаимно одн-ое соотв-ие

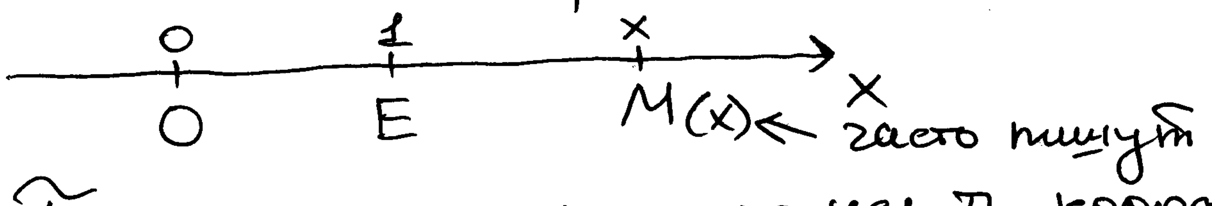
$\mathbb{R} \longleftrightarrow \{\text{точки прямой}\}$

т.е. такое соотв-ие, при котором каждому в-му числу ~~$\mathbb{R}$~~ соотв-т !-я точка прямой и наоборот - каждой точке прямой отвечает !-ое вещ-ое число

Однако таких соотв-й на самом деле ∞ много. Чтобы выделить какое-н одно из них, пост-ют сл-м образом

На рассм-й прямой выделяют

1) т. $O \Leftrightarrow$ число $0 \leftarrow$ начало коорд-т
2) Положит-ое напр-ие (пол-ую полупрямую)
3) Масшт-й ~~от~~ отр-к $OE = 1$ (длина кот-го $= 1$)



Такую прямую принято наз-ть коорд-й прямой или вещ-й осью и обозн-ть символом какой-н перем-й (скажем x), если на ней будут отобр-ся значения именно этой перем-й, или просто заглавной буквой $\mathbb{R}$

Поскольку каждому числу $\mathbb{R}$, т.о., отв-т вполне опр-я точка коорд-й прямой, вещ-ые числа часто наз-т точками и говорят, напр, точка 5 или точка $x=5$ и т.д.

Не остан-сь на деталях процедуры устан-я соотв-я $x \Leftrightarrow M$ (между x и M), ~~так~~ отмечу лишь, что каждой точке M вещ-й оси отв-т число x =ое длине отр-ка OM со знаком "+", если $M \in$ правой (пол-й) полуоси и со знаком "–" – если левой (отр-й) полуоси. Длина отр-ка OM, в свою очередь, опр-ся как отн-ие длин OM и OE, кот-ое, как уже констатиров-сь, ~~в~~ в общем случае не предст-я рац-м числом

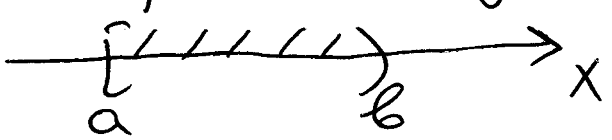
Рассм-м ~~нек~~ примеры нек-х числовых мн-в, кот-ые мы теперь можем воспр-нимать и как мн-ва точек вещ-й оси

Пусть a и $b \in \mathbb{R}$ (или, что то же самое, ~~две~~ точки вещ-й оси)

первая группа примеров

он же

1) $[a,b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ – полусегмент/ полуотрезок / полуинтервал



$a = \inf [a,b)$
$b = \sup [a,b)$

Все точки $[a,b)$ лежат между inf и sup (это справ-во вообще для любого огр-го мн-ва), причём среди точек $[a,b)$ имеются сколь угодно близкие как к inf, так и к sup (последнее св-во также распростр-ся на произв-ые огр-ое мн-ва)

Ан-но опр-ся инервал (a,b) и сегмент/~~полу~~ отр-к $[a,b]$

2) Окр-тью т. C вещ-й оси наз-т $\forall$ инт-л (a,b): $C\in(a,b)$ (т.е. $\forall$ инт-л, сод-й данную точку)

Среди окр-й т. C выделяют особые — симметр-ые, т.н. ε-окр-ти

$$\varepsilon\text{-окр-ть т. } C \equiv (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \equiv \overset{\text{обозначение}}{O_\varepsilon(c)}$$

(ясно, что т. C ей $\in$-т)

3) $[a,+\infty)\equiv\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq a\}$ открытые и замкнутые полупрямые

Ан-но опр-ся $(a,+\infty)$, $(-\infty,a]\overset{\text{и}}{,}(-\infty,a)$

$(-\infty;+\infty)\equiv\mathbb{R}$ (мн-во всех в-х чисел)

Каждое из мн-в вида 1), 2) и 3) наз-ся числовым промежутком (мн-ва "без разрывов")

На этом мы заканчиваем с теорией вещ-х чисел и переходим к след-й главе, посвящ-й пределу действ-х ф-й

Глава II

Предел функции

§1 Понятие функции

Предел функции — одно из ключевых понятий анализа. К нему сводятся, ~~такие важ-~~ напр., такие важное св-ва функций, как непрер-ть и диф-ть, к рассм-ю которых мы перейдём в самое ближайшее время.

Прежде чем дать опр-ие предела ф-ции, уточним, что мы будем под словом ф-я подразум-ть

Пусть X – непустое мн-во вещ-х чисел

$X \subset \mathbb{R}$ и $X \neq \varnothing$

Символ x, обознач-ий произв-ое число $\in X$ принято наз-ть перем-й велич-й или перем-й x

~~Всюду~~ Далее под словом число по умолчанию подразумевается вещ-ое число

Итак, введём понятие функции

Если каждому числу $x \in X$ в силу некоторого закона f поставлено в соотв-ие !-ое (единственное) число y, то говорят, что на мн-ве X задана функция f и пишут $y = f(x)$ или $y = y(x)$. При этом мн-во X наз-ся обл-ю опр-я функции f

Переменную x, обозначающую произв-~~ое~~ ~~зн-е~~ ый эл-т из X, наз-т независ-й перем-й или аргументом функции f

Число y, отвеч-ее фикс-му зн-ю x наз-т частным значением ф-ции в т. x

Символ f в обозначении функции $f(x)$ наз-ся характеристикой ф-ии | 2.15

Замеч-ие. Строго говоря, запись $f(x)$ означает частное зн-ие ф-ии, в то время как саму ф-ю след-т обозначать просто буквой f. Но так уж исторически сложилось, что под символом $f(x)$ подразум-т не только частное знач-е ф-ии, но и её саму

Мн-во значений ф-ии f опр-ся как

$Y \equiv \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$, т.е. как совок-ть всех частных зн-й этой ф-ии

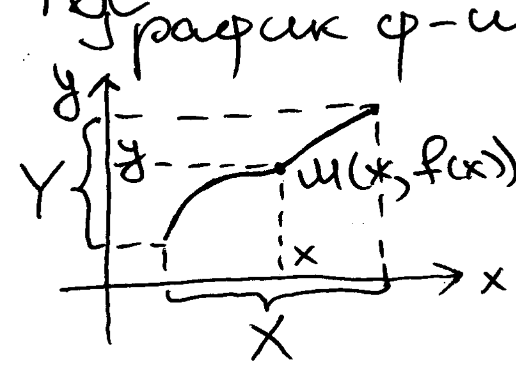
Переменную y, обозн-ую произв-ый элемент ~~значение~~ из Y наз-т зависимой перем-й в том смысле, что любое число ~~зн-ие~~ из Y всегда рассм-ся нами как частное значение $f(x)$ ф-ии f, отвеч-ее некоторому x из X

Говорят также, что переменная y зависит от перем-й x

Введём понятие графика ф-ии

~~Плоскость~~ Сперва напомню, что пл-ть с введённой на ней декартовой сист-й коорд-т наз-ся координатной пл-ю. Тогда

График ф-ии $\equiv \{(x,y) \in XOY \mid x \in X, y = f(x)\}$ — мн-во всех точек коорд-й пл-ти XOY таких, что —



Приведённое мною описание понятия ф-ии не явл-ся опред-ем в строгом значении этого слова. Посмотрим вним-но на это описание. Согласно ему функция – это некоторый закон, правило или соотв-ие, обозн-ое какой-н буквой, напр, буквой f. Но дело в том, что все эти слова: закон, правило, соотв-ие и т.п. – лишь синонимы слова ф-я, они способствуют лучшему уяснению ее смысла, но не сводят к чему-либо более простому и первичному, как это должно было бы происходить в случае полноценного опр-я

В нашем описании понятия ф-ии мы уточнили лишь, что речь идёт о таком соотв-ии, при кот-м каждому зн-ю x отв-ет !-ое зн-ие y. Однако сделали мы это только для того, что полностью исключить двусмысл-ть трактовки описания. Уточнение о !-ти далеко не всегда вкл-ют в описание понятия ф-ии, поскольку по умолчанию слова правило, закон и т.д. её предполагают. Т.е., если мы говорим, напр, что ∃ет закон, который каждому x ставит в соотв-ие нек-ое y, то имеем в виду, что каждому ~~y~~ x отвечает вполне опр-ое, т.е. !-ое зн-ие y

Так как же всё-таки обстоит дело с ~~определением~~ понятием функции? ∃-ют две возможности реш-я этого вопроса. Первая из них, которая фактически реализована нами, и которая реал-ся в большинстве руководств по анализу — это заявить, что понятие ф-ции явл-ся первичным и огран-ся его описанием и разъяснением вспомогат-х названий и обозн-й.

Вторая возм-ть, связанная с полноценным опр-м ф-ции, может быть реализована только в рамках теоретико-множеств-го подхода. Согласно этому подходу функция отождествляется со своим графиком, который, в свою очередь, рассм-ся как нек-ое мн-во упор-х пар вещ-х чисел. Т.о., как и следовало ожидать, ~~х~~ согласно теор-ко-множ-му опр-ю ф-я — это просто мн-во спец-го вида

Теперь дадим опр-я (уже полноценные!) огр-х функций и их верхних и нижних (в том числе точных) граней (все эти опр-я вводятся в полной аналогии с опр-ми огран-х мн-в и связанных с ними понятий)

Опр Ф-я $f(x)$ наз огр-й сверху на мн-ве X, если

$$\exists M \in \mathbb{R}: \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M$$

и огран-й снизу, если

$$\exists m \in \mathbb{R}: \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geq m$$

При этом M наз-ся верхней, а m — нижней гранью ф-ции $f(x)$ на мн-ве X

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся огр-й на мн-ве X, | 2.18
если она огр-на на нём и снизу и сверху, т.е., если

$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow m \le f(x) \le M$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$

$\Rightarrow -A \le f(x) \le +A \Leftrightarrow |f(x)| < A$

и мы получим $\Leftrightarrow$ое опр-ие огр-го мн-ва:

$\exists A > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le A$

Очевидно, что огр-ть ф-ии (как сверху, так и снизу) $\Leftrightarrow$ на огр-ти мн-ва её значений с соотв-й стороны (для того, чтобы убедиться в этом, вспомните опр-ие огр-го мн-ва)

Дадим опр-я точных граней ф-ии

Опр Наименьшая из верхних граней ф-ии $f(x)$, огр-й сверху на мн-ве X, наз её точной верхней гранью на этом мн-ве и обозн-ся

$\sup\limits_X f(x)$

Точная нижняя грань опр-ся ан-но (обозн $\inf\limits_X f(x)$)

Легко убедиться в том, что (проверьте сам-но)

$\sup\limits_X f(x) = \sup Y$, $\inf\limits_X f(x) = \inf Y$, где Y- мн-во зн-й ф-ии $f(x)$

(эти =ва сл-ет понимать в том смысле, что если $\exists$ет $\sup Y$, то $\exists$ет и $\sup\limits_X f(x)$ и наоборот, причём в случае сущ-ия они =ны друг другу)

Теперь видно, что предл-ое опр-ие кор-но (т.к. у огр-й ф-ии огр-но мн-во её зн-й, а у огр-го мн-ва (мн-ва зн-й) всегда $\exists$-т соотв-ие точные гр-и, а значит точные грани $\exists$-т и у самой ф-ии

Лекция 3

Дадим теперь кванторное опр-ие точной верхней грани

Опр $M = \sup\limits_X f(x)$, если

1) $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \le M$, т.е. M – одна из верхних гр-й

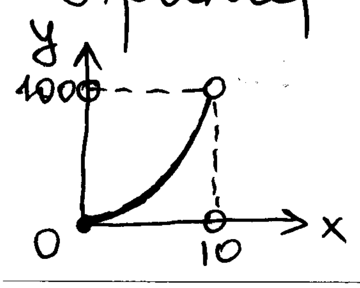
2) $\forall \tilde{M} < M \Rightarrow \exists \tilde{x} \in X : f(\tilde{x}) > \tilde{M}$ Иными словами $\forall$ число $\tilde{M}$, меньшее M – ~~уже~~ не верхняя грань, т.е. M – действ-но наим-ая из всех верх-х гр-ней

При этом подразум-ся, что $f(x)$ опр-на при всех x из X, т.е., что X, по крайней мере, – часть обл-ти опр-я ф-ии f ($X \subset D_f$)

Зам-ие. Конечно, можно было бы огран-ся соотн-ями: $\sup\limits_X f(x) = \sup Y$, $\inf\limits_X f(x) = Y$, сводящими понятие точных граней ф-ии к уже из-в-м нам понятиям точных гр-й числ-х мн-в – мн-в значений рассм-ой ф-ии. Но с практич-й точки зрения бывает удобнее пользоваться непосредств-м опр-м (не опирающимся на то или иное промежут-ое понятие)

Задание. Сформулир-те кванторные опр-я точной нижней грани отриц-я всех опр-й, относящихся к огр-ти ф-й

Пример Рассм-м ф-ю $y = x^2$ на пром-ке $[0,10)$ (и только на нём). Мн-м её знач-й будет $Y = [0,100)$



$\inf\limits_{[0,10)} x^2 = 0 \in Y \Rightarrow \min\limits_{[0,10)} x^2 = 0$

$\sup\limits_{[0,10)} x^2 = 100 \notin Y \Rightarrow \max\limits_{[0,10)} x^2$ не сущ-ет

В таком случае как наш, говорят, что ф-я $y=f(x)$ достигает (своей) точной нижней гр-и на мн-ве X, но не дост-т на нём точной верхней грани

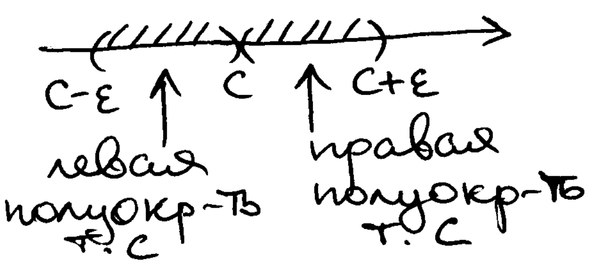
Очевидно, что достиж-е ф-й своего inf-ма на мн-ве X равн-но сущ-ю min-го зн-я у этой ф-ии на мн-ве X и ан-но достижение sup-ма $\Leftrightarrow$ сущ-ию max-го значения.

Причём, если сущ-т min-м, то он, естест-но, совпадает с inf-м, а если сущ-т max-м, то — с sup-м.

Т.о., max и min-~~ые~~ зн-я ~~ф-ии~~ даже у огр-х ф-й могут и не сущ-ть, а точные нижние и верхние грани огр-х ф-й всегда сущ-ют (являясь, как и в случае огран-х мн-в, ест-м обобщ-ем min-х и max-х значений)

§2 Опред-ие предела функции

Опр Проколотой ε-окр-тью т. c наз-ся мн-во $(c-\varepsilon, c)\cup(c, c+\varepsilon) \equiv \dot{O}_\varepsilon(c)$

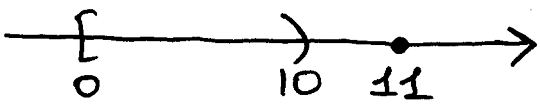


Т.о., проколотая ε-окр-ть точки предс-тав-т собой обычную ε-окр-ть точки у которой выколота (исключена) сама эта точка.
Т.е. мы как бы прокалываем ε-окр-ть в т. с

Заметим, что прокол-я ε окр-ть явл-ся объедин-ем двух промежутков (точнее интервалов, наз-х левой и правой полуокр-ми т. с), но не явл-ся промеж-м в целом (из-за выкол-й точки)

Опр Число а наз-ся предельной т^{ой} мн-ва X, если в ∀ $\dot{O}_\varepsilon(a)$ содерж-ся т-ки мн-ва X

Пример



$X = [0,10) \cup \{11\}$

т. 10 - пред-я точка для X, ибо

$\dot{O}_\varepsilon(10) = (10-\varepsilon, 10) \cup (10, 10+\varepsilon)$,

так что $\dot{O}_\varepsilon(10) \cap X \neq \varnothing$ ∀ даже сколь угодно малого ε

Ан-но $\forall x \in [0,10)$ - пред-я т. мн-ва X

А вот 11 не явл-ся пред-й т-й X, т.к., напр,

$\dot{O}_{0,5}(11) = (10,5;11) \cup (11;10,5) \cap X = \varnothing$

Т.о., мы видим, что пред-я т-ка мн-ва может ему и не ∈-ть, и наоборот, т-ка, ∈-ая мн-ву, может и не быть его пред-й т-й

Образно выражаясь, можно сказать, что т. а явл-ся пред-й т. мн-ва X, если мы можем подойти к ней сколь угодно близко по точкам мн-ва X, не наступая при этом на саму т. а

Тем самым, только для таких точек a мы можем ставить вопрос о том, стремятся ли значения функции к какому-л числу (пределу), ~~при неогр. стр.~~, т.е. приближаются ли они неограниченно к этому числу, при стремлении (неограниченном приближении) аргумента x к точке a

Итак, пусть дана ф-я $y=f(x)$, опр-я на X

$y=f(x)$: $D_f = X$ и пусть a – пр-я т. X

обл-ть опр-я — будет ещё и по Гейне (Хайне)

<u>Опр-ие предела ф-ии по Коши</u>

Число b нач-ся пределом функции $f(x)$ в т. a (при $x \to a$), если

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0:$

$$\forall x: \boxed{\begin{array}{l} 1)\ x \in X \\ 2)\ x \neq a \\ 3)\ |x-a| < \delta \end{array}} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Зам-ие. Такая запись предполагает, что для каждого $\varepsilon > 0$ сущ-ет какое-то своё $\delta > 0$, удовлетв-ее последующим усл-м (т.е. разным ε отвечают, ~~во~~ в.г. (≡ вообще говоря), различные δ), поэтому δ по сути явл-ся ф-й ε, в связи с чем пишут $\delta = \delta(\varepsilon)$. Но в самом опр-ии нет необх-ти явного указания на такую завимость, поскольку подразум-ся, что ∀-я перем-я, перед которой стоит квантор ∃-я, зависит от всех упоминавши-ся до неё перем-х, перед кот-ми стояли кванторы всеобщн-ти

В нашем случае квантор сущ-я стоит только перед δ, а до неё упоминается лишь одна перем-я ε (разум-ся, с квантором всеобщ-ти, поск-ку кв-ры ∃-я и ∀-ти должны чередоваться), поэтому и считаем, что $\delta = \delta(\varepsilon)$

Обозн-ие $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

или $f(x) \to b$ при $x \to a$

Зам-ие. Опр-ие предела по Коши часто наз-ют опр-м предела в терминах "$\varepsilon - \delta$"

Осознать, представить себе, что такое предел функции проще всего, опираясь на геом-ую иллюстрацию этого понятия. Прежде чем приводить эту илл-цию, выполним неск-ко несложных преобр-й

$$\left.\begin{matrix} 2) \\ 3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 < \underbrace{|x-a|}_{x \neq a} < \delta$$

$$-\delta < x - a < +\delta \quad \Big\} +a$$

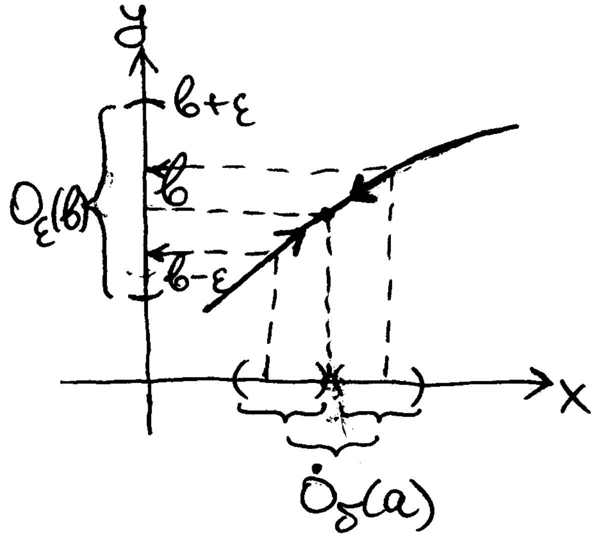
$$a - \delta < x < a + \delta$$

$$\Rightarrow x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \dot{O}_\delta(a)$$

(в опр-ии ε окр-ти может исп-ся вместо буквы ε любая другая, напр, δ)

Ан-но $|f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)$

(мы допускаем, что $f(x)$ совпадает с b)



Пусть для простоты $D_f = (-\infty, +\infty)$ (так что условие 1) проверять не треб-ся)

Тогда согласно опр-ю предела ф-ии, мы хотим, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ (в опр-ии имеется прежде всего в виду — для любого сколь угодно малого пол-жит-го ε), нашлось такое $\delta > 0$, чтобы при (для любых) $\forall x$ из прокол-й окр-ти соотв-ие зн-я ф-ии гарантир-но попадали в ε-окр-ть т. b

Иными словами мы хотим, чтобы (последующие слова оформляются как геом-ое опр-ие пр-ла)

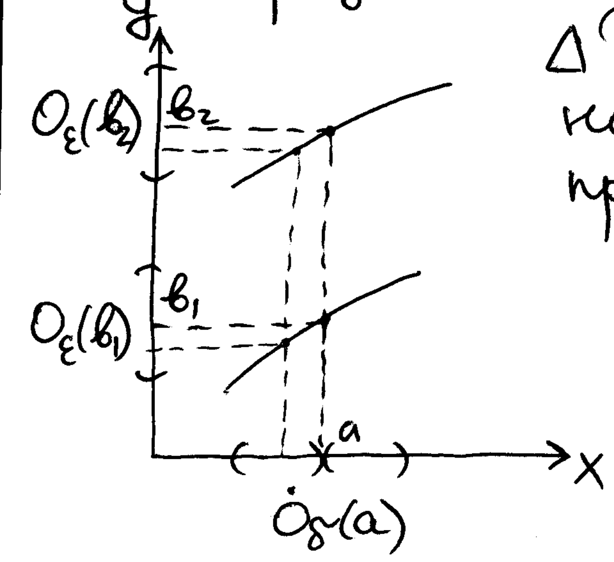
Геометрическое опр-ие предела функции

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если $\forall$ (сколь угодно малой) $O_\varepsilon(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \dot{O}_\delta(a): \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow$ (соотв-ее зн-ие ф-ии) $f(x) \in O_\varepsilon(b)$

только озвучивать

Утв-ие. Ф-я $y=f(x)$ может иметь не более одного предела в т. a



Δ Док-во проведём от противного с опорой на геом-ое опр-ие пред-го зн-я ф-ии

Предпол-м, что b_1 и b_2 — два различных предела ф-ии в т. a (т.е. $b_1 \neq b_2$)

Пусть $\varepsilon > 0 : O_\varepsilon(b_1) \cap O_\varepsilon(b_2) = \varnothing$

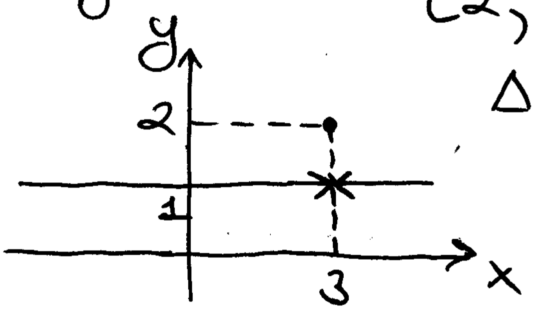
Тогда из опр-я предела вытекает, что $\exists \dot{O}_\delta(a): \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X$ ← обл-ть опр-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in O_\varepsilon(b_1) \\ f(x) \in O_\varepsilon(b_2) \end{cases}$ невозможно (см. рисунок), чтобы $f(x)$ одновремен-но им было

– противоречие, ⇒ а значит выдвинутое нами предпол-ие неверно $\Rightarrow b_1 = b_2$, т.е. функция всегда имеет только один предел

Примеры

① Пусть $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$ Док-ть, что $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$



Δ Согласно опр-ю

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 :$ $\boxed{\text{нек-е усл-я}}$ опр-ые

должно

Оказ-ся в этом простейшем случае (почти пост-й ф-ии) величину δ можно выбрать единой сразу для всех ε. Более того, в кач-ве δ можно взять совершенно $\forall$-ое полож-е число. Проверим, что это действ-но так, положив $\delta(\varepsilon)$ тождест-но равным, напр, 1/2

$\equiv$-во и $\stackrel{def}{=}$ одновр-но ($\stackrel{def}{\equiv}$)

Итак, пусть $\delta(\varepsilon) \equiv 1/2$ (т.е. δ в нашем случае реально от ε не зависит)

После того, как мы выбрали δ, нам надо убедиться в том, что

всегда

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x : \begin{cases} x \in X = \mathbb{R} \\ \underbrace{0 < |x-3|}_{} < 1/2 \end{cases} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$

a, δ

($\exists \delta$ не пишем, т.к. мы его уже выбрали)

далее будем опираться на 1-ое нер-во (второе нам не понадоб-ся)

Но $\forall x: |x-3|>0$, т.е.: $x\neq 3 \Rightarrow f(x)=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-1|=|1-1|<\varepsilon$ при $\forall \varepsilon>0$ #

Из этого примера хорошо видно, что предельное зн-ие ф-ии вовсе не обязано совпадать с частным. Образно выраж-сь, сущ-ие предела ф-ции в т.а означает, что при неогр-м приближении зн-й арг-та к т.а (но при таком приб-ии, при кот-м x всё время не совпадает с a) соотв-ие зн-я ф-ии неогр-но прибл-ся к нек-му числу в (в частности, вполне могут и всё время совпадать с в, как в рассм-м примере). В самой же т.а ф-я при этом может быть равной чему угодно (в том числе вообще быть неопр-й)

Дополнительно

⌈Заметим также, что если бы при построении опр-я предела мы не исключали из рассм-я т.а (в кот-й ищется предел), то в случае примера 1 предел ф-ии в т.3 не $\exists$-ал

Т.о., включение т.а при построении опр-я предела ф-ии в число допустимых зн-й пер-й x привело бы к сокращ-ю кол-ва ф-й, имеющих пред-ое зн-ие в данной т-ке, что, в свою очередь, крайне негативно отразилось бы на развитии дальнейших идей матем-го анализа⌋

(2) Док-ть, что $\lim_{x \to 1}(2x+3)=5$

Δ ~~Итак~~ Нам надо показать, что

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon)>0 : \boxed{\text{усл-я}}$

Каким взять $\delta(\varepsilon)$? Собственно, док-ть, что предел $\exists$-ет, точнее, что он равен нек-му числу ~~а~~ означает док-ть, что такая ф-я $\delta(\varepsilon)$ сущ-ет, т.е. док-ть что сущ-ет ф-я $\delta(\varepsilon)$, которая каждому полож-му числу ε ставит в соотв-ие такое пол-ое число δ, при кот-м выполн-ся сформул-ые после двоеточия усл-я. Проще всего док-ть, что такая ф-я $\exists$-ет – это предъявить её в ~~я~~ явном виде (отметим, что подобных ф-й, если они сущ-ют, всегда ∞ много). В некоторых сложных случаях, однако такое предъяв-ие по тем или иным причинам невозможно (или крайне затруднит-но) и тогда приходится огр-аться док-м (как правило не тривиальным) того, что искомая ф-я $\delta(\varepsilon)$ в принципе сущ-ет

К счастью, в нашей задаче всё достат-но просто и мы можем в кач-ве $\delta(\varepsilon)$ взять

$$\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{3}$$

Проверим выпол-ие соотв-х усл-й при данном δ

Итак,

$$\forall \varepsilon>0 \text{ и } \forall x: \begin{cases} 1)\ x\in X=\mathbb{R} \\ 2)\ 0<\underbrace{|x-1|}_{1\,=\,a}<\varepsilon/3, \end{cases} \Rightarrow$$

теперь нам достаточно только второго нер-ва

$$\Rightarrow |\overbrace{2x+3}^{f(x)}-\overset{b\,=}{5}|<\varepsilon$$

$$2|x-1|<\varepsilon$$

$$|x-1|<\varepsilon/2$$

Но из того, что $|x-1|<\varepsilon/3 \Rightarrow |x-1|<\varepsilon/2$

Зам-ие. Разум-ся, в кач-ве $\delta(\varepsilon)$ можно было взять и $\varepsilon/2$, а вот положить его равным, скажем, просто ε мы уже не имеем права. Я взял $\delta=\varepsilon/3$ лишь для того, чтобы подчеркнуть, что при док-ве $\exists$-я предела мы вовсе не обязаны выбирать max-но возможное из допустимых знач-й δ. В нашем примере выбор конкретной величины δ из возм-х абсол-но не принцип-ен, однако иногда искусственное занижение зн-я δ, выбор его, так сказать, с некоторым запасом по малости, может приводить к значит-му упрощ-ю док-ва выполнения соотв-х усл-й из опр-я предела ф-ии. В ~~подобных~~ таких случаях подобное дополнит-ое уменьшение δ весьма рационально

*: На самом деле я просто не хотел, чтобы док-во выглядело чересчур тавтологично, т.е., чтобы не получилось, что из $|x-1|<\varepsilon/2 \Rightarrow |x-1|<\varepsilon/2$,

а всё, что написано выше — это хоть и в принципе верное, но специально придуманное объяснение

Док-м теперь утв-ие об огран-ти ф-ии, имеющей предельное зн-ие. Для этого сперва уточним, что мы будем подраз-ть под ф-ми, огран-ми в окр-ти нек-й точки. (Проблема в том, что мы определили понятие огр-ти ф-ии лишь на множ-х, явл-ся частью её обл-ти опр-я X, в то время как рассм-ая ф-я может быть опр-на не при всех x из окр-ти $O_\delta(a)$, т.е. $O_\delta(a)$ может и не быть частью мн-ва X: $O_\delta(a) \not\subset X$. Для такого случая и необх-мо данное уточнение, обобщающее понятие огран-ти ф-ии $f(x)$ на случай мн-в, не являющ-ся частью обл-ти опр-я $f(x)$.)

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся огранич-й в $O_\delta(a)$ (т.е. в δ-окр-ти т. a), если она огр-на на $O_\delta(a) \cap X$

Дополн-но

Зам-ие. Это опр-ие естест-м образом обобщ-ся на случай огр-ти ф-ии на произвольном мн-ве E: ф-я наз-ся огр-й на мн-ве E, если она огр-на при любых знач-х арг-та из этого мн-ва ~~(т.е. огр-на на $E \cap X$)~~

Напоминаю, что под словами $\forall$-ые зн-я арг-та подраз-ся $\forall x \in$ обл-ти опр-я X. Тем самым ф-я считается огр-й на мн-ве E, если она огр-на на пересечении $E \cap X$

Утв-ие. Если ф-я $f(x)$ имеет предел в т. a, то она огр-на в нек-й окр-ти этой точки. $\boxed{3.12}$

Δ Обозначим через b предел $f(x)$ в т. a. Тогда, согл-но опр-ю предела

$$\forall O_\varepsilon(b) \Rightarrow \exists \dot{O}_\delta(a): \forall x \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{проколотая окр-ть!}}}{\dot{O}_\delta(a)} \cap X \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(b)$$

Т.о., $\underset{\overset{\shortparallel}{m}}{b-\varepsilon} < f(x) < \underset{\overset{\shortparallel}{M}}{b+\varepsilon}$, $\leftarrow$ при $x \neq a$

где ε — $\forall$ пол-ое число (далее считаем его фиксированным)

Рассм-м два случая

1) Если $a \notin X$, то огр-ть док-на, поскольку

$m < f(x) < M$ при $\forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X = O_\delta(a) \cap X$

$\uparrow$ ибо X всё равно не содержит т. a

2) Пусть теперь $a \in X$. Тогда для завершения док-ва положим

$m = \min\{b-\varepsilon, f(a)\}$

$M = \max\{b+\varepsilon, f(a)\}$

и заметим, что нер-ва

$m \leq f(x) \leq M$ будут выполнены и при $x = a$, а значит и при всех $x \in O_\delta(a) \cap X$

(Я написал здесь нестрогие нер-ва, т.к. при $x = a$ одно из них вполне может обращаться в рав-во)

Наконец, построим отрицание ~~прогр~~ опр-я предела ф-ии, т.е. построим опр-ие того, что $b \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$. Согласно общему правилу построения отр-й имеем

$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq b$, если

$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, \delta\cancel{(\varepsilon)} > 0 \Rightarrow$

даже если бы было указано (в отрицаемом опр-ии) след-т убирать, т.к. переменные, стоящие после квантора всеобщ-ти явл-ся произвольными (пусть и в нек-м диапазоне) и поэтому не могут явл-ся ф-ии других перем-х

$\Rightarrow \exists \boxed{x : \begin{matrix} 1)\, x \in X \\ 2)\, 0 < |x-a| < \delta \end{matrix}} : |f(x) - b| \geq \varepsilon$

Зам-ие. Двоеточие после x носит технический характер и по смыслу отлич-ся от других двоет-й опр-я (вообще-то :-ия и $\Rightarrow$-я должны черед-ся, а у нас два :-ия след-т подряд. Оно не замен-ся при переходе к отр-ю. Дело в том, что это :-ие просто указ-ет на обл-ть опр-я x — мы вынуждены его применить, поскольку эта обл-ть описыв-ся двумя соотн-ми. Если бы мы объед-ли их в одно, скажем $x \in X \cap \dot{O}_\delta(a)$, то необх-ть в этом :-ии сразу же отпала. Т.о., данное :-ие — всего-навсего мостик, соед-й усл-я 1) и 2). Поскольку при переходе к отр-ю обл-ти принадл-ти пер-х не подвергаются никаким измен-ям (напр, $\varepsilon > 0 \not\Rightarrow \varepsilon \leq 0$, $\delta > 0 \not\Rightarrow \delta \leq 0$ и т.д.), то и этот мостик остаётся в первозданном виде)

Рассм-м ещё один пример - теперь уже на отр-ие предела ф-ии

(3) Пусть $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

тем самым т. $0 \notin$ обл-ти опр-я X: $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Но очевидно, что число 0 явл-ся, тем не менее, пред-й т-й X

Док-м, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \varnothing$, т.е. не сущ-ет

Δ Воспоть-ся отр-м опр-я предела ф-ии и покажем сначала, что при $\forall b \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \neq b$ (т.е., что предел нашей ф-ии заведомо не явл-ся неотр-м числом)

Присмотримся повнимат-ее к отр-ю опр-я предела: в нём два кв-ра $\exists$-я — перед ε и перед x. Сл-но нам надо как-то подобрать значения обеих этих пер-х. Начнём с ε. Окаж-ся (это будет легко видно из послед-х рассужд-й) величину ε можно положить =й единице

Итак, пусть $\varepsilon = 1$. Тогда остаётся док-ть, что

$$\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x : \begin{array}{l} \cancel{1)} x \in X \Leftrightarrow x \neq 0 \\ 2) \; 0 < |x - \underset{a}{\underset{\shortparallel}{0}}| < \delta \end{array} : \left|\cos\frac{1}{x} - b\right| \geq \underset{\varepsilon}{\underset{\shortparallel}{1}}$$

на самом деле $x = x(\delta)$, т.к. перед δ стоит кв-р всеобщности

Заметим, что $2) \Rightarrow 1)$, так что первая строчка больше не нужна: $\cancel{1)}$

Наша след-я задача подобрать $x(\delta)$ | 3.15

($x(\delta)$ будет тем ближе к т. a, т. е. к нулю, чем меньше δ)

Выберем x в виде

$$x = \frac{1}{\pi(2k+1)}, \text{ где } k \in \mathbb{N}_0$$

(заметим, что x при таком выборе заведомо $\neq 0$)

Тогда с одной стороны при дост-но большом k модуль x, очевидно, может быть сделан меньше любого наперёд заданного δ:

при дост-но большом $k \Rightarrow |x| < \delta$,

а с другой стороны при любом таком $x \Rightarrow$

$$\left|\cos\frac{1}{x} - b\right| = \left|\cos(\pi + 2\pi k) - b\right| = |-1-b| =$$

$$= 1 + b \geq 1 = \varepsilon$$

в этом месте мы учли, что $b \geq 0$

Что, собственно, и треб-сь док-ть

Зад-ие. Док-те сам-но (это делается сов-но ан-но), что

точнее, что

$$\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \neq b \leq 0 \quad \left(\forall b \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x} \neq b\right)$$

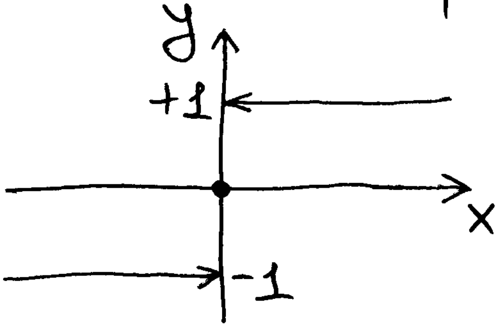
Это будет значать, что предел $\cos\frac{1}{x}$ в т. 0 не может быть ни ≥ 0, ни ≤ 0, т.е. не сущ-ет, и наше док-во, тем самым, будет полн-ю завершено $\triangle$

Перейдём к опр-ю односторонних пределов

Односторонние пределы

Начнём с примера

④ Рассм-м ф-ю $y = \operatorname{sign} x \equiv \begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

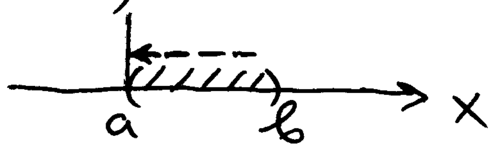


Sign от лат. signum - знак

Из графика этой ф-ии видно, что при стремлении арг-та x к т. 0 слева и справа ф-я $f(x)$ имеет разные пред-ые зн-я: слева - "-1", справа - "$+1$"

Дадим теперь точные опр-я левого и правого пред-х зн-й ф-ии

Пусть ф-я $y=f(x)$ опр-на в правой полуокр-ти (a,b) точки a: $(a,b)\subset D_f = X$, $b>a$



Это значит, что мы можем неогр-но приб-ся к т. a справа по точкам обл-ти опр-я ф-ии (и анализировать, стремятся при этом соотв-ие зн-я ф-ии к ~~какому~~ какому-либо числу)

Опр Число b наз-ся пределом ф-ии $f(x)$ в т. a справа (при $x\to a+0$), если

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : \forall x\in(a,a+\delta)\cap X \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

Здесь $(a,a+\delta)$ - правая δ-полуокр-ть т. a

Если потребовать, чтобы ф-я f(x) была опр-на в левой полуокр-ти ~~т. а~~ (b, a) т-ки a: **3.17**

$(b, a) \subset X$, $b < a$,

а в приведённом опр-ии усл-ие $x \in (a, a+\delta) \to$
$\to x \in (a-\delta, a)$, то получится опр-ие предела ф-ии f(x) слева ~~в т. а ф-ии f(x)~~ в т. а

Т. о., одностор-ие пределы отлич-ся от обычного предела только тем, что в их опр-ии вместо прокол-й окр-ти т. а фигурируют её соотв-ие одностор-ие окр-ти

Обозн-я

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ или совсем коротко $f(a+0) = b$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ $\qquad f(a-0) = b$

$f(a+0)$ и $f(a-0)$ наз-ют также соот-но правым и левым пред-ми ф-ии в т. а

⑤ Рассм-м ф-ю

$f(x) = [x] \equiv \max\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq x\}$

— максимальное из целых чисел y, не превосход-х данное число x (целая часть x)

Например $[9,9] = 9$, $[2,(9)] = 3$,
$[-1] = -1$, $[-1,4] = -2$

т.е. $[x] \leq x$ $(\forall x)$ (всегда)

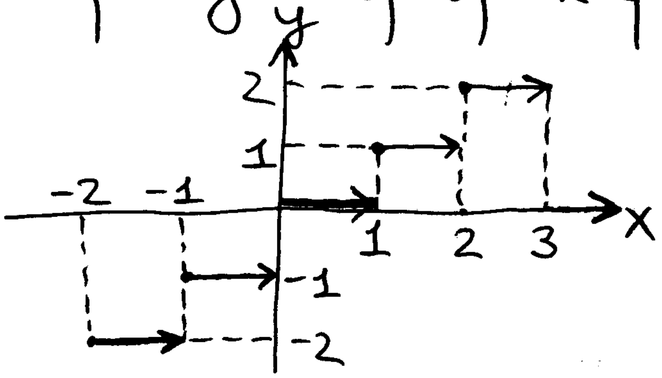
$\{x\} \equiv x - [x]$: $x = [x] + \{x\}$ (дробная часть x)

3.18

$$9{,}9 = \underset{\underset{[x]}{\shortparallel}}{9} + \underset{\underset{\{x\}}{\shortparallel}}{0{,}9}$$

$$-1{,}4 = \overset{\shortparallel}{-2} + \overset{\shortparallel}{0{,}6}$$

Нарисуем график ф-ции $y = [x]$



Из графика видно (не будем это формализовывать), что

$f(2+0) = 2$, $f(2-0) = 1$,

$f(-1+0) = -1$, $f(-1-0) = -2$, на единицу меньше

и вообще

$f(n+0) = n$, $f(n-0) = n-1$

Теорема. Если у ф-ции $f(x)$ в т. a сущ-ют правый и левый пределы, причём

$f(a-0) = f(a+0) = b$,

то сущ-ет и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (т.е. сущ-т и "общий" предел этой ф-ции в т. a)

Док-во непосред-но $\Rightarrow$ет из опр-я одностор-х пределов и остаётся в кач-ве самостоят-го упр-я

В будущем дать опр-я того, что $a+0$ и $a-0$ – пред-ые т-ки мн-ва X

Вдогонку – происхождение кванторов:

$\exists$ от EXISTS (сущ-ет; англ) $\forall$ от ALL (все, всё; англ)

отражаем переворачиваем

Предел функции на ∞-ти

Дополн-но

⌜ Будем говорить, что

$+\infty$ – пред-я т. мн-ва X, если X неогр-но сверху

$-\infty$ – пред-я т. мн-ва X, если X неогр-но снизу

∞ – пред-я т. мн-ва X, если X неогр-но (т.е. неогр-но хотя бы с одной из сторон) ⌞

Пусть $f(x)$ задана на неогр-м сверху мн-ве X

$f(x): D_f = X$ – неогр. сверху (т.е. пусть $+\infty$ – пред-я т-ка мн-ва X)

Образно выражаясь, это значит, что мы можем уйти на ∞ (точнее на $+\infty$) по точкам обл-ти опр-я X, т.е., иными словами, устремить аргумент x к ∞ пол-го знака. Тогда вполне естественно поставить вопрос о существовании предела ф-ии при неогр-м увеличении x

Опр Число b наз-ся пределом ф-ии $f(x)$ при $x \to \infty$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R} : \forall x : \begin{matrix} 1) x \in X \\ 2) x > A \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозн-ие $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Доп-но

⌜ мн-во $\{x \in \mathbb{R} \mid x > A\} = (A, +\infty)$ наз-~~ют~~тся окр-тью (A-окр-тью) $+\infty$-ти ⌞

Если X неогр-но снизу, то заменяя в привед-м опр-ии (т.е. $-\infty$ его пр-я т-ка) | 4.2

2) $x > A \to x < A$, получим $\lim\limits_{x \to -\infty}$

Если X ~~неогр~~ просто неогр-но (∞ - ~~его~~ пр-я т-ка), т.е. неогр хотя бы с одной из сторон (неважно с какой), то заменяя соотв-ий фрагмент опр-я ~~на~~ — т.е. может быть неогр-но и с двух сторон

~~-"- $\exists A > 0$: $\forall x$: 1) $x \in X$ 2) $|x| > A$ -"-~~

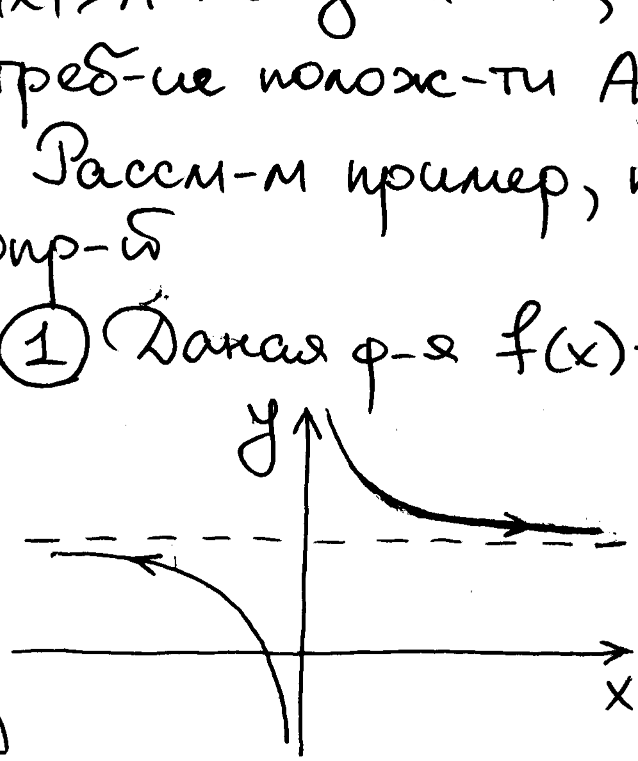
2) $x > A \to |x| > A$, получим $\lim\limits_{x \to \infty}$) в последнем определении

(Иногда ~~пишут~~ требуют, чтобы A было > 0 (хотя и наглядно), но это необязат-но, т.к. ~~$|x|$~~ нер-во $|x| >$ отр числа непротиворечиво. Заметим также, что при постр-ии отриц-я данного ~~нер-ва~~ опр-я нер-во $|x| > A$ не измен-ся, так что и в этом случае треб-ие полож-ти A явл-ся излишним))

Рассм-м пример, проясняющий суть этих опр-й

(Дополн-но: хотя в случае отр-я $\lim$ иногда применяют, т.к. оно позволяет нам не рассм-ть $A \leq 0$ (техническое упрощ-ие - ср-те с/ связное с опр-ем б.б. ф-ии)

(1) Данная ф-я $f(x) = \frac{1}{x} + 2$



Из графика видно, что $f(x) \to 2$, $x \to +\infty$

Док-м это, опираясь на опр-ие предела на $+\infty$

Δ

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A(\varepsilon)$: $\boxed{\text{усл-я}}$

Выберем $A(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, $\leftarrow$ Дальше станет ясно почему нас устраивает такое A

тогда 4.3

$\forall \varepsilon>0$ и $\forall x$: $\begin{cases} 2) \to 1) \\ \cancel{1)}\ x\in X \Leftrightarrow x\neq 0 \\ 2)\ x>\frac{1}{\varepsilon}(=A)>0 \end{cases} \Rightarrow \Big|\overbrace{\frac{1}{x}+2}^{f(x)}-\underbrace{2}_{\text{в}}\Big|<\varepsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$

Но из того, что $x>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$ $\triangle$

Зад-ие. Док-те, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ (расписав опр-ие того, что такое $\lim\limits_{x\to-\infty}$ и подобрав ф-ю $A(\varepsilon)$)

Зам-ие. Если обл-ть опр-я X ф-ии $f(x)$ неогран-на только сверху, то $\lim\limits_{x\to\infty}$ совпадает с ~~пределом~~ $\lim\limits_{x\to+\infty}$, а если только снизу, то – с $\lim\limits_{x\to-\infty}$

Если же X неогр-на ~~и~~ сверху и снизу, то $\lim\limits_{x\to\infty}$ может и не сущ-ть, даже несмотря на то, что каждый из односторон-х пределов (на ∞-ти) сущ-ет (разум-ся, это будет в том и только в том случае, ~~если~~ когда $\lim\limits_{x\to+\infty}\neq\lim\limits_{x\to-\infty}$)

Рассм-м важный частный случай предела ф-ии при $x\to+\infty$ – предел последоват-ти.

Сперва дадим опр-ие самой последовательности

Опр Посл-ю наз-ся ф-я с обл-тью опр-я $X\equiv\mathbb{N}$ (т.е. опр-я на мн-ве натур-х чисел)

Итак, посл-ть – это ф-я $y=f(n)$, где $n\in\mathbb{N}$

Натуральный арг-т ф-ии f обычно записывают в виде нижнего индекса, т.е. **4.4**

$f(n) \equiv f_n$ ($f(n)$ обозн-ют через f с нижним индексом n)

при этом f_n наз-ют элементом посл-ти

Значения f_n можно распол-ть в порядке возр-я номера n, т.е. в виде ряда

$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \equiv \{f_n\}$,

обозначаемого через $\{f_n\}$

Само мн-во $\{f_n\}$ часто тоже наз-ют (числовой) посл-ю, хотя, строго говоря, это всего лишь мн-во значений посл-ти. Но так уже исторически и повсеместно сложилось

При этом испоьл-ся след-ее соглашение

Если пишут $f(n)$, то подраз-ют посл-ть как ф-ю n

Если пишут f_n, то подраз-ют всего лишь эл-т посл-ти, т.е. частное зн-ие ф-ии f при нек-м n, а саму посл-ть в случае испоьл-я нижних индексов рассм-ют и обозн-ют как мн-во всех её эл-в $\{f_n\}$

Зам-ие. Поск-ку мы рассм-м лишь числовые ф-ии, то соотв-но ~~не~~ пока что будем иметь дело только с числовыми посл-ми, точнее с посл-ми веш-х чисел. Хотя, в принципе, можно рассм-ать посл-ти с какими угодно элем-ми, напр., посл-ть функций или посл-ть апельсинов

Разум-ся, для обозн-я посл-й можно исп-ть не только f, но и $\forall$ другую букву. Более того, для обозн-я числ-х посл-й чаще всего исп-ся буква x

Перейдём к опр-ю предела посл-ти

Пусть дана посл-ть

$$\underbrace{x_1, x_2, \dots} \equiv \{x_n\}$$

этот ряд иногда тоже закл-ют в $\{\}$, но это не обязат-но (и так понятно, что речь идёт о мн-ве всех x_n)

Поск-ку обл-ю опр-я посл-ти, рассм-й как ф-я n, явл-ся мн-во всех натур-х чисел (т.е. мн-во неогр-ое сверху), то можно поставить вопрос о существ-нии предела такой ф-ии при неогр-м увеличении аргумента, т.е. при $n \to \infty$. Итак, опр-ие

Опр Число a наз-ся пределом посл-ти $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

(вместо A обычно исп-т N, т.к. оно натур-но)

Обозн-ие: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$, $n \to \infty$

(поск-ку $\mathbb{N}$ неогр-но только сверху, то $\lim\limits_{n\to\infty}$ и

$\lim\limits_{n\to\infty}$ — одно и то же ⇄ см. замеч-ие выше

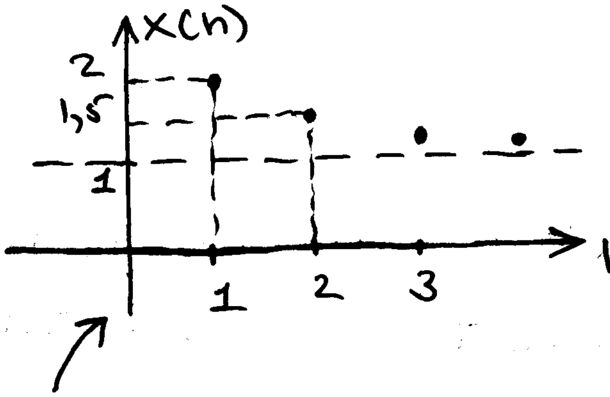
Опр Говорят, что посл-ть сх-ся, если lim сущ-ет и расх-ся, если не сущ-ет

Заметим, что у посл-ти предел может быть лишь при $n\to\infty$ (т.к. ∞ — ~~её~~ единств-ая пред-я точка её обл-ти опр-я)

Рассм-м пример

② Док-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}\equiv x_n\,(=x(n))$$



Геометр-ки это очевидно (можно было бы отметить всё и на одной оси x, спроецировав на неё это сем-ство точек)

Получается, что посл-ть точек $(n, x(n))$ неограниченно приближ-ся к прямой $x=1$. От вас треб-ся строго это док-ть, исп-я сформул-ое опр-ие предела, т.е. вы должны будете подобрать $N(\varepsilon)$:

$$\forall\varepsilon>0 \text{ и } \forall n>N \Rightarrow |x_n-\overset{1}{\cancel{a}}|<\varepsilon$$

§3 ∞но большие (б.б.) и ∞но малые (б.м.) ф-ции

Опр Ф-я $f(x)$ наз б.м. в т.а (при $x\to a$), если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

Зам-ие. В этом опр-ии в кач-ве т. a могут выступать $a \pm 0$, а также ∞ удалённые точки (включая $\pm\infty$), т.е. вместо $x \to a$ можно писать $x \to a \pm 0, \infty, \pm\infty$ (в случае $\pm$ выбирается что-н одно: $+$ или $-$; итого 5 альтернатив)

Примеры

(3) Пусть $f(x) = 2x - 4$. Легко показать, что

$\lim\limits_{x \to 2} (2x-4) = 0 \Rightarrow f(x)$ – б.м. в т. $x = 2$

(в $\forall$ другой точке – не б.м.)

(4) Пусть $f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, а $f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(при ~~рассм-ии~~ поиске предела ~~в т. x~~ мы не рассм-м зн-ие ф-ии в пред-й точке, т.е. при $x = 0$)

$\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$ — б.м. (несмотря на то, что $f_1(0) \neq 0$)

$\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 1$ — не б.м. (хотя $f_2(0) = 0$)

(5) Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Можно пок-ть, что

$$f(x) \to 0 \text{ при } x \to \left[\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow f(x) - \text{б.м. при } x \to \left[\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \\ \infty \end{matrix}\right.$$

Зам-ие. Если $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, то посл-ть x_n также наз-ся б.м. ⌋ Например $\{\frac{1}{n}\}$ – б.м. посл-ть

Теперь сформул-м опр-ие того, что ф-я $f(x)$

явл-ся оdно большой

4.8

Пусть $f(x)$: $D_f = X$ и пусть a – пр-я т. X
или так:
(пусть a пр-я т-ка обл-ти опр-я X ф-ии $f(x)$)

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся б. б. в т. a (при $x \to a$), если

$$\forall M > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x : \begin{matrix} 1) x \in X \\ 2) 0 < |x-a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x)| > M$$

Обозн $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Доп-но

Писать $M > 0$ в принципе необязат-но. Легко пок-ть, что если вместо $\forall M > 0$ написать $\forall M \in \mathbb{R}$ (равно как и $\forall M \geq M_0$, где M_0 – абсол-но любое вещ-ое число), то существо опр-я останется прежним

При отриц-ии же опр-я получается, что

$\exists M > 0 :$ — " — $|f(x)| \leq M$

Однако и в этом случае нам ничто не мешает написать просто

$\exists M \in \mathbb{R} :$ — " — $|f(x)| \leq M$

(ясно, что M автом-ки будет ≥ 0, кроме того нам ничто не мешает ~~выбр~~ искусственно выбрать его большим любого вещ-го числа M_0)

Тем не менее, условие $\forall M > 0$ придаёт опред-ю бо́льшую наглядность (не меняя при этом его смысла) и, кроме того, несколько удобнее с техническоӣ точки зрения (ведь нам не надо тогда рассм-ать $M \le 0$), и поэтому весьма часто фигурирует в опред-х б.б. ф-й ~~или так-же~~ (в связи со всем вышесказанным мы также будем считать, что в опр-ии б.б. ф-ии вел-на M имеет пол-й знак)

Напомню, что

$$|f(x)| > M \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > +M \\ f(x) < -M \end{array}\right. \quad (\text{при } \forall \text{ знаке } M!)$$

Если в последнем опр-ии

$|f(x)| > M \nearrow$ $f(x) > M \Rightarrow \lim = +\infty$
(при этом можно не писать, что $M > 0$)

$\searrow$ $f(x) < -M \Rightarrow \lim = -\infty$
($f(x) < M$, если не писать, что $M > 0$, или наоборот, треб-ть, чтобы $M < 0$)

Пример 6

Док-м, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ Пригодилось :)

Δ Возьмём $\delta(M) = \frac{1}{M}$ ($M > 0 \Rightarrow \delta > 0$). Тогда

$\forall M > 0$ и $\forall x$: $\begin{array}{l} 1)\ x \ne 0 \\ 2)\ 0 < |x| < \frac{1}{M} \end{array} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > M$

Но из того, что $|x| < \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{|x|} > M$ $\not\Delta$

$\{\forall M > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \boxed{\text{усл-я}}$

Ан-но тому, как это делалось для случая конечного предела, опр-ся ф-ии б.б. при $x \to a \pm 0, \infty, \pm\infty$

Задание: док-ть, что $\lim\limits_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} 3\cdot x = +\infty$

Доп-но: Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ или $-\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Но если $\lim = \infty$, то он может $\neq$ ни $+\infty$, ни $-\infty$ (см. пример 6)

4.10

Теорема. Сумма и разность 2-х б.м. в т. a ф-й суть б.м. в т. a ф-ии

(суть = есть во множ-м числе, нельзя говорить есть ф-ии!)

Δ Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.м. в т. a

б.м.-ть $f(x)$ означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall [x : 0 < |x-a| < \delta] \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Для краткости $x \in X$ здесь и далее не пишем, но всегда подразум-ем

потому, что будет своё δ для ф-ии g

Замеч-ие к нер-ву $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$:

Поскольку соотв-ее δ_1 найдётся для совершенно любого пол-го ε, то оно, разум-ся, найдётся и для $\varepsilon/2$, каким бы малым ε не было (иначе получилось бы, что для $\varepsilon/2$ не найдётся)

Формально: (не приводить)
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon' > 0 \Rightarrow \exists \delta : \boxed{} < \varepsilon' \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \delta : \boxed{} < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right)$$

А из б.м.-ти $g(x)$ сл-ет, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_2 > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда

$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x: 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x)| < \varepsilon/2 \\ |g(x)| < \varepsilon/2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\underbrace{f(x) \pm g(x)}_{-0 \leftarrow \text{подрау-ем}}| \underset{\text{всегда}}{\leq} |f(x)| + |g(x)| \underset{\text{в нашем случае}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

теперь понятно для чего $\varepsilon/2$

Но это и будет означать, что

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = 0$, т.е., что $f \pm g$ – б.м. в т.а ▲

Дополн-но

⌈Конечно, при док-ве теоремы можно было треб-ть, чтобы $|f|$ и $|g|$ были $< \varepsilon$, тогда получилось бы, что $|f \pm g| < 2\varepsilon$. Для заверш-я док-ва осталось бы переобозн-ть 2ε через ε' и заметить, что ε', также как и ε, совершенно произв-ое пол-ое число⌋

Замеч-ие. Сумма б.б. ф-й не обязат-но б.б.
Напр $+\frac{1}{x}$ и $-\frac{1}{x}$ – б.б. в т.0, но $\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right) \equiv 0$ – б.м. в нуле

кроме $x=0$, но на этом не заострять

Теорема. Произв-ие ф-ии б.м. в т.а на ф-ю огр-ю в окр-ти т.а есть ф-я б.м. в т.а (теперь уже наоборот – писать суть нельзя!)

Δ Пусть $g(x)$ – ф-я, огр-я в окр-ти т.а и пусть (b, c) – эта окр-ть:

$g(x)$ – огр-на на $(b, c) \ni a$

4.12

Это значит, что

обл-ть опр-я

$\exists M>0: \forall x \in (b,c)\cap X \Rightarrow |g(x)| \le M$

Пусть $f(x)$ – ф-я б.м. в т.а. Это значит, что

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta_1>0: \forall x\in\{(a-\delta_1,a)\cup(a,a+\delta_1)\}\cap X \Rightarrow$

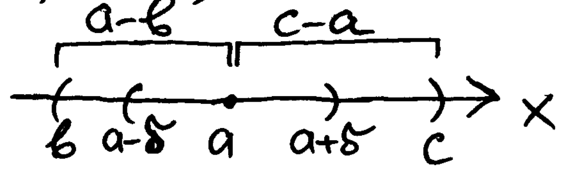
$\Rightarrow |f(x)| \le \frac{\varepsilon}{M}$ ← (то же самое, что и выше)

Положим $\delta = \min\{\delta_1, c-a, a-b\}$. Тогда

содержится в

$(a-\delta,a+\delta) \subseteq (b,c),$

$\subseteq (a-\delta_1, a+\delta_1),$



теперь понятно зачем ε/M

а след-но

$\in$ и (c,b) и $(a-\delta_1,a)\cup(a,a+\delta_1)$

$\forall\varepsilon>0$ и $\forall x\in\{(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}\cap X \Rightarrow$

$=0$ ← формально имеем в виду

$\Rightarrow \begin{cases}|g(x)|\le M\\ |f(x)|<\varepsilon/M\end{cases} \Rightarrow |g(x)\cdot f(x)| = |g(x)|\cdot|f(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

всегда   в нашем случае

Но это и означает, что

$\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot f(x)=0$, т.е., что $g\cdot f$ – б.м. в т.а ◭

След-ие. б.м. × б.м = б.м. (т.к. ф-я, б.м. в точке а, огр-на в нек-й окр-ти этой точки)

Задание. Док-те след-ее утв-ние

Утв. Пусть $f(x)\neq 0$ при $x\neq a$. Тогда

1) если $f(x)$ – б.м. в т.а $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ – б.б. в т.а

2) если $f(x)$ – б.б. в т.а $\Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ – б.м. в т.а

O-символика

Пусть даны две ф-ии $f(x)$ и $g(x)$: $D_f = D_g = X$ (с общей обл-ю опр-я X) и пусть a — пр-я т. X

Опр $f(x) = \overline{\overline{o}}(g(x))$ в т. a (при $x \to a$), если сущ-ет $O_\delta(a)$:

$\forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$,

где $\gamma(x)$ — б.м. в т. a ф-я

Пишут также $f = \overline{\overline{o}}(g)$ (читается о-малое от g) в т. a или $f(x) << g(x)$, $x \to a$

буква о (русск.)

$\overline{\overline{o}}$ ← подчёркивает малость

↑ о-малое

$\underline{\underline{O}}$ ← подчёркивает величину

↑ о-большое

При этом размер буквы не имеет значения

$\overline{\overline{O}}$ ← всё равно о-малое

$\underline{\underline{o}}$ ← всё равно о-большое

Примеры

1) $x^3 = \overline{\overline{o}}(x)$ в т. $x=0$

т.к. $\underset{f}{x^3} = \underset{\gamma}{x^2} \cdot \underset{g}{x}$ и $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, $(\underset{\text{б.м.}}{x} \cdot \underset{\text{б.м}}{x} = \underset{\text{б.м.}}{x^2})$ (б.м., б.м ⇒ б.м.)

т.е. x^2 — б.м. в т. $x=0$

Запишем по-другому:

$x^3 << x$ при $x \to 0$

(Пусть, напр, $x = 1/10^3$, тогда $x = 1/10^9$ и т.д.)

2) $x^3 \neq \overline{\overline{o}}(x)$ в т. $x = 1$

т.к. $\underset{f}{x^3} = \underset{\gamma}{x^2} \cdot \underset{g}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \neq 0$,
т.е. x^2 – не б.м. в т. $x=1$

3) $x = \bar{\bar{o}}(1)$ в т. $x=0$

$\underset{f}{x} = \underset{\gamma}{x} \cdot \underset{g}{1}$ и $\gamma \to 0$ при $x \to 0$

Тем самым любая б.м. ф-я $f(x) = \bar{\bar{o}}(1)$:

$f(x)$ – б.м. в т. a $\Rightarrow$ $f(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ в т. a

$(f(x) \to 0,\ x \to a) \longleftrightarrow (f(x) \ll 1,\ x \to a)$

(или, что то же самое:)

4) $x \neq \bar{\bar{o}}(x^3)$ в т. $x=0$

т.к. $\underset{f}{x} = \underset{\gamma}{\frac{1}{x^2}} \cdot \underset{g}{x^3}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \neq 0$

Но $x = \bar{\bar{o}}(x^3)$ при $x \to \infty$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Зам-ие. В привед-ом опр-ии вместо $x \to a$ можно писать $x \to a \pm 0,\ \infty,\ \pm\infty$

Рассм-ые примеры показывают, что соот-н-ие $f = \bar{\bar{o}}(g)$ в т. a (в случае, когда f и g – б.м. в т. a) означает, что при $x \to a$ ф-я $f(x)$ в определ-м смысле стремится к нулю быстрее, чем ф-я $g(x)$. В связи с этим ясно, что если $f = \bar{\bar{o}}(g)$, то $g \neq \bar{\bar{o}}(f)$ – заведомо
– сравните примеры 1) и 4)
(единств-ое искл-ие – случай, когда $f \equiv g \equiv 0$)

Заметим также, что в опр-ии $\bar{\bar{o}}$-го | 4.15
ф-ии f и g совершенно произвольны в том смысле, что при стремлении $x \to a$ они могут вести себя как угодно. Могут стремиться к нулю, к отличному от нуля числу, к ∞ или даже вообще не иметь никакого предела (ни конечного, ни беск-го). Важно лишь, чтобы ф-я f была представима в виде произв-я g на б.м. ф-ю γ

Наконец, если $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$ (кроме, имеется в виду, быть может, т.a), то усл-ие $f = \gamma \cdot g$ (того, что $f = \bar{\bar{o}}(g)$), можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \gamma(x) = \text{б.м. в т.} a,$$

т.е. получаем, что

$$\underset{\text{в т. } a}{f = \bar{\bar{o}}(g)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 0, \ x \to a$$

$x=0$ при поиске предела не рас-см-ся, поэтому делить на x мы можем смело

Напр, $\underset{\text{в т. } x=0}{x^3 = \bar{\bar{o}}(x^2)}$, т.к. $\frac{x^3}{x^2} = x^2 \to 0$ при $x \to 0$

Прежде чем переходить к опр-ю $\underline{O}$-го, сфо-рм-ем одно вспомогат-ое опр-ие

Опр Ф-я $\gamma(x)$ наз-ся огр-й в т-ке a (при $x \to a$), если она огр-на в нек-й окр-ти этой точки

Зам-ие. При этом a может даже и $\notin D_\gamma$, но считается её пред-й точкой

Опр $f(x)=\underline{\underline{O}}(g(x))$ в т. a (при $x\to a$), если | 4.16

сущ-ет $O_\delta(a)$:

$\forall x\in \dot{O}_\delta(a)\cap X \Rightarrow f(x)=\gamma(x)\cdot g(x)$,

где $\gamma(x)$ – огр-я в т. a ф-я

В случае, когда f и g – б.м. в т. a и $f=\underline{\underline{O}}(g)$ в т. a, говорят ещё, что $f\to 0$ не медленнее (т.е. с той же скоростью или быстрее), чем g

Вообще из опр-й $\bar{\bar{o}}$-го и $\underline{\underline{O}}$-го видно, что из того, что $f=\bar{\bar{o}}(g)$ в т. a $\Rightarrow$-ет, что $f=\underline{\underline{O}}(g)$ в т. a (ибо если $\gamma(x)$ – ~~огр-на~~ б.м. в т. a, то она, как ф-я, имеющая предел при $x\to a$, ~~обязательно~~ заведомо огр-на в этой точке)

Заметим ещё, что в опр-ии $\underline{\underline{O}}$-го, также как и в опр-ии $\bar{\bar{o}}$-го, ф-ии f и g при $x\to a$ могут вести себя совершенно произв-но (быть б.м., б.б. и т.д.)

Если $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$, то усл-ие $f=\gamma\cdot g$ (того, что $f=\underline{\underline{O}}(g)$) можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\gamma(x)=\text{огр. в т. } a,$$

т.е. получаем, что

$$f=\underset{\text{в т. } a}{\underline{\underline{O}}(g)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - \text{огр. в т. } a$$

Примеры рассм-м в след-й раз

Лекция 5

Примеры

1) Покажем, что

$$2x^2+x^3=\underline{\underline{O}}(x^2) \text{ в т. } x=0 \ (\text{при } x\to 0)$$

$$\underbrace{2x^2+x^3}_{f}=\underbrace{(2+x)}_{\gamma}\underbrace{x^2}_{g}$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\gamma(x)=2$, а значит γ заведомо огр-на в нек-й окр-ти т. $x=0$, т.е. согласно введённому выше опр-ю огр-на в т. $x=0$

Можно иначе

$$\frac{2x^2+x^3}{x^2}=2+x\to 2 \text{ при } x\to 0$$

$\Rightarrow 2+x$ – огр-на в т. $x=0 \Rightarrow 2x^2+x^3=\underline{\underline{O}}(x^2)$

Впрочем, проверить огр-ть $2+x$ в т. 0 можно и непосредств-но. Очевидно, что $\forall x\in(-0{,}5;+0{,}5)\Rightarrow\gamma(x)\in(1{,}5;3{,}5)$ – огр-ое мн-во, т.е. $\gamma(x)$ – огр-на в $O_{0,5}(0)$ (0,5-окр-ти т. 0), а значит по опр-ю и в самой т-ке 0

2) Ан-но можно убедиться в том, что

$$2+3x=\underline{\underline{O}}(1) \text{ при } x\to 0$$

(Вообще любая огр-я в т. a ф-я $=O(1)$ в т. a)

Сравнение б.м.-х

Для случая, когда f и g - б.м. ф-ии, вводят дополн-ю классификацию

Прежде чем привести эту клас-ю введём понятие неопр-ти типа $0/0$

Итак, пусть $f(x)$ и $g(x)$ - б.м. ф-ии в т. a и пусть $g(x) \neq 0$ при $x \neq a$. Тогда

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{0}{0}$ - естеств-ое обозн-ие, поскольку предел числ-я и знам-я - нуль

наз-ся неопр-ю типа $\frac{0}{0}$

$\frac{0}{0}$ - формальное обозначение: ясно, что на нуль всё равно делить нельзя (хотя на самом деле можно, но в рамках нестандартного анализа). Теорема о пределе частного в данном случае не работает, поскольку предел зн-ля $g(x)$ равен нулю

Величина этого предела зависит от ф-й f и g и может (при различном выборе этих ф-й) равняться чему угодно, в том числе предел может $= \infty$ и даже совсем не существ-ть. Поиск данного предела (или док-во его не $\exists$-ия) для конкретных ф-й f и g наз-ют раскрытием неопр-ти. Т.е.

раскрыть неопр-ть $\frac{0}{0}$ — это найти рас- | 5.3
см-ый предел или док-ть, что он не сущ-ет
(термин "раскрыть неопр-ть" ровно в таком
смысле употребляется и к неопр-м всех дру-
гих типов)

Далее, в случае, если $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} =$

$\overset{1)}{=}$ 0, то $f(x)$ наз-ся б.м. более высокого порядка, чем $g(x)$ (в т. a) при $x \to a$

$\overset{2)}{=}$ $\forall b \neq 0$, то $f(x)$ и $g(x)$ наз-ся б.м. одного порядка при $x \to a$

$\overset{3)}{=}$ 1, то и $f(x)$ и $g(x)$ наз-ся эквивалентными б.м.-ми при $x \to a$

Рав-во 3) — частный случай рав-ва 2)

Заметим, что в случае

1) $f = \bar{\bar{o}}(g)$ 2) $f = \underline{\underline{O}}(g)$ 3) $f \sim g$

в соотв-ии с опр-ми O-симв-в новое обозн-ие

Напр, $x \sim x + x^2$ при $x \to 0$,

т.к. $\frac{x+x^2}{x} = 1 + x \to 1$

Некоторые св-ва символа $\bar{\bar{o}}$-ое (для случая б.м. ~~f и g~~ $f(\varphi-\delta)$) в этом и след-х св-х

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — б.м. в т. a

1) $\bar{\bar{o}}(g) \pm \bar{\bar{o}}(g) = \bar{\bar{o}}(g)$ (~~здесь и ниже~~ все $\bar{\bar{o}}$-ые явл-ся $\bar{\bar{o}}$-ми в т. $x=a$)

5.4

т.е., если

$$\left.\begin{array}{l} f_1=\bar{\bar{o}}(g) \\ f_2=\bar{\bar{o}}(g) \end{array}\right\} \Rightarrow f_1+f_2=\bar{\bar{o}}(g)$$

2) $$\underbrace{\bar{\bar{o}}(\underbrace{\bar{\bar{o}}(g)}_{f})}_{h}=\bar{\bar{o}}(g)$$

с использованием символа $\ll$ это соотн-ие становится ещё более наглядным

$$f=\bar{\bar{o}}(g) \Leftrightarrow f\ll g$$

$$h=\bar{\bar{o}}(f) \Leftrightarrow h\ll f\ll g \Rightarrow h\ll g \Leftrightarrow h=\bar{\bar{o}}(g)$$

вполне естест-но

3) $$f\cdot g=\left[\begin{array}{l}\bar{\bar{o}}(f)\\ \bar{\bar{o}}(g)\end{array}\right.$$

4) $$f\sim g \Rightarrow f-g=\left[\begin{array}{l}\bar{\bar{o}}(f)\\ \bar{\bar{o}}(g)\end{array}\right.$$

5) $\bar{\bar{o}}(c\cdot g)=\bar{\bar{o}}(g)$ (в том числе при $c=0$)

6) $\bar{\bar{o}}(g+\bar{\bar{o}}(g))=\bar{\bar{o}}(g)$

~~Док-во~~ Справедл-ть св-в 1)-6) легко следует из опр-я символа $\bar{\bar{o}}$-ое и остаётся (их док-во) в кач-ве сам-го упр-я

Зам-ие. Со всеми этими св-ми нужно быть очень осторожными, ибо они верны, вообще говоря, только в одну сторону — слева-направо

Напр $\overrightarrow{x^2=\bar{\bar{o}}(x)}$, в т. $x=0$

$x^3=\bar{\bar{o}}(x)$,

— " —

(∞ много ф-й $=\bar{\bar{o}}(x)$)

Символ $\bar{\bar{o}}(x)$ означает мн-во всех ф-й более высокого порядка малости, чем x (поэтому лучше было бы писать $x\in\bar{\bar{o}}(x)$, а не $x=\bar{\bar{o}}(x)$, но принято писать именно равно)

Т.о., запись $x^2=\bar{\bar{o}}(x)$ всего лишь означает, что x^2 принадл-т сем-ву таких ф-й (ф-й $\bar{\bar{o}}(x)$). А вот если бы мы написали $\bar{\bar{o}}(x)=x^2$, то получилось бы, что любая ф-я $\bar{\bar{o}}$-ая от x есть именно x^2 (иными словами, что $\bar{\bar{o}}(x)$ обязательно равнялось x^2), что, разум-ся, неверно

Итак, мы видим, что $x^2=\bar{\bar{o}}(x)$, но $\bar{\bar{o}}(x)\neq x^2$ отнюдь

Некоторые из ~~указанных~~ перечисленных рав-в верны и для $\underline{\underline{O}}$-го. Я не перечисляю их сейчас, а буду приводить в дальнейшем по мере необходимости

Сравнение б.б.-х

Начнём с того, что введём понятие неопр-ти ∞/∞

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — б.б. в т. a ф-ии и пусть $g(x)\neq 0$ при $x\neq a$. Тогда

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{\infty}{\infty}$

5.6

наз-ся неопр-ю типа $\frac{\infty}{\infty}$

Далее, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} =$

$=$ 1) ∞, то говорят, что $f(x)$ имеет более высокий порядок роста, чем $g(x)$ при $x\to a$

2) $b\neq 0$, то говорят, что f и g имеют одинаковый порядок роста при $x\to a$

3) 0, то говорят, что $f(x)$ имеет более низкий порядок роста, чем $g(x)$ при $x\to a$

Раз-ся, если поменять в рав-ве 3) ролями f и g, то оно перейдёт в рав-во 1)

Заметим, что в случае

1) $g=\bar{\bar{o}}(f)$ 2) $f=\underline{\underline{O}}(g)$ и $g=\underline{\underline{O}}(f)$ 3) $f=\bar{\bar{o}}(g)$

в соотв-ии с опр-ми О-симв-в

Пример

$f = 1/x^2$, $g = 1/x$ $\to \infty$, $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f}{g} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$

(условно говорят: $\frac{1}{0}=\infty$)

$\Rightarrow$ f имеет более высокий порядок роста, чем g при $x\to 0$ (стремится к ∞ быстрее)

∃-ют и другие типы неопр-й:
$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0
(все они могут быть сведены к неопр-ти типа $0/0$)

Например

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{(1+x)}_{\to 1}^{\frac{1}{x}\}\to\infty} = 1^{\infty} \text{ (}=e\text{ - раскроем позже)}$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0 \text{ (}=1\text{ - на семинарах)}$$

—— " ——

§4 Св-ва пределов функций

Для док-ва теоремы об арифм-х опер-ях над ф-ми, имеющими пред-е значение, нам понадобятся два вспомогат-х утв-я, кот-е в таких случаях принято называть леммами (т.е. лемма - это вспомогат-ое, но в то же время дост-но важное утв-ие, необх-ое для док-ва нек-й теоремы или теорем)

Лемма 1 Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$ ~~$+\alpha(x)$~~, где $\alpha(x)$ - б.м. в т. a

Δ Представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = b + \underbrace{[f(x) - b]}_{\equiv \alpha(x)} = b + \alpha(x)$$

Надо показать, что $\alpha(x)$ – б.м. в т. a **5.8**

Из того, что $f(x) \to b$ при $x \to a$, след-т, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow |\underbrace{f(x) - b}_{\alpha(x)-0}| < \varepsilon$,

т.е., что $|\alpha(x)| = |\alpha(x) - 0| < \varepsilon$

Но это значит, что

$\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, т.е. $\alpha(x)$ – б.м. в т. a ⊿

Лемма 2 (обратная) Если $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м. в т. a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Δ Док-ть самост-но

Теорема (об арифм-х опер-х)

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$.

Тогда

1) $f(x) \pm g(x) \to b \pm c$, $x \to a$

2) $f(x) \cdot g(x) \to b \cdot c$, $x \to a$

3) если $\begin{cases} g(x) \neq 0 \text{ при } x \neq a \\ c \neq 0 \end{cases}$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{b}{c}$, $x \to a$

Δ 1) В силу леммы 1

$f(x) \to b \Rightarrow f(x) = b + \alpha(x)$

$g(x) \to c \Rightarrow g(x) = c + \beta(x)$

α, β – б.м. в т. a

Но тогда

$f \pm g = (b \pm c) + \underbrace{(\alpha \pm \beta)}_{\equiv \gamma(x)} = b \pm c + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ – б.м. в т.а. (т.к. по док-ву ранее б.м. ± б.м. = б.м.), а значит согласно лемме 2 (обратной к лемме 1) | 5.9

$f \pm g \to b \pm c$, $x \to a$ (в пределе по лемме $\gamma(x)$ как бы исчезает)

$\Delta_{1)}$

$\Delta_{2)}$ док-ть самост-но

$\Delta_{3)}$ При рассмотрении предела отн-я $\frac{f(x)}{g(x)}$ (так же как и при рассм-ии пределов других арифм-х опер-й), подразум-ся, что f и g имеют общую обл-ть опр-я X и что a – пред-я т-ка X

$D_f = D_g = X$ и a – пр. т. X

Т.к. $f(x) \to b$, $g(x) \to c$, то $f = b + \alpha(x)$, $g = c + \beta(x)$ – б.м. в т.а

Рассм-м разность

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{(\cancel{b}+\alpha)\cdot c - b\cdot(\cancel{c}+\beta)}{(c+\beta)\cdot c} =$$

$$= \frac{1}{(c+\beta)\cdot c}\left(c\cdot\alpha(x) - b\cdot\beta(x)\right) = \frac{1}{c+\beta(x)}\underbrace{\Big(\overbrace{\alpha(x)}^{\text{б.м.}} - \overbrace{\tfrac{b}{c}\beta(x)}^{\text{б.м.}}\Big)}_{\equiv\gamma(x)\text{ - б.м.}}$$

Покажем, что ф-я $\frac{1}{c+\beta(x)}$ – огр-на в нек-й $O_\delta(a)$

Т.к. $\cancel{g(x)}$ $\beta(x) \to 0$, $x \to a$, то

$$\forall \underset{|c|/2}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}} > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow |\beta(x)| < \underset{|c|/2}{\overset{\shortparallel}{\varepsilon}}$$ **5.10**

Положим $\varepsilon = |c|/2$ и восп-ся нер-ми

$$|c+\beta| \underset{\text{всегда}}{\geq} |c| - \underbrace{|\beta|}_{<\varepsilon} > |c| - \varepsilon = |c| - \frac{|c|}{2} = \frac{|c|}{2} \underset{\text{т.к. } c \neq 0}{>} 0$$

Отсюда получаем, что

$$\left|\frac{1}{c+\beta(x)}\right| < \frac{2}{|c|} \text{ при } x \in \underset{(x \neq a)}{\dot{O}_\delta}(a) \cap X$$

Т.о.,

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \underbrace{\frac{1}{c+\beta(x)}}_{\text{огр-на в прокол-й окр-ти т.a}} \cdot \gamma(x) - \text{б.м. в т.a}$$

Поскольку при рассм-ии предела ф-ии мы не интересуемся её зн-ми в самой пред-й точке (т.a), то для спр-ти соотн-я

огр $\times$ б.м. = б.м.

вполне дост-но, чтобы первый из сомнож-й был огр-н лишь в проколотой окр-ти пред-й точки, т.е.

$$\underset{(x \neq a)}{\text{огр}} \times \underset{\text{в т.a.}}{\text{б.м.}} = \underset{\text{в т.a}}{\text{б.м.}}$$

Дополн-но

⌈ Заметим, впрочем, что из огр-ти ф-ии в прокол-й окр-ти на самом деле мгновенно сле-д-т и огр-ть во всей окр-ти (напомню, что при док-ве одного из утв-й мы уже в этом убеждались)

Т.е., действуя немного иначе, можно было сначала заявить, что

$$\left|\frac{1}{c+\beta(x)}\right| \le \max\left\{\frac{2}{|c|}, \frac{1}{\underbrace{|c+\beta(a)|}_{|g(a)|}}\right\}$$ и при $x=a$, т.е. при $x \in O_\delta(a) \cap X$, ← уже без точки

а потом восп-ся утв-м

огр $\times$ б.м. $=$ б.м. (уже не искл-я т-ки a)
(и при $x=a$)

В итоге (в любом случае) имеем ← для разн-ти $\frac{f}{g} - \frac{b}{c}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \text{б.м.}, \text{ т.е. } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} + \text{б.м.},$$

а значит согласно лемме 2

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{b}{c} \text{ при } x \to a \qquad \Delta_{3)}$$

Теорема об арифм-х операц-х полн-ю док-на

Зам-ие. Теорема об ариф-х оп-х справ-ва и при $x \to a \pm 0, \infty, \pm\infty$

Рассм-м примеры, илл-ие возм-ое применение док-й теоремы

1) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = \cancel{\lim\limits_{x\to a}} c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (c — const; $\lim\limits_{x\to a} c = c$)

Т.е. получается, что const-у можно выносить за знак пред-го перехода

2) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+1) = \lim\limits_{x\to a}(2(x\cdot x)) + \underbrace{\cancel{\lim\limits_{x\to a} 1}}_{1} =$

$= 2\underbrace{\cancel{\lim\limits_{x\to a}} x}_{a}\ \underbrace{\cancel{\lim\limits_{x\to a}} x}_{a} + 1 = 2a^2+1$ (как и можно было ожидать)

(это элем-но док-ся с помощью опр-я предела)

Дополн-но

Результаты примера 2) несложно обобщ-ся на случай произвольной рац-й дроби

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ — многочлен степени n
— многочлен степени m

— наз-ся рац-й функцией или рац-й дробью

Утв $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)}$, если $Q_m(a)\neq 0$

(непосредств-ое сл-ие теоремы об арифм-х оп-х)

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} =$

при поиске предела x счит-ся $\neq 2$

$= \dfrac{2}{2-3} = -2$

в полной аналогии с примером 2) (впрочем, согласно общей формуле привед-й выше, ~~на~~ после сокращ-я на $x-2$ на место можно сразу подставить ~~2)~~ число 2)

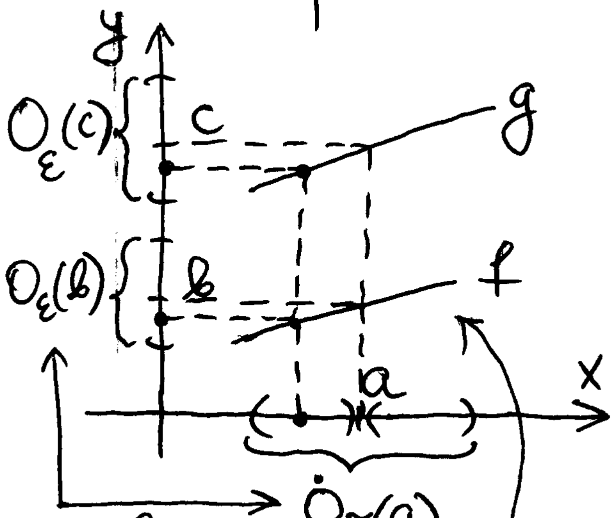
Теорема (о предель-м переходе в нер-х)

Если $f(x)\to b$, $g(x)\to c$ при $x\to a$ и $f(x)\geq g(x)$ при $x\neq a$, то $b\geq c$

$\boxed{5.13}$

Зам-ие. $f(x) \geq g(x)$ при $x \neq a$ означает $f(x) \geq g(x)$ кроме, быть может, т. a (т.е. в самой точке a ф-ии f и g могут быть связаны нерав-м любого знака, равно как и любая из них может быть не опред-на)

Δ От противного. Пусть $b < c$



сперва изобразить окр-ти

Возьмём $\varepsilon > 0 : O_\varepsilon(b) \cap O_\varepsilon(c) = \varnothing$

Т.к. $f(x) \to b$, $g(x) \to c$ (иногда при $x \to a$ не пишут, если ясно из контекста), то

$\exists \dot{O}_\delta(a) : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in O_\varepsilon(b) \\ g(x) \in O_\varepsilon(c) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) < g(x)$ (при этом $x \neq a$), что противоречит тому, что $f(x) \geq g(x)$ при $x \neq a$

(Мы рисуем график здесь, т.к. зн-я $f(x) \in O_\varepsilon(b)$ (то же самое для $g(x)$))

Зам-ие Теорема спр-ва и при $x \to a \pm 0$, ∞, $\pm\infty$

Частные случаи:

1) $g(x) \equiv c = \mathrm{const}$

Тогда $f(x) \geq c \Rightarrow b \geq c$

$(\leq)$ $(\leq) \leftarrow$ ан-но для $\leq$

2) В роли $f(x)$ и $g(x)$ могут выступать посл-ти $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Тогда **5.14**

$$\text{ну } \begin{cases} x_n \to b \\ y_n \to c \\ x_n \le y_n \end{cases} \Rightarrow b \le c$$

Зам-ие

$$\text{Если } \begin{cases} f(x) \to b \\ g(x) \to c \\ f(x) \underbrace{<}_{\text{строго меньше}} g(x) \end{cases} \not\Rightarrow b \underbrace{<}_{} c \quad (b \overset{\text{всё равно}}{\le} c)$$

Контрпример

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{2}{x} \end{cases} \quad f < g \; \left(\begin{matrix}\text{считаем,} \\ \text{что } x > 0\end{matrix}\right) \quad \text{Тем не менее, } \cancel{\text{Но}} \lim_{x \to +\infty} f \overset{\text{не меньше!}}{=} \lim_{x \to +\infty} g = 0$$

(т.е. $b = c = 0$)

Но тогда, поскольку на выходе всё равно возникает нестрогое нер-во $b \le c$, то и в усл-ии теоремы писать $f < g$ вместо $f \le g$ не имеет смысла

Лекция 6

Теорема (иногда лемма) о двух полицейских (новое "правильное" название в соотв-ии с законом о полиции; до 01.03.2011 г. н.э. – о двух милиционерах; до 01.03.1917 г. н.э. – о двух городовых)

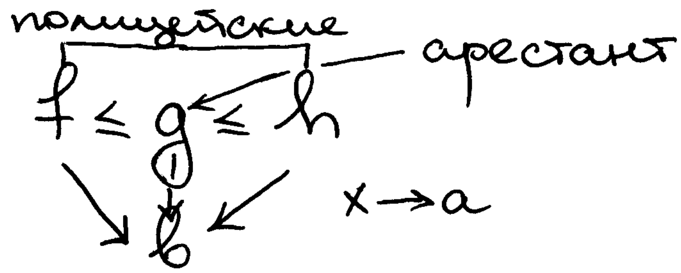
Пусть $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$: $D_f = D_g = D_h \equiv X$ и пусть a – пред-я т. X (этого не всегда требуют, но всегда подразум-ют). Тогда, если

1) $f(x) \le g(x) \le h(x)$, $x \in X$,

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$,

то сущ-ет $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$

Зам-ие. Эту теорему иногда наз-ют теор-й о 3-х полицейских, но это не правильно (т.к. тогда $g(x)$ – оборотень, а значит всё равно не настоящий полицейский)



Δ Из 2) след-т, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X \Rightarrow \begin{cases} b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \\ b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon \end{cases}$$

Но тогда отсюда и из 1) вытекает, что 6.2

$b-\varepsilon < f(x) \le g(x) \le h(x) < b+\varepsilon$, т.е. $b-\varepsilon < g(x) < b+\varepsilon$,
а последнее двойное нер-во и означает, что
$\lim h(x)$ сущ-ет и равен b:

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = b$$

Дополн-но:

Зам-ие к теореме о двух милиц-х

В усл-ии теоремы мы требовали, чтобы

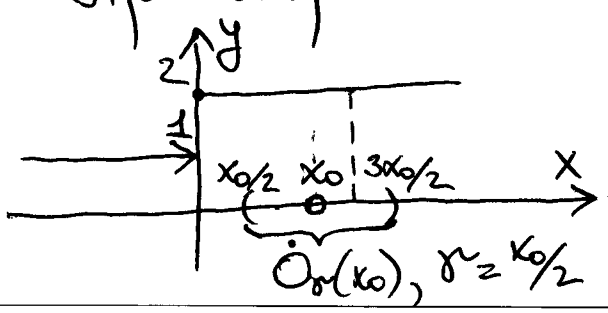
1) $f(x)\le g(x)\le h(x)$ при $\forall x\in X$ ← обл-ть опр-я

На самом деле вполне достат-но, чтобы это не-р-во было выполнено лишь в нек-й проколотой окр-ти т. a, т.е. дост-но, чтобы

1) $f(x)\le g(x)\le h(x)$ при $x\in \dot{O}_r(a)\cap X$ ($r=const>0$)

Это связано с тем, что ~~величины~~ существ-ие и величина пределов ф-й f, g и h не зависят от их значений в точках x, лежащих вне любой фиксир-й прокол-й окр-ти пред-й т-ки a:
$\lim\limits_{x\to a} f, g, h$ не зависит от того, чему $=$ эти функции при $x\notin \dot{O}_r(a)\cap X$

Пример

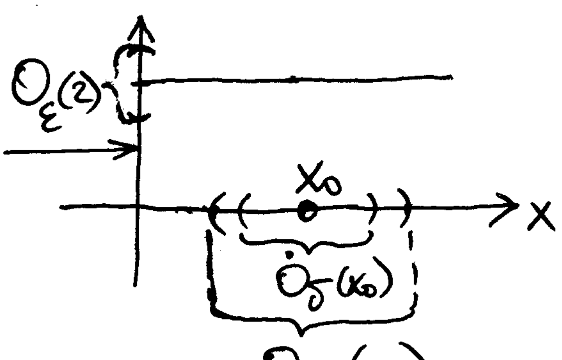


$$f(x)=\begin{cases}\overset{2}{\cancel{x}}, & x\ge 0\\ 1, & x<0\end{cases}$$

Ясно, что $\forall x_0 > 0$ (даже сколь угодно малого) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$

Это можно объяснить тем, что при поиске предела мы вправе рассм-ть ф-ю лишь при $x \in O_{\frac{x_0}{2}}(x_0)$ ("отбросив все остальные зн-я x").
Но в этой окр-ти ф-я $\equiv 1$, а потому и её $\lim\limits_{x \to x_0} = 1$

А почему мы можем их отбросить? Да потому, что в опр-ии предела ф-ии мы вправе брать δ по своему усмотрению сколь угодно малым. В частности, можем считать δ малым настолько, чтобы $\dot{O}_\delta(x_0)$ (та самая, которая должна полностью проецир-ся на $O_\varepsilon(2)$) целиком помещалась в $O_{\frac{x_0}{2}}(x_0)$ (т.е. брать $\delta \le \frac{x_0}{2}$)



Это замечание распростр-ся на все теоремы и утв-я, относящиеся к пределам ф-й. Если в них утв-ся, что для сущ-я предела при $x \to a$ нек-я ф-я или ф-ии должны удовл-ть тем или иным усл-ям при $x \in X$ (или $x \in X$ и $x \neq a$), то на самом деле они могут удовл-ть этим усл-м лишь локально, т.е. лишь при $x \in \dot{O}_\delta(a) \cap X$ (спр-ть утв-й и теорем от такого сужения по той же причине, что и в разобранном выше примере, не страдает)

§5 Монотонные функции

Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся

а) возраст-й
б) неубыв-й
в) невозр-й
г) убывающ-й

на мн-ве X, если $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow$
$$\left[\begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \\ f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right.$$

Все ф-ии вида а)-г) наз-ся монотонными, а ф-ии видов а), г) ещё и строго монот-ми

Зам-ие. Из опр-я видно, что возр-я ф-я — частный случай неубыв-й, а убыв-я — частный случай невозр-й

Примеры

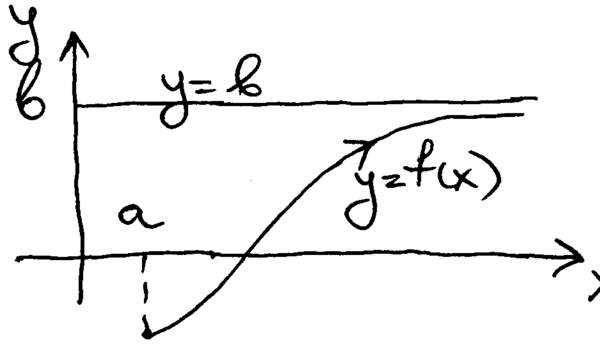
1) $f(x) = x^2$ — (строго) возр-ет на полупрямой $[0, +\infty)$ (т.е. при $x \geq 0$)

2) $f(x) = \operatorname{sign} x$ — неубыв-т на $\mathbb{R}$ (всей веществ-й оси)

3) $f(x) \equiv 1$ — и не убыв-т и не возр-т на $\mathbb{R}$

Теорема. Если ф-я $f(x)$ не убывает и огр-на сверху на полупр-й $x \geq a$, то сущ-ет $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

6.5



Опр-ть утв-я ~~о сущ-ии~~ теоремы ~~этой~~ геометрически очевидна (но рисунок - не док-во)

Δ Прежде всего напомню, что огр-ть ф-ии на $[a,+\infty)$ на самом деле означает её огр-ть на $[a,+\infty)\cap X$: обл-ть опр-я $f(x)$

$f(x)$ огр-на сверху на $[a,+\infty)$ $\equiv$ $f(x)$ огр-на сверху на $[a,+\infty)\cap X$ $\Rightarrow$ сущ-т sup

$\Rightarrow$ сущ-ет $\sup\limits_{[a,+\infty)\cap X} f(x) \equiv b$

Док-м, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

Надо пок-ть, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A \in \mathbb{R}:$ $\boxed{\text{усл-я}}$

$A(\varepsilon) = ?$

Заметим, что при рассм-ии конкретных примеров мы, как правило, предъявляем $A(\varepsilon)$ в явном виде. Однако поскольку в теореме речь идёт об абстрактной ф-ии $f(x)$, мы докажем сущ-ие $A(\varepsilon)$, не предъявляя явного выраж-я для неё. При этом мы, разум-ся, будем опираться на условия, кот-м, согласно доказываемой теореме подчинена ф-я $f(x)$

Итак, док-м, что требуемая ф-я $A(\varepsilon)$ сущ-ет | 6.6

Для этого воспользуемся опр-ем точной верхней грани. Согласно данному опр-ю тот факт, что

$\sup\limits_{[a,+\infty)\cap X} f(x) = b$, означает, что:

1) $\forall x \in [a,+\infty)\cap X \Rightarrow f(x) \leq b$

2) $\forall \tilde{b} < b \Rightarrow \exists \tilde{x} \in [a,+\infty)\cap X : f(\tilde{x}) > \tilde{b}$

далее не пишу, но везде подразум-ю

Заметим теперь, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow b - \varepsilon \equiv \tilde{b} < b \Rightarrow \exists \tilde{x} \in [a,+\infty) : f(\tilde{x}) > \tilde{b} = b - \varepsilon$

а из того, что $\tilde{b} < b$, согласно усл-ю 2) опр-я точной верх-й гр-и, в свою очередь следует, что

Но тогда, пользуясь транзитивностью знака $\Rightarrow$ ($\boxed{a \Rightarrow b \Rightarrow c} \Rightarrow \boxed{a \Rightarrow c}$), получаем, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \tilde{x} \in [a,+\infty) : f(\tilde{x}) > b - \varepsilon$

Подчеркнём, что $\tilde{x}$ тем самым $= \tilde{x}(\varepsilon)$

Вернёмся к искомой ф-ии $A(\varepsilon)$ и положим

$A(\varepsilon) \equiv \tilde{x}(\varepsilon)$ $(\forall \varepsilon > 0)$,

где $\tilde{x}(\varepsilon)$ - любая ф-я, удовл-ая предыд-й строке

Согласно опр-ю $\tilde{x}$ это будет означать, что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow f(A) > b - \varepsilon$

Зам-ие. $\exists \tilde{x}$ (и тем более $\exists A$) мы ~~больше~~ уже не пишем, т.к. считаем, что $\tilde{x}(\varepsilon)$ – уже выбранная (т.е. фиксированная, конкретная) величина, удовлетв-ая нужному нер-ву, а навешивать квантор $\exists$-я на фиксиров-ю величину мы, строго говоря, даже не имеем права

Заметим также, что поскольку $\tilde{x} \in [a, +\infty)$, т.е. $\tilde{x} \geq a$, то и $A \geq a$

Далее, поскольку $f(x)$ не убывает на $[a, +\infty)$, то

$$\forall x > A \Rightarrow f(x) \geq f(A) > b - \varepsilon \Rightarrow f(x) > b - \varepsilon \quad (1)$$

Но с другой стороны из усл-я 1) (того, что $\sup f(x) = b$) и того, что $A \geq a$:

$(1) (\forall x \in [a, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq b) + (A \geq a)$ озвучить

вытекает, что нер-во $\square$ тем более спр-во

$$\forall x \in [A, +\infty) \Rightarrow f(x) \leq b \quad (2)$$

Т.о., выходит, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A \ (\text{напр}, A = \tilde{x}(\varepsilon)):$$

$$\forall x: \begin{matrix} 1) x \in X \\ 2) x > A \end{matrix} \Rightarrow b - \varepsilon \overset{(1)}{<} f(x) \overset{(2)}{\leq} b \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - b \leq 0 \Rightarrow$$

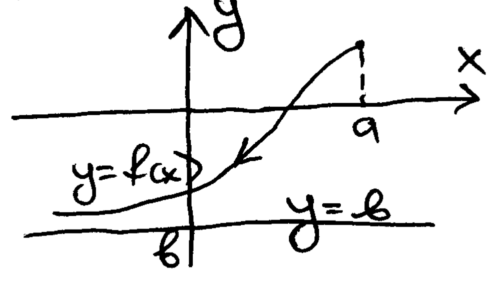
$$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Но то, что здесь написано согласно опр-ю предела на $+\infty$ и означает, что

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b,$$

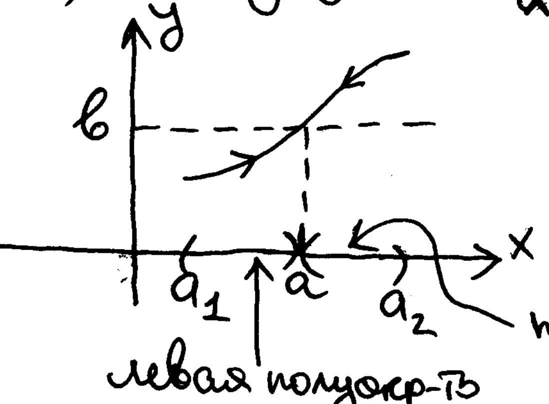
что, как я напоминаю, и треб-сь док-ть $\not\Delta$

Теорема. Если ф-я $f(x)$ не убывает и огр-на снизу на полупр-й $x \le a$, то сущ-ет $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



Док-ся полностью ан-но (можно не док-ть – лучше док-те след-ую теорему)

Теорема. Если ф-я $f(x)$ не убывает и огр-на сверху (снизу) в левой (правой) полуокрест-ти т.a, то сущ-ет $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x)\right)$



Из данного рисунка утв-ие этой теоремы тоже очевидно (но это также не док-во)

Δ Док-во во многом ан-но док-ву теоремы о сущ-ии предела при $x \to +\infty$ и остаётся в кач-ве самост-го упр-я (можно ограничиться док-ом только одного из двух случаев)

Задание. Сформулир-ть (и док-ть хотя бы для одного из вариантов) 4 варианта т-мы о существ-ии предела невозр-й ф-ии (при $x \to \pm\infty, a \pm 0$)

Важный частный случай

Пусть в роли $f(x)$ выступает посл-ть $x(n)$

(или, что то же самое, $-\{x_n\}$). Огр-ть и монотон-ть посл-ти означает её огр-ть и монотон-ть при всех натуральных n. Тогда получается след-й аналог для случая посл-й т-мы о $\exists$-ии предела на $+\infty$ монотон-х ф-й

Теор Монотонная огран-я посл-ть сходится (напомню, что согласно опр-ю сход-ти это означает, что она имеет предел)

Зам-ие Рассм-м два возможных вида монотон-х посл-й

$x_1 \le x_2 \le \dots$ — неубыв-я — всегда огр-на снизу $\min\{x_n\} = x_1$

$x_1 \ge x_2 \ge \dots$ — невозр-я — всегда огр-на сверху $\max\{x_n\} = x_1$

Т.о., для неубыв-х посл-й: огр-ть $\Leftrightarrow$ огр-ти сверху (снизу уже огр-ны), для невозр-х посл-й: огр-ть $\Leftrightarrow$ огр-ти снизу (сверху уже огр-ны)

Важным примером применения посл-й теоремы служит след-ее утв-ие

Утв-ие Посл-ть $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится

Зам-ие Это утв-ие будет использ-но впоследствии при док-ве сущ-я 2-го замечат-го предела

Δ Итак, док-м, что

сущ-ет (конечный) $\lim\limits_{n\to\infty} (\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\to 1})^{n \to \infty} \equiv 1^{\infty}$ (предст-ий собой частный случай неопр-ти типа 1^{∞})

Напомню, что неопр-ть 1^{∞} в общем случае (т.е. в случае произвольного основания $\to 1$ и показ-ля $\to \infty$) может равняться чему угодно (точнее любому неотр-му числу, а также $+\infty$) или даже не сущ-ть

Рассм-м посл-ть $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ и покажем, что она возр-ет и огр-на сверху (подчеркну ~~напомню~~, что в соответствии со сделанным выше замеч-м возр-ие будет означать, что она уже огр-на снизу, напр. своим первым элементом x_1).

Согласно сформул-й теореме об огран-х монотонных посл-х этого дост-но для сущ-ия предела посл-ти $\{x_n\}$ будет след-ть (когда док-м возр+ +огр-ть сверху)

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ — возр.} + \text{огр. сверху} \; (\Rightarrow \text{сущ-т } \lim_{n\to\infty} x_n)$$

$\Downarrow$

(огр. снизу)

На лекции лучше док-ть лишь неубыв-ие, сделав после этого зам-ие о том, что можно док-ть и возр-ие (строгую монот-ть)

Для док-ва возр-я и огр-ти $\{x_n\}$ нам потребуется нер-во Бернулли:

$\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [-1, +\infty) \Rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx$, **6.11**

причём ~~при~~ если этом $\begin{cases} x \neq 0 \\ n > 0 \end{cases} \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$

Док-те самост-но, исп-я метод матем-й индукции (док-ть на лекции, если останется время, но его всё равно не останется, так что в лучшем случае – на ближайшей консультации)

Т.о., последующее док-во теор-ы разбивается на две части:

I) Док-во монотонности $\{x_n\}$

II) Док-во огранич-ти $\{x_n\}$

Δ_I Покажем, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ($\Leftrightarrow x_{n+1} > x_n$ (т.к. $x_n > 0$) $\Leftrightarrow \{x_n\}$ – возр-я посл-ть)

[Этого **не** говорить:

$\{x_n\}$ – возраст-т, значит $x_{n_2} > x_{n_1}$ $\forall n_2 > n_1$ $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}$ – возр., значит $x_{n+1} > x_n$

Итак, расписываем отношение x_{n+1}/x_n:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \frac{n+1}{n} = \left[\underbrace{\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}}_{=1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \frac{n+1}{n} =$$

$$= \Big[1 \underbrace{- \frac{1}{(n+1)^2}}_{x}\Big]^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{(n+1)^2} > -1,$$

а значит работает нер-во Бернулли, причём поскольку x заведомо отличен от нуля, а показатель $n+1>1$, то в этом нер-ве можно поставить строгий знак:

$$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x \quad (>, \text{ а не } \geq 0, \text{ т.к. } x \neq 0, \text{ а } n+1>1)$$

Отсюда, возвращаясь к отношению x_{n+1}/x_n, имеем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \Big[1+\cancel{(n+1)}\Big(-\frac{1}{(n+1)^{\cancel{2}}}\Big)\Big]\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+\cancel{1}-\cancel{1}}{n}\,\frac{n+1}{n} = 1$$

$\cancel{\Delta}_{I}$

Δ_{II} (док-во огр-ти сверху $\{x_n\}$)

Рассм-м вспомогат-ю посл-ть

$$y_n = x_n \underbrace{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}_{>1} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1} > x_n$$

Покажем, что $(\forall n \geq 2)$ предыд-й член больше след-го

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1 \ (\overset{\text{ибо } y_n>0}{\Longleftrightarrow} y_{n-1} > y_n \Leftrightarrow \{y_n\} - \text{убыв-я посл-ть})$$

Итак, расписываем отнош-не y_{n-1}/y_n:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\big(1+\frac{1}{n-1}\big)^n}{\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n+1}} = \frac{\big(\frac{n}{n-1}\big)^n}{\big(\frac{n+1}{n}\big)^n}\,\frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \Big(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\Big)^n\frac{n}{n+1} =$$

$$= \Big(1+\underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{x}\Big)^n \frac{n}{n+1} \underset{\substack{\text{нер-во Бернулли} \\ \text{(строгое, т.к. } x\neq 0,\, n>1)}}{>} \Big(1+n\underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{>\frac{1}{n^2}}\Big)\frac{n}{n+1} >$$

$$> \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\frac{n}{n+1} = 1$$

В результате из возр-я $\{x_n\}$, убыв-я $\{y_n\}$ и того, что $x_n < y_n$ $(\forall n)$, получаем, что

$$\forall n \Rightarrow \underbrace{x_1 < x_2 < \ldots < x_n}_{\text{возр. } \{x_n\}} < \underbrace{y_n < y_{n-1} < \ldots < y_1}_{\text{убыв. } \{y_n\}}$$

в принципе дост-но и этих нер-в (левую часть для симметрии дописал)

Т.о., $\forall n \Rightarrow x_n < y_1$, т.е. $\{x_n\}$ действ-но ограничена сверху Δ_{II}

Док-во утв-я тем самым полностью зав-но Δ

Сделаем ряд важных замечаний, дополняющих док-ое утв-ие

Прежде всего заметим, что согласно своему опр-ю y_n представимо в виде произведения двух сход-ся посл-й

$$y_n = \underbrace{x_n}_{\downarrow \text{ сх-ся}} \underbrace{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}_{\downarrow\, 1},$$

можно сразу: и равен $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

а значит $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ также сущест-т и равен произв-ию пределов:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} x_n \equiv e$$

Этот предел обозн-ют и называют латинской буквой e (так и говорят - число e)

Дополн-но

Зам-ие Разум-ся, просто факт сущ-ия предела $\{y_n\}$ (без его рав-ва пределу $\{x_n\}$) следует и из того, что посл-ть $\{y_n\}$ убывает и огр-на снизу (напр, первым элем-м посл-ти $\{x_n\}$)

Далее заметим, что поскольку

$$\forall n \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2} = x_1 < \underset{\substack{\downarrow \\ e}}{x_n} < \underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{y_1 = 4}, \quad n \to \infty$$

$$2 \le e \le 4$$

← можно рассм-ть как пост-ую посл-ть

то e заведомо ≥ 2 и ≤ 4

Несложно получить и более точное приближение (~~напр~~, используя тот факт, что $x_n < e < y_n$):

$$e = 2{,}7\,\underbrace{1828}\,\underbrace{1828}\,4590\ldots$$

Запомнив его, вы одновременно запомните и год рождения Л.Н. Толстого!

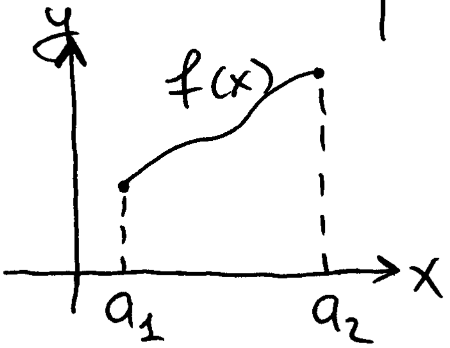
Кроме того, можно док-ть (только не пытайтесь сделать это самост-но — док-во весьма нетривиально!), что число e — иррац-но, т.е. явл-ся ∞-й неперiод-й десят-й дробью

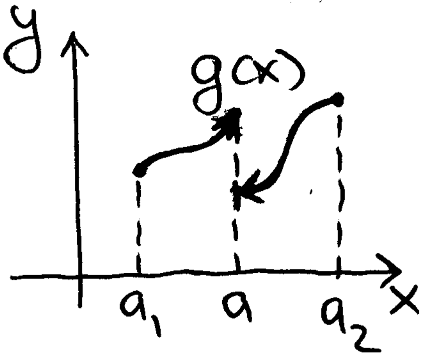
Глава III

Непрерывные функции

§1 Определение непрерывности

Наглядное представ-ие о непр-й и разр-й ф-ях дают непр-ые и разр-ые кривые — графики этих ф-й





Из привед-х рисунков видно, что ф-я $f(x)$ непр-на при всех x из $[a_1, a_2]$, а ф-я $g(x)$ — при всех x из $[a_1, a_2]$ кроме точки a. В точке a график ф-ии $g(x)$ (а значит и сама эта ф-я) терпит разрыв

Дадим теперь точное опред-ие, формализующее наши интуитивные представления о непр-х ф-х

Пусть $f(x)$ опред-на в нек-й окр-ти т. a:

$f(x): D_f \supset (a_1, a_2) \ni a$

Опр 1. Ф-я $f(x)$ наз-ся непр-й в т. a (при $x = a$), если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

предельное зн-е частное зн-ие

Иными словами, ф-я непр-на в т. a, если её пред-ое зн-ие в этой точке совпадает с частным

Заметим также, что непр-ть ф-ции в т.а фактически означает, что предел ф-ции (в т.а) = ф-ции от предела:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x),$$ ~~т.е.~~ что, в свою очередь естеств-но интерпрет-ть как возможность внесения символа $\lim_{x\to a}$ в аргумент ф-ции f

Примеры

1) $f(x)=x^2$ – непр-на в $\forall$ т. $x=a$, т.к.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \lim_{x\to a} x = a^2 = f(a)$$

2) Пусть $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ← мн-н степени n, ← мног-н степени m

Такую ф-ю наз-ют рац-ной ф-й или рац-й дробью

Очевидно, что рац-я ф-я непр-на в $\forall$ т. a, в которой её знамен-ль отличен от нуля (см. теорему об арифм-х опер-х над ф-ми, имеющими предельное зн-ие):

$f(x)$ – непр-на в $\forall$ т. $x=a$: $Q(a)\neq 0$, т.к.

$$\lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$$

Лекция 7

Напомню, что на прошлой лекции было дано опр-ие непрерыв-ти ф-ии, согласно которому ф-я $f(x)$ непр-на в т. a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Дадим ещё одно опр-ие непр-ти не использ-ее явным образом понятие предела (с технической точки зрения оно иногда более удобно)

Опр 2. Ф-я $f(x)$ наз-ся непр-й в т. a, если

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists \delta>0 : \forall x : \begin{matrix} 1) x\in X \\ 2) |x-a|<\delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x)-\underset{\substack{\uparrow \\ b}}{f(a)}|<\varepsilon$$

Разум-ся Опр 1 $\Leftrightarrow$ Опр 2

Вспоминая опр-ие предела ф-ии по Коши, мы видим, что опр-ие 2 фактически представляет собой опр-ие того, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = b = f(a) \text{ (в роли предела в выст-ет } f(a))$$

Есть только одно (внешнее) отличие:

в опр-ии 2 (непр-ти ф-ии) мы не требуем, чтобы $|x-a|>0$, т.е., чтобы $x\neq a$ (как в опр-ии предела ф-ии). Дело в том, что это требование теперь явл-ся излишним, поскольку в т. $x=a$ нер-во $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при любом положит-м ε заведомо спр-во:

$x=a \Rightarrow |f(x)-f(a)|=|f(a)-f(a)|<\varepsilon, \forall\varepsilon>0$

Хотя, конечно, если в опр-ии 2 вместо условия $|x-a|<\delta$ (не будет ошибкой) написать $0<|x-a|<\delta$ – существа опр-я это не изменит. Но с методической точки зрения >0 лучше не писать, т.к. иначе студенты могут подумать, что, это не случайно, и что $x=a$ (как и в опр-ии предела ф-ии) – "нечистая" точка

Док-ем одно важное утв-ие, назыв-ое устойчивостью знака **непр-й** ф-ии

Утв Если $f(x)$ непр-на в т. a и $f(a)\neq 0$, то сущ-ет $O_\delta(a)$, в кот-й $f(x) \gtrless 0$

это означает, что $f(x)$ либо >0, либо <0 всюду в $O_\delta(a)$ (говорят также, что $f(x)$ сохраняет знак в δ-окрест-ти т. a)

Δ Пусть $f(a)>0$. Воспольз-ся опр-ем 2 непр-ти ф-ии и положим в нём $\varepsilon = f(a)$. Тогда выходит, что

$$\exists\delta>0: \forall x \in O_\delta(a)\cap X \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \overset{\varepsilon}{f(a)}$$

без точки (т.к. мы допускаем, чтобы $x=a$)

$$\underline{-\cancel{f(a)} < f(x) - \cancel{f(a)}} < +f(a)$$

$\Rightarrow f(x)>0 \ \forall x\in O_\delta(a)\cap X$ чтд

Случай $f(a)<0$ рассм-те самост-но $\blacktriangle$

Односторонняя непрерывность 7.3

Пусть $f(x)$ опр-на на полуотр-ке $[a, a+\delta)$, $\delta>0$

$f(x): D_f \supset [a, a+\delta), \delta>0$

Дополн-но: правая полуокр-ть

$[a, a+\delta) = \{a\} \cup (a, a+\delta)$

т.е. $[a, a+\delta)$ = т.a + правая полуокр-ть т.a

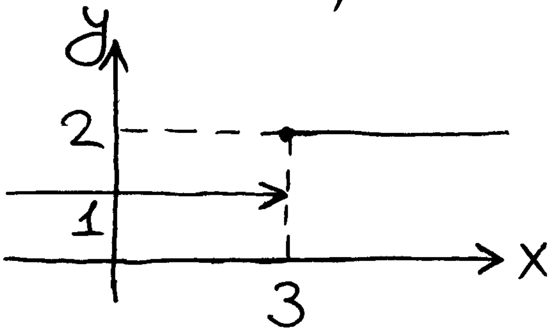
Т.о., можно было бы сказать: пусть ф-я $f(x)$ опр-на в т.a и правой полуокр-ти этой т-ки

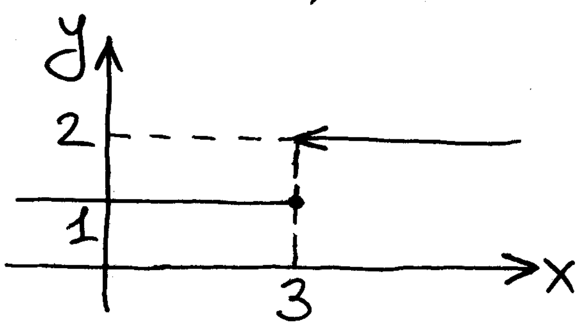
Опр Ф-я $f(x)$ наз-ся непр-й справа в т.a, если $f(a+0)=f(a)$

Ан-но опр-ся непр-ть слева в т.a

Пример

$f_1(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 3 \\ 1, & x < 3 \end{cases}$ $\qquad$ $f_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 3 \\ 1, & x \leq 3 \end{cases}$





Мы видим, что

$f_1(3+0)=2=f_1(3)$ – непр-на справа в т. $x=3$

$f_1(3-0)=1\neq f_1(3)$ – разрывна (терпит разрыв) слева в т. $x=3$

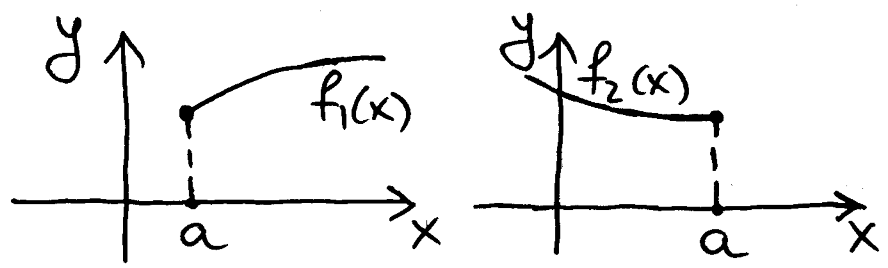
$f_2(3+0)\neq f_2(3)$ – разрывна слева

$f_2(3-0)=f_2(3)$ – непрерывна справа

Теор Если ф-я $f(x)$ непр. в т. a слева и справа, то она непр-на в т. a

Δ Док-ть самост-но

Зам-ие. Если ф-я $f(x)$ опр-на только справа от т. $x=a$ (т.е. только при $x \geq a$), то под непр-ю $f(x)$ в т. a подразум-ся непр-ть справа в этой точке (см. рис.). Соотв-но, если ф-я $f(x)$ опред-на только слева от т. $x=a$, то под непр-ю $f(x)$ в т. a подразум-ся непр-ть слева в этой точке (см. там же)



f_1 и f_2 считаются непрер-ми в т. a

Дадим теперь строгое опр-ие точки разрыва ф-ии

Опр Пред-я т-ка обл-ти опр-я ф-ии, в кот-й ф-я не явл-ся непр-й, наз-ся т-й разрыва ф-ии

Если a – т. разрыва ф-ии $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ терпит разрыв или разрывна в т. a

Пусть дана ф-я $f(x)$. В предположении, что $D_f \equiv X \supset (a_1, a_2) \ni a$, т.е. в предп-ии, что ~~ее~~ $f(x)$ опр-на и слева и справа от т. a (такую т. a ещё наз-ют внутренней т-й обл-ти опр-я), введём классифик-ю т-к разрыва ф-ии $f(x)$

Классификация точек разрыва 7.5

0) Устранимый разрыв

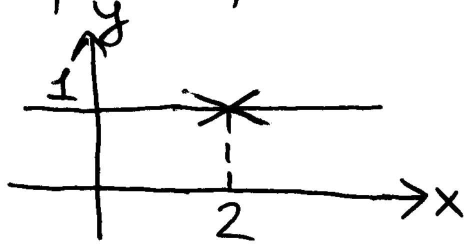
Опр Точка a наз-ся т-й устр-го разрыва ф-ции $f(x)$, если сущ-ет $\lim\limits_{x\to a} f(x) \equiv b$ (который обозначим через b), ~~но~~

но $\left[\begin{array}{l} f(a)=\varnothing \text{ — т.е. } f \text{ не опр-на в т. } a \\ f(a)\neq b \end{array}\right.$

Дополн-но:

$\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \leftarrow$ либо A, либо B $\left\{\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \leftarrow$ и A, и B

Пример $f(x)=\dfrac{x-2}{x-2}$, $x\neq 2$



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$,

но $f(2)=\varnothing$

$\Rightarrow x=2$ — т-ка устр-го разрыва

В то же время $\forall a\neq 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=1=f(a)$, а значит $f(x)$ — непр. при $\forall x\neq 2$

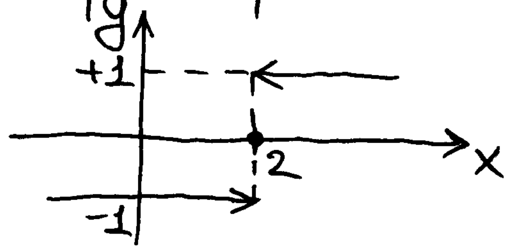
Зам-ие. Разрыв наз-ся устранимым потому, что его действ-но можно в некот-м смысле устранить, доопределив или переопред-в ф-ю $f(x)$ в т. a (её предельн-м зн-ем b)

Если в рассм-ом примере ф-ю $f(x)$ при $x=2$ положить =бы единице: $f(2)\equiv 1$, то получится ф-я непр-я на $\mathbb{R}$ (т.е. во всех точках вещ-й оси)

1) Разрыв I-го рода

Опр Точка a наз-ся т. разрыва I-го рода ф-ии $f(x)$, если сущ-ют $f(a-0)$ и $f(a+0)$, но $f(a-0) \neq f(a+0)$

Пример $f(x) = \text{sign}(x-2)$



← график ф-ии $\text{sign}(x-2)$ получается из графика ф-ии $\text{sign}\,x$ сдвигом на 2 единицы вправо

$f(2-0) = -1 \neq f(2+0) = +1$

$\Rightarrow x = 2$ – т-ка разрыва I-го рода

Очевидно, что в любой другой т-ке (т.е. при $x \neq 2$) ф-я $f(x)$ непр-на

Заметим, что переопр-ть/~~доопр-ть~~ ф-ю $f(x)$ так, чтобы она стала непр-й и при $x=2$ теперь уже не получится. Мы можем лишь положить $f(2) \equiv +1$, сделав $f(x)$ непр-й справа в т. $x=2$, или пол-ть $f(2) \equiv -1$, сделав её непр-й слева в этой точке

2) Разрыв II-го рода

Опр Точка a наз-ся т. разрыва II-го рода, если в этой точке хотя бы один из одностор-х пределов не сущ-ет или равен ∞-ти

Пример

1) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ при $x\neq 0$

$f(-0)=\emptyset$, $f(+0)=\emptyset$

Т. о., $x=0$ – т-ка разрыва II-го рода

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ x, & x\leq 0\end{cases}$ $f(+\infty)=+\infty$, $f(-0)=0$

$\Rightarrow x=0$ – также т-ка разрыва II-го рода

Заметим, что доопред-ть или переопр-ть ф-ю f, имеющую в т. a разрыв II-го рода так, чтобы она стала непрер-й ~~хотя~~ с той стороны, с которой у неё нет конечного предела, уже невозможно

Можно сказать, что разрыв I-го рода в определ-м смысле сильнее устр-го разрыва, а разрыв II-го рода – сильнее разрыва I-го рода

§2 Свойства непрерывных функций

Сперва сформулир-м теорему об арифм-х операц-х над непр-ми ф-ми

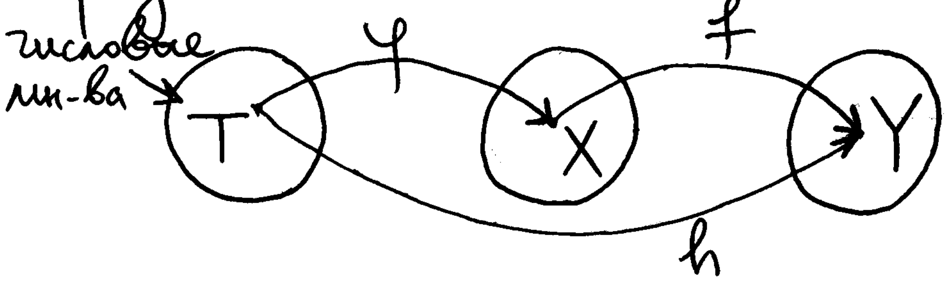
Теор Если ф-ии $f(x)$ и $g(x)$ непр-ны в т. a, то ф-ии $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а ~~$f(x)/g(x)$~~ если $g(a)\neq 0$, то и $f(x)/g(x)$ также непр-ны в т. a

Δ Док-ть самост-но, используя опр-ие непр-ти и теорему об арифм-х опер-х над ф-ми, имеющими пред-ое зн-ие

Сложная функция

Пусть даны $x = \varphi(t)$: $D_\varphi = T$, $E_\varphi = X$ и ф-я $y = f(x)$: $D_f = X$, $E_f = Y$

Схематически это можно изобразить след-м образом



$T, X, Y \subset \mathbb{R}$

Говорят, что ф-я φ действует из T на X, а ф-я f - из X на Y

Если мы забудем о промежуточном мн-ве X и будем считать, что каждой т-ке мн-ва T сразу ставится в соотв-ие т-ка мн-ва Y, то получим новую ф-ю h, действ-ю из T на Y

Опр Ф-я $y = h(t)$, которая каждому $t \in T$ ставит в соотв-ие $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$, наз-ся сложной функцией аргумента t

Коротко пишут так:

$y = f(\varphi(t)) \equiv h(t)$

внешняя ф-я — внутренняя ф-я

Т.о., сложная ф-я h есть результат последоват-го применения двух "простых" ф-й φ и f (сперва φ, затем f), т.е. применения ф-ии f к результату ф-ии φ

Говорят также, что h явл-ся суперпозицией или композицией ф-й f и φ и пишут

$h = f \circ \varphi$

Пример

Ф-ю $y = \sin t^2$ можно представить как суперпозицию ф-й

$y = f(x) \equiv \sin x$ и $x = \varphi(t) \equiv t^2$

Действ-но:

$y = f(\varphi(t)) = \sin \varphi(t) = \sin t^2$

Из этого примера видно, что

$f \circ \varphi \neq \varphi \circ f$

(вообще говоря, т.е. в том смысле, что для некоторых ф-й f и φ равенство может выполняться, однако сущ-ют и такие ф-ии f и φ, для кот-х оно не выполнено)

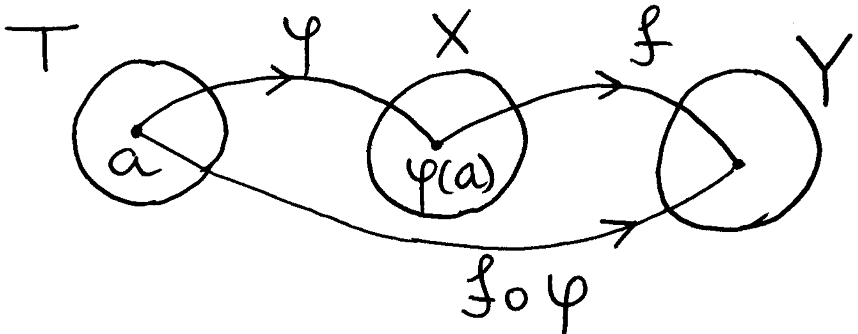
В самом деле:

не равно при всех t

$\varphi(f(t)) = f(t)^2 = (\sin t)^2 \overset{\text{def}}{=} \sin^2 t \neq \sin(t^2) = f(\varphi(t))$

Сформулируем и докажем теорему о непр-ти сложной ф-ии

Теорема. Пусть ф-я $x = \varphi(t)$ непр-на в т. a, а ф-я $y = f(x)$ непр-на в т. $b = \varphi(a)$. Тогда сложная ф-я $y = f(\varphi(t))$ непр-на в т. a



Коротко: непр-я ф-я от непр-й — непр-на

Δ Нам надо док-ть, что

$$\lim_{t\to a} f(\varphi(t)) = f(\varphi(a))$$

или, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall t : \begin{matrix} 1) \, t \in T \\ 2) \, |t-a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$$

Чтобы док-ть сущ-ие такого δ, воспользуемся непр-тью "простых" ф-й f и φ

Из непр-ти внешней ф-ии $f(x)$ в т. $b = \varphi(a)$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \gamma > 0 : \forall x : \begin{matrix} 1) \, x \in X \\ 2) \, |x-b| \le \gamma \end{matrix} \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \varepsilon$$

чтобы отличать от δ из опр-я непр-ти $f(\varphi(t))$

Заметим, что $\gamma = \gamma(\varepsilon)$

Далее, из непр-ти внутр-й ф-ии $\varphi(t)$ в т. a сл-ет, что

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \Rightarrow \exists \delta_1 > 0 : \forall t : \begin{matrix} 1) \, t \in T \\ 2) \, |t-a| < \delta_1 \end{matrix} \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(a)| < \varepsilon_1$$

Заметим, что $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1)$

$\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon)$

Положим теперь в последнем опр-ии $\varepsilon_1 = \gamma(\varepsilon)$. Мы имеем право это сделать, т.к. раз соотв-ее δ_1 найдётся для совершенно произвольных положит-х ε_1, то оно, разум-ся, найдётся и для любых знач-й ф-ии $\gamma(\varepsilon)$ (напомню, что эти знач-я по самому опр-ю $\gamma(\varepsilon)$ больше нуля)

В результате получим сложную ф-ю $\delta_1(\gamma(\varepsilon))$, которую обозначим через δ:

$\delta_1(\gamma(\varepsilon)) \equiv \delta(\varepsilon)$ – оказыв-ся, это и есть искомая ф-я $\delta(\varepsilon)$

Убедимся в этом. Согласно опр-ю $\delta(\varepsilon)$ и $\gamma(\varepsilon)$ получаем, что

1) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t$: 1) $t \in T$; 2) $|t-a| < \delta(\varepsilon)$ $\Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(a)| < \gamma(\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) = \delta_1(\gamma(\varepsilon))$

(см. опр-ие непр-ти φ)

$\Downarrow$

2) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x$: 1) $x \in X$; 2) $|x-b| < \gamma(\varepsilon)$ $\Rightarrow |\underset{\varphi(t)}{f(x)} - \underset{\varphi(a)}{f(b)}| < \varepsilon$

(см. опр-ие непр-ти f)

Из утв-я 1) мы видим, что при t, удовл-х усл-м 1) и 2)

$\Rightarrow \varphi(t)$: 1) $\varphi(t) \in X$; 2) $|\varphi(t) - b| < \gamma(\varepsilon)$

А значит $\varphi(t)$ может выступать в роли x, удо вл-го усл-м утв-я 2), т.е. в утв-ии 2) мы можем положить $x = \varphi(t)$ (написано же $\forall x : \square \leftarrow$ и $\varphi(t)$ этому удовл-т — значит ничто не мешает взять $x \equiv \varphi(t)$)

Но тогда из строчек 1) и 2) вытекает, что:

$1)+2) \Rightarrow$ ~~$\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t$: $t \in T$ 2)~~ мы предъявили искомое $\delta(\varepsilon)$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ (\text{напр}, \ \delta = \delta_1(\gamma(\varepsilon))):$$

$$\forall t : \begin{matrix} 1) \ t \in T \\ 2) \ |t-a| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$$

(>0 мы теперь не пишем, т.к. мы выбрали $x = \varphi(t)$)

Дополн-ое разъяснение

Из того, что $\varepsilon > 0$ и $t : \square$, вытекает результат утв-я 1), кот-й рассм-ся нами как промежуточный и кот-й означает, что $\varphi(t)$ удовл-ет усл-ям утв 2). Но тогда из ре-та утв-я 1) ~~мгновенно сл-ет ре-т утв-я 2) с $x = \varphi(t)$~~ (а значит и из усл-й утв-я 1), поскольку именно они обеспечивают этот ре-т) мгновенно следует результат утв-я 2) с $x = \varphi(t)$ (его мы рассм-ем как оконгат-й). При этом промежуточный ре-т, т.е. ре-т утв-я 1) мы в заключительной части док-ва не записываем

Для того, чтобы сформулир-ть усл-я двух посл-х теорем нам понадобится новое опр-ие

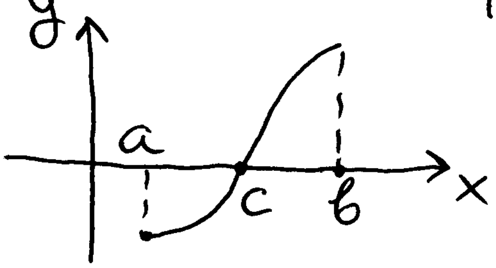
Опр Ф-я наз-ся непр-й на мн-ве, если она непр-на в каждой т-ке этого мн-ва

Теор Если $f(x)$ непр-на на $[a,b]$ и $f(a)\cdot f(b)<0$, то

$\exists c\in(a,b): f(c)=0$

Δ Условие $f(a)\cdot f(b)<0$ означает, что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки

Пусть для опр-ти $f(a)<0$, а $f(b)>0$ (случай $f(a)>0$, $f(b)<0$ рассм-ся полн-ю ан-но)



Рассм-м мн-во $X\equiv\{x\in[a,b]\mid f(x)<0\}$

Мн-во X не пусто (т.к. $f(a)<0$, т.е. $x=a$ ему $\in$-ит) и огр-но сверху (напр, числом b):

$X\neq\emptyset$ + X - огр-но **сверху** $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сущ-ет $\sup X\equiv c\in[a,b]$

поскольку мн-во X огр-но снизу числом a, а сверху - числом b (т.е. **a** - одна из нижних граней, а b - одна из верхних)

Согласно опр-ю точной верх-й грани это значит, что

1) $\forall x\in X\Rightarrow x\leq c$

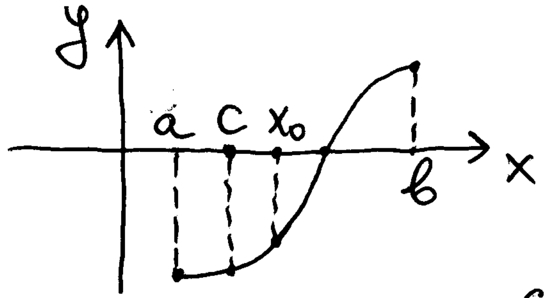
2) $\forall\tilde{c}<c\Rightarrow\exists\tilde{x}\in X:\tilde{x}>\tilde{c}$

Док-м, что $f(c)=0$ (т.е., что c и есть искомое число). Воспольз-ся док-м от обратного **7.14**

Предположим, сперва, что $f(c)<0$ (и придём к противоречию)

1) Итак, пусть $f(c)<0$

Т.к. $f(b)>0 \Rightarrow c \neq b \Rightarrow c<b$



Далее, из утв-я об устойчивости знака непр-й ф-ии вытекает, что ф-я $f(x)$ будет сохранять знак и в нек-й окрест-ти точки c:

$\underset{\text{знака}}{\text{уст-ть}} \Rightarrow \exists O_\delta(c): \forall x \in O_\delta(c) \cap [a,b] \Rightarrow f(x)<0$

Пусть x_0 — любое число из этой окр-ти, превосходящее c (но меньшее b):

$x_0 \in O_\delta(c) \cap (c,b)$ (т.к. $c<b$, то такое число заведомо найдётся)

$\Rightarrow f(x_0)<0$, т.е. $x_0 \in X$ и $x_0>c$ ← противоречие

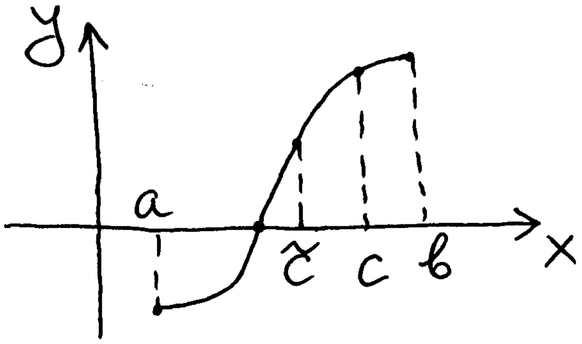
Но это противоречит усл-ю 1) опр-я точной верхней грани мн-ва X: $\forall x \in X \Rightarrow x \leq c$

$\Rightarrow \cancel{f(c)<0} \Rightarrow f(c) \geq 0$

↑ предположение опровергнуто

2) Допустим теперь, что $f(c)>0$

Т.к. $f(a)<0 \Rightarrow c \neq a \Rightarrow c>a$



Далее, из утв-ия об устойч-ти знака непр-й ф-ии $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, O_\delta(c): \forall x \in O_\delta(c) \cap [a,b] \Rightarrow f(x)>0$

Пусть $\tilde{c} \in O_\delta(c) \cap (a,c)$ (т.к. $a<c$, то такое число заведомо найдётся)

$\Rightarrow \tilde{c} < c$ и $\forall x \in [\tilde{c},c] \Rightarrow f(x)>0$

поскольку $[\tilde{c},c] \subset O_\delta(c) \cap [a,b]$

Теперь пришло время задейств-ать усл-ие 2) опр-ия точной верхней грани мн-ва X. Согласно этому усл-ю

из нер-ва $\tilde{c}<c \Rightarrow \exists\, \tilde{x} \in X : \tilde{x} > \tilde{c}$

Заметим, что поскольку любое число $\in$-ее X не превосходит точной верхней грани c этого мн-ва (см. усл-ие 1)), то $\tilde{x}$ не только $> \tilde{c}$, но и $\leq c$:

$+1) \Rightarrow \tilde{c} < \tilde{x} \leq c$, т.е. $\tilde{x} \in [\tilde{c},c] \Rightarrow f(\tilde{x})>0$ – по опр-ю $\tilde{c}$ (см. выше)

Но с другой стороны согласно опр-ю X из $\tilde{x} \in X \Rightarrow f(\tilde{x})<0$ противоречие

$\Rightarrow \cancel{f(c)>0} \Rightarrow f(c) \leq 0$

Т.о., нами устан-но, что

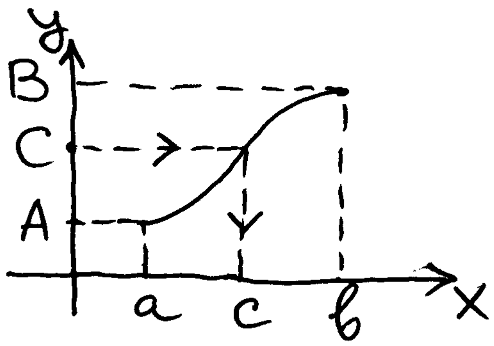
$$\begin{cases} f(c)\geq 0 \\ f(c)\leq 0 \end{cases} \overset{\text{значит}}{\Longrightarrow} f(c)=0$$

$\not\Delta$

В качестве непосредств-го след-я к док-й теореме сформул-ем теорему о прохождении непрер-й ф-ии через все промежуточные знач-я

Теор Пусть $f(x)$ непр-на на $[a,b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда

$$\forall \underline{\underline{C}}\in(A,B)\Rightarrow\exists\,\bar{\bar{c}}\in(a,b):\ f(\bar{\bar{c}})=\underline{\underline{C}}$$



Δ Остаётся в кач-ве само-ст-го упр-я

Указание. Рассм-те ф-ю $g(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-\underline{\underline{C}}$ и примените предыд-ю теорему

Дополн-но

Зам-ие 1. Если ф-я f немонотонна, то $\bar{\bar{c}}$ может быть и не единств-ым

Зам-ие 2. Несложно показать, что если $\underline{\underline{C}}\in[A,B]\Rightarrow\exists\,\bar{\bar{c}}\in[a,b]:\ f(\bar{\bar{c}})=\underline{\underline{C}}$ (этот утв-ие мгновенно след-т из аналог-го утв-я с круглыми скобками, т.е. из последней теоремы)

Лекция 8

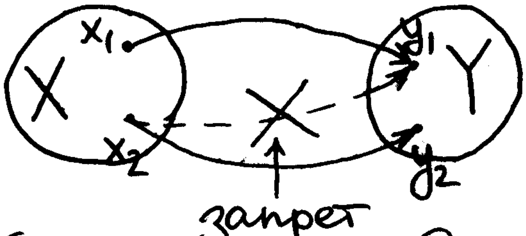
§3 Обратная функция

В этом §-фе мы решим вопрос о существ-нии и непр-ти ф-ии, обратной к непрерывной ф-ии $f(x)$

Сперва введём опр-ие обратной ф-ии

Пусть ф-я $y=f(x)$: $D_f=X$, $E_f=Y$ и пусть

I) $\forall y\in Y \Rightarrow \exists!\, x\in X : f(x)=y$



Напомню, что ! означает единств-ть, ~~т.е.~~ соотв-но $\exists!$ означает сущ-ет и единств-ть

Как хорошо видно из приведённого схемат-го изображения, это значит, что

II) $\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(иначе для $y_1=f(x_1)$ нашлись бы два элем-та $x=x_1$ и $x=x_2$ из X : $f(x_1)=f(x_2)=y_1$)

Очевидно, что верно и обратное, т.е., что если разным x_1 и x_2 отвечают разные y_1 и y_2, то каждому y отв-ет только один $x\in X$: $f(x)=y$

Т.о., треб-ие I $\Leftrightarrow$ треб-ию II

8.2

Опр. Ф-я, которая каждому $y \in Y$ ставит в соотв-ие $x \in X$: $f(x) = y$, наз-ся ~~ф-ей~~ обратной по отношению к ф-ии $y = f(x)$ (или просто — обратной к $y = f(x)$)

Обозн-ие $x = f^{-1}(y)$

Дополн-но:

Внимание! $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$ (т.е. $\neq$ в общем случае — для произв-й ф-ии f)

Напр $y = f(x) = x^3$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} \neq \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{y}$ ($\neq$ — не равно при всех y, т.е. эти ф-ии не совпадают, но, скажем, при $y = -1$, рав-во имеет место)

Однако для нек-х ф-й рав-во $f^{-1} = \frac{1}{f}$ может (случайно) оказаться справедливым. Один из простейших примеров

пусть $f(x)$: $D_f = E_f = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 2; 3\}$,

$f(\frac{1}{3}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$, $f(2) = 3$, $f(2) = \frac{1}{2}$

Проверяем:

$f^{-1}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} = \frac{1}{f(\frac{1}{3})}$, $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 3 = \frac{1}{f(\frac{1}{2})}$,

$f^{-1}(2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{f(2)}$, $f^{-1}(3) = 2 = \frac{1}{f(3)}$

Или другой пример, но с комплексной ф-ей:

$y = f(x) = x^i$, $x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{i}} = y^{-i} = \frac{1}{y^i} = \frac{1}{f(y)}$

Итак, согласно опр-ю

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y,$$

а значит $f^{-1}(f(x))\equiv x \quad (x\in X)$

Очевидно также, что

$$f(f^{-1}(y))\equiv y \quad (y\in Y)$$

Последнее тождество фактически означает, что ф-я f явл-ся обр-й по отн-ю к ф-ии f^{-1}, т.е. по отн-ию к своей обр-й ф-ии

Т.о., $(f^{-1})^{-1}=f$ (функция, обратная к обратной, есть исходная ф-я)

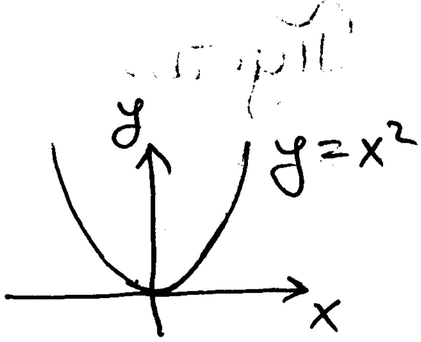
В связи с этим ф-ии f и f^{-1} наз-ют взаимно обратными

Зам-ие. Если ф-я $y=f(x)$ $(D_f=X, E_f=Y)$ имеет обратную, то говорят, что она устанавл-ет взаимно однозначное соотв-ие между эл-ми мн-в X и Y, или просто между мн-ми X и Y (вполне **естеств-й** термин, т.к. каждому $x\in X$ в таком случае соотв-ет нек-й $y\in Y$, и наоборот, каждому $y\in Y$ соотв-ет вполне опр-й $x\in X$)

Пример

1) Рассм-м ф-ю

$y=f_1(x)=x^2$:



$D_{f_1} = \mathbb{R}$. Тогда $E_{f_1} = [0, +\infty)$

Т.к. $\forall y > 0 \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 \neq x_2$ и $y = x_1^2 = x_2^2$ $(x_1 = -\sqrt{y}, x_2 = +\sqrt{y})$, то ф-ии, обр-й к f_1 не сущ-ет:

$\Rightarrow \nexists\, f^{-1}(y)$

2) Рассм-м ф-ю

$y = f_2(x) = x^2 : D_{f_2} = [0, +\infty)$. Тогда $E_{f_2} \overset{\text{вновь равно}}{=} [0, +\infty)$

Т.к. $\forall y > 0 \Rightarrow \exists!\, x \in [0, +\infty): y = x^2$, то сущ-ет ф-я, обратная к f_2, обознач-ая через $\sqrt{y}$:

$\exists\, f_2^{-1}(y) \equiv \sqrt{y} : D_{f_2^{-1}} = E_{f_2}, E_{f_2^{-1}} = D_{f_2}$

Зам-ие. Ф-ии f_1 и f_2 считаются совпадающими (равными): $f_1 = f_2$, если $D_{f_1} = D_{f_2} = X$ и $\forall x \in X \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$. В связи с этим ф-ии f_1 и f_2 из ~~разобранных~~ последних двух примеров, как имеющие разные области опр-ия, считаются различными: $f_1 \neq f_2$ (несмотря на то, что опр-ся одним и тем же выражением $y = x^2$)

Теорема (о сущ-ии, непр-ти и монотон-ти обр-й ф-ии)

Пусть $y = f(x)$:

1) $D_f = [a, b] \equiv X$

2) строго монотонна } на X
3) непрерывна }

Тогда

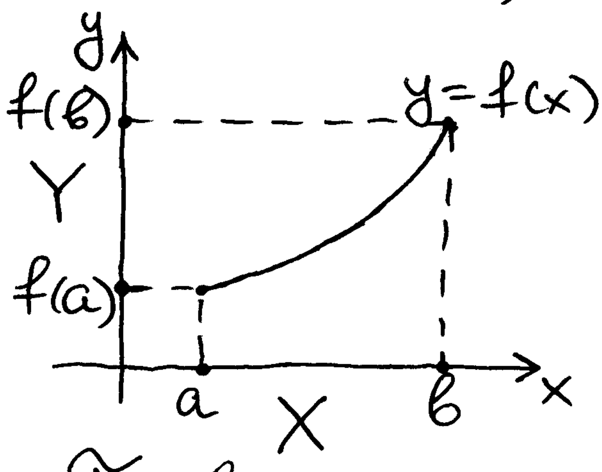
1) $E_f = [f(a), f(b)] \equiv Y$

2) сущ-ет $x = f^{-1}(y)$

3) f^{-1} строго монотонна } на Y
4) f^{-1} непрерывна }

Зам-ие. Ф-я наз-ся монотонной, если она монотонна на D_f. Поэтому вместо слов: пусть ф-я монотонна на $D_f = X$ можно говорить просто – пусть ф-я монотонна (ан-ое зам-ие относится и к непр-ти)

Δ Пусть для опр-ти ф-я $y = f(x)$ возрастает на $[a, b]$ (случай убыв-ей ф-ии рассм-ся полностью ан-но)



С геометр-й точки зрения содерж-ие теоремы весьма наглядно и справ-ть всех её утв-й не вызывает сомнений

Приведём строгое док-во каждого из утв-й теоремы

Δ 1) В силу непр-ти ф-ии $f(x)$ и теоремы о прохождении непр-й ф-ии через любое промежуточное значение | 8.6

$\forall \underline{\underline{C}} \in (f(a), f(b)) \Rightarrow \exists x \in (a,b) : f(x) = \underline{\underline{C}}$, т.е.

$\underline{\underline{C}} \in Y$ - ~~обл-ти з~~ мн-ву зн-й ф-ии f

С другой стороны в силу монотон-ти ф-ии f

$\forall x : a \le x \le b \Rightarrow f(a) \le \underset{\overset{|||}{C}}{f(x)} \le f(b)$

C - произв-ое зн-ие ф-ии

т.е. любое значение ф-ии f обязат-но заключено между $f(a)$ и $f(b)$

Итак, мы получили, что

$f(a) \le \underline{\underline{C}} \le f(b) \Leftrightarrow C \in Y$ (т.е. $\underline{\underline{C}}$ = нек-му $f(x)$, где $x \in [a,b]$)

Но эта равносильность и означает, что

$Y = [f(a), f(b)]$ Δ1)

Δ2) Согласно опр-ю обрат-й ф-ии надо док-ть, что $\forall y \in Y \Rightarrow \exists !\, x \in X : f(x) = y$ $(\Leftrightarrow \exists f^{-1}(y))$

Предположим обратное, т.е., что

$\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \ne x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$

Тогда из нер-ва противоречие

$x_1 \ne x_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right.$ т.е. $f(x_1) \ne f(x_2)$

в силу возр-я f

Но последнее нер-во противо-т тому, что $f(x_1) = f(x_2)$, - значит выдвинутое предположение

~~неверно~~ (равносильное ~~су~~ не сущ-ию обратной ф-ии) неверно, а след-но $f^{-1}(y)$ действ-но сущ-ет! | 8.7

$\Rightarrow \exists f^{-1}(y)$ $\blacktriangle$ 2)

Δ3) Нам надо док-ть, что обр-я ф-я f^{-1} строго монот-на на Y. Док-м, что в рассм-м случае, т.е. в случае возраст-ей "прямой" ф-ии $f(x)$, обр-я ф-я $f^{-1}(y)$ также возрастает

Согласно опр-ю возр-ей ф-ии нужно показать, что

$\forall y_1, y_2 \in Y: y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Допустим обратное, т.е., что

$\exists y_1, y_2 \in Y: y_1 < y_2$ и $f^{-1}(y_1) \equiv x_1 \geq f^{-1}(y_2) \equiv x_2$

Но тогда, поскольку $f(x)$ - возр-я ф-я, то ~~из~~ последнего нер-ва (т.е. из того, что $x_1 \geq x_2$) следует, что

$f(x_1) = f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$, т.е. что $y_1 \geq y_2$, в то время как ~~согласно~~ по нашему предположению $y_1 < y_2$. Полученное противоречие опровергает предпол-ие о том, что $f^{-1}(y)$ не явл-ся возр-ей ф-ей

Итак, $f^{-1}(y)$ действ-но возр-ет на Y $\blacktriangle$ 3)

Δ4) Остаётся док-ть, что ф-я $x = f^{-1}(y)$ непр-на на сегменте Y, т.е. что

$f^{-1}(y)$ непр-на в $\forall$ т. $y_0 \in Y$

Согласно опр-ю непр-ти нужно док-ть, $\boxed{8.8}$
что $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) \equiv x_0$, т.е., что

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall y : \begin{smallmatrix} y\in Y \\ |y-y_0|<\varepsilon \end{smallmatrix} \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$

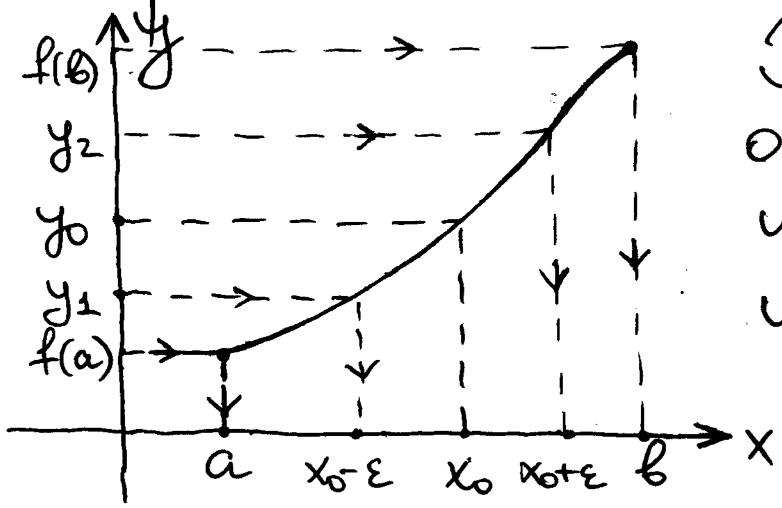
Заметим, что если для нек-го $\varepsilon_0 > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$:
— " — $|$— " —$| < \varepsilon_0$, то при $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$ и том же δ
$\Rightarrow |$ — " — $| < \varepsilon$

Иными словами, если подходящее δ найдётся для нек-го (пол-го) ε_0, то оно тем более найдётся и $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$

Из данного наблюдения вытекает, что при док-ве сущ-я предела или при док-ве непрер-ти той или иной ф-ии мы вполне можем ограни~~ч-ся~~ рассм-ем не всех $\varepsilon > 0$, а лишь $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ некоторого (т.к. при больших ε доказываемые утв-я будут тем более спр-вы). В некоторых случаях это приводит к существ-му упрощ-ю док-в (доказыв~~аемое утв~~ нами утв-ие о непр-ти $f^{-1}(y)$ как раз ~~такой~~ относится к такому случаю)

Итак, имея в виду сделанное зам-ие, док-м, что
$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \Rightarrow \exists \delta > 0 :$ — " — ,

где ε_0 – нек-ое пол-ое число, которое мы выберем ниже



Приведём ещё раз ге-ом-ю иллюстрацию и заметим, что кривая, изображённая на пл-ти xy одновременно служит графиком как ф-ии $y=f(x)$, так и обратной ей ф-ии $x=f^{-1}(y)$. Сейчас мы рассм-м её именно как график ф-ии $x=f^{-1}(y)$ (поскольку мы док-м утв-ие о непр-ти обратной ф-ии). Т.о., теперь мы считаем, что ось y содержит значения аргумента, а ось x – зн-я ф-ии (что символически подчёркнуто направлением стрелочек на пунктирных линиях)

Заметим, что под графиком обр-й ф-ии в собственном смысле этого слова подразум-ют график ф-ии $y=f^{-1}(x)$. Такой график, разумеется, в общем случае уже не ~~будет~~ совпадает с графиком ф-ии $y=f(x)$, но на этом вопросе мы сейчас не будем останавл-ся, продолжая работать лишь с графиком $x=f^{-1}(y)$ (более подробный разговор о графиках обр-х ф-й предстоит в §4)

С геом-й точки зрения ~~опр-ие~~ непр-ть | 8.10

ф-ии $f(y)$ в т. y_0 означает, что

$\forall O_\varepsilon(x_0) \Rightarrow \exists O_\delta(y_0)$: $O_\delta(y_0) \cap Y$ целиком отображается в $O_\varepsilon(x_0)$

I) Пусть $f(a) < y_0 < f(b)$. Тогда в силу возр-я ф-ии $f^{-1}(y) \Rightarrow a < \underset{x_0}{\underset{\parallel}{f^{-1}(y_0)}} < b$

Выберем $\varepsilon_0 > 0$: $O_{\varepsilon_0}(x_0) \subset (a, b)$

Т.к. $\varepsilon < \varepsilon_0$, то очевидно, что $O_\varepsilon(x_0)$ также будет вложено в интервал (a,b):

$O_\varepsilon(x_0) \subset O_{\varepsilon_0}(x_0) \subset (a,b)$ (см. рисунок)

Обозначим $f(x_0-\varepsilon) \equiv y_1$, $f(x_0+\varepsilon) \equiv y_2$

Поскольку $f(x)$ - возр-я ф-я, то $y_1 < y_0 < y_2$

Далее, т.к. ф-я $f^{-1}(y)$ тоже возр-ет, то

$\forall y \in (y_1, y_2) \Rightarrow f^{-1}(y) \in (f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \equiv O_\varepsilon(x_0)$

отвеч-ее ему (у-ку) зн-ие на осях будет $\in$-ть -и-

Для заверш-я док-ва утв-я 4 выберем

$\delta > 0$: $O_\delta(y_0) \subset (\underbrace{y_1, y_2}) \subset Y$ ← кот-й, в свою очередь, $\subset$ -и-

зависят от ε, поэтому δ, разум-ся, $= \delta(\varepsilon)$

Тогда получается, что т.к. $O_\delta(y_0)$ целиком $\in$-т Y

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\forall y \in O_\delta(y_0) \cap Y = O_\delta(y_0) \subset (y_1, y_2) \Rightarrow$

в опр-ии непр-ти точка не ставится (т.е. y_0 не выкалывается)

$\Rightarrow f^{-1}(y) \in O_\varepsilon(x_0)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$

т.е. для любого y из δ-окр-ти т. y_0 соотв-ее значение ф-ии $f^{-1}(y)$ попадает в ε-окр-ть т. x_0 ($=f^{-1}(y_0)$). Но по опр-ю непр-ти это и означает, что $f^{-1}(y)$ непр-на в т. y_0

II) При $y_0=f(a)$ и $y_0=f(b)$ непр-ть обр-й ф-ии док-ся ан-но (надо только учесть, что непр-ть ф-ии $f^{-1}(y)$ в т. $f(a)$ означает непр-ть слева, а в т. $f(b)$ – непр-ть справа) $\not\Delta$ 4)

Док-во теоремы о сущ-ии, монотон-ти и непр-ти **обр-й** ф-ии полностью завершено $\not\Delta$

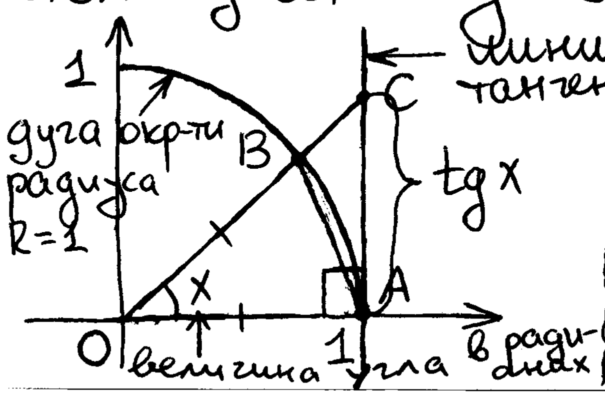
§4 Элементарные функции

Прежде всего введём в рассм-ие и иссл-ем на непр-ть так наз-ые основные (или простейшие) элемент-ые ф-ии

1) Начнём с ф-ии $y=\sin x$

Док-м сперва, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0 = \sin 0$, т.е., что ф-я $\sin x$ непр-на в т. $x=0$

Для этого восполь-ся геометр-им опр-ем sin-са (точнее формулой для площади Δ-ка, являющ-ся следств-м этого опр-я)



Т.к. $\Delta AOB \subset$ сектор $AOB \subset \Delta AOC$, то

$$S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект. } AOB} < S_{\Delta AOC}$$

$$\frac12 1^2 \sin x \qquad \frac12 x^2 \qquad \frac12 1\cdot \operatorname{tg} x$$

Т.о., при $0<x<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0<\sin x<x<\operatorname{tg} x$ $\boxed{8.12}$

В силу нечётности ф-й x, $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ отсюда сразу же имеем

запомните это нер-во! – оно понадобится нам позже

$\underbrace{|\sin x| \le |x|}\le|\operatorname{tg} x|$ при $|x|<\frac{\pi}{2}$ (=во реализуется лишь при $x=0$)

Но т.к. $|\sin x|\le 1$, то на самом деле левое нер-во выполняется при любом вещ-м x:

$\Rightarrow |\sin x|\le|x|$ при $\forall x\in\mathbb{R}$

Последнее нер-во с модулем $\sin x \Leftrightarrow$ но одному двойному нер-ву:

$$\underset{\downarrow\atop 0}{-|x|} \le \underset{\downarrow\atop 0}{\sin x} \le \underset{\downarrow\atop 0}{+|x|}$$

Отсюда, устремляя x к нулю, на основании теоремы о 2-х полицейских мгновенно получаем требуемый результат:

$\sin x\to 0$, $x\to 0$

Теперь док-м непр-ть ф-ии $y=\sin x$ в произв-й т. $x=a\in\mathbb{R}$ (при $\forall x=a\in\mathbb{R}$)

Рассм-м разность

$$\sin x-\sin a = 2\underbrace{\sin\frac{x-a}{2}}_{\to 0}\underbrace{\cos\frac{x+a}{2}}_{\text{огр-на}}$$

Т.к. ф-я $\varphi(x)=\frac{x-a}{2}$ непр-на в т. a, а ф-я (как мы только что док-ли) $\sin\varphi$ непр-на в т. $\varphi(a)=0$, то сложная ф-я

$\sin\varphi(x)=\sin\frac{x-a}{2}$ непр-на в т. a

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\sin\frac{x-a}{2}=\sin\frac{a-a}{2}=0$$

Т.о., $\sin x-\sin a = \underset{\text{в т.}a}{\text{б.м.}}\times\text{огр} = \underset{\text{в т.}a}{\text{б.м.}}\ (\to 0,\ x\to a)$

Но это значит, что

$\sin x \to \sin a$ при $x \to a$,

т.е., что ф-я $\sin x$ непр-на в т.а ч.т.д.

2) Теперь введём ф-ю, обратную к ф-ии $y = \sin x$, точнее к ф-ии $y = f(x) = \sin x : D_f = [-\pi/2, +\pi/2]$

Заметим, что поскольку $\sin x$ опред-н при любом x, то обл-ю опр-я ф-ии $y = \sin x$ по умолчанию (т.е. в случае, если о ней ничего не сказано явно), считается вся вещ-я ось $\mathbb{R}$. Но для $\sin x$ с такой обл-ю опр-я обр-й ф-ии не сущ-ет. Именно поэтому мы и сузили обл-ть опр-я синуса до указанного промежутка

Т.к. ф-я $f(x)$ возрастает и непр-на на $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$, то по док-й теореме об обратной ф-ии сущ-ет ф-я

$x = f^{-1}(y) \equiv \arcsin y : D_{f^{-1}} = [\sin(-\frac{\pi}{2}), \sin(+\frac{\pi}{2})] = [-1, +1]$, обр-я по отн-ию к ф-ии $y = f(x)$

По той же теореме обр-я ф-я (т.е. ф-я $x = \arcsin y$) возраст-ет и непр-на на отр-ке $[-1, +1]$

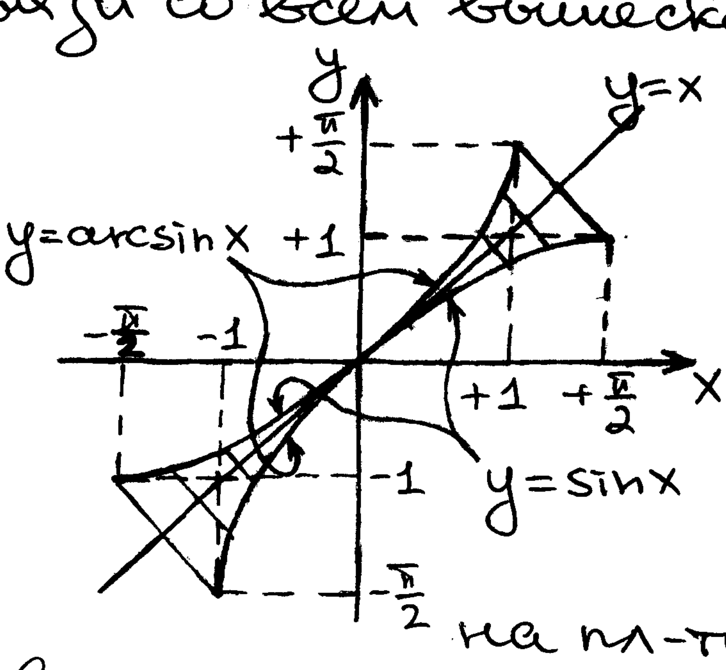
Теперь обсудим вопрос, касающийся обоз-н-ия зависимых и независимых перем-ых и связанный с ним вопрос о графике обратной ф-ии

Итак, заметим сначала, что для нас не яв-

ляется принципиальным то, каким обра-
зом мы обозн-ем аргумент и зн-я ф-ии. В том
смысле, что переход к **новым** обозн-ям для за-
вис-й и незав-й перем-ых не явл-ся, разум-ся,
переходом к новой ф-ии, т.е. к новому зако-
ну или правилу, связывающему эти перемен-
ные. Напр-р, мы считаем, что $y=x^2$ и $\beta=\alpha^2$
суть одна и та же ф-ия (при условии, конеч-
но, что x и $\alpha \in$ одному и тому же мн-ву X)
В связи с тем, что это замеч-ие распрост-
раняется на совершенно любые (в том числе
и обратные) ф-ии, получается, что не толь-
ко $x=f^{-1}(y)$, но и, скажем, $\beta=f^{-1}(\alpha)$ и даже
$y=f^{-1}(x)$ явл-ются ф-ей, обр-й по отн-ю к ф-ии
$y=f(x)$
Имея это в виду, при построении на коор-
д-й пл-ти XOY графика ф-ии, обр-й к ф-ии
$y=f(x)$, которая, как я напомню, по умолча-
нию обозн-ся через $x=f^{-1}(y)$, в роли незави-
симой пер-й выбирают x, а в роли зависимой
-y (т.е. по сравн-ю со стандартным обозн-ем
x и y меняются ролями (местами)). Это согла-
шение (о ~~принципе~~ выборе обозн-й пер-х) весь-
ма естест-но и удобно, т.к. при таком под-
ходе взаимосвязь между прямой и обрат-

ной ф-ии (на уровне графиков) становится более наглядной. Теперь (после принятия указ-го соглашения) график ф-ии, обр-й к $y = f(x)$, т.е. график ф-ии $y = f^{-1}(x)$, как несложно видеть (убедитесь самост-но), получается из графика исходной ф-ии $f(x)$ отражением относит-но прямой $y = x$. Заметим, что, как уже подчёркивалось выше, **в** случае исполь-я обозн-я $x = f^{-1}(y)$ графики "прямой": $y = f(x)$ и обрат-й: $x = f^{-1}(y)$ ф-й на пл-ти XOY совпадают (меняется лишь ~~смысл~~ назначение осей: в первом случае на оси x находятся зн-ия **незав**исимой пер-й, а на оси y - завис-й, а во втором наоборот)

Вернёмся к ф-ии $y = f(x) = \sin x$ и изобразим график обр-й к ней ф-ии, под которым в связи со всем вышесказ-м мы понимаем



теперь график ф-ии $y = \arcsin x$ (именно в таких обозн-ях!); ф-я $x = \arcsin y$ хоть и явл-ся тем же arcsin-ом (т.е. той же ф-ей), но её график на пл-ти XY выглядит иначе, совпадая с графиком ф-ии $y = f(x)$

Задание. Док-ть самост-но: **8.16**

а) непр-ть $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (в тех точках, в которых они опр-ны), т.е. оставшихся тригонометр-х ф-й

б) существ-ие и непр-ть соотв-х обр-х ф-й (ф-ии, обр-ые к тригон-им, наз-ют также обр-ми тригоном-ми ф-ми)

(В случае затруднений см. Ильин, Позняк, гл IV, §5 или конспект Бутузова, гл III, §4)

Дополн-но:

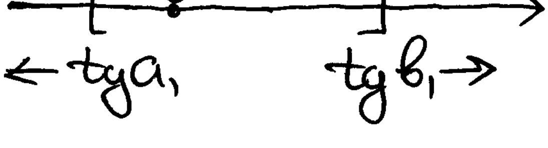
5) Рассм-м ф-ю $y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x$ и $\cos x$ непр-ны $\Rightarrow$ tg непр-на $\forall x: \cos x \neq 0$, т.е. $\forall x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$

6) На любом отр-ке $[a_1, b_1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ ф-я $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ возр-ет и непр-на $\Rightarrow$ на любом отр-ке $[a_1, b_1]$ у ф-ии $f(x)$ сущ-ет возр-ая и непр-я обратная ф-я $x = f^{-1}(y) \equiv \operatorname{arctg} y$: $D_{f^{-1}} = [\operatorname{tg} a_1, \operatorname{tg} b_1]$

Но т.к. $\lim\limits_{a_1 \to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} a_1 = -\infty$, а $\lim\limits_{b_1 \to +\frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} b_1 = +\infty$, то

$\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}: y \in [\operatorname{tg} a_1, \operatorname{tg} b_1]$



Т.о., ф-я $x = \operatorname{arctg} y$ (ввиду произволь-ти a_1 и b_1) на самом деле опр-на для соверш-но любого $y \in \mathbb{R}$, т.е. сущ-ет ф-я $x = f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

8.17

Похожие рассуждения использ-ся и при опр-ии нек-х других обр-х ф-й, рассм-~~ых~~ в этом §-фе

(при ~~этом~~ она ~~будет~~ явл-ся обр-й к ф-~~ии~~ $y=f(x)=\operatorname{tg}x:\ D_f=(-\pi/2,+\pi/2))$

Т.о., мы рассм-ли 8 основных элем-х ф-й (тригонометр-ие и обратные к ним). Рассм-м оставшиеся три

9) Из школьного курса нам известно опр-ие и св-ва степени с рацион-м показат-ем:

a^r, где $a>0$, $r\in\mathbb{Q}$,

т.е. фактически изв-на показательная ф-я

$y=f_1(x)=a^x:\ D_{f_1}=\mathbb{Q},\ a>0$

Оказыв-ся, опр-ие степени пол-го числа a можно обобщить (исп-я, напр, понятие точной верхней грани) на случай произв-го вещ-го показателя, т.е. фактически получить ф-ю

$y=f_2(x)=a^x:\ D_{f_2}=\mathbb{R},\ a>0$,

причём так, что все св-ва, справедливые для f_1 (т.е. для "рационального случая") будут спра-в-вы и для ф-ии f_2 (т.е. для "вещ-го сл-я")

Дадим такое опр-ие

Пусть сперва $a>1$, $x\in\mathbb{R}$

Опр $a^x=\sup\{a^r \mid r\in\mathbb{Q} \text{ и } r<x\}$

сравните с опр-м суммы и произв-я вещ-х чисел

Пусть теперь $0<a<1$, $x\in\mathbb{R}$

Опр $a^x = \underbrace{(1/a)}_{>1 \text{ — см. предыд-ее опр-ие}}^{-x}$

Зам-ие. Т.к. $1/a>1$, а $-x$ (также как и x) $\in\mathbb{R}$, то ввиду предыд-го опр-я, что такое $(1/a)^{-x}$ мы уже знаем

Наконец, если $a=1$, то a^x по опр-ю $\equiv 1$:

Опр $1^x = 1$ при $\forall x\in\mathbb{R}$

Дополн-но:

Зам-ие. Можно док-ть, что при $a>1$ спр-во: $\sup\{a^r \mid r\in Q$ и $r<x\} = \inf\{a^r \mid r\in Q$ и $r>x\}$. Это рав-во позволяет дать равносильное приведённому выше опр-ие a^x при $a>1$ через фигурир-ий в нём inf-м

Задание. Док-ть сам-но:

а) Непр-ть ф-ии $y=a^x \equiv f(x)$

б) $\exists$-ие и непр-ть ф-ии $x=f^{-1}(y)\equiv \log_a y$, обр-й к ф-ии $y=a^x$