

Экзаменационные вопросы по ТФКП.

Вопрос 1. Задача.

- 1 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$
- 2 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx$
- 3 Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$
- 4 Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 9} dx$
- 5 Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$
- 6 Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx$
- 7 Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^4 + 1)} dx (a > 0)$
- 8 Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)} dx (a > 0)$
- 9 Определить число корней уравнения в правой полуплоскости
$$z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0$$
- 10 Определить число корней уравнения в правой полуплоскости $z^3 - 4z^2 + 5 = 0$
- 11 Определить число корней уравнения в правой полуплоскости $z^7 - 2z - 5 = 0$
- 12 Определить число корней уравнения в правой полуплоскости $z^5 + 5z^4 - 5 = 0$
- 13 Определить число корней уравнения в правой полуплоскости $z^3 - 2z - 5 = 0$

14 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^6 - 6z + 10 = 0, |z| < 1$

15 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^4 - 3z^3 - 1 = 0, |z| < 2$

16 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^3 + z + 1 = 0, |z| < 1/2$

17 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^5 + z^2 + 1 = 0, |z| < 2$

18 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^8 + 6z + 10 = 0, |z| < 1$

19 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^4 - 5z + 1 = 0, 1 < |z| < 2$

20 Пользуясь теоремой Руше, найти число корней уравнения в данной области
 $z^6 - 8z + 10 = 0, 1 < |z| < 3$

Вопрос 2. Элементарные операции с комплексными числами.

Элементарные функции комплексной переменной.

21 Операция сложения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Неравенства треугольника.

22 Операция умножения комплексных чисел. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны модуль и аргумент произведения с модулями и аргументами сомножителей?

23 Операция деления комплексных чисел. Как связаны модуль и аргумент частного с модулями и аргументами делимого и делителя?

24 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны модули и аргументы комплексно сопряженных чисел?

- 25 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Как связаны вещественные и мнимые части комплексно сопряженных чисел?
- 26 Операция возведения комплексного числа в целую степень. Как меняются модуль и аргумент при возведении в целую степень? Формула Муавра.
- 27 Формы записи комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа и их геометрический смысл. Формула Эйлера.
- 28 Операция извлечения корня n -той степени из комплексного числа. Как меняются модуль и аргумент при извлечении корня n -той степени? Как располагаются значения корня n -той степени на комплексной плоскости?
- 29 Формы записи комплексного числа. Вещественная и мнимая части комплексного числа. Выражения модуля и аргумента комплексного числа через вещественную и мнимую части.
- 30 Операция комплексного сопряжения и ее свойства. Ее геометрическая интерпретация. Выражение вещественной и мнимой частей комплексного числа через пару комплексно сопряженных чисел?
- 31 Запишите функцию $f(z)=z^2$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 32 Запишите функцию $f(z)=1/z$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 33 Запишите выражение для функции Жуковского. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 34 Запишите функцию $f(z)=e^z$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции. Чему равен период функции e^z ?
- 35 Запишите функцию $f(z)=\sin(z)$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.

- 36 Запишите функцию $f(z)=\cos(z)$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 37 Запишите функцию $f(z)=\sqrt{z}$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ в виде $f(z)=Re^{i\Phi}$. Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 38 Запишите функцию $f(z)=Ln(z)$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 39 Запишите функцию $f(z)=ln(z)$, где $z=x+iy$ в виде $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 40 Запишите функцию $f(z)=Ln(z)$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ в виде $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$.
Однозначна ли эта функция? Если нет, то как выделить однозначные ветви?
- 41 Запишите функцию $f(z)=ln(z)$, где $z = \rho e^{i\varphi}$ в виде $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$.
Однозначна ли эта функция? Укажите области однолиственности и аналитичности этой функции.
- 42 Как определяется функция $f(z)=z^a$ при различных a ?

Вопрос 3. Понятие аналитической функции.

43 Что такое бесконечно удаленная точка комплексной плоскости?

Арифметические действия с бесконечно удаленной точкой.

44 Определение однозначной функции. Определение однолистной функции.

Примеры

45 Связь между свойствами однозначности и однолиственности прямой и обратной функции. Примеры

46 Отличие производной функции комплексной переменной от производной функции действительной переменной.

47 Определение аналитической функции. Пример. Приведите пример функции, не являющейся аналитической.

- 48 Определение аналитической функции. Пример. Приведите пример функции, не являющейся аналитической.
- 49 Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции.
- 50 Запишите условия Коши-Римана для вещественной и мнимой части аналитической функции в полярных координатах.
- 51 Запишите условия Коши-Римана для модуля и аргумента аналитической функции.
- 52 Сформулируйте необходимые и достаточные условия аналитической функции.
- 53 Запишите производную аналитической функции $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ в различных формах.
- 54 Кратко сформулируйте основные свойства аналитических функций.
- 55 Определение функции, аналитической в замкнутой области.
- 56 Как связаны аналитичность функции и гармоничность ее вещественной и мнимой частей?
- 57 Геометрический смысл модуля производной аналитической функции.
- 58 Геометрический смысл аргумента производной аналитической функции.
- 59 Сформулируйте теорему о нулях аналитической функции.
- 60 Сформулируйте следствия теоремы о нулях аналитической функции.
- 61 Сформулируйте теорему единственности определенной аналитической функции.
- 62 Опишите возможные множества задания аналитической функции.
- 63 Что такое нуль аналитической функции? Что такое нуль n -того порядка аналитической функции? Опишите поведение аналитической функции в окрестности нуля n -того порядка.

- 64 Определение правильной точки. Определение особой точки. Примеры
- 65 Запишите интегральную формулу для n -той производной аналитической функции.

Вопрос 4. Интеграл по кривой на комплексной плоскости. Теорема Коши.
Интегральная формула Коши.

- 66 Определение интеграла от функции комплексной переменной по кривой на комплексной плоскости.

- 67 Кратко сформулируйте основные свойства $\int_C f(z)dz$.

- 68 Запишите формулу вычисления $\int_C f(z)dz$ при помощи интегрирования по параметру.

- 69 Чему равен $\int_{|z-z_0|=R_0} \frac{dz}{z-z_0}$?

- 70 Запишите формулу замены переменной в $\int_C f(z)dz$.

- 71 Сформулируйте теорему Коши для односвязной области.

- 72 Сформулируйте теорему Коши для интеграла по границе односвязной области от аналитической функции.

- 73 Сформулируйте теорему Коши для многосвязной области.

- 74 Что такое неопределенный интеграл от $f(z)$?

- 75 Сформулируйте условия аналитичности неопределенного интеграла от $f(z)$?

- 76 Что такое первообразная функции $f(z)$? Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

- 77 Запишите формулу Коши-Адамара. Сформулируйте условия ее применимости.

- 78** Запишите интегральную формулу Коши. Сформулируйте условия ее применимости.
- 79** Запишите формулу среднего значения.
- 80** Сформулируйте принцип максимума модуля аналитической функции.
- 81** Сформулируйте принцип минимума модуля аналитической функции.
- 82** Что такое интеграл типа Коши?
- 83** Сформулируйте теорему о возможности дифференцирования интеграла типа Коши под знаком интеграла.
- 84** Сформулируйте свойства интеграла типа Коши.
- 85** Сформулируйте теорему о производных высших порядков аналитической функции. Запишите интегральную формулу для n -той производной аналитической функции.
- 86** Сформулируйте теорему Морера.
- 87** Сформулируйте теорему Лиувилля.
- 88** Определение целой функции. Пример. Сформулируйте основные свойства целой функции.
- 89** Что такое криволинейный интеграл, зависящий от параметра?
- 90** Сформулируйте теорему о дифференцировании криволинейного интеграла по параметру.

Вопрос 5. Числовые и функциональные ряды.

- 91** Что такое числовой ряд? Что такое частичная сумма ряда? Что такое сумма ряда? Что такое остаток ряда?
- 92** Определение сходящегося числового ряда. Определение расходящегося числового ряда. Примеры

- 93** Сформулируйте критерий Коши для числового ряда.
- 94** Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
- 95** Сформулируйте признак Даламбера. Сформулируйте признак Даламбера в предельной форме.
- 96** Сформулируйте признак Коши. Сформулируйте признак Коши в предельной форме.
- 97** Что такое функциональный ряд? Что такое частичная сумма ряда? Что такое сумма ряда? Что такое остаток ряда?
- 98** Сформулируйте критерий Коши сходимости функционального ряда.
- 99** Определение равномерно сходящегося функционального ряда. Примеры
- 100** Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.
- 101** Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
- 102** Сформулируйте условия непрерывности суммы функционального ряда.
- 103** Сформулируйте условия, при которых возможно почленное интегрирование функционального ряда.
- 104** Сформулируйте теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 105** Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для рядов аналитических функций.
- 106** Сформулируйте теорему Абеля для степенного ряда.
- 107** Что такое круг сходимости степенного ряда? Что такое радиус сходимости степенного ряда?
- 108** Запишите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

- 109 Укажите область равномерной сходимости степенного ряда.
- 110 Укажите область, где возможно почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Меняется ли при этом радиус сходимости?
- 111 Пусть степенной ряд с центром в точке z_0 сходится к функции $f(z)$. Запишите выражения коэффициентов ряда через значения функции и ее производных в точке z_0 .
- 112 Чему равна сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$?
- 113 Сформулируйте теорему Тейлора.
- 114 Запишите интегральную формулу для коэффициентов ряда Тейлора.
- 115 Чем определяется радиус круга сходимости ряда Тейлора для аналитической функции?
- 116 Запишите ряды для e^z , $\sin z$, $\cos z$.
- 117 Сформулируйте теорему о наличии особой точки на границе круга сходимости.

Вопрос 6. Ряд Лорана. Классификация изолированных особых точек. Вычеты.

- 118 Что такое ряд Лорана? Что представляет собой область его сходимости?
Примеры
- 119 Сформулируйте теорему о разложимости функции в ряд Лорана.
- 120 Что такое неизолированная особая точка. Примеры. В окрестности каких особых точек нельзя раскладывать функцию в ряд Лорана?
- 121 Определение изолированной особой точки. Примеры.
- 122 Определение устранимой особой точки. Определение устранимой бесконечно удаленной особой точки. Примеры

- 123** Сформулируйте теорему об устранимой особой точке. Как можно представить функцию в окрестности устранимой особой точки? Что можно сказать о пределе функции в устранимой особой точке?
- 124** Определение полюса. Определение полюса в бесконечно удаленной точке. Примеры
- 125** Сформулируйте теорему о полюсе. Как можно представить функцию в окрестности полюса? Что можно сказать о пределе функции в полюсе?
- 126** Определение существенно особой точки. Определение существенно особой бесконечно удаленной точки. Примеры.
- 127** Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса. Что можно сказать о пределе функции существенно особой точке?
- 128** Определение вычета функции в изолированной особой точке. Определение вычета функции в бесконечно удаленной изолированной особой точке. В каких точках нельзя считать вычеты?
- 129** Сформулируйте основную теорему теории вычетов.
- 130** Чему равен вычет в устранимой особой точке? Что можно сказать о вычете в бесконечно удаленной устранимой особой точке? Примеры
- 131** Чему равен вычет в полюсе первого порядка? Запишите формулу вычисления вычета в полюсе n -го порядка. Примеры
- 132** Как считать вычет в существенно особой точке?
- 133** Как связан вычет в бесконечно удаленной изолированной особой точке с вычетами в других изолированных особых точках?
- 134** Определение мероморфной функции. Примеры
- 135** Напишите две формулы для вычисления вычета в полюсе первого порядка.
- 136** Сформулируйте теорему о сумме вычетов.

137 Что такое кольцо сходимости ряда Лорана? Как определяются меньший и больший радиусы кольца сходимости?

Вопрос 7. Применение вычетов. Конформные отображения. Операционное исчисление.

138 Сформулируйте теорему о вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ при помощи теории вычетов.

139 Сформулируйте лемму Жордана для верхней полуплоскости.

140 Сформулируйте лемму Жордана для нижней полуплоскости.

141 Сформулируйте лемму Жордана для левой полуплоскости.

142 Сформулируйте лемму Жордана для правой полуплоскости.

143 Сформулируйте теорему о вычислении несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx$ при помощи теории вычетов.

144 Определение логарифмической производной. Особые точки логарифмической производной. Определение логарифмического вычета.

145 Чему равен логарифмический вычет в нуле m -того порядка. Чему равен логарифмический вычет в полюсе n -того порядка.

146 Сформулируйте теорему о логарифмическом вычете.

147 Сформулируйте принцип аргумента.

148 Сформулируйте теорему Руше.

149 Сформулируйте основную теорему высшей алгебры.

150 Определение конформного отображения в точке. Определение конформного отображения области на область.

151 Сформулируйте необходимое и достаточное условие конформности отображения.

- 152 Сформулируйте принцип соответствия границ.
- 153 Сформулируйте теорему Римана.
- 154 На что отображается комплексная плоскость функцией Жуковского? Запишите обратную функцию Жуковского.
- 155 Как преобразуется оператор Лапласа при конформном отображении?
- 156 Сформулируйте задачу Робэна.
- 157 Что такое функция ограниченной степени роста?
- 158 Что такое одностороннее преобразование Лапласа?
- 159 Для каких p существует изображение $F(p)$? Сформулируйте соответствующую теорему.
- 160 Каковы аналитические свойства изображения $F(p)$? Сформулируйте соответствующую теорему.
- 161 Сформулируйте теорему запаздывания.
- 162 Чему равно изображение производной? Чему равна производная изображения?
- 163 Чему равно изображение интеграла?
- 164 Чему равно изображение свертки?
- 165 Запишите интеграл Дюгамеля.
- 166 Сформулируйте теорему Меллина.
- 167 Чему равно изображение произведения?