ГЛАВА 1

Тензоры

1. Правило умножения «строчка на столбец»

1.1. Пример. В этом параграфе мы детально применим наше правило умножения матриц «строчка на столбец» для того, чтобы переходить от тензорной формы записи умножения матриц к матричной форме. Причем это будем делать на примерах. Мы пользуемся обозначениями Эйнштейна. Начнем со следующего простейшего случая:

$$\boxed{a^i b_i.} \tag{1.1}$$

Заметим, что в случае одного индекса у буквы верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. В таком случае рассмотрим следующие матрицу–столбец и матрицу–строчку:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{1.2}$$

Наше правило «строчка на столбец» в данном случае означает, что мы можем умножить строчку B на столбец A и поэтому справедливы равенства

$$a^i b_i = b_i a^i = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = BA. \tag{1.3}$$

Заметим, что при этом нам пришлось поменять местами сомножители в сумме произведений (1.1).

1.2. Пример. Теперь рассмотрим следующий пример. Как записать в матричной форме следующую сумму произведений

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.} \tag{1.4}$$

Поскольку у обоих букв индекс нижний, то эти индексы нумеруют столбцы следующих матриц–строчек:

$$A = (a_1, \ldots, a_n), \quad B = (b_1, \ldots, b_n). \tag{1.5}$$

Но умножить строчку на строчку мы не можем. Найдем транспонированные матрицы к матрицам–строчкам (1.5). Они имеют следующий вид:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Но теперь у нас справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = AB^T, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = BA^T. \tag{1.8}$$

Заметим, что сумма произведений (1.4) — это число и поэтому AB^T и BA^T тоже число и справедливы следующие равенства:

$$AB^T = (AB^T)^T = (B^T)^T A^T = BA^T. \tag{1.9}$$

Таким образом, мы пришли к выводу о том, что если в сумме произведений индекс суммирования у обоих элементов матриц находится внизу нужно при записи в матричной форме переходить к транспонированной матрице.

1.3. Пример. Теперь рассмотрим следующую сумму произведений:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a^i b^i.} \tag{1.10}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то мы введем следующие матрицы–столбцы:

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Умножить столбец на столбец мы не можем. Поэтому как в предыдущем случае рассмотрим соответствующие транспонированные матрицы:

$$A^T = (a^1, \dots, a^n), \quad B^T = (b^1, \dots, b^n). \tag{1.12}$$

Но тогда справедливы следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = (a^1, \dots, a^n) \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} = A^T B, \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^i b^i = \sum_{i=1}^{n} b^i a^i = (b^1, \dots, b^n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = B^T A. \tag{1.14}$$

Заметим, как и в предыдущем примере, что $A^T B = B^T A$.

Теперь наша задача рассмотреть разнообразные суммы произведений элементов квадратных матриц $n \times n$.

1.4. Пример. Начнем со следующего примера:

$$\boxed{a_s^j b_k^s,} \tag{1.15}$$

здесь мы используем обозначения Эйнштейна. В данном случае мы используем один верхний и один нижний индексы для задания элемента матрицы. Верхний индекс нумерует строчки матрицы, а нижний индекс нумерует столбцы матрицы. Итак, введем матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}, \quad A^j = (a_1^j, \dots, a_n^j), \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.16}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} = \|B_1, \dots, B_n\|, \quad B_k = \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.17}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$a_s^j b_k^s = (a_1^j, \dots, a_n^j) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ \vdots \\ b_k^n \end{pmatrix} = A^j B_k = \{AB\}_k^j. \tag{1.18}$$

Напомним, что символом $\{C\}_k^j$ мы обозначаем операцию извлечения из матрицы C ее элемент, расположенный на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

1.5. Определение. Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Введем операции извлечения j–ой строчки из матрицы A и операцию извлечения k–го столбца из матрицы A следующим образом:

$$\{A\}^j = A^j, \quad \{A\}_k = A_k, \quad A = \|A_1, \dots, A_n\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|.$$

1.6. Пример. Теперь рассмотрим вот такой пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a_s^j b_s^k.} \tag{1.19}$$

Поскольку нижний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b_1^k, \dots, b_n^k), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$(B^k)^T = \{B^T\}_k, \tag{1.21}$$

причем индекс в правой и в левой частях носят разный характер. В левой части индекс k совпадает с верхним индексом, которым мы обозначаем элементы матрицы $B = (b_s^k)$, а в правой части индексом k мы обозначаем k–ый столбец матрицы B^T.

Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j b_s^k = (a_1^j, \dots, a_n^j) \begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix} = A^j (B^k)^T =$$
$$= \{A\}^j \{B^T\}_k = \{AB^T\}_k^j = \{AB^T\}^{jk}, \tag{1.22}$$

где символом $\{C\}^{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента из матрицы C, находящегося на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Тоже мы обозначаем символом $\{C\}^j_k$.

1.7. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^s_k.} \tag{1.23}$$

Поскольку верхний индекс нумерует строчки, то

$$A_j = \begin{pmatrix} a^1_j \\ \vdots \\ a^n_j \end{pmatrix}, \quad (a^1_j, \ldots, a^n_j) = (A_j)^T, \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\sum_{s=1}^{n} a^s_j b^s_k = (a^1_j, \ldots, a^n_j) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^n_k \end{pmatrix} = (A_j)^T B_k = \\ = \{A^T\}^j \{B\}_k = \{A^T B\}^j_k = \{A^T B\}_{jk}, \tag{1.25}$$

где символом $\{C\}_{jk}$ мы обозначили операцию извлечения элемента матрицы C, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца.

1.8. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk}.} \tag{1.26}$$

Итак, в этом примере оба индекса верхние. Тогда первый индекс нумерует строчки матрицы,а второй индекс нумерует столбцы матрицы. Введем следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a^{11} & \cdots & a^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n1} & \cdots & a^{nn} \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}, \quad A^j = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}), \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.27}$$

$$B = \begin{pmatrix} b^{11} & \cdots & b^{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n1} & \cdots & b^{nn} \end{pmatrix} = \|B^1, \ldots, B^n\|, \quad B^k = \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1.28}$$

С учетом введенных обозначений справедливы следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{sk} = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \{B\}_k = \{AB\}^{jk}. \tag{1.29}$$

1.9. Пример. Рассмотрим такой пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks}.} \tag{1.30}$$

Заметим, что поскольку второй верхний индекс нумерует столбцы, то

$$B^k = (b^{k1}, \ldots, b^{kn}), \quad (B^k)^T = \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{js} b^{ks} = (a^{j1}, \ldots, a^{jn}) \begin{pmatrix} b^{k1} \\ \vdots \\ b^{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= A^j (B^k)^T = \{A\}^j \{B^T\}_k = \{AB^T\}^j_k = \{AB^T\}^{jk}. \tag{1.32}$$

1.10. Пример. Рассмотрим теперь следующий пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk}.} \tag{1.33}$$

В обозначениях предыдущих двух примеров получаем следующие равенства:

$$\sum_{s=1}^{n} a^{sj} b^{sk} = (a^{1j}, \ldots, a^{nj}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = (A^j)^T B^k = \{A^T\}_j B^k = \{A^T B\}^{jk}.$$

1.11. Пример. Следующий пример:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a_s^j b^{sk}.} \tag{1.34}$$

В этой сумме произведений во множителе a_s^j индекс j нумерует строчки, а индекс s нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{s=1}^{n} a_s^j b^{sk} = (a_1^j, \ldots, a_n^j) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \{A\}^j \{B\}_k = \{AB\}^{jk}. \tag{1.35}$$

1.12. Пример. Следующий пример такой:

$$\boxed{\sum_{s=1}^{n} a_j^s b^{sk}.} \tag{1.36}$$

Здесь, во множителе a_j^s индекс s нумерует строчки, а индекс j нумерует столбцы; во множителе b^{sk} индекс s нумерует строчки, а индекс k нумерует столбцы. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$a_j^s b^{sk} = (a_j^1, \ldots, a_j^n) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{nk} \end{pmatrix} = \\ = (A_j)^T B^k = \{A^T\}^j \{B\}_k = \{A^T B\}^{jk}. \tag{1.37}$$

2. Первое определение тензора: «мистическое»

1.13. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим два базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ в этом линейном пространстве, которые связаны линейным преобразованием

$$\mathbf{e}_{i'} = c_{i'}^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_i = c_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad c_{i'}^i c_j^{i'} = \delta_j^i, \quad c_i^{i'} c_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'}. \tag{1.38}$$

Дадим первое определение тензора.

1.14. Определение. Тензором типа (p, q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется объект, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства

$\mathcal{L}$ задается n^{p+q} координатами $A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}$ (индексы $j_1,\dots,j_p,k_1,\dots,k_q$ независимо принимают значения $1,2,\dots,n$), причем при переходе к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} = c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}, \tag{1.39}$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование. Соответствующий своим координатам $A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}$ тензор будем называть тензором A.

1.15. Иногда, допуская грубую ошибку, тензором называют его координаты $A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}$.

1.16. Пример. Пусть A имеет одну и туже координату во всех базисах — это тензор скаляр типа $(0,0)$.

1.17. Пример. Контравариантный тензор типа $(0,1)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A^{k'} = c^{k'}_k A^k. \tag{1.40}$$

Это набор координат вектора.

1.18. Пример. Ковариантный тензор типа $(1,0)$ имеет n координат, преобразующихся по закону:

$$A_{k'} = c^k_{k'} A_k. \tag{1.41}$$

Это набор координат линейной формы или ковектора.

1.19. Пример. Градиент функции. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}\}$ связаны преобразованием

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'}\mathbf{e}_k, \quad x^k = c^k_{k'} x^{k'}. \tag{1.42}$$

Градиентом функции f называется «вектор»

$$\nabla f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}\mathbf{e}_k.$$

Однако, при переходе к новому базису (1.42) справедлива следующая формула:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x_{k'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} c^k_{k'},$$

т.е. преобразуется как тензор ранга $(0,1)$. Следовательно, градиент функции — не вектор, а ковектор.

1.20. Лемма. Матрица линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ в каждом базисе линейного пространства $\mathcal{L}$ состоит из координат некоторого тензора ранга $(1, 1)$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — два базиса линейного пространства $\mathcal{L}$, связанные равенством (1.42). Заметим, что матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, имеет следующий вид:

$$a_k^j = \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle, \tag{1.43}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — это взаимный базис в сопряженном к $\mathcal{L}$ линейном пространстве $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} a_{k'}^{j'} = \langle \mathbf{e}^{j'}, A\mathbf{e}_{k'} \rangle = \left\langle c_j^{j'} \mathbf{e}^j, A\left(c_{k'}^k \mathbf{e}_k\right)\right\rangle = \\ = c_j^{j'} c_{k'}^k \langle \mathbf{e}^j, A\mathbf{e}_k \rangle = c_j^{j'} c_{k'}^k a_k^j. \end{aligned} \tag{1.44}$$

□

1.21. Лемма. Матрица билинейной формы на линейном пространстве $\mathcal{L}$ в каждом базисе состоит из координат некоторого тензора ранга $(2, 0)$.

Доказательство. В обозначениях доказательства предыдущей леммы справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} b_{j'k'} = B(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = B\left(c_{j'}^j \mathbf{e}_j, c_{k'}^k \mathbf{e}_k\right) = \\ = c_{j'}^j c_{k'}^k B(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = c_{j'}^j c_{k'}^k b_{jk}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

□

1.22. Дадим определение суммы тензоров и умножения тензора на число. Пусть $A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ и $B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}$ — координаты двух тензоров A и B одного типа (p, q), а $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

1.23. Определение. Суммой двух тензоров $A + B$ типа (p, q) называется объект D, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$D_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} := A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} + B_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}. \tag{1.46}$$

Произведением тензора A типа (p, q) на число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется объект $F := \alpha A$, который в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$F_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q} := \alpha A_{j_1 \ldots j_p}^{k_1 \ldots k_q}. \tag{1.47}$$

1.24. Теорема. *Сумма двух тензоров типа (p,q) и произведение тензора типа (p,q) на число $\alpha \in \mathbb{R}$ являются тензорами типа (p,q).*

Доказательство. Второе утверждение очевидно. Поэтому докажем только первое утверждение. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
&D^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} = A^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} + B^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} = \\
&\quad = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} + c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} B^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} = \\
&\qquad = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} \left(A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} + B^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} \right) = \\
&\qquad\qquad = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} D^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}.
\end{aligned}
$$

□

1.25. Дадим определение произведения двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s), которые в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеют координаты

$$
A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} \quad \text{и} \quad B^{i_1\dots i_s}_{l_1\dots l_r} \tag{1.48}
$$

соответственно.

1.26. Определение. Произведением тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) называется объект D, который в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты

$$
D^{k_1\dots k_q i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_p l_1\dots l_r} = A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} B^{i_1\dots i_s}_{l_1\dots l_r}. \tag{1.49}
$$

1.27. Теорема. *Произведение двух тензоров A и B типов (p,q) и (r,s) является тензором типа $(p+r, q+s)$.*

Доказательство. В стандартных обозначениях справедлива следующая цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
&D^{k_{1'}\dots k_{q'} i_{1'}\dots i_{s'}}_{j_{1'}\dots j_{p'} l_{1'}\dots l_{r'}} = A^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} B^{i_{1'}\dots i_{s'}}_{l_{1'}\dots l_{r'}} = \\
&\quad = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} c^{l_1}_{l_{1'}} \cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1} \cdots c^{i_{s'}}_{i_s} B^{i_1\dots i_s}_{l_1\dots l_r} = \\
&\quad = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{l_1}_{l_{1'}} \cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{i_{1'}}_{i_1} \cdots c^{i_{s'}}_{i_s} A^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p} B^{i_1\dots i_s}_{l_1\dots l_r} = \\
&\qquad = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{l_1}_{l_{1'}} \cdots c^{l_r}_{l_{r'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} c^{i_{1'}}_{i_1} \cdots c^{i_{s'}}_{i_s} D^{k_1\dots k_q i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_p l_1\dots l_r}.
\end{aligned}
$$

□

1.28. Для произведения тензоров A и B используется обозначение

$$\boxed{A \otimes B.}$$

1.29. Лемма. В общем случае $A \otimes B \neq B \otimes A$ для тензоров A и B.

Доказательство. Приведем пример. Пусть A и B — тензоры типа $(0,1)$, координаты которых в одном и том же базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ следующие: A^j и B^k. Рассмотрим тензоры $D = A \otimes B$ и $F = B \otimes A$, координаты которых в том же базисе имеют следующий вид:

$$D^{jk} = A^j B^k \quad \text{и} \quad F^{kj} = B^k A^j.$$

Запишем эти координаты в виде следующих матриц:

$$\|D^{jk}\| = \begin{pmatrix} A^1B^1 & \cdots & A^1B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A^nB^1 & \cdots & A^nB^n \end{pmatrix},$$

$$\|F^{kj}\| = \begin{pmatrix} B^1A^1 & \cdots & B^1A^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B^nA^1 & \cdots & B^nA^n \end{pmatrix}.$$

Это две взаимно транспонированные матрицы. Следовательно, $D = A \otimes B \neq F = B \otimes A$. $\square$

1.30. Свертка тензора. Пусть A — тензор типа (p,q), причем $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$. Пусть в произвольном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ он имеет координаты

$$A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}.$$

Выберем у этих координат один верхний и один нижний индекс. Например, пусть это будут индексы k_1 и j_1 и рассмотрим сумму компонент

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A^{\alpha k_2 \ldots k_q}_{\alpha j_2 \ldots j_p} = B^{k_2 \ldots k_q}_{j_2 \ldots j_p}. \tag{1.50}$$

1.31. Определение. Объект B, который в любом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ имеет координаты $B^{k_2 \ldots k_q}_{j_2 \ldots j_p}$, определенные равенством (1.50), называется сверткой тензора A по паре индексов.

1.32. Теорема. *Свертка тензора типа (p,q) по паре индексов представляет собой тензор типа $(p-1, q-1)$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая тензора A типа $(2,1)$, координаты которого в произвольном базисе обозначим символом A^l_{jk}. Рассмотрим свертку

$$B_j = A^k_{jk}$$

и получим закон преобразования для координат B_j. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B_{j'} = A^{k'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} A^{l'}_{j'k'} = \delta^{k'}_{l'} c^{l'}_l c^j_{j'} c^k_{k'} A^l_{jk} = \\ = c^j_{j'} c^k_{k'} c^{k'}_l A^l_{jk} = c^j_{j'} \delta^k_l A^l_{jk} = c^j_{j'} A^k_{jk} = c^j_{j'} B_j.$$

□

1.33. Пример. Рассмотрим тензор A типа $(1,1)$. Его сверткой является тензор типа $(0,0)$, т.е. скаляр, имеющий в любой системе координат $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ одну координату

$$B = A^1_1 + \cdots + A^n_n. \tag{1.51}$$

С целью приобретения навыков в тензорных вычислениях давайте проверим, что тензор B является инвариантом, т.е. скаляром. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$B = A^{j'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} A^{k'}_{j'} = \delta^{j'}_{k'} c^{k'}_k c^j_{j'} A^k_j = c^{k'}_k c^j_{k'} A^k_j = \\ = c^j_{k'} c^{k'}_k A^k_j = \delta^j_k A^k_j = A^j_j. \tag{1.52}$$

1.34. Довольно часто объект, который в каждом базисе задается совокупностью координат, при переходе от одного базиса к другому преобразуется другим образом, нежели закон (1.39). Однако, для специального класса преобразований базиса все же справедлив закон (1.39). Поэтому вводится еще один класс тензоров — *ортогональные тензоры.* Дадим определение.

1.35. Определение. Ортогональным тензором типа (p,q) (p раз ковариантным и q раз контравариантным) в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называется объект, который в каждом ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ задается n^{p+q} координатами $A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$ (индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ независимо принимают значения $1, 2, \ldots, n$), причем при переходе к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ эти координаты преобразуются по формуле

$$A^{k_{1'} \ldots k_{q'}}_{j_{1'} \ldots j_{p'}} = c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}, \tag{1.53}$$

по всем повторяющимся индексам предполагается суммирование.

1.36. Для ортогональных тензоров можно, как и для тензоров, ввести операции сложения тензоров, умножения на число, произведения.

1.37. Пример. Рассмотрим тензор A типа $(2,0)$. Докажем, что число

$$\sum_{j=1}^{n} A_{jj}$$

не является инвариантом. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\sum_{j'=1}^{n'} A_{j'j'} = \sum_{j'=1}^{n'} \delta_{j'}^{k'} A_{j'k'} = \sum_{j'=1}^{n'} \delta_{j'}^{k'} c_{j'}^{j} c_{k'}^{k} A_{jk} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{n'} c_{j'}^{j} c_{j'}^{k} A_{jk} = \{CC^T\}^{jk} A_{jk}.$$

В общем случае

$$\{CC^T\}^{jk} \neq \delta^{jk} \Leftrightarrow CC^T \neq I.$$

Однако, если рассматривать ортогональные преобразования, т.е. матрицы перехода C между ортонормированными базисами, то будет выполнено равенство $C^T C = I$. И тогда число A_{jj} будет инвариантом. Поэтому для ортогональных преобразований можно вести операцию свертки по двум нижним индексам, которая является *тензорной*, т.е. результатом свертки ортогональных тензоров тоже является ортогональным тензором. Ниже после рассмотрения метрического тензора мы поймем в чем здесь причина.

3. Второе определение тензора: полилинейная форма

1.38. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство, а $\mathcal{L}^*$ — соответствующее сопряженное пространство, а символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначены скобки двойственности между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$. Для удобства элементы линейного пространства $\mathcal{L}$ будем обозначать латинскими буквами $x, y, z, \ldots$, а элементы сопряженного пространства $\mathcal{L}^*$ будем обозначать греческими буквами $\xi, \eta, \chi, \ldots$. Дадим определение полилинейной формы.

1.39. Определение. Числовая функция $f = f(x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \chi, \ldots)$ от p векторных аргументов $x, y, z, \ldots$ и q ковекторных аргументов $\xi, \eta, \chi, \ldots$ называется полилинейной, если эта функция линейна по каждому аргументу из $p+q$ аргументов при оставшихся фиксированных $p+q-1$ аргументах. Говорят, что полилинейная форма f имеет тип (p, q).

1.40. Пример. Например, вот такая функция

$$f(x, y; \xi, \eta) = \langle \xi, x\rangle\langle \eta, y\rangle. \tag{1.54}$$

является полилинейной. Действительно, в силу линейности скобок двойственности по обоим аргументам справедливы следующие равенства:

$$\langle \alpha_1\xi^1 + \alpha_2\xi^2, x\rangle\langle \eta, y\rangle = \alpha_1\langle \xi^1, x\rangle\langle \eta, y\rangle + \alpha_2\langle \xi^2, x\rangle\langle \eta, y\rangle,$$

$$\langle \xi, x\rangle\langle \alpha_1\eta^1 + \alpha_2\eta^2, y\rangle = \alpha_1\langle \xi, x\rangle\langle \eta^1, y\rangle + \alpha_2\langle \xi, x\rangle\langle \eta^2, y\rangle,$$

$$\langle \xi, \beta^1 x_1 + \beta^2 x_2\rangle\langle \eta, y\rangle = \beta^1\langle \xi, x_1\rangle\langle \eta, y\rangle + \beta^2\langle \xi, x_2\rangle\langle \eta, y\rangle,$$

$$\langle \xi, x\rangle\langle \eta, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2\rangle = \beta^1\langle \xi, x\rangle\langle \eta, y_1\rangle + \beta^2\langle \xi, x\rangle\langle \eta, y_2\rangle.$$

Теперь заметим, что если, например, зафиксировать ковекторные аргументы $\xi, \eta \in \mathcal{L}^*$, то функция (1.54) будет билинейной функцией от векторных аргументов $x, y \in \mathcal{L}$. Конечно, можно зафиксировать векторный аргумент $x \in \mathcal{L}$ и ковекторный аргумент $\eta \in \mathcal{L}^*$ и мы получим билинейную функцию от аргументов $y \in \mathcal{L}$ и $\xi \in \mathcal{L}^*$.

1.41. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — два базиса в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{e}^{1'}, \ldots, \mathbf{e}^{n'}\}$ — соответствующие взаимные базисы в сопряженном пространстве линейных форм или ковекторов $\mathcal{L}^*$, причем

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{1.55}$$

Тогда

$$\mathbf{e}^{i'} = c^{i'}_i\mathbf{e}^i. \tag{1.56}$$

Доказательство. Справедливы следующие цепочки равенств:

$$\langle \mathbf{e}^{i'}, x\rangle = \langle \mathbf{e}^{i'}, x^j\mathbf{e}_j\rangle = x^j\langle \mathbf{e}^{i'}, \mathbf{e}_j\rangle = x^j\delta^{i'}_j = x^{i'} = c^{i'}_i x^i =$$
$$= c^{i'}_i\langle \mathbf{e}^i, x\rangle = \langle c^{i'}_i\mathbf{e}^i, x\rangle \Leftrightarrow \langle \mathbf{e}^{i'} - c^{i'}_i\mathbf{e}^i, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathbf{e}^{i'} = c^{i'}_i\mathbf{e}^i.$$

□

Справедлива следующая:

1.42. Теорема. *Если числовая функция*

$$f = f(x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \chi, \ldots)$$

от p векторных аргументов $x, y, z, \ldots$ и q ковекторных аргументов $\xi, \eta, \chi, \ldots$ является полилинейной, то наборы чисел

$$F^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} := f(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \ldots, \mathbf{e}^{k_q}), \tag{1.57}$$

$$F^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}} := f(\mathbf{e}_{j_{1'}}, \ldots, \mathbf{e}_{j_{p'}}; \mathbf{e}^{k_{1'}}, \ldots, \mathbf{e}^{k_{q'}}) \tag{1.58}$$

связаны равенствами

$$F^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} = c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} F^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}, \tag{1.59}$$

где старый базис $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ *и новый базис* $\{\mathbf{e}_{1'},\dots,\mathbf{e}_{n'}\}$ *в* $\mathcal{L}$ *связаны равенствами*

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i,$$

а соответствующие взаимные старый и новый базисы $\{\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n\}$ *и* $\{\mathbf{e}^{1'},\dots,\mathbf{e}^{n'}\}$ *в* $\mathcal{L}^*$ *связаны равенствами*

$$\mathbf{e}^{i'} = c^{i'}_i\mathbf{e}^i.$$

Доказательство. В обозначениях формулировки теоремы справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}F^{k_{1'}\dots k_{q'}}_{j_{1'}\dots j_{p'}} &= f(c^{j_1}_{j_{1'}}\mathbf{e}_{j_1},\dots,c^{j_p}_{j_{p'}}\mathbf{e}_{j_p}; c^{k_{1'}}_{k_1}\mathbf{e}^{k_1},\dots,c^{k_{q'}}_{k_q}\mathbf{e}^{k_q}) =\\ &= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} f(\mathbf{e}_{j_1},\dots,\mathbf{e}_{j_p};\mathbf{e}^{k_1},\dots,\mathbf{e}^{k_q}) =\\ &= c^{j_1}_{j_{1'}}\cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1}\cdots c^{k_{q'}}_{k_q} F^{k_1\dots k_q}_{j_1\dots j_p}\end{aligned} \tag{1.60}$$

□

1.43. Заметим, что при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, который однозначно определяет взаимный базис $\{\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$, для полилинейной формы $f = f(x_1,\dots,x_p,\dots;\xi^1,\dots,\xi^q)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}f &= f(x_1,\dots,x_p,\dots;\xi^1,\dots,\xi^q) =\\ &= f(x^{j_1}_1\mathbf{e}_{j_1},\dots,x^{j_p}_p\mathbf{e}_{j_p};\xi^1_{k_1}\mathbf{e}^{k_1},\dots,\xi^q_{k_q}\mathbf{e}^{k_q}) =\\ &= f(\mathbf{e}_{j_1},\dots,\mathbf{e}_{j_p};\mathbf{e}^{k_1},\dots,\mathbf{e}^{k_q})x^{j_1}_1\cdots x^{j_p}_p\xi^1_{k_1}\cdots\xi^q_{k_q}.\end{aligned} \tag{1.61}$$

Отметим, что согласно определению взаимного базиса справедливы следующие равенства:

$$x^{j_s}_s = \langle\mathbf{e}^{j_s}, x_s\rangle \quad \text{для всех} \quad s=\overline{1,p}, \tag{1.62}$$

$$\xi^l_{k_l} = \langle\hat{\mathbf{e}}_{k_l},\xi^l\rangle_* \quad \text{для всех} \quad l=\overline{1,q}, \tag{1.63}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ — это скобки двойственности между $\mathcal{L}^*$ и $\mathcal{L}^{**}$, а $\{\hat{\mathbf{e}}_1,\dots,\hat{\mathbf{e}}_n\}$ — это взаимный базис в $\mathcal{L}^{**}$ к базису $\{\mathbf{e}^1,\dots,\mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$. Как мы установили ранее, справедливо равенство

$$\langle\hat{\mathbf{e}}_j,\xi\rangle_* = \langle\xi,\mathbf{e}_j\rangle \quad \text{для всех} \quad \xi\in\mathcal{L}^*,\quad j=\overline{1,n}.$$

Отсюда и из (1.63) получаем равенство

$$\xi^l_{k_l} = \langle\xi^l,\mathbf{e}_{k_l}\rangle \quad \text{для всех} \quad l=\overline{1,q}, \tag{1.64}$$

С учетом равенств (1.62) и (1.64) продолжим равенства (1.61):

$$f = f(x_1, \dots, x_p, \dots; \xi^1, \dots, \xi^q) = \\ = f(\mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_p}; \mathbf{e}^{k_1}, \dots, \mathbf{e}^{k_q}) \times \\ \times \langle \mathbf{e}^{j_1}, x_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{e}^{j_p}, x_p \rangle \langle \xi^1, \mathbf{e}_{k_1} \rangle \cdots \langle \xi^q, \mathbf{e}_{k_q} \rangle. \quad (1.65)$$

Для дальнейшего нам нужно ввести операцию тензорного произведения векторов и ковекторов. Действительно, определим следующее отображение:

$$\mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} : (x_1, \dots, x_p, \xi^1, \dots, \xi^q) \to \\ \to \langle \mathbf{e}^{j_1}, x_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{e}^{j_p}, x_p \rangle \langle \xi^1, \mathbf{e}_{k_1} \rangle \cdots \langle \xi^q, \mathbf{e}_{k_q} \rangle. \quad (1.66)$$

С учетом этого обозначения мы можем записать полилинейную форму $f = f(x_1, \dots, x_p, \dots; \xi^1, \dots, \xi^q)$ как отображение следующим образом:

$$f = F^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} : (x_1, \dots, x_p, \xi^1, \dots, \xi^q) \to \\ \to F^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p} x^{j_1}_1 \cdots x^{j_p}_p \xi^1_{k_1} \cdots \xi^q_{k_q}. \quad (1.67)$$

Справедливы следующие утверждения:

1.44. Теорема. *Отображение* (1.66) *полилинейно по каждому из тензорных сомножителей.*

Доказательство. Доказательство основано на линейности скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по обеим аргументам. □

1.45. Теорема. *Всякую полилинейную форму однозначно можно записать в виде*

$$\boxed{f = F^{k_1 \dots k_q}_{j_1 \dots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q}} \quad (1.68)$$

и отображение (1.68) *является полилинейной формой.*

Доказательство. Прямое утверждение фактически нами доказано. А обратное утверждение вытекает из (1.67) с учетом (1.62) и (1.64), а также линейности скобок двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ по обоим аргументам. □

1.46. Для полилинейных форм, у которых одинаковые количества векторных аргументов и ковекторных аргументов, можно ввести сумму полилинейных форм. Также можно ввести произведение полилинейной формы на число. Эти операции делают из полилинейных форм типа (p, q) линейное пространство, которое мы обозначим символом T^q_p.

1.47. Теорема. *Набор из n^{p+q} всевозможных отображений*

$$\left\{\mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q}\right\}, \tag{1.69}$$

где индексы $j_1, \ldots, j_p, k_1, \ldots, k_q$ независимо побегают множество первых n натуральных чисел, образуют базис линейного пространства T_p^q полилинейных форм типа (p, q).

Доказательство. Полнота вытекает из теоремы 1.45. Докажем линейную независимость. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} \tag{1.70}$$

и приравняем ее нулевой полилинейной форме. Тогда получим равенство

$$\alpha^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} = \theta. \tag{1.71}$$

Применим обе части равенства (1.71) к следующему упорядоченному набору векторов и ковекторов $(\mathbf{e}_{l_1}, \ldots, \mathbf{e}_{l_p}; \mathbf{e}^{s_1}, \ldots, \mathbf{e}^{s_q})$. Тогда получим равенство

$$\begin{gathered}
\alpha^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_p}_{l_p} \delta^{s_1}_{k_1} \cdots \delta^{s_q}_{k_q} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \alpha^{s_1 \ldots s_q}_{l_1 \ldots l_p} = 0 \quad \text{для всех индексов} \quad l_1, \ldots, l_p, s_1, \ldots, s_q \in \overline{1, n}.
\end{gathered}$$

Линейная независимость доказана. $\square$

1.48. Теперь мы в состоянии дать второе определение тензора.

1.49. Определение. Тензором типа (p, q) называется полилинейная форма типа (p, q). Координатами тензора в заданном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ называются коэффициенты разложения полилинейной формы по базису (1.69) линейного пространства T_p^q.

1.50. Теорема. *Определения тензора* 1.49 *эквивалентно определению тензора* 1.14.

Доказательство. Шаг 1. Доказательство того, что из определения 1.49 вытекает утверждение из определения 1.14 основано на результатах теорем 1.42 и (1.45).

Шаг 2. Доказательство в обратную сторону основано на том что по коэффициентам

$$A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p}$$

можно составить следующую полилинейную форму:

$$A = A^{k_1 \ldots k_q}_{j_1 \ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q}. \tag{1.72}$$

И нам осталось доказать инвариантность объекта A, т.е. независимость его от выбора базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — другой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, причем

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{gathered}
A' = A^{k_{1'}\ldots k_{q'}}_{j_{1'}\ldots j_{p'}}\mathbf{e}^{j_{1'}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_{p'}} \otimes \mathbf{e}_{k_{1'}} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_{q'}} = \\
= c^{j_1}_{j_{1'}} \cdots c^{j_p}_{j_{p'}} c^{k_{1'}}_{k_1} \cdots c^{k_{q'}}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} \times \\
\times c^{j_{1'}}_{l_1} \cdots c^{j_{p'}}_{l_p} c^{s_1}_{k_{1'}} \cdots c^{s_q}_{k_{q'}} \mathbf{e}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{l_p} \otimes \mathbf{e}_{s_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{s_q} = \\
= \delta^{j_1}_{l_1} \cdots \delta^{j_p}_{l_p} \delta^{s_1}_{k_1} \cdots \delta^{s_q}_{k_q} A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} \mathbf{e}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{l_p} \otimes \mathbf{e}_{s_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{s_q} = \\
= A^{k_1\ldots k_q}_{j_1\ldots j_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{j_p} \otimes \mathbf{e}_{k_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{k_q} = A. \qquad (1.73)
\end{gathered}$$

□

1.51. Сумма тензоров и произведение тензора на число. Поскольку T^q_p — линейное пространство тензоров типа (p, q) (согласно определению 1.49) с базисом (1.69), то при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейной комбинации тензоров одного типа однозначно соответствует линейная комбинация координат тензора.

1.52. Произведение тензоров. Если у нас имеются два тензора=полилинейные формы $f = f(x_1, \ldots, x_{p_1}; \xi^1, \ldots, \xi^{q_1})$ и $g = g(y_1, \ldots, y_{p_2}; \eta^1, \ldots, \eta^{q_2})$ типов (p_1, q_1) и (p_2, q_2) от различных аргументов, то мы можем формально рассмотреть их произведение

$$\begin{gathered}
h = h(x_1, \ldots, x_{p_1}, y_1, \ldots, y_{p_2}; \xi^1, \ldots, \xi^{q_1}, \eta^1, \ldots, \eta^{q_2}) = \\
= f(x_1, \ldots, x_{p_1}; \xi^1, \ldots, \xi^{q_1}) g(y_1, \ldots, y_{p_2}; \eta^1, \ldots, \eta^{q_2}), \qquad (1.74)
\end{gathered}$$

Поскольку аргументы у скалярной функции h различны, то функция будет полилинейной формой, т.е. тензором типа (p_1+p_2, q_1+q_2), координаты которого будут равны произведению соответствующих координат, записанных в той последовательности, что и произведение тензоров f и g.

1.53. Свертка тензоров. Рассмотрим тензор

$$f = f(x_1, \ldots, x_p; \xi^1, \ldots, \xi^q).$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Рассмотрим, например, свертку тензора f по первому векторному и первому ковекторному аргументам:

$$f(\mathbf{e}_j, \ldots, x_p; \mathbf{e}^j, \ldots, \xi^q).$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора базиса и, значит, является полилинейной функцией=тензор типа $(p-1, q-1)$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$A' = f(\mathbf{e}_{j'}, \ldots, x_p; \mathbf{e}^{j'}, \ldots, \xi^q) = f(c^j_{j'}\mathbf{e}_j, \ldots, x_p; c^{j'}_i \mathbf{e}^i, \ldots, \xi^q) =$$
$$= c^j_{j'} c^{j'}_i f(\mathbf{e}_j, \ldots, x_p; \mathbf{e}^i, \ldots, \xi^q) = \delta^j_i f(\mathbf{e}_j, \ldots, x_p; \mathbf{e}^i, \ldots, \xi^q) =$$
$$= f(\mathbf{e}_j, \ldots, x_p; \mathbf{e}^j, \ldots, \xi^q) = A$$

1.54. Пример. Вектор как тензор типа $(0,1)$**.** Почему вектор — тензор? Пусть $x \in \mathcal{L}$ — фиксированный вектор. Тогда вектор является полилинейной формой в следующем смысле:

$$x : \xi \in \mathcal{L}^* \to \langle \xi, x \rangle$$

для любого ковектора $\xi \in \mathcal{L}^*$. И мы пришли к выводу о том, что вектор породил линейную функцию одного аргумента от ковектора. Мы можем теперь записать равенство:

$$\boxed{x = x^j \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^j, x \rangle \mathbf{e}_j.}$$

Итак, вектор x — это тензор типа $(0,1)$, а его координаты $\{x^j\}$ и есть те самые координаты тензора–вектора, которые преобразуются контравариантным образом

$$x^{j'} = c^{j'}_j x^j.$$

1.55. Пример. Ковектор как тензор типа $(1,0)$**.** Пусть $\xi \in \mathcal{L}^*$ — фиксированный ковектор. Тогда ξ порождает линейную форму от векторного аргумента следующим образом:

$$\xi : x \in \mathcal{L} \to \langle \xi, x \rangle$$

для любого $x \in \mathcal{L}$. Равенство (1.68) примет следующий вид:

$$\boxed{\xi = \xi_j \mathbf{e}^j = \langle \xi, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{e}^j.}$$

Отсюда вытекает, что ковектор — это тензор ранга $(1,0)$, а его координаты как тензора — это координаты $\{\xi_j\}$ его разложения по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, которые преобразуются ковариантным образом

$$\xi_{i'} = c^i_{i'} \xi_i.$$

1.56. Пример. Оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ как тензор типа $(1,1)$. Пусть $\{\mathbf{e}^1,\ldots,\mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = x^j\mathbf{e}_j, \quad Ax = x^jA(\mathbf{e}_j) = x^ja_j^k\mathbf{e}_k = a_j^k\langle\mathbf{e}^j,x\rangle\mathbf{e}_k,$$

но тогда мы приходим к виду тензора (1.68):

$$\boxed{A = a_j^k\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_k, \quad a_j^k = \langle\mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_j\rangle,}$$

где $\|a_j^k\|$ — матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$. Причем

$$A(x,\xi) = a_j^kx^j\xi_k = x^j\xi_k\langle\mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_j\rangle = \langle\xi_k\mathbf{e}^k, A(x^j\mathbf{e}_j)\rangle = \langle\xi, Ax\rangle.$$

Таким образом, матрица $\|a_j^k\|$ оператора A — есть координаты оператора A как тензора в его разложении по базису $\{\mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_k\}$ линейного пространства T_1^1 тензоров типа $(1,1)$, которая преобразуется согласно закону

$$a_{j'}^{k'} = c_k^{k'}c_{j'}^ja_j^k.$$

4. Метрический тензор

1.57. Пусть $\mathcal{L}$ — n–мерное вещественное пространство с заданной симметричной билинейной формой $G(x,y)$, причем соответствующая квадратичная форма $G(x,x)$ является положительно определенной формой. Тогда $\mathcal{L}$ становится евклидовым пространством, а билинейная форма $G(x,y)$ называется *метрическим тензором*. В частности, $G(x,y)$ является тензором ранга $(2,0)$. Для скалярного произведения $(x,y) = G(x,y)$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ справедливо равенство

$$(x,y) = g_{ik}x^iy^k, \quad g_{ik} = G(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k). \tag{1.75}$$

Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x,y) = G(x,y) = G(x^i\mathbf{e}_i, y^k\mathbf{e}_k) = x^iy^kG(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_k) = g_{ik}x^iy^k.$$

Матрицу метрического тензора в базисе $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ обозначим

$$\boxed{G = \|g_{ik}\|.}$$

В силу положительной определенности квадратичной формы $G(x,x)$ матрица этой квадратичной формы является обратимой ($\det G > 0$).

Поэтому определена обратная матрица G^{-1}, элементы которой по соглашению обозначаются следующим образом:

$$\boxed{G^{-1} = \left\| g^{ik} \right\|.}$$

Согласно нашему правилу умножения «строчка на столбец» приходим к следующим равенствам:

$$\left\{G^{-1}G\right\}^i_j = g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \quad \left\{GG^{-1}\right\}^i_j = g_{jk}g^{ki} = \delta^i_j.$$

1.58. Теорема. *Набор n^2 чисел g^{ik} определяет некоторый тензор ранга* $(0, 2)$.

Доказательство. Шаг 0. Нам нужно доказать, что при переходе от старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ к новому базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$, задаваемому равенствами

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i \tag{1.76}$$

справедливо равенство

$$g^{i'k'} = c^{i'}_i c^{k'}_k g^{ik}, \tag{1.77}$$

где $g^{i'k'}$ — это элементы матрицы, обратной к матрице $\|g_{i'k'}\|$ метрического тензора, записанного в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Понятно, что равенство (1.77) нужно доказать как следствие уже доказанного равенства

$$g_{i'k'} = c^i_{i'}c^k_{k'}g_{ik}. \tag{1.78}$$

Шаг 1. Пусть $\mathcal{L}^*$ — сопряженное пространство к линейному пространству $\mathcal{L}$ и $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ — это базис в $\mathcal{L}^*$ взаимный к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$, т.е., в частности,

$$\langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = \delta^j_k.$$

Построим линейное преобразование

$$g : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^*, \quad u = g(x),$$

которое каждому $x = x^k\mathbf{e}_k \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие $u = u_i\mathbf{e}^i \in \mathcal{L}^*$ по формуле

$$u_i = g_{ik}x^k. \tag{1.79}$$

Докажем, что это отображение инвариантно, т.е. не зависит от выбора базиса. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$u_i = c^{i'}_i u_{i'}, \quad g_{ik} = c^{j'}_i c^{l'}_k g_{j'l'}, \quad x^k = c^k_{k'}x^{k'}. \tag{1.80}$$

Подставим равенства (1.80) в выражение (1.79) и получим равенство

$$c_i^{i'} u_{i'} = c_i^{j'} c_k^{l'} c_{k'}^k g_{j'l'} x^{k'} \Leftrightarrow u_{i'} = c_{i'}^i c_i^{j'} c_k^{l'} c_{k'}^k g_{j'l'} x^{k'}. \tag{1.81}$$

Заметим, что

$$c_{i'}^i c_i^{j'} = c_i^{j'} c_{i'}^i = \delta_{i'}^{j'}, \quad c_k^{l'} c_{k'}^k = \delta_{k'}^{l'}. \tag{1.82}$$

Из (1.81) с учетом (1.82) получаем искомое равенство

$$u_{i'} = g_{i'k'} x^{k'},$$

которое и доказывает не зависимость от базиса отображения g.

Шаг 2. Рассмотрим теперь линейную систему уравнений (1.79), которую с учетом нашего правила умножения «строчка на столбец» можно записать в следующей матричной форме:

$$GX = U, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad U = (u_1, \ldots, u_n), \tag{1.83}$$

из которой поскольку $\det G \neq 0$ вытекает матричное равенство

$$X = G^{-1} U \quad \text{или} \quad x^i = g^{ik} u_k. \tag{1.84}$$

Очевидно, что в новом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ будет выполнено аналогичное равенство

$$x^{i'} = g^{i'k'} u_{k'}. \tag{1.85}$$

Осталось доказать, что числа $g^{i'k'}$ и g^{ik} связаны соотношением (1.77). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x^i = c_{i'}^i x^{i'}, \quad u_k = c_k^{k'} u_{k'}. \tag{1.86}$$

Из (1.84) с учетом (1.86) вытекает равенство

$$c_{i'}^i x^{i'} = g^{ik} c_k^{k'} u_{k'}. \tag{1.87}$$

Теперь из (1.85) и (1.87) получаем равенство

$$c_{i'}^i g^{i'k'} u_{k'} = g^{ik} c_k^{k'} u_{k'} \quad \text{для всех} \quad u' = (u_{1'}, \ldots, u_{n'}) \in \mathbb{R}_n. \tag{1.88}$$

Поэтому из (1.88) приходим к равенству

$$c_{i'}^i g^{i'k'} = g^{ik} c_k^{k'} \quad \text{или} \quad g^{i'k'} = c_i^{i'} c_k^{k'} g^{ik}.$$

Теорема доказана полностью. □

1.59. Определение. Тензор, определяемый числами g_{ik} называется ковариантным метрическим тензором, а тензор, определяемый числами g^{ik} называется контравариантным метрическим тензором.

1.60. Определение. Базисы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ в одном и том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ называются взаимными, если $(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k$.

1.61. Лемма. Взаимный базис в смысле определения 1.60 единствен.

Доказательство. Пусть к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве имеются два взаимных базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \delta^j_k = (\mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^k(\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, \mathbf{e}_k) = 0 \Rightarrow (\mathbf{e}^j - \mathbf{f}^j, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}.$$

Поэтому $\mathbf{e}^j = \mathbf{f}^j$ для всех $j = \overline{1, n}$. □

1.62. Замечание. Не путайте взаимный базис в $\mathcal{L}^*$ к базису из $\mathcal{L}$ со взаимным базисом в одном и том же пространстве. Напомним, что мы уже знакомы со взаимным базисом из курса «Аналитическая геометрия». Однако, в случае евклидова пространства $\mathcal{E}$, взаимный базис в $\mathcal{E}^*$ можно отождествить с взаимным базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, справедлива следующая лемма:

1.63. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в том же евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ в смысл определения 1.60, а $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}^n\}$ — взаимный базис в $\mathcal{E}^*$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^j, x\rangle = (\mathbf{e}^j, x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.89}$$

Доказательство. Согласно определению взаимного базиса $\{\hat{\mathbf{e}}^1, \ldots, \hat{\mathbf{e}}^n\}$ в $\mathcal{E}^*$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{E}$ справедливо равенство

$$\langle \hat{\mathbf{e}}^j, x\rangle = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}, \tag{1.90}$$

а в силу определения 1.60 справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^j, x) = (\mathbf{e}^j, x^k\mathbf{e}_k) = x^k(\mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k) = \\ = x^k\delta^j_k = x^j \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}. \tag{1.91}$$

Из сравнения равенств (1.90) и (1.91) вытекает равенство (1.89). □

1.64. Теорема. *Для произвольного базиса* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в евклидовом пространстве* $\mathcal{E}$ *взаимный базис* $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ *существует и единствен.*

Доказательство. Шаг 1. Существование. Пусть задан базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда взаимный базис будем искать в виде разложения по этому базису:

$$\mathbf{e}^k = A^{k\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \quad A^{k\alpha} \in \mathbb{R}. \tag{1.92}$$

Заметим, что для взаимного базиса должно быть выполнено следующее равенство:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = \delta_i^k, \tag{1.93}$$

и, кроме того,

$$(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g_{\alpha i}. \tag{1.94}$$

Тогда умножая скалярно обе части равенства (1.92) на вектор $\mathbf{e}_i$, с учетом (1.93), (1.94) получим равенство

$$\delta_i^k = A^{k\alpha}g_{\alpha i} \quad \text{или} \quad AG = I \Leftrightarrow A = G^{-1}. \tag{1.95}$$

Итак, из (1.92) получаем равенства

$$\mathbf{e}^k = g^{k\alpha}\mathbf{e}_\alpha. \tag{1.96}$$

Шаг 2. Линейная независимость. Докажем, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (1.96), является линейно независимым, т.е. является базисом в $\mathcal{E}$. Действительно, пусть $\hat{\mathbf{E}} = (\mathbf{e}^1, \ldots \mathbf{e}^n)$ и $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда равенство (1.96) можно переписать в матричной форме

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}G^{-1}, \quad G^{-1} = \|g^{k\alpha}\|. \tag{1.97}$$

Предположим, что элементы $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ линейно зависимы. Тогда найдется ненулевой столбец $X_0 \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\hat{\mathbf{E}}X_0 = \mathbf{0}. \tag{1.98}$$

Умножим обе части равенства (1.97) слева на этот столбец X_0 и с учетом (1.98) получим равенство

$$\mathbf{E}G^{-1}X_0 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{E}X_1 = \mathbf{0}, \quad X_1 = G^{-1}X_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{1.99}$$

Поскольку набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независимым, то $X_1 = O$. Следовательно,

$$G^{-1}X_0 = O \Leftrightarrow G(G^{-1}X_0) = GO = O \Leftrightarrow X_0 = O. \tag{1.100}$$

Пришли к противоречию. Значит, семейство $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ линейно независимо.

Шаг 3. Единственность. Осталось доказать, что семейство элементов $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, определенное равенствами (1.96), является взаимным базисом к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i) = (g^{k\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_i) = g^{k\alpha}g_{\alpha i} = \delta_i^k.$$

Осталось воспользоваться результатом леммы 1.61. □

1.65. Из формулы (1.96) вытекают полезные формулы. Действительно, справедливы следующие соотношения:

$$g_{jk}\mathbf{e}^k = g_{jk}g^{k\alpha}\mathbf{e}_\alpha = \delta_j^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_j \Rightarrow \boxed{\mathbf{e}_j = g_{jk}\mathbf{e}^k,} \tag{1.101}$$

$$(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = \Big(g^{k\alpha}\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i\Big) = g^{k\alpha}(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}^i) = \\ = g^{k\alpha}\delta_\alpha^i = g^{ki} \Rightarrow \boxed{(\mathbf{e}^k, \mathbf{e}^i) = g^{ki}.} \tag{1.102}$$

Разложим элементы $x, y \in \mathcal{E}$ по взаимному базису $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$x = x_i\mathbf{e}^i, \quad y = y_j\mathbf{e}^j \Rightarrow (x, y) = (x_i\mathbf{e}^i, y_j\mathbf{e}^j) = \\ = x_iy_j(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij}x_iy_j. \tag{1.103}$$

Итак, в координатах скалярное произведение евклидова пространства может быть записано двойственным образом

$$\boxed{(x, y) = g_{ij}x^iy^j} \quad \text{и} \quad \boxed{(x, y) = g^{ij}x_iy_j.}$$

1.66. Определение. Координаты x^j элемента $x \in \mathcal{E}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ называются контравариантными, а координаты x_i того же элемента в взаимном базисе $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ называются ковариантными.

1.67. Координатная запись скалярного произведения. Пусть $x, u \in \mathcal{E}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{E}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ — взаимный базис. Тогда справедливы следующие цепочки соотношений:

$$x = x^j\mathbf{e}_j, \quad u = u_i\mathbf{e}^i \Rightarrow (u, x) = (u_i\mathbf{e}^i, x^j\mathbf{e}_j) = \\ = u_ix^j(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = u_ix^j\delta_j^i = u_ix^i.$$

Таким образом,

$$\boxed{(u, x) = u_ix^i.}$$

1.68. Лемма. Элементы взаимного базиса $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ преобразуются контравариантным образом:

$$\boxed{\mathbf{e}^{k'} = c^{k'}_{k}\mathbf{e}^k,} \tag{1.104}$$

если

$$\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'}\mathbf{e}_k.$$

Доказательство. В стандартных обозначениях справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{k'} &= g^{k'\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha'} = g^{k'\alpha'}c^{\alpha}_{\alpha'}\mathbf{e}_\alpha = \\ &= g^{k'\alpha'}c^{\alpha}_{\alpha'}g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta = g^{j_1j_2}c^{k'}_{j_1}c^{\alpha'}_{j_2}c^{\alpha}_{\alpha'}g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta = g^{j_1\alpha}c^{k'}_{j_1}g_{\alpha\beta}\mathbf{e}^\beta = \\ &= \delta^{j_1}_{\beta}c^{k'}_{j_1}\mathbf{e}^\beta = c^{k'}_{\beta}\mathbf{e}^\beta. \end{aligned} \tag{1.105}$$

поскольку

$$c^{\alpha'}_{j_2}c^{\alpha}_{\alpha'} = c^{\alpha}_{\alpha'}c^{\alpha'}_{j_2} = \delta^{\alpha}_{j_2}, \quad g^{j_1\alpha}g_{\alpha\beta} = \delta^{j_1}_{\beta}. \tag{1.106}$$

□

1.69. Лемма. Контравариантные и ковариантные координаты одного и того же элемента x евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны следующими двойственными формулами:

$$\boxed{x_j = g_{jk}x^k} \quad \text{и} \quad \boxed{x^j = x_k g^{kj}.} \tag{1.107}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$x = x_i\mathbf{e}^i = x^k\mathbf{e}_k. \tag{1.108}$$

Умножим равенства (1.108) скалярно на $\mathbf{e}_j$ и получим равенство

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j), \tag{1.109}$$

из которого вытекает равенство

$$x_j = g_{jk}x^k. \tag{1.110}$$

Теперь умножим равенство (1.108) скалярно на $\mathbf{e}^j$ и получим равенство

$$x_i(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = x^k(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j), \tag{1.111}$$

из которого получаем равенство

$$x^j = x_i g^{ij}.$$

□

1.70. Определение. Числа g^{jk} называются контравариантными координатами метрического тензора, а числа g_{jk} называются ковариантными координатами метрического тензора.

1.71. Заметим, что при помощи метрического тензора с контравариантными и ковариантными координатами можно поднимать или опускать индексы у координат тензора. Например, рассмотрим тензор ранга $(0,2)$:

$$a = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k. \tag{1.112}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} a = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k = a^{ik}\mathbf{e}_i \otimes (g_{k\alpha}\mathbf{e}^{\alpha}) = a^{ik}g_{k\alpha}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{\alpha} = \\ = a^{i\beta}g_{\beta k}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k = a^i_k\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k, \quad a^i_k = a^{i\beta}g_{\beta k}. \end{aligned} \tag{1.113}$$

В результате мы получили другую запись того же самого тензора, но теперь ранга $(1,1)$.

5. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с нижними индексами

1.72. Символ Кронекера. Символ Кронекера δ^j_k в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ определяется следующим образом:

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{1.114}$$

Справедливо следующее утверждение:

1.73. Лемма. Числа δ^j_k являются координатами тензора ранга $(1,1)$. Числа δ_{jk} и δ^{jk}, формально совпадающие с определением (1.114), являются координатами ортогональных тензоров рангов $(2,0)$ и $(0,2)$ соответственно. Однако, числа δ_{jk} и δ^{jk} не являются координатами тензоров.

Доказательство. С одной стороны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\delta^j_k c^{j'}_j c^k_{k'} = c^{j'}_k c^k_{k'} = \delta^{j'}_{k'}.$$

С другой стороны, имеем

$$\delta_{jk}c^j_{j'}c^k_{k'} = c^k_{j'}c^k_{k'} = \{C^T C\}_{j'k'}, \tag{1.115}$$

$$\delta^{jk}c^{j'}_j c^{k'}_k = c^{j'}_k c^{k'}_k = \{C^{-1}(C^{-1})^T\}^{j'k'}. \tag{1.116}$$

Совершенно понятно, что в случае ортогональных преобразований

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}C, \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'})$$

матрица C такова, что, $C^T = C^{-1}$ и поэтому

$$C^T C = I \quad \text{и} \quad C^{-1}(C^{-1})^T = C^{-1}C^{TT} = C^{-1}C = I. \tag{1.117}$$

Из (1.115)–(1.117) вытекают равенства

$$\delta_{jk} c^j_{j'} c^k_{k'} = \delta_{j'k'} \quad \text{и} \quad \delta^{jk} c^{j'}_j c^{k'}_k = \delta^{j'k'}. \tag{1.118}$$

Осталось доказать, что числа δ_{jk} и δ^{jk} не являются координатами тензоров. Рассмотрим например, числа δ_{jk}. Рассмотрим два базиса

$$\mathbf{e}_{1'} = 2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n'} = \mathbf{e}_n$$

или

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$C^T C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \neq I. \tag{1.119}$$

Таким образом, из (1.115) и (1.119) вытекает, в частности, равенство

$$\delta_{jk} c^j_{1'} c^k_{1'} = 4 \neq \delta_{1'1'} = 1.$$

Отсюда получаем, что числа δ_{jk} не являются координатами тензора. Аналогичным образом рассматривается набор чисел δ^{jk}. $\square$

1.74. Пример. Пусть $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение векторов. Докажем, что набор коэффициентов a^k_{ij}, определенный равенством

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = a^k_{ij} \mathbf{e}_k, \tag{1.120}$$

является координатами в каждом базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ некоторого тензора ранга $(2,1)$.

Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — старый и новый базисы, причем

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{j'} = c^j_{j'} \mathbf{e}_j \tag{1.121}$$

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = a^k_{ij} \mathbf{e}_k, \quad [\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}] = a^{k'}_{i'j'} \mathbf{e}_{k'}. \tag{1.122}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a^{k'}_{i'j'}\mathbf{e}_{k'} = [\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}] = c^i_{i'}c^j_{j'}[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = c^i_{i'}c^j_{j'}a^k_{ij}\mathbf{e}_k = c^i_{i'}c^j_{j'}c^{k'}_k a^k_{ij}\mathbf{e}_{k'}, \tag{1.123}$$

из которого в силу того, что $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — базис получаем равенство

$$a^{k'}_{i'j'} = c^i_{i'}c^j_{j'}c^{k'}_k a^k_{ij}. \tag{1.124}$$

1.75. Пример. Пусть каждому базису в $\mathbb{R}^3$ сопоставлен следующий набор чисел:

$$\varepsilon_{i_1i_2i_3} = 0, \quad \text{если среди индексов есть повторения,} \tag{1.125}$$

а в случае если все индексы i_1, i_2, i_3 различны, то

$$\varepsilon_{i_1i_2i_3} = \operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}. \tag{1.126}$$

Докажем, что числа $\varepsilon_{i_1i_2i_3}$ не являются координатами тензора.

Действительно, пусть два базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ связаны равенствами

$$\mathbf{e}_{1'} = 2\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3 \tag{1.127}$$

или

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.128}$$

Но тогда справедлива следующая цепочкам равенств:

$$1 = \varepsilon_{1'2'3'} = c^{i_1}_{1'}c^{i_2}_{2'}c^{i_3}_{3'}\varepsilon_{i_1i_2i_3} = c^1_{1'}c^2_{2'}c^3_{3'}\varepsilon_{123} = 2. \tag{1.129}$$

Пришли к противоречию.

1.76. Определение. Объект $\varepsilon_{i_1i_2i_3}$ называется абсолютно антисимметричным символом Леви–Чивиты.

1.77. Из символов Кронекера δ_{ik} и δ_{pq} можно соорудить объект четвертого порядка $\delta_{ik}\delta_{pq}$. Поскольку объекты δ_{ik} и δ_{pq} являются координатами ортогональных тензоров рангов $(2, 0)$ и $(2, 0)$, то их произведение $\delta_{ik}\delta_{pq}$ является ортогональным тензором ранга $(4, 0)$. Действительно, справедливы следующая цепочка равенств:

$$\delta_{ik}\delta_{pq}c^i_{i'}c^k_{k'}c^p_{p'}c^q_{q'} = c^k_{i'}c^k_{k'}c^p_{p'}c^p_{q'} = \{C^TC\}_{i'k'}\{C^TC\}_{p'q'} = \delta_{i'k'}\delta_{p'k'}.$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств

$$\delta_{is}\delta_{sq} = \{I \cdot I\}_{iq} = \{I\}_{iq} = \delta_{iq}. \tag{1.130}$$

1.78. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{lr} \end{vmatrix}. \tag{1.131}$$

Доказательство. Случай 1. Пусть два или три индекса из какой–нибудь тройки индексов $\{i, k, l\}$ или $\{p, q, r\}$ совпадают. Тогда равенство (1.131) выполнено, потому что слева либо $\varepsilon_{ikl} = 0$ либо $\varepsilon_{pqr} = 0$, а справа две или три строчки или два или три столбца совпадают и в этих случаях определитель равен нулю.

Случай 2. Теперь простым вычислением получим, что справедливо равенство

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.132}$$

поскольку $\varepsilon_{123}\varepsilon_{123} = 1$ и

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Кроме того, выражения справа и слева в равенстве (1.131) могут отличаться только знаком. Рассмотрим следующую перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}. \tag{1.133}$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде конечной последовательности транспозиций соседних индексов. При транспозиции индексов во втором сомножителе в левой части равенства (1.132) знак меняется на противоположный, а слева в равенстве (1.132) при этой же транспозиции соседние строчки будут переставляться и, следовательно, знак определителя будет меняться на противоположный. Таким образом, в результате последовательности транспозиций, образующих перестановку (1.133) мы придем к равенству

$$\varepsilon_{123}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}. \tag{1.134}$$

Теперь рассмотрим перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & k & l \end{pmatrix}. \tag{1.135}$$

Сделаем соответствующую последовательность транспозиций в обеих частях равенства (1.134). Справа в равенстве (1.134) каждой транспозиции будет соответствовать перестановка строк. В результате перестановки (1.134) мы получим искомое равенство (1.131). □

1.79. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}. \tag{1.136}$$

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kl} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{ll} \end{vmatrix} =$$

$$= \delta_{lp} \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{il} \\ \delta_{kq} & \delta_{kl} \end{vmatrix} - \delta_{lq} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kl} \end{vmatrix} + \delta_{ll} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ip} \\ \delta_{kq} & \delta_{kp} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix}.$$

□

1.80. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pkl} = 2\delta_{ip}, \quad \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6. \tag{1.137}$$

Доказательство. Из равенства (1.136) получаем

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pkl} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{ik} \\ \delta_{kp} & \delta_{kk} \end{vmatrix} = \delta_{kk}\delta_{ip} - \delta_{ik}\delta_{kp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}. \tag{1.138}$$

В свою очередь из (1.138) вытекает равенство

$$\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ikl} = 2\delta_{ii} = 6.$$

□

1.81. Определение. Объекты

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.139}$$

называются дуальными.

1.82. Лемма. Дуальные объекты связаны равенствами

$$a_{ik} = \varepsilon_{ikl} a_l, \quad a_l = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} a_{ik}. \tag{1.140}$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем первое равенство из (1.140). Непосредственно проверяем это равенство:

$$\begin{gathered} a_{11} = 0, \quad a_{12} = a_3, \quad a_{13} = -a_2, \\ a_{21} = -a_3, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -a_1, \\ a_{31} = a_2, \quad a_{32} = -a_1, \quad a_{33} = 0. \end{gathered}$$

Шаг 2. докажем второе равенство из (1.140). С этой целью воспользуемся доказанным первым равенством из (1.140), а также первым равенством из (1.137). Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} a_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{ikm} a_m = \frac{1}{2} 2 \delta_{lm} a_m = a_l.$$

□

1.83. Определение. Внешним произведением объектов

$$(a_1, a_2, a_3) \quad \text{и} \quad (b_1, b_2, b_3)$$

называется объект (S_1, S_2, S_3), определенный равенствами

$$S_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l. \tag{1.141}$$

1.84. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$(S_1, S_2, S_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1), \tag{1.142}$$

$$S_i = b_{ik} a_k, \quad S_i = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.143}$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем сначала равенства (1.142). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} S_1 &= \varepsilon_{1kl} a_k b_l = a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ S_2 &= \varepsilon_{2kl} a_k b_l = a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ S_3 &= \varepsilon_{3kl} a_k b_l = a_1 b_2 - a_2 b_1. \end{aligned}$$

Шаг 2. Докажем первое равенство из (1.143). Справедливы следующие равенства:

$$S_i = \varepsilon_{ikl} a_k b_l = (\varepsilon_{ikl} b_l) a_k = b_{ik} a_k, \tag{1.144}$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. Докажем второе равенство из (1.143). Непосредственной проверкой убеждаемся, что справедливы следующие равенства:

$$S_1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3,$$

$$S_3 = \begin{vmatrix} \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

$\square$

1.85. Тождество Эйлера–Лагранжа. Докажем следующее тождество:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \\ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2. \quad (1.145)$$

Действительно, с учетом (1.136) имеет место следующая цепочка равенств:

$$S_lS_l = \varepsilon_{lik}a_ib_k\varepsilon_{lpq}a_pb_q = \varepsilon_{lik}\varepsilon_{lpq}a_ib_ka_pb_q = \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pql}a_ib_ka_pb_q = \\ = (\delta_{ip}\delta_{kq} - \delta_{kp}\delta_{iq})a_ib_ka_pb_q = \delta_{ip}\delta_{kq}a_ib_ka_pb_q - \delta_{kp}\delta_{iq}a_ib_ka_pb_q = \\ = a_pa_pb_kb_k - (a_qb_q)(a_pb_p). \quad (1.146)$$

Таким образом, тождество (1.145) Эйлера–Лагранжа доказано.

Теперь воспользуемся итоговым равенством (1.146). Справедлива следующая цепочка равенств:

$$S_lS_l = a_p^2b_k^2 - (a_ib_i)(a_kb_k) = a_p^2\delta_{ik}b_ib_k - (a_ia_k)(b_ib_k) = \\ = (a_p^2\delta_{ik} - a_ia_k)b_ib_k = (b_p^2\delta_{ik} - b_ib_k)a_ia_k. \quad (1.147)$$

Теперь воспользуемся дуальным представлением с тем, чтобы доказать следующее равенство:

$$a_p^2\delta_{ik} - a_ia_k = a_{is}a_{ks}. \quad (1.148)$$

Действительно, согласно (1.140) имеем

$$a_{is} = \varepsilon_{isp}a_p, \quad a_{ks} = \varepsilon_{ksq}a_q. \quad (1.149)$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$a_{is}a_{ks} = \varepsilon_{isp}a_p\varepsilon_{ksq}a_q = \varepsilon_{ips}\varepsilon_{kqs}a_pa_q = \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{iq} \\ \delta_{pk} & \delta_{pq} \end{vmatrix} a_pa_q =$$

$$= (\delta_{ik}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{pk})a_pa_q = a_p^2\delta_{ik} - a_ia_k, \quad (1.150)$$

где мы воспользовались равенством (1.136). Осталось воспользоваться равенствами (1.143).

1.86. Вычисление определителей. Рассмотрим следующий определитель:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ikl}a_{i1}a_{k2}a_{l3}. \quad (1.151)$$

Рассмотрим перестановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}. \quad (1.152)$$

Как известно, любую перестановку можно представить в виде транспозиции соседних чисел. Применим эту последовательностей к правой части равенства (1.151), которое для удобства перепишем в виде

$$a = \varepsilon_{ikl}a_{i1}a_{k2}a_{l3}. \quad (1.153)$$

При каждой транспозиции правая часть равенства (1.153) меняет знак, поскольку транспозиция соседних чисел равносильна перестановке столбцов. Если перестановка (1.152) четная, то мы снова получим равенство

$$a = \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \quad (1.154)$$

Если же перестановка (1.152) нечетная, то мы получим равенство

$$a = -\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \quad (1.155)$$

Введем следующий объект:

$$A_{pqr} \overset{def:}{=} \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}. \quad (1.156)$$

Заметим, что если в равенстве (1.156) хотя бы два индекса из тройки $\{p, q, r\}$ совпадают, то $A_{pqr} = 0$, поскольку тогда у определителя $\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}$ по крайней мере два столбца одинаковые. Таким образом, имеет место следующее равенство:

$$A_{pqr} = a\varepsilon_{pqr}. \quad (1.157)$$

Следовательно, из (1.156) и (1.157) вытекает равенство

$$\boxed{\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr} = a\varepsilon_{pqr}.} \quad (1.158)$$

Аналогичным образом можно доказать следующее равенство:

$$\boxed{\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}a_{lr} = a\varepsilon_{ikl}.} \tag{1.159}$$

1.87. Теорема. Бине–Коши. *Определитель произведения квадратных матриц одного размера равен произведению определителей матриц.*

Доказательство. Пусть $c_{ik} = a_{is}b_{sk}$. Докажем равенство

$$|c_{ik}| = |a_{rj}||b_{pq}|. \tag{1.160}$$

Пусть

$$a = |a_{rj}|, \quad b = |b_{pq}|, \quad c = |c_{ik}|. \tag{1.161}$$

Тогда имеем

$$b = \varepsilon_{pqr}b_{p1}b_{q2}b_{r3}, \quad a\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}, \tag{1.162}$$

$$\begin{aligned} ab = a\varepsilon_{pqr}b_{p1}b_{q2}b_{r3} = \varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}b_{p1}b_{q2}b_{r3} = \\ = \varepsilon_{ikl}(a_{ip}b_{p1})(a_{kq}b_{q2})(a_{lr}b_{r3}) = \varepsilon_{ikl}c_{i1}c_{k2}c_{l3} = c. \end{aligned} \tag{1.163}$$

□

1.88. Лемма. Справедливо равенство

$$|a_l^2\delta_{ik} - a_ia_k| = 0. \tag{1.164}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (1.148) и результатом теоремы 1.87. Тогда справедливо равенство

$$|a_l^2\delta_{ik} - a_ia_k| = |a_{is}||a_{ks}|. \tag{1.165}$$

Заметим, что

$$|a_{is}| = \begin{vmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{vmatrix} = a_3a_1a_2 - a_2a_3a_1 = 0. \tag{1.166}$$

Из равенств (1.165) и (1.166) вытекает утверждение леммы. □

1.89. Алгебраические дополнения. Справедливы следующие равенства:

$$a\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqt} = \varepsilon_{pqt}a\varepsilon_{pqr} = \varepsilon_{pqt}\varepsilon_{ikl}a_{ip}a_{kq}a_{lr}, \tag{1.167}$$

где мы воспользовались равенством (1.158). Воспользуемся равенством (1.137) и получим равенство

$$\varepsilon_{pqr}\varepsilon_{pqt} = 2\delta_{rt}. \tag{1.168}$$

Из равенств (1.167) и (1.168) получаем равенство

$$\delta_{rt}a = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqt}a_{ip}a_{kq}\right) \qquad (1.169)$$

Введем обозначение

$$A_{lt} \overset{def:}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{pqt}a_{ip}a_{kq}. \qquad (1.170)$$

Тогда с учетом этого обозначения мы получим из (1.169) равенство

$$\boxed{\delta_{rt}a = a_{lr}A_{lt}.} \qquad (1.171)$$

1.90. Определение. Числа A_{lt} называются алгебраическими дополнениями элемента a_{lt}.

1.91. Разложение определителя по столбцу. Положим в равенстве (1.171) $r = t = a$, где a относится к так называемым фиксирующим индексам, т.е. по нему не производится суммирование. В результате получим следующую формулу разложения определителя по a–му столбцу:

$$\boxed{a = a_{la}A_{la}.} \qquad (1.172)$$

Теперь положим $r = a$ и $t = b$, причем $a \neq b$ и это фиксирующие индексы. Тогда получим формулу фальшивого разложения определителя:

$$\boxed{0 = a_{la}A_{lb}.} \qquad (1.173)$$

1.92. Разложение определителя по строчке. Умножим обе части равенства (1.159) на ε_{ikm}. С учетом (1.137) получим следующее равенство:

$$a\delta_{lm} = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}\right). \qquad (1.174)$$

Введем обозначение

$$A_{mr} :\overset{def:}{=} \frac{1}{2}\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{pqr}a_{ip}a_{kq}. \qquad (1.175)$$

С учетом этого обозначения из (1.174) вытекает равенство

$$a\delta_{lm} = a_{lr}A_{mr}. \qquad (1.176)$$

Сначала положим в равенстве (1.176) $l = m = a$, где a — фиксирующий индекс. Тогда из (1.176) получим равенство

$$\boxed{a = a_{ar}A_{ar}.} \qquad (1.177)$$

Формула (1.176) — есть формула разложения определителя по a–ой строчке. Теперь положим в равенстве (1.176) $l = a$ и $m = b$, $a \neq b$, то получим соответствующее фальшивое разложение по a–ой строчке:

$$\boxed{0 = a_{ar}A_{br}.} \tag{1.178}$$

1.93. Формулы Крамера. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$a_{ik}x_k = b_i, \quad a = |a_{ik}| \neq 0. \tag{1.179}$$

Умножим обе части этого уравнения на алгебраические дополнение A_{ip} и получим равенство

$$A_{ip}a_{ik}x_k = A_{ip}b_i. \tag{1.180}$$

Воспользуемся равенством (1.171) и получим равенство

$$a\delta_{pk}x_k = A_{ip}b_i \Leftrightarrow ax_p = A_{ip}b_i \Leftrightarrow \boxed{x_p = \frac{1}{a}A_{ip}b_i.} \tag{1.181}$$

Последнее равенство в (1.181) можно записать в несколько другом виде. Пусть $p = 1$. Тогда сумма произведений $A_{i1}b_i$ — есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \varepsilon_{pqr}b_p a_{q2}a_{r3} \tag{1.182}$$

по первому столбцу и, следовательно,

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{a}\Delta_1.} \tag{1.183}$$

Пусть $p = 2$. Тогда сумма произведений $A_{i2}b_i$ — есть разложение определителя

$$\Delta_2 = \varepsilon_{pqr}a_{p1}b_q a_{r3} \tag{1.184}$$

по второму столбцу и, следовательно,

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{a}\Delta_2.} \tag{1.185}$$

Пусть $p = 3$. Тогда сумма произведений $A_{i3}b_i$ — есть разложение определителя

$$\Delta_3 = \varepsilon_{pqr}a_{p1}a_{q2}b_r \tag{1.186}$$

по третьему столбцу и, следовательно,

$$\boxed{x_3 = \frac{1}{a}\Delta_3.} \tag{1.187}$$

6. Вычисления в тензорных обозначениях. Объекты с верхними и нижними индексами

1.94. Точно также как и в предыдущем параграфе можно ввести символ Леви–Чивиты ε^{ikl}.

1.95. Лемма. Справедливы следующие равенства:

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q & \delta^i_r \\ \delta^k_p & \delta^k_q & \delta^k_r \\ \delta^l_p & \delta^l_q & \delta^l_r \end{vmatrix}, \tag{1.188}$$

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pql} = \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_q \\ \delta^k_p & \delta^k_q \end{vmatrix}, \tag{1.189}$$

$$\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pkl} = 2\delta^i_p, \quad \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{ikl} = 6. \tag{1.190}$$

Доказательство. Указанные равенства доказываются в точности точно также, как и равенства лемм 1.78, 1.79 и 1.80. □

1.96. Определение. Обобщенными символами Кронекера называются следующие величины:

$$\delta^{ikl}_{pqr} \overset{def:}{=} \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pqr}, \tag{1.191}$$

$$\delta^{ik}_{pq} \overset{def:}{=} \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pql} = \delta^i_p\delta^k_q - \delta^k_p\delta^i_q. \tag{1.192}$$

1.97. Заметим, что символ Кронекера δ^i_p в силу первого равенства из (1.190) можно представить в следующем виде:

$$\delta^i_p = \frac{1}{2}\varepsilon^{ikl}\varepsilon_{pkl}. \tag{1.193}$$

Поэтому логично отнести символ Кронекера δ^i_p к группе обобщенных символов Кронекера (1.191) и (1.192). С помощью обобщенных символов Кронекера можно проводить ряд тензорных операций.

1.98. Замена индексов. Справедливы равенства

$$\delta^i_k a^k = a^i, \quad \delta^i_k a_i = a_k.$$

1.99. Альтернирование. Справедливы равенства

$$\delta^{ik}_{pq} b_{ik} = (\delta^i_p \delta^k_q - \delta^k_p \delta^i_q) b_{ik} = b_{pq} - b_{qp}.$$

1.100. Вычисление определителей. Полученные ранее формулы (1.158) и (1.159) могут быть переписаны следующим образом:

$$\boxed{\varepsilon^{ikl} a_{ip} a_{kq} a_{lr} = a\varepsilon_{pqr},} \quad \boxed{\varepsilon^{pqr} a_{ip} a_{kq} a_{lr} = a\varepsilon_{ikl},} \tag{1.194}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ikl} a^{ip} a^{kq} a^{lr} = a\varepsilon^{pqr},} \quad \boxed{\varepsilon_{pqr} a^{ip} a^{kq} a^{lr} = a\varepsilon^{ikl},} \tag{1.195}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ikl} a^i_p a^k_q a^l_r = a\varepsilon_{pqr},} \quad \boxed{\varepsilon^{pqr} a^i_p a^k_q a^l_r = a\varepsilon^{ikl}.} \tag{1.196}$$

Из формул (1.196) вытекает следующее утверждение:

1.101. Лемма. Закон преобразования символов ε_{ikl} и ε^{ikl} Леви-Чивиты следующий:

$$\varepsilon_{i'k'l'} = \frac{1}{c} c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \varepsilon_{ikl}, \quad \varepsilon^{i'k'l'} = \frac{1}{c} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \varepsilon^{ikl}, \tag{1.197}$$

где $c = \det C$ — определитель матрицы перехода C от базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$.

1.102. Иначе говоря, символы Леви–Чивиты ε_{ikl} и ε^{ikl} являются так называемыми псевдотензорами.

1.103. Алгебраические дополнения. Умножим первое равенство из (1.194) на ε^{pqt}. В силу равенства (1.193) получим выражение

$$a\delta^t_r = a_{lr} \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{pqt} a_{ip} a_{kq} \right) = a_{lr} A^{lt}, \tag{1.198}$$

$$A^{lt} := \frac{1}{2} \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{pqt} a_{ip} a_{kq}. \tag{1.199}$$

1.104. Определение. Символы A^{lt}, определенные равенствами (1.199), называются алгебраическими дополнениями.

1.105. Разложение определителя по элементам столбца. Если в равенстве (1.198) положить $t = r = a$, где a — фиксирующий индекс, то получим разложение определителя по элементам a–го столбца:

$$\boxed{a = a_{la} A^{la}.} \tag{1.200}$$

1.106. Разложение определителя по элементам строчки. Умножим второе равенство из (1.194) на ε^{ikm} и с учетом (1.193) получим равенство

$$a\delta^l_m = a_{lr}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}\right) = a_{lr}A^{mr}, \tag{1.201}$$

$$A^{mr} := \frac{1}{2}\varepsilon^{ikm}\varepsilon^{pqr}a_{ip}a_{kq}. \tag{1.202}$$

В равенстве (1.201) положим $l = m = a$, где a — фиксирующий индекс. Тогда получим формулу разложения определителя по элементам a–ой строчки:

$$\boxed{a = a_{ar}A^{ar}.} \tag{1.203}$$

7. Формула для векторного произведения векторов

1.107. Введем следующие объекты третьего порядка:

$$\boxed{E_{ikl} := \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{ikl}, \quad E^{ikl} := \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ikl},} \tag{1.204}$$

где

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad \|g_{jk}\| - \text{метрический тензор}, \tag{1.205}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если базис правый;} \\ -1, & \text{если базис левый.} \end{cases} \tag{1.206}$$

Введем следующие объекты:

$$\boxed{S_i := E_{ikl}a^k b^l,} \quad \boxed{S^i = E^{ikl}a_k b_l.} \tag{1.207}$$

1.108. Лемма. Объекты S_i и S^i связаны следующими равенствами:

$$\boxed{S_p = g_{ip}S^i.} \tag{1.208}$$

Доказательство. Действительно,

$$a_k = g_{kq}a^q, \quad a_l = g_{lr}a^r, \quad \varepsilon^{ikl}g_{ip}g_{kq}g_{lr} = g\varepsilon^{pqr},$$

и справедлива следующая цепочка равенств:

$$g_{ip}S^i = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} g_{ip}\varepsilon^{ikl} a_k b_l = \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} g_{ip}\varepsilon^{ikl} g_{kq} a^q g_{lr} b^r =$$

$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ikl} g_{ip} g_{kq} g_{lr} a^q b^r = \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{pqr} a^q b^r = S_p. \quad (1.209)$$

□

1.109. Лемма. Справедливо равенство

$$\boxed{S^p = \frac{g^{ip}}{g^2} S_i.} \quad (1.210)$$

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$g^{ip}S_i = g^{ip}E_{ikl}a^k b^l = \varepsilon\sqrt{g} g^{ip}\varepsilon_{ikl} g^{kq} a_q g^{lr} b_r = \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{ikl} g^{ip} g^{kq} g^{lr} a_q b_r =$$

$$= \varepsilon\sqrt{g} g \varepsilon^{pqr} a_q b_r = g^2 E^{pqr} a_q b_r = g^2 S^p.$$

□

1.110. Пусть

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}. \quad (1.211)$$

Докажем, что $\mathbf{S} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{S} \perp \mathbf{b}$. Действительно, с учетом равенства (1.208) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\mathbf{S}, \mathbf{a}) = g_{ij}S^i a^j = S_i a^i = E_{ikl}a^i a^k b^l = \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{ikl}a^i a^k b^l = 0, \quad (1.212)$$

поскольку в определителе $\varepsilon_{ikl}a^i a^k b^l$ две одинаковые строчки. Аналогичным образом устанавливаем, что

$$(\mathbf{S}, \mathbf{b}) = g_{ij}S^i b^j = S_i b^i = E_{ikl}b^i a^k b^l = \varepsilon\sqrt{g}\varepsilon_{ikl}b^i a^k b^l = 0. \quad (1.213)$$

Теперь вычислим длину вектора $\mathbf{S}$. Действительно, с учетом равенства (1.208) справедлива следующая цепочка равенств:

$$|\mathbf{S}|^2 = (\mathbf{S}, \mathbf{S}) = g_{ij}S^i S^j = S_i S^i = E^{ikl}E_{ipq}a_k b_l a^p b^q =$$

$$= \varepsilon^{ikl}\varepsilon_{ipq}a_k b_l a^p b^q = \varepsilon^2(\delta^k_p\delta^l_q - \delta^l_p\delta^k_q)a_k b_l a^p b^q =$$

$$= (a_p a^p)(b_q b^q) - (a_k b^k)(b_l a^l) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 =$$

$$= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\phi = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\phi. \quad (1.214)$$

1.111. Лемма. Если C — матрица перехода между старым $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и новым базисами $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \mathbf{e}_i, \tag{1.215}$$

то справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{sign}(\det C) = \varepsilon' \cdot \varepsilon, \tag{1.216}$$

где

$$\varepsilon' = \begin{cases} +1, & \text{если штрихованный базис правый;} \\ -1, & \text{если штрихованный базис левый,} \end{cases} \tag{1.217}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если не штрихованный базис правый;} \\ -1, & \text{если не штрихованный базис левый.} \end{cases} \tag{1.218}$$

Доказательство. Для доказательства равенства (1.216) нужно воспользоваться тем, что из (1.215) вытекает следующее равенство с участием смешанных произведений:

$$(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}) = c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} (\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \mathbf{e}_{i_3}) = \\ = \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} c^{i_1}_{1'} c^{i_2}_{2'} c^{i_3}_{3'} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det C (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \tag{1.219}$$

причем по свойству смешанного произведения справедливы равенства

$$\varepsilon = \operatorname{sign}\{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\}, \quad \varepsilon' = \operatorname{sign}\{(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'})\}. \tag{1.220}$$

Итак, из (1.219) и (1.220) вытекает следующее равенство:

$$\varepsilon' = \operatorname{sign}(\det C)\varepsilon \Rightarrow 1 = (\varepsilon')^2 = \operatorname{sign}(\det C)\varepsilon\varepsilon' \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon\varepsilon' = \operatorname{sign}(\det C).$$

$\square$

1.112. Лемма. Числа E_{ikl}, определенные первым равенством из (1.204), является координатами тензора, а числа E^{ikl}, определенные вторым равенством из (1.204), являются координатами ортогонального тензора.

Доказательство. Воспользуемся результатом леммы 1.101.

Шаг 1. Докажем сначала первое утверждение леммы. Действительно, пусть два базиса $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ связаны соотношением

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'} \mathbf{e}_i.$$

Тогда, в частности, метрический тензор преобразуется следующим образом:

$$g_{i'k'} = c^i_{i'} c^k_{k'} g_{ik} \Rightarrow |g_{i'k'}| = |c^i_{i'}||c^k_{k'}||g_{ik}| \Rightarrow g' = c^2 g, \tag{1.221}$$

где $g' = |g_{i'k'}|$, $g = |g_{ik}|$, $c = |c^i_{i'}| = |c^k_{k'}|$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} E_{i'k'l'} = \varepsilon' \sqrt{g'} \varepsilon_{i'k'l'} = \varepsilon' |c| \sqrt{g} \frac{1}{c} c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \varepsilon_{ikl} = \\ = \varepsilon' \operatorname{sign}(c) c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} = \varepsilon' \varepsilon \varepsilon' c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} = \\ = \varepsilon c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} \sqrt{g} \varepsilon_{ikl} = c^i_{i'} c^k_{k'} c^l_{l'} E_{ikl}. \end{aligned} \tag{1.222}$$

Следовательно, E_{ikl} — координаты тензора.

Шаг 2. Докажем второе утверждение леммы. Действительно, в случае ортогональных базисов для матрицы перехода C справедливо равенство $C^T = C^{-1}$ и поэтому $(\det C)^2 = 1$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} E^{i'k'l'} = \frac{\varepsilon'}{\sqrt{g'}} \varepsilon^{i'k'l'} = \frac{\varepsilon'}{|c|\sqrt{g}} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{\varepsilon^{ikl}}{c} = \\ = \frac{\varepsilon' \operatorname{sign}(c)}{c^2} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{e^{ikl}}{\sqrt{g}} = \frac{\varepsilon' \varepsilon' \varepsilon}{c^2} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l \frac{e^{ikl}}{\sqrt{g}} = \\ = \frac{1}{c^2} c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l E^{ikl} = c^{i'}_i c^{k'}_k c^{l'}_l E^{ikl}, \end{aligned} \tag{1.223}$$

поскольку $c^2 = (\det C)^2 = 1$. □

1.113. Лемма. Векторное произведение векторов можно представить в следующем виде:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = a^k_{ij} a^i b^j \mathbf{e}_k, \quad a^k_{ij} = g^{kl} E_{lij}, \tag{1.224}$$

где тензор Леви–Чивиты E_{ijl} определен равенством (1.204).

Доказательство. Доказательство основано на результатах параграфа 1.110. □

8. Пример ортогонального тензора — тензор инерции

1.114. Тензор инерции возникает при изучении движения твердого тела. Рассмотрим движение твердого тела G относительно прямоугольной системы координат $Ox^1x^2x^3$ с началом в центре инерции тела. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — координатные векторы и они ортонормированы. Скорость $\mathbf{v}$ произвольной точки $M \in G$ представима в следующем виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\Omega, \mathbf{r}], \tag{1.225}$$

где $\mathbf{V}$ — скорость центра инерции тела, $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\}$ — угловая скорость вращения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции тела, $\mathbf{r} = \{x^1, x^2, x^3\}$ — радиус–вектор точки M.

Кинетическая энергия T тела G определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}\int_G \rho(M)|\mathbf{v}|^2\,dx, \tag{1.226}$$

где $\rho = \rho(M)$ — плотность тела в точке M. Из (1.225) вытекает следующая цепочка равенств:

$$|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{V}|^2 + 2(\mathbf{V}, [\Omega, \mathbf{r}]) + |[\Omega, \mathbf{r}]|^2 = \\ = |\mathbf{V}|^2 + 2([\mathbf{V}, \Omega], \mathbf{r}) + |\Omega|^2|\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2 \tag{1.227}$$

Поскольку векторы $\mathbf{V}$ и Ω — одни и те же для всех точек тела G, то справедливо равенство

$$\int\limits_G \rho(M)([\mathbf{V}, \Omega], \mathbf{r})\,dx = \left([\mathbf{V}, \Omega], \int\limits_G \rho(M)\mathbf{r}\,dx\right) = 0, \tag{1.228}$$

поскольку точка O — точка центра инерции тела G. Таким образом, из (1.226)–(1.228) вытекает следующее выражение для кинетической энергии тела:

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_G \rho(M)|\mathbf{V}|^2\,dx + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_G \rho(M)(|\Omega|^2|\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2)\,dx := T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}}, \tag{1.229}$$

где $T_{\text{пост}}$ есть кинетическая энергия поступательного движения твердого тела, $T_{\text{вр}}$ — кинетическая энергия вращательного движения тела. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$|\Omega|^2|\mathbf{r}|^2 - (\Omega, \mathbf{r})^2 = \Omega_i\Omega_j\delta^{ij}|\mathbf{r}|^2 - (\Omega_i x^i)(\Omega_j x^j) = \\ = \Omega_i\Omega_j\left((\mathbf{r}, \mathbf{r})\delta^{ij} - x^i x^j\right). \tag{1.230}$$

С учетом (1.230) выражение для $T_{\text{вр}}$ можно записать в виде следующей квадратичной формы:

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2}I^{ij}\Omega_i\Omega_j, \tag{1.231}$$

где

$$I^{ij} = \int\limits_G \rho(M)\left[(\mathbf{r}, \mathbf{r})\delta^{ij} - x^i x^j\right]\,dx. \tag{1.232}$$

Справедливо следующее утверждение:

1.115. Лемма. Числа I^{ij} являются координатами некоторого ортогонального тензора типа $(0, 2)$.

Доказательство. В целях практики тензорных вычислений сделаем все вычисления подробно. Пусть $\{\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}\}$ — новый ортонормированный базис, связанный с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ равенствами

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad C = \|c^i_{i'}\|, \quad C^T = C^{-1}.$$

Справедливы следующие цепочки равенств:

$$c^{i'}_i c^{j'}_j \delta^{ij} = c^{i'}_i c^{j'}_i = \{CC^T\}^{i'j'} = \delta^{i'j'}, \tag{1.233}$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = x_{k'}x^{k'} = c^k_{k'}x_k c^{k'}_j x^j = c^k_{k'}c^{k'}_j x_k x^j = \delta^k_j x_k x^j = x_k x^k, \tag{1.234}$$

$$x^{i'}x^{j'} = c^{i'}_i c^{j'}_j x^i x^j. \tag{1.235}$$

Таким образом, из (1.233)–(1.235) для координат (1.232) вытекает равенство

$$I^{i'j'} = c^{i'}_i c^{j'}_j I^{ij}.$$

□

1.116. Отметим, что, как мы знаем, символ Кронекера δ^{ij} не является тензором, а только ортогональным тензором.