ГЛАВА 1

Линейные операторы в евклидовых и унитарных пространствах

1. Сопряженный оператор

1.1. Определение. Пусть A — линейный оператор из $\mathcal{L}(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U}))$. Оператор A^* называется сопряженным к оператору A, если для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ выполняется равенство

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{1.1}$$

1.2. Теорема. *Сопряженный оператор A^* обладает следующим свойствами*:

1) A^* — *линейный оператор;*
2) $(A+B)^* = A^* + B^*$*;*
3) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$*;*
4) $(AB)^* = B^*A^*$*;*
5) $(A^*)^* = A$.

Доказательство. Шаг 1. Докажем, что для любых $y, z \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ имеют место следующие равенства:

$$A^*(y+z) = A^*y + A^*z, \quad A^*(\alpha y) = \alpha A^*y. \tag{1.2}$$

С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем

$$(Ax, y+z) = (x, A^*(y+z)). \tag{1.3}$$

С другой стороны, имеем

$$(Ax, y+z) = (Ax, y) + (Ax, z) = (x, A^*y) + (x, A^*z). \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} &(x, A^*(y+z)) = (x, A^*y) + (x, A^*z) \Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow (x, A^*(y+z) - A^*y - A^*z) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}) \Leftrightarrow \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow A^*(y+z) = A^*y + A^*z. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Первое равенство из (1.2) доказано. Докажем второе равенство. С одной стороны, для всех $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$

$$(Ax, \alpha y) = (x, A^*(\alpha y)). \tag{1.6}$$

С другой стороны, имеем

$$(Ax, \alpha y) = \overline{\alpha}(Ax, y) = \overline{\alpha}(x, A^* y) = (x, \alpha A^* y). \tag{1.7}$$

Из равенств (1.6) и (1.7) получаем равенство

$$(x, A^*(\alpha y)) = (x, \alpha A^* y) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}). \tag{1.8}$$

Следовательно,

$$A^*(\alpha y) = \alpha A^* y.$$

Второе равенство из (1.2) доказано.

Шаг 2. Докажем, что $(A + B)^* = A^* + B^*$. Действительно, с одной стороны, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедливо равенство

$$((A + B)x, y) = (x, (A + B)^* y). \tag{1.9}$$

С другой стороны, имеем

$$((A + B)x, y) = (Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^* y) + (x, B^* y). \tag{1.10}$$

Из равенств (1.9) и (1.10) получаем

$$(x, (A + B)^* y) = (x, A^* y) + (x, B^* y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x, (A + B)^* y - A^* y - B^* y) = 0 \Leftrightarrow (A + B)^* y - A^* y - B^* y = \theta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A + B)^* = A^* + B^*. \tag{1.11}$$

Шаг 3. Докажем, что $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо следующее равенство:

$$((\alpha A)x, y) = (x, (\alpha A)^* y). \tag{1.12}$$

С другой стороны, имеем

$$((\alpha A)x, y) = \alpha(Ax, y) = \alpha(x, A^* y) = (x, \overline{\alpha} A^* y). \tag{1.13}$$

Из сравнения равенств (1.12) и (1.13) получим равенство

$$(x, (\alpha A)^* y) = (x, \overline{\alpha} A^* y) \Leftrightarrow (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*. \tag{1.14}$$

Шаг 4. Докажем равенство $(AB)^* = B^* A^*$. Действительно, для всех $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$, с одной стороны, справедливо равенство

$$((AB)x, y) = (x, (AB)^* y). \tag{1.15}$$

С другой стороны, имеем

$$((AB)x, y) = (A(Bx), y) = (Bx, A^* y) = (x, B^* A^* y). \tag{1.16}$$

Из сравнения (1.15) с (1.16) получим искомое равенство.

Шаг 5. Докажем равенство $(A^*)^* = A$. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} = \overline{(y, (A^*)^* x)} = ((A^*)^* x, y). \tag{1.17}$$

Отсюда приходим к искомому равенству. $\square$

2. Примеры сопряженных операторов

1.3. Пример. Сопряженные операторы к единичному и нулевому совпадают с ними. Действительно, для любых $x, y \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ имеем

$$(Ix, y) = (x, y) = (x, Iy), \quad (Ox, y) = 0 = (\theta, y) = 0 = (x, \theta) = (x, Oy).$$

1.4. Пример. Сопряженным к оператору $Ax = [a, x]$ в трехмерном евклидовом пространстве геометрических векторов, где a — фиксированный вектор, является оператор $A^* = -A$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = ([a, x], y) = (y, [a, x]) = (y, a, x) =$$
$$= (x, y, a) = (x, [y, a]) = (x, -[a, y]) = (x, -Ay)$$

для всех x, y.

3. Матрица сопряженного оператора

1.5. Пусть $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ — произвольный базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ (в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$), причем $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ ($A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$) и A_f — матрица этого оператора в базисе $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, G_f — матрица Грама базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. Наша задача найти матрицу A_f^* сопряженного оператора A^* в том же базисе.

Пусть

$$x = \mathbf{F}X_f, \quad y = \mathbf{F}Y_f, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n), \quad X_f, Y_f \in \mathbb{C}^{n\times 1}(\mathbb{R}^{n\times 1}). \tag{1.18}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ax = A(\mathbf{F}X_f) = (A\mathbf{F})X_f = \mathbf{F}A_f X_f, \tag{1.19}$$

$$A^*y = A^*(\mathbf{F}Y_f) = (A^*\mathbf{F})Y_f = \mathbf{F}A_f^* Y_f. \tag{1.20}$$

Напомним, что скалярное произведение элементов x, y выражается через координаты этих элементов следующим образом:

$$(x, y) = X_f^T G_f \overline{Y_f}, \tag{1.21}$$

где G_f — матрица Грама в базисе $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$. С учетом (1.19)–(1.21) справедливы следующие равенства:

$$Ax = \mathbf{F}A_f X_f, \quad A^*y = \mathbf{F}A_f^* Y_f.$$

Поэтому из определяющего соотношение для сопряженного оператора

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}(\in \mathcal{E}) \tag{1.22}$$

вытекает следующее равенство:

$$(A_f X_f)^T G_f \overline{Y_f} = X_f^T G_f \overline{A_f^* Y_f} \tag{1.23}$$

или эквивалентно

$$X_f^T A_f^T G_f \overline{Y_f} = X_f^T G_f \overline{A_f^* Y_f}, \tag{1.24}$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_f, Y_f \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ($\in \mathbb{R}^{n\times 1}$). Поэтому из (1.24) вытекает цепочка равенств

$$X_f^T \left[A_f^T G_f - G_f \overline{A_f^*} \right] \overline{Y_f} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_f^T G_f - G_f \overline{A_f^*} = O \Leftrightarrow A_f^T G_f = G_f \overline{A_f^*}. \tag{1.25}$$

Теперь из (1.25), пользуясь тем, что $\det G_f > 0$, получим выражение для матрицы A_f^* сопряженного оператора A^*:

$$\overline{A_f^*} = G_f^{-1} A_f^T G_f \Leftrightarrow \boxed{A_f^* = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f}.} \tag{1.26}$$

Отдельно отметим, что в случае евклидова пространства выражение (1.26) примет следующий вид:

$$\boxed{A_f^* = G_f^{-1} A_f^T G_f.} \tag{1.27}$$

В случае ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ матрица Грама является единичной и поэтому формулы (1.26) и (1.27) примут следующий вид:

$$\boxed{A_f^* = \overline{A_f^T} \quad \text{для унитарного пространства}}, \tag{1.28}$$

$$\boxed{A_f^* = A_f^T \quad \text{для евклидова пространства}}. \tag{1.29}$$

1.6. Определение. Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, удовлетворяющая условию $A = \overline{A^T}$, называется эрмитовой.

1.7. Лемма. Матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ и $G(x, y)$ — полуторалинейная форма, задающая скалярное произведение в этом унитарном пространстве. Поэтому справедливы равенства

$$g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \overline{G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)} = \overline{g_{ji}},$$

из которых вытекает искомое равенство $G_e = \overline{G_e^T}$. □

1.8. Лемма. Всякая полуторалинейная форма $\mathcal{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ определяет единственным образом некоторый линейный оператор $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ по формуле

$$\mathcal{A}(x,y) = (Ax,y) \quad \text{для всех} \quad x,y \in \mathcal{U}. \tag{1.30}$$

Доказательство. Существование. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{U}$. Построим оператор A, чья матрица в базисе $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ задается формулой

$$a_j^k = \mathcal{A}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k).$$

Справедлива вспомогательная цепочка равенств:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{k=1} a_j^k \mathbf{e}_k, \quad x = x^j\mathbf{e}_j \Rightarrow Ax = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1} a_j^k x^j \mathbf{e}_k,$$

$$(x,\mathbf{e}_j) = (x^k\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_j) = x^k(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_j) = x^k\delta_{kj} = x^j,$$

Следовательно, приходим к следующему равенству:

$$Ax = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k \mathbf{e}_k (x,\mathbf{e}_j). \tag{1.31}$$

Прежде всего заметим, что в силу линейности скалярного произведения $(x,\mathbf{e}_j)$ по первому аргументу оператор A тоже линейный. Пусть

$$x = x^j\mathbf{e}_j, \quad y = y^k\mathbf{e}_k.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathcal{A}(x,y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} \mathcal{A}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)x^j\overline{y^k} = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k x^j\overline{y^k} =$$

$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x,\mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k,y) = \left(\sum_{j,k=1,1}^{n,n} a_j^k (x,\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k, y\right) = (Ax,y). \tag{1.32}$$

Существование оператора доказано.

Единственность. Пусть $\hat{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ такой линейный оператор, что

$$(\hat{A}x,y) = \mathcal{A}(x,y) = (Ax,y) \quad \text{для всех} \quad x,y \in \mathcal{U}.$$

Тогда имеем

$$(\hat{A}x - Ax, y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}x = Ax \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A} = A.$$

Единственность доказана. □

4. Самосопряженный оператор

1.9. Определение. Оператор A, действующий в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$), называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным

$$A = A^*, \tag{1.33}$$

или, иными словами, если для любых элементов $x, y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ выполняется соотношение

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Самосопряженные операторы в унитарном пространстве называются эрмитовыми, а самосопряженные операторы в евклидовом пространстве — симметричными.

1.10. Теорема. *Для того чтобы оператор A был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в произвольном базисе удовлетворяла соотношению*

$$\boxed{A_f = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f} \quad \text{в случае унитарного пространства,}} \tag{1.34}$$

$$\boxed{A_f = G_f^{-1} A_f^T G_f \quad \text{в случае евклидова пространства.}} \tag{1.35}$$

Доказательство. Доказательство основано на формулах (1.26) и (1.27). □

1.11. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ был эрмитовым, необходимо и достаточно,чтобы в любом базисе матрица $G_f \overline{A_f}$ была эрмитовой.

Доказательство. Преобразуем равенство (1.34) с учетом результата $G_f = \overline{G_f^T}$ леммы 1.7. Справедлива следующая цепочка соотношений:

$$A_f = \overline{G_f^{-1} A_f^T G_f} \Leftrightarrow \overline{A_f} = G_f^{-1} A_f^T G_f \Leftrightarrow G_f \overline{A_f} = A_f^T G_f \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G_f \overline{A_f} = A_f^T \overline{G_f^T} \Leftrightarrow G_f \overline{A_f} = \overline{\overline{A_f^T} G_f^T} = \overline{(G_f \overline{A_f})^T}.$$

□

1.12. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица $G_f A_f$ в любом базисе была симметричной:

$$(G_f A_f)^T = G_f A_f. \tag{1.36}$$

1.13. Ортонормированный базис. Если базис ортонормированный, то приходим к следующим двум утверждениям:

1.14. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ был эрмитовым, необходимо и достаточно,чтобы в любом ортонормированном базисе матрица A_e была эрмитовой: $A_e = \overline{A_e^T}$.

Доказательство. Данная лемма является следствием леммы 1.11. Заметим, что

$$A_e = \overline{A_e^T} \Leftrightarrow a_j^k = \overline{a_k^j}, \quad A_e = (a_j^k), \quad \overline{A_e^T} = \overline{a_k^j}.$$

Однако, предложим непосредственное доказательство достаточности. Действительно, пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис. Справедливы следующие равенства:

$$A\mathbf{e}_j = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \mathbf{e}_l, \quad (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = a_j^k, \quad (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \overline{a}_k^j. \tag{1.37}$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \left(\sum_{l=1}^{n} a_j^l \mathbf{e}_l, \mathbf{e}_k\right) = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \delta_{lk} = a_j^k,$$

$$(\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = \left(\mathbf{e}_j, \sum_{l=1}^{n} a_k^l \mathbf{e}_l\right) = \sum_{l=1}^{n} \overline{a_k^l} (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l) = \overline{a}_k^j.$$

С учетом (1.37) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Ax, y) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (A\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k a_j^k = \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k \overline{a}_k^j =$$
$$= \sum_{j,k=1,1}^{n,n} x^j \overline{y}^k (\mathbf{e}_j, A\mathbf{e}_k) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{U}.$$

$\square$

1.15. Лемма. Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ был симметричным, необходимо и достаточно, чтобы матрица A_e в любом ортонормированном базисе была симметричной: $A_e = A_e^T$.

Доказательство. Доказательство повторяет в точности доказательство леммы 1.14. □

1.16. Лемма. Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$ в некотором ортонормированном базисе является эрмитовой, то она эрмитова в любом другом ортонормированном базисе.

Доказательство. Пусть два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}\}$ и $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ связаны матрицей $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$(\mathbf{e}_{1'},\ldots,\mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)C.$$

Как известно, из предыдущей лекции

$$C^T\overline{C} = I \Leftrightarrow C = (\overline{C}^T)^{-1}, \quad \overline{C}^T = C^{-1}. \tag{1.38}$$

Матрицы $A_{e'}$ и A_e связаны известным равенством

$$A_{e'} = C^{-1}A_eC, \tag{1.39}$$

причем $A_e = \overline{A_e}^T$. Из равенства (1.39) с учетом соотношений (1.38) вытекает цепочка равенств

$$\overline{A_{e'}} = \overline{C}^{-1}\overline{A_eC} \Leftrightarrow \overline{A_{e'}}^T = \overline{C}^T\overline{A_e}^T(\overline{C}^{-1})^T = \overline{C}^T\overline{A_e}^T(\overline{C}^T)^{-1} =$$
$$= \overline{C}^T\overline{A_e}^T C = C^{-1}\overline{A_e}^T C = C^{-1}A_eC = A_{e'}.$$

Отсюда получаем искомое равенство $\overline{A_{e'}}^T = A_{e'}$. □

1.17. Лемма. Если матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ в некотором ортонормированном базисе является симметричной, то она симметрична в любом другом ортонормированном базисе.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству утверждения леммы 1.16. □

1.18. Лемма. Всякий ортогональный проектор P на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$) является самосопряженным.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m\}$, где $m = \dim\mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P}$. Тогда, как нами было доказано ранее, оператор P ортогонального проектирования на $\mathcal{P}$ имеет следующий явный вид:

$$Px = \sum_{j=1}^{m}(x,\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j. \tag{1.40}$$

Тогда для любых $x, y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Px, y) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j, y \right) = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j, y) =$$

$$= \left(x, \sum_{j=1}^{m} \overline{(\mathbf{e}_j, y)}\mathbf{e}_j \right) = \left(x, \sum_{j=1}^{m} (y, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \right) = (x, Py). \quad (1.41)$$

□

1.19. Определение. Оператор P называется идемпотентным, если $P^2 = P$.

1.20. Теорема. *Всякий линейный самосопряженный идемпотентный оператор P является ортогональным проектором на некоторое линейное подпространство.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Пусть $x \in \operatorname{im} P$. Тогда найдется такой $y \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$, что справедливо равенство

$$Py = x \Rightarrow x = P^2 y = Px,$$

где мы воспользовались тем, что $P^2 = P$. Итак, имеем

$$Px = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \quad (1.42)$$

Шаг 2. Пусть $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Тогда в силу самосопряженности линейного оператора P и равенства (1.42) справедлива следующая цепочка равенств:

$$(Py, x) = (y, Px) = (y, x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P}. \quad (1.43)$$

Значит, $Py \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\perp}$. Следовательно,

$$Py = \theta \quad \text{для всех} \quad y \in \mathcal{P}^{\perp}. \quad (1.44)$$

Шаг 3. Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \operatorname{im} P = \dim \mathcal{P}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{P} = \operatorname{im} P$. Дополним его до ортонормированного базиса во всем пространстве $\mathcal{E}$ $(\mathcal{U})$ Таким образом, $\{\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис в $\mathcal{P}^{\perp}$ и справедливо разложение в прямую сумму

$$\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp} \quad \text{или} \quad \mathcal{U} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}.$$

Тогда для любого $x \in \mathcal{E}$ $(\in \mathcal{U})$ справедливо разложение

$$x = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j := x_{\mathcal{P}} + x_{\mathcal{P}^{\perp}}, \quad (1.45)$$

причем $x_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$, а $x_{\mathcal{P}^\perp} = x - x_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}^\perp$. Из (1.45) с учетом (1.42) и (1.44) получаем, что

$$Px = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)P\mathbf{e}_j + \sum_{j=m+1}^{n}(x, \mathbf{e}_j)P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j = x_{\mathcal{P}}. \quad (1.46)$$

Стало быть, P — ортогональный проектор на свой образ. □

5. Собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора

1.21. Теорема. *Все характеристические числа самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Эрмитов оператор в унитарном пространстве. Любое характеристическое число эрмитова оператора A принадлежит полю $\mathbb{C}$, над которым рассматривается соответствующее унитарное пространство, так что является его собственным значением. Следовательно,

$$Ax_0 = \lambda x_0, \quad x_0 \neq \theta. \quad (1.47)$$

Умножим обе части равенства (1.47) на x_0 и получим равенство

$$(Ax_0, x_0) = (\lambda x_0, x_0) = \lambda(x_0, x_0),$$

из которого с учетом равенства $A^* = A$ получим цепочку равенств

$$\lambda(x_0, x_0) = (Ax_0, x_0) = (x_0, Ax_0) = (x_0, \lambda x_0) = \overline{\lambda}(x_0, x_0),$$

а так как $(x_0, x_0) \neq 0$, то получим равенство $\lambda = \overline{\lambda}$. Следовательно, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Симметричный оператор в евклидовом пространстве. Рассмотрим матрицу A_e данного симметричного оператора A в каком-либо ортонормированном базисе $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$; эта матрица симметрична, $A_e = A_e^T$. Рассмотрим оператор $\hat{A}$ в унитарном пространстве $\mathcal{U}$, имеющий в некотором ортонормированном базисе $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ этого унитарного пространства матрицу A_e :

$$\begin{aligned}\hat{A}\mathbf{F} := \left(\hat{A}\mathbf{f}_1, \ldots, \hat{A}\mathbf{f}_n\right) = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}\hat{A}_f = \\ = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}A_e = \mathbf{F}A_e, \quad \overline{A_e} = A_e = A_e^T. \quad (1.48)\end{aligned}$$

В силу результата леммы 1.16 приходим к выводу о том, что оператор $\hat{A}$ эрмитов и поэтому все его характеристические числа вещественны. Осталось заметить, что характеристические многочлены операторов A и $\hat{A}$ совпадают. Действительно, имеют место следующие равенства:

$$Ae = \lambda e \Rightarrow A_e X_e = \lambda X_e, \quad e = \mathbf{E}X_e,$$

$$\hat{A}f = \lambda f \Rightarrow \hat{A}_f Y_f = \lambda Y_f, \quad f = \mathbf{F} Y_f.$$

При этом

$$\det(A_e - \lambda I) = 0, \quad \det(\hat{A}_f - \lambda I) = \det(A_e - \lambda I) = 0$$

Значит, совпадают их характеристические числа. □

1.22. Следствие. *Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.*

1.23. Теорема. *Симметричный оператор в евклидовом пространстве имеет по крайней мере один собственный вектор.*

Доказательство. Характеристический многочлен симметричного оператора A в n–мерном евклидовом пространстве является многочленом степени n и имеет, по основной теореме алгебры, хотя бы один корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Из предыдущей теоремы вытекает, что этот корень вещественен и, стало быть, является собственным значением оператора A. В таком случае оператор $A - \lambda_0 I$ имеет ненулевое ядро, которое представляет собой собственно подпространство $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{E}$, соответствующее собственному значению λ_0. □

1.24. Теорема. *Собственные векторы самосопряженного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть λ_1, λ_2 — собственные значения, x_1, x_2 — соответствующие собственные векторы самосопряженного оператора A. По условию, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, причем оба числа λ_1, λ_2 вещественны. Тогда имеем:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2.$$

Умножим первое из этих равенств скалярно на x_2, а второе — на x_1 :

$$(Ax_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2), \tag{1.49}$$

$$(x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \overline{\lambda_2}(x_1, x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2), \tag{1.50}$$

причем

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2). \tag{1.51}$$

Из равенств (1.49)–(1.51) получаем, что

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0.$$

Отсюда, поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, получаем, что $(x_1, x_2) = 0$. □

1.25. Теорема. *Ортогональное дополнение любого инвариантного линейного подпространства самосопряженного оператора также является инвариантным линейным подпространством.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — инвариантное линейное подпространство для линейного самосопряженного оператора A. Тогда для любых $x \in \mathcal{P}$ вытекает, что $Ax \in \mathcal{P}$. Предположим, что $y \in \mathcal{P}^{\perp}$. Докажем, что $Ay \in \mathcal{P}^{\perp}$. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 = (Ax, y) = (x, Ay) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{P} \Rightarrow Ay \in \mathcal{P}^{\perp}.$$

□

1.26. Теорема. *Для того чтобы оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($\in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$) был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существовал ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Достаточность. Пусть в $\mathcal{E}$ (в $\mathcal{U}$) существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица диагональна, причем на диагонали стоят вещественные числа — собственные значения данного оператора, и, стало быть, эта матрица симметрична и эрмитова. Однако оператор, имеющий в ортонормированном базисе симметричную (эрмитову матрицу), является самосопряженным (см. леммы 1.14 и 1.15).

Необходимость. Выше было доказано, что у самосопряженного оператора A в n–мерном пространстве имеется по крайней мере один собственный вектор и, следовательно, одномерное собственное подпространство $\mathcal{P}$. Ортогональное дополнение $\mathcal{P}^{\perp}$ этого собственного (инвариантного) подпространства, согласно теореме 1.25, само является инвариантным подпространством размерности $n-1$. Ограничение оператора A на инвариантное подпространство $\mathcal{P}^{\perp}$ представляет собой самосопряженный оператор в $\mathcal{P}^{\perp}$, который обладает собственным вектором, лежащим в $\mathcal{P}^{\perp}$. Продолжая процесс, получим ортогональную систему из n собственных векторов оператора A. Нормируя их, получим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора A. □

6. Спектральное разложение самосопряженного оператора

1.27. Пусть $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ ($\in L(\mathcal{U};\mathcal{U})$) и является самосопряженным. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это ортонормированный базис, составленный из собственных векторов оператора A, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Пусть

$$x = x^j \mathbf{e}_j, \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A(x) = A\left(x^j \mathbf{e}_j\right) = x^j A(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x^j \lambda_j \mathbf{e}_j. \tag{1.52}$$

Рассмотрим оператор P_j ортогональной проекции на линейное подпространство $\mathcal{P}_j := L(\mathbf{e}_j)$:

$$P_j(x) = x^j \mathbf{e}_j, \tag{1.53}$$

где нет суммирования по j. Из равенств (1.52) и (1.53) вытекает следующая формула:

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}). \tag{1.54}$$

Следовательно,

$$\boxed{A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.}$$

1.28. Лемма. Справедливо следующее равенство:

$$\boxed{A^s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s P_j, \quad s \in \mathbb{N}.} \tag{1.55}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что $P_j^2 = P_j$ и $P_j P_k = O$ при $j \neq k$. Действительно, имеем

$$P_j^2 x = P_j(x^j \mathbf{e}_j) = x^j P_j(\mathbf{e}_j) = x^j \mathbf{e}_j = P_j x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}),$$

$$P_j P_k(x) = P_j(x^k \mathbf{e}_k) = x^k P_j(\mathbf{e}_k) = x^k 0 \mathbf{e}_j = \theta \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \lambda_j \lambda_k P_j P_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 P_j.$$

Далее по индукции доказываем утверждение этой леммы. □

1.29. Определение. Самосопряженный оператор $A \in L(\mathcal{E};\mathcal{E})$ $(\in L(\mathcal{U};\mathcal{U}))$ называется неотрицательным, если все его собственные значения неотрицательны.

1.30. Определение. Определим не целую степень A^s, $s \in [0, +\infty)$ неотрицательного оператора A следующим образом:

$$\boxed{A^s \stackrel{def:}{=} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^s P_j, \quad s \in [0, +\infty).} \tag{1.56}$$

1.31. Лемма. Для линейного неотрицательного самосопряженного оператора A справедливы равенства

$$A^0 = I, \quad A^{s_1} A^{s_2} = A^{s_1+s_2} \quad \text{для всех} \quad s_1, s_2 \in [0, +\infty).$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 1.28. □

7. Приведение квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием

1.32. Рассмотрим в некотором ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ квадратичную форму $Q(x)$, которая имеет следующий вид:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T A_e X_e, \quad X_e^T = (x^1, \ldots, x^n), \tag{1.57}$$

а $A_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица квадратичной формы в заданном базисе. Заметим, что $A_e^T = A_e$ и поэтому можно рассматривать матрицу A_e как матрицу некоторого симметричного оператора $A \in L(\mathcal{E}; \mathcal{E})$. Но тогда существует ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$, состоящий из собственных векторов оператора A. В этом базисе матрица A_f оператора A имеет диагональный вид:

$$A_f = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}. \tag{1.58}$$

Пусть

$$x = \mathbf{E} X_e = \mathbf{F} Y_f, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} C, \tag{1.59}$$

где $X_e^T = (x^1, \ldots, x^n)$, $Y_f^T = (y^1, \ldots, y^n)$,

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n).$$

Тогда имеем

$$X_e = C Y_f, \quad C^T C = I, \quad X_e, Y_f \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \tag{1.60}$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = X_e^T A_e X_e =$$
$$= Y_f^T C^T A_e C Y_f = Y_f^T A_f Y_f = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (y^j)^2.$$

Действительно,

$$Y_f^T A_f Y_f = (y^1, \dots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} =$$

$$= (y^1, \dots, y^n) \begin{pmatrix} \lambda_1 y^1 \\ \vdots \\ \lambda_n y^n \end{pmatrix} = \lambda^1 (y^1)^2 + \dots + \lambda_n (y^n)^2.$$

8. О паре квадратичных форм

1.33. Теорема. *Для любой пары квадратичных форм $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ в линейном вещественном пространстве $\mathcal{L}$, одна из которых положительно определена, существует общий базис, в котором обе квадратичные формы имеют канонический вид.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(x,x)$ — положительно определенная квадратичная форма и $\mathcal{B}(x,y)$ — билинейная форма, полярная к квадратичной форме $\mathcal{B}(x,x)$. Форма $\mathcal{B}(x,y)$ определяет скалярное произведение в линейном пространстве $\mathcal{L}$, относительно которого $\mathcal{L}$ является евклидовым пространством. Согласно результату пункта 1.32 существует такой ортонормированный базис $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, в котором квадратичная форма $\mathcal{A}(x,x)$ имеет канонический вид, причем

$$\mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \delta_{kj}$$

и поэтому

$$(x,x) = \mathcal{B}(x,x) = x^j x^k \mathcal{B}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_k) = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2$$

причем

$$\mathcal{A}(x,x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x^j)^2.$$

□

1.34. Один из способов нахождения общего базиса. Пусть $\mathcal{B}(x,x)$ — положительно определенная квадратичная форма и A_e и B_e — это матрицы квадратичных форм $\mathcal{A}(x,x)$ и $\mathcal{B}(x,x)$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть, кроме того,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}C, \quad \mathbf{F} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \tag{1.61}$$

и при этом преобразование C таково, что

$$C^T A_e C = A_f = \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{1.62}$$

$$C^T B_e C = B_f = I = \operatorname{diag}\{1, \ldots, 1\}. \tag{1.63}$$

Тогда справедливы следующие цепочки равенства:

$$\begin{aligned} &A_e = (C^T)^{-1}\Lambda C^{-1}, \quad B_e = (C^T)^{-1}C^{-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A_e = (C^T)^{-1}\Lambda C^{-1}, \quad B_e^{-1} = CC^T \Leftrightarrow B_e^{-1}A_e C = C\Lambda. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Рассмотрим отдельно равенство

$$DC = C\Lambda, \quad C = \|C_1, \ldots, C_n\|. \tag{1.65}$$

Тогда имеем

$$(DC)_j = DC_j, \quad (C\Lambda)_j = C\Lambda_j. \tag{1.66}$$

Заметим, что

$$C\Lambda_j = \|C_1, \ldots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_j C_j. \tag{1.67}$$

Таким образом, из (1.65)–(1.66) получаем, что

$$DC = C\Lambda \Rightarrow DC_j = \lambda_j C_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда и из (1.64) получаем равенства

$$B_e^{-1} A_e C_j = \lambda_j C_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.68}$$

Последнее равенство означает, что столбцы C_j матрицы C, т.е. координаты элемента $\mathbf{f}_j$ нового базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ относительно старого базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ являются собственными векторами матрицы $B_e^{-1}A_e$, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, канонические коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ являются корнями уравнения

$$\det(B_e^{-1}A_e - \lambda I) = 0 \quad \text{или} \quad \det(A_e - \lambda B_e) = 0,$$

а координаты нового базиса относительно старого являются решениями следующей линейной однородной системы уравнений:

$$A_e Y = \lambda B_e Y.$$