ГЛАВА 1

Евклидовы и унитарные пространства

1. Евклидово пространство

1.1. Определение. Евклидово пространство $\mathcal{E}$ — это вещественное линейное пространство, в котором зафиксирована симметричная положительно определенная билинейная форма $G(x, y)$. Значение билинейной формы на паре элементов x, y называется скалярным произведением этих векторов и обозначается (x, y), т.е.

$$(x, y) = G(x, y).$$

1.2. Лемма. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

1. $(x, y) = (y, x)$ для всех $x, y \in \mathcal{E}$;
2. $(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) = \alpha^1 (x_1, y) + \alpha^2 (x_2, y)$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{E}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$;
3. $(x, x) > 0$ для всех $x \neq \theta$.

Доказательство. Первое свойство — следствие симметричности билинейной формы $G(x, y)$, второе свойство — следствие билинейности формы $G(x, y)$ и третье свойство — следствие положительной определенности соответствующей квадратичной формы $Q(x) = G(x, x)$. □

1.3. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$. Тогда справедливы следующие равенства (см. главу 5):

$$(x, y) = G(x, y) = G(x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i y^j = X_e^T G_e Y_e,$$

где матрица $G_e = (g_{ij})$ — положительно определенная матрица.

1.4. Определение. Матрица $G_e = (g_{ij})$ называется матрицей Грама или метрическим тензором.

1.5. Элементы матрицы Грама представляют собой скалярное произведение элементов базиса:

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = g_{ji}.$$

При переходе к новому базису с помощью матрицы перехода C матрица Грама преобразуется по тому же закону, что и любая матрица билинейной формы

$$G_{e'} = C^T G_e C, \quad g_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} g_{ij}.$$

1.6. Лемма. $\det G_e \neq 0$.

Доказательство. Это следствие критерия Сильвестра положительной определенности матрицы. □

1.7. В силу результата леммы 1.6 матрица Грама G_e обратима. Элементы обратной матрицы G_e^{-1} обозначаются g^{ij}. Тогда справедливы равенства

$$G_e G_e^{-1} = I \Leftrightarrow \{G_e G_e^{-1}\}^l_j = \{G_e\}_{jk}\{G_e^{-1}\}^{kl} = g_{jk}g^{kl} = \delta^l_j,$$

$$G_e^{-1} G_e = I \Rightarrow \{G_e^{-1}\}^{kl}\{G_e\}_{lj} = g^{kl}g_{lj} = \delta^k_j.$$

Заметим, что мы используем на протяжении книги следующие три обозначения:

$$\{A\}_{jk}, \quad \{A\}^j_k, \quad \{A\}^{jk},$$

где индекс j нумерует строчку, а индекс k столбец. Операции $\{A\}_{jk}, \{A\}^j_k, \{A\}^{jk}$ заключаются в извлечении элемента из матрицы A, расположенного на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Например, если $A = (a^{jk})^n_m$, то

$$\{A\}_{jk} = a^{jk}.$$

Отметим, что справедлива

1.8. Теорема. *Справедливо неравенство Коши–Буняковского:*

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{E}. \tag{1.1}$$

Доказательство. Для любых $x, y \in \mathcal{E}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

$$(\alpha x + y, \alpha x + y) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(\alpha) := \alpha^2(x, x) + 2\alpha(x, y) + (y, y) \geqslant 0$$

Для того чтобы квадратный трехчлен $f(\alpha)$ принимал только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0.$$

□

1.9. Пример. Линейное пространство столбцов $\mathbb{R}^{n\times 1}$ становится евклидовым пространством, если для столбцов

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

определить скалярное произведение по формуле

$$(X, Y) = X^T G Y, \tag{1.2}$$

где $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — положительно определенная матрица. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}(Y, X) = Y^T G X = (Y^T G X)^T = \\ = X^T G^T Y^{TT} = X^T G Y = (X, Y) \quad \text{для всех} \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1},\end{aligned}$$

поскольку $G^T = G$,

$$\begin{gathered}(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2, Y) = (\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2)^T G Y = (\alpha^1 X_1^T + \alpha^2 X_2^T) G Y = \\ = \alpha^1 X_1^T G Y + \alpha^2 X_2^T G Y = \\ = \alpha^1 (X_1, Y) + \alpha^2 (X_2, Y) \quad \text{для всех} \quad X_1, X_2, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},\end{gathered}$$

$$(X, X) = X^T G X > 0 \quad \text{для всех} \quad X^T \neq (0, \ldots, 0),$$

поскольку G — положительно определенная матрица.

1.10. Пример. Скалярное произведение в пространстве матриц $\mathbb{R}^{n\times m}$ можно ввести по формуле

$$(X, Y) = \operatorname{tr}(X^T Y), \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

Действительно, в курсе аналитической геометрии нами были доказаны следующие свойства следа квадратной матрицы:

$$\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A, \quad \operatorname{tr}(\alpha^1 A_1 + \alpha^2 A_2) = \alpha^1 \operatorname{tr} A_1 + \alpha^2 \operatorname{tr} A_2$$

для любых матриц $A, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ и произвольных чисел $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned}(Y, X) = \operatorname{tr}(Y^T X) = \operatorname{tr}((Y^T X)^T) = \\ = \operatorname{tr}(X^T Y) = (X, Y) \quad \text{для любых} \quad X, Y \in \mathbb{R}^{n\times m},\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2, Y) = \operatorname{tr}((\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2)^T Y) = \\ = \operatorname{tr}(\alpha^1 X_1^T Y + \alpha^2 X_2^T Y) = \alpha^1 \operatorname{tr}(X_1^T Y) + \alpha^2 \operatorname{tr}(X_2^T Y) = \\ = \alpha^1 (X_1, Y) + \alpha^2 (X_2, Y) \quad \text{для всех} \quad Y, X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},\end{gathered}$$

$$(X, X) = \operatorname{tr}(X^T X) = \sum_{j=1}^{m} \{X^T X\}_j^j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \{X^T\}_k^j \{X\}_j^k =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\{X\}_j^k\right)^2 \Rightarrow (X, X) > 0 \quad \text{для всех} \quad X \neq O \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

1.11. Пример. На бесконечномерном линейном пространстве $\mathbb{C}[0,1]$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ вещественных функций можно ввести скалярное произведение следующим образом:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 g(t) f(t)\, dt = (g, f) \quad \text{для любых} \quad f(t), g(t) \in \mathbb{C}[0,1],$$

$$(\alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2, g) = \int_0^1 (\alpha^1 f_1(t) + \alpha^2 f_2(t)) g(t)\, dt =$$

$$= \alpha^1 \int_0^1 f_1(t) g(t)\, dt + \alpha^2 \int_0^1 f_2(t) g(t)\, dt =$$

$$= \alpha^1 (f_1, g) + \alpha^2 (f_2, g) \text{ для всех } f_1(t), f_2(t), g(t) \in \mathbb{C}[0,1],\ \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(f, f) = \int_0^1 f^2(t)\, dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

2. Длины и углы в евклидовом пространстве

1.12. Определение. Нормой вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число

$$\|x\| \overset{def:}{=} \sqrt{(x, x)}.$$

1.13. Теорема. *Имеют место соотношения*:

1. $\|x\| \geqslant 0$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$, *причем* $\|x\| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = \theta$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *для всех* $x \in \mathcal{E}$ *и всех* $\alpha \in \mathbb{R}$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *для всех* $x, y \in \mathcal{E}$.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго утверждения заметим, что

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2(x, x)} = |\alpha|\sqrt{(x, x)} = |\alpha|\|x\|.$$

Для доказательства третьего утверждения заметим, что справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) =$$
$$= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant \|x\|^2 + 2(x, x)^{1/2}(y, y)^{1/2} + \|y\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

для всех $x, y \in \mathcal{E}$. □

1.14. Определение. Угол между векторами x, y — это число $\phi \in [0, \pi]$, определяемый из уравнения

$$\cos\phi = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

1.15. Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что угол определен для любых двух ненулевых элементов.

3. Унитарные пространства

1.16. Определение. Полуторалинейной формой на комплексном линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется скалярная функция $G(x, y)$ двух переменных, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $G(x, y) = \overline{G(y, x)}$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$;
2. $G(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2, y) = \alpha^1 G(x_1, y) + \alpha^2 G(x_2, y)$ для всех $x_1, x_2, y \in \mathcal{L}$ и всех $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{C}$.

1.17. Лемма. Полуторалинейная форма $G(x, y)$ обладает следующими свойствами:

1. $G(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = \overline{\beta^1} G(x, y_1) + \overline{\beta^2} G(x, y_2)$ для всех $x, y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и всех $\beta^1, \beta^2 \in \mathbb{C}$;
2. $G(x, x) \in \mathbb{R}$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$G(x, \beta^1 y_1 + \beta^2 y_2) = \overline{G(\beta^1 y_1 + \beta^2 y_2, x)} = \overline{\beta^1 G(y_1, x) + \beta^2 G(y_2, x)} =$$

$$= \overline{\beta_1}\overline{G(y_1, x)} + \overline{\beta^2}\overline{G(y_2, x)} = \overline{\beta_1}G(x, y_1) + \overline{\beta^2}G(x, y_2),$$

$$G(x, x) = \overline{G(x, x)} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Leftrightarrow G(x, x) \in \mathbb{R}.$$

□

1.18. Из за первого свойства антилинейности форму $G(x, y)$ называют полуторалинейной.

1.19. Определение. Полуторалинейная форма $G(x, y)$ называется положительно определенной, если

$$G(x, x) > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad x \neq \theta.$$

1.20. Определение. Унитарное пространство $\mathcal{U}$ — это комплексное линейное пространство, на котором задана полуторалинейная, положительно определенная форма $G(x, y)$. Обычно пишут (x, y) вместо $G(x, y)$ и называют выражение (x, y) скалярным произведением.

1.21. Пример. Например, на линейном пространстве $\mathbb{C}_C[0, 1]$ комплекснозначных непрерывных функций можно задать следующую полуторалинейную положительно определенную форму:

$$G(f, g) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

1.22. Матрица Грама. Пусть в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ выбран базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(x, y) = G(x, y) = G(x^j\mathbf{e}_j, y^k\mathbf{e}_k) = \\ = x^j\overline{y^k}G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = x^j g_{jk}\overline{y^k} = X_e^T G_e \overline{Y_e}. \quad (1.3)$$

Действительно, пусть

$$X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad \overline{Y}_e = \begin{pmatrix} \overline{y^1} \\ \vdots \\ \overline{y^n} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$G_e \in \mathbb{C}^{n\times n},\ X_e, Y_e \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$\{G_e\overline{Y}_e\}_j = \sum_{l=1}^{n}\{G_e\}_{jl}\{\overline{Y}_e\}^l = g_{jl}\overline{y_e}^l \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

$$X_e^T = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^{1\times n},$$

$$X_e^T G_e \overline{Y_e} = \sum_{j=1}^{n} \{X_e^T\}^j \{G\overline{Y}_e\}_j = x^j g_{jl} \overline{y_e}^l.$$

Теперь найдем закон преобразования матрицы полуторалинейной формы. Справедливы следующие равенства:

$$g_{j'k'} = G(\mathbf{e}_{j'}, \mathbf{e}_{k'}) = G(c^j_{j'}\mathbf{e}_j, c^k_{k'}\mathbf{e}_k) = c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}} G(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \\ = c^j_{j'}\overline{c^k_{k'}} g_{jk} = c^j_{j'} g_{jk} \overline{c^k_{k'}} \Leftrightarrow G_{e'} = C_e^T G_e \overline{C_e}. \quad (1.4)$$

Действительно, с одной стороны, имеют место следующее равенство:

$$g_{jk}\overline{c^k_{k'}} = \{G_e \overline{C}_e\}_{jk'},$$

в котором индекс k' нумерует столбцы, а индекс j нумерует строчки. С другой стороны, в матрице $C = (c^j_{j'})$ индекс j' нумерует столбцы, а индекс j — строчки. Но тогда у матрицы C^T все наоборот индекс j' нумерует строчки, а j нумерует столбцы. Поэтому, поскольку индексы j', k' фиксированы, то столбец $\{G_e\overline{C}_e\}_{k'}$ для того чтобы в итоге получилось число можно умножить слева на строчку $\{C^T\}^{j'}$ и получить число

$$C_e^T G_e \overline{C_e} = G_{e'}.$$

А вот если столбец $\{G_e\overline{C}_e\}_{k'}$ умножить справа на строчку $\{C^T\}^{j'}$ мы получим матрицу размера $n \times n$, а не число.

1.23. Теорема. *Справедливо следующее неравенство Коши–Буняковского:*

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathfrak{U}. \quad (1.5)$$

Доказательство. Если $x = \theta$, то неравенство (1.5) выполнено. Пусть $x \neq \theta$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$0 \leqslant (\alpha x + y, \alpha x + y) = \alpha(x, \alpha x + y) + (y, \alpha x + y) = \\ = |\alpha|^2(x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}(y,x) + (y,y) = \\ = |\alpha|^2(x,x) + \alpha(x,y) + \overline{\alpha}\overline{(x,y)} + (y,y). \quad (1.6)$$

Теперь положим в (1.6)

$$\alpha = -\frac{\overline{(x,y)}}{(x,x)}$$

и получим следующее неравенство:

$$\frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} - \frac{|(x,y)|^2}{(x,x)} + (y,y) \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x,y)|^2 \leqslant (x,x)(y,y).$$

$\square$

1.24. Точно также как и в случае евклидова пространства вводится норма вектора унитарного пространства, а вот угол между векторами унитарного пространства ввести нельзя, поскольку $(x,y) \in \mathbb{C}$.

4. Ортогональность

1.25. Определение. Векторы x, y либо евклидова пространства $\mathcal{E}$ либо унитарного пространства $\mathcal{U}$ называются ортогональными, если $(x,y) = 0$. При этом используется обозначение $x \perp y$. Если x ортогонально каждому вектору линейного подпространства $\mathcal{P}$, то используется обозначение $x \perp \mathcal{P}$. Множество всех векторов, которые ортогональны линейному подпространству $\mathcal{P}$ обозначается символом $\mathcal{P}^{\perp}$.

1.26. Лемма. Вектор x ортогонален самому себе $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

Доказательство. Поскольку скалярное произведение и в евклидовом и в унитарном пространствах является положительно определенной билинейной или полуторалинейной формами, то $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$. $\square$

1.27. Лемма. Если $y \perp x_1, \ldots, y \perp x_m$, то $y \perp L(x_1, \ldots, x_m)$.

Доказательство. Пусть $x \in L(x_1, \ldots, x_m)$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j x_j \Rightarrow (x,y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha^j (x_j, y) = 0.$$

$\square$

1.28. Лемма. Если $x \perp \mathbf{e}_j$ для всех $j = \overline{1,n}$, где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$, то $x = \theta$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$. Тогда справедливо разложение

$$x = x^j \mathbf{e}_j \Rightarrow x^k = (x, \mathbf{e}_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1,n}.$$

Значит, $x = \theta$. $\square$

1.29. Лемма. Если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,x) + (x,y) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

$\square$

1.30. Лемма. Если ненулевые векторы $x_1, \dots, x_m$ попарно ортогональны, то они линейно независимы.

Доказательство. Пусть $(x_j, x_k) = 0$ при $j \neq k$ и $x_j \neq \theta$ для всех $j = \overline{1, m}$. Теперь рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^m x_m = \theta$$

Умножим обе части этого равенства на x_k при $k \in \overline{1, m}$. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}(\alpha^1 x_1 + \dots + \alpha^m x_m, x_k) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha^1 (x_1, x_k) + \dots + \alpha^m (x_m, x_k) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha^k (x_k, x_k) = 0 \Rightarrow \alpha^k = 0.\end{aligned}$$

Значит, это семейство векторов является линейно независимым. □

1.31. Поскольку и евклидово пространство $\mathcal{E}$ и унитарное пространство $\mathcal{U}$ являются линейными пространствами над числами из $\mathbb{R}$ и из $\mathbb{C}$, соответственно, то над этими линейными пространствами определены сопряженные пространства $\mathcal{E}^*$ и $\mathcal{U}^*$ соответственно. Однако, для евклидовых и унитарных линейных пространств справедливо следующая важная **теорема Рисса–Фреше**:

1.32. Теорема. *Всякая линейная форма $f \in \mathcal{E}^* (f \in \mathcal{U}^*)$ представима в следующем виде:*

$$\langle f, x \rangle = (x, y_f) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E} (\in \mathcal{U}), \tag{1.7}$$

где вектор $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ определяется формой f однозначным образом.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ и $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ — соответствующий взаимный базис в $\mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$. Тогда для векторов $x, y_f \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\mathcal{U}^*)$ справедливы следующие разложения:

$$x = x^i \mathbf{e}_i, \quad y_f = \eta_f^k \mathbf{e}_k, \quad f = f_j \mathbf{e}^j, \quad g_{ij} = G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{1.8}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\langle f, x \rangle = \langle f_j \mathbf{e}^j, x^i \mathbf{e}_i \rangle = f_j x^i \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_i \rangle = f_j x^i \delta_i^j = f_i x^i, \tag{1.9}$$

$$(x, y_f) = (x^i \mathbf{e}_i, \eta_f^k \mathbf{e}_k) = x^i \overline{\eta_f^k} G(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k}. \tag{1.10}$$

Тогда искомое представление (1.7) в координатах при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ эквивалентно равенству

$$f_i x^i = g_{ik} x^i \overline{\eta_f^k} \Leftrightarrow (f_i - g_{ik} \overline{\eta_f^k}) x^i = 0. \tag{1.11}$$

Равенство (1.7) должно быть выполнено для любых векторов $x \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$ и поэтому эквивалентное ему равенство (1.11) (в заданном базисе) должно быть выполнено для всех $x^i \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ для всех $i = \overline{1,n}$. Пусть $X^T = (x^1, \ldots, x^n) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 расположена на p–ом месте, тогда из (1.11) получим следующие равенства:

$$g_{pk}\overline{\eta_f^k} = f_p, \quad p = \overline{1,n}. \tag{1.12}$$

Это неоднородная, вообще говоря, квадратная линейная система уравнений. Рассмотрим соответствующую однородную систему уравнений

$$g_{pk}\overline{\eta_f^k} = 0, \quad p = \overline{1,n}, \tag{1.13}$$

которую несложно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} 0 = g_{pk}\overline{\eta_f^k} = G(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_k)\overline{\eta_f^k} = G\left(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_k\eta_f^k\right) = \\ = G(\mathbf{e}_p, y_f) = (\mathbf{e}_p, y_f) \quad \text{для всех} \quad p = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

В силу результата леммы 1.28 получаем, что $y_f = \theta$. Следовательно, $\eta_f^k = 0$ для всех $k = \overline{1,n}$. Значит, однородная квадратная система линейных уравнений (1.13) имеет только тривиальное решение. Таким образом, в силу альтернатив Фредгольма неоднородная система линейных уравнений (1.13) имеет единственное решение $\{\eta_f^k\}_{k=1}^n$. «Прокручивая» в обратном порядке формулы (1.12)–(1.7) для элемента $y_f = \eta_f^k \mathbf{e}_k$ получим, что для каждой линейной формы $f \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$ существует единственный элемент $y_f \in \mathcal{E}(\in \mathcal{E})$ такой, что справедливо равенство (1.7). □

1.33. Лемма. Отображение $J: \ f \to y_f$ является линейным в случае евклидова пространства и антилинейным в случае унитарного пространства, т.е.

$$\begin{aligned} J(\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2) = y_{\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2} = \\ = \overline{\alpha_1} y_{f^1} + \overline{\alpha_2} y_{f^2} = \overline{\alpha_1} J(f^1) + \overline{\alpha_2} J(f^2) \end{aligned} \tag{1.15}$$

для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}(\in \mathbb{C})$ и всех $f^1, f^2 \in \mathcal{E}^*(\in \mathcal{U}^*)$.

Доказательство. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2, x\rangle = \left(x, y_{\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2}\right), \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2, x\rangle = \alpha_1 \langle f^1, x\rangle + \alpha^2 \langle f^2, x\rangle = \\ = \alpha_1 (x, y_{f_1}) + \alpha_2 (x, y_{f_2}) = (x, \overline{\alpha_1} y_{f_1} + \overline{\alpha_2} y_{f_2}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, из (1.16) и (1.17) вытекает следующее равенство:

$$(x, y_{\alpha_1 f^1+\alpha_2 f^2} - \overline{\alpha_1} y_{f_1} - \overline{\alpha_2} y_{f_2}) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}).$$

Следовательно,

$$y_{\alpha_1 f^1+\alpha_2 f^2} = \overline{\alpha_1} y_{f_1} + \overline{\alpha_2} y_{f_2}$$

или

$$J(\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2) = \overline{\alpha_1} J(f_1) + \overline{\alpha_2} J(f_2).$$

□

1.34. Определение. Базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ или в унитарном пространстве $\mathcal{U}$ называется ортонормированным, если справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \delta_{jk}, \quad j,k = \overline{1,n}.$$

1.35. Теорема. *Если $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве или в унитарном пространстве, тогда имеют место следующие равенства:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, \mathbf{e}_i)|^2 \text{ для всех } x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U}), \tag{1.18}$$

где второе равенство носит название равенства Парсеваля.

Доказательство. Представим произвольный вектор $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ в виде разложения по базису:

$$x = x^k \mathbf{e}_k \Rightarrow (x, \mathbf{e}_j) = (x^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = x^k (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j) = \\ = x^k \delta_{kj} = x^j \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j,$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j, \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \right) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j)\overline{(x, \mathbf{e}_k)}(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (x, \mathbf{e}_j)\overline{(x, \mathbf{e}_k)}\delta_{kj} = \\ = \sum_{j=1}^{n} |(x, \mathbf{e}_j)|^2 .$$

□

5. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

1.36. Теорема. *В любом евклидовом (в унитарном) пространстве $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ существует ортонормированный базис.*

Доказательство. Пусть в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (унитарном пространстве $\mathcal{U}$) дана упорядоченная система линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$. Теперь мы рассмотрим алгоритм, при помощи которого по этой системе векторов можно построить ортогональную систему векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{k'}\}$. Эта новая система строится с соблюдением следующих условий:

1) $\mathbf{e}_{1'} \in L(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{e}_{2'} \in L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$,...,$\mathbf{e}_{k'} \in L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$.
2) Векторы $\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{k'}$ попарно ортогональны.
3) Система $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{k'}\}$ линейно независима.

В таком случае говорят, что новая система векторов $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{k'}\}$ получена из первоначальной системы $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ процессом ортогонализации.

Если исходная система получена из трех векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$), то новую систему $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$ построим следующим образом:

- первый векторов сохраним $\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1$;
- второй вектор проведем к нему ортогонально в плоскости $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$;
- третий вектор проведем ортогонально к плоскости $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Переходя к случаю большей размерности, нужно четвертый вектор располагать перпендикулярно данному трехмерному пространству и т.д. В общем случае положим

$$\begin{gathered}\mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1,\\ \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_{1'},\\ \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3 + \beta\mathbf{e}_{2'} + \gamma\mathbf{e}_{1'},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \mathbf{e}_{k'} = \mathbf{e}_k + \lambda_1\mathbf{e}_{(k-1)'} + \lambda_2\mathbf{e}_{(k-2)'} + \dots + \lambda_{k-1}\mathbf{e}_{1'}.\end{gathered} \tag{1.19}$$

Очевидно, что векторы $\mathbf{e}_{i'}$ расположены в нужных линейных оболочках и являются ненулевыми в силу линейной независимости элементов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Остается подобрать коэффициенты $\alpha, \beta, \dots$ так, чтобы векторы $\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{k'}$ были попарно ортогональны. Тогда в силу результата леммы 1.30 векторы $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{k'}\}$ будут линейно независимыми.

Найдем α. Мы имеем

$$(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{1'}) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + \alpha(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}) = 0,$$

отсюда

$$\alpha = -\frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{1'})}{(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'})}, \quad (\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0. \tag{1.20}$$

Вектор $-\alpha\mathbf{e}_1$ представляет собой ортогональную проекцию вектора $\mathbf{e}_2$ на $L(\mathbf{e}_1)$. Действительно, пусть вектор $\mathbf{n} \perp \mathbf{e}_1$. Тогда справедливо равенство

$$\mathbf{e}_2 = \lambda\mathbf{e}_1 + \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1).$$

Стало быть,

$$\mathbf{e}_2 = \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 + \mathbf{n}.$$

Далее обеспечим ортогональность третьего вектора первым двум:

$$(\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_{1'}) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{1'}) + \beta\underline{(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{1'})} + \gamma(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'}) = 0, \tag{1.21}$$

$$(\mathbf{e}_{3'}, \mathbf{e}_{2'}) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{1'}) + \beta(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{2'}) + \gamma\underline{(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'})} = 0. \tag{1.22}$$

Подчеркнутые члены обращаются в нуль, а $(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{2'}) \neq 0$ по построению. Поэтому находим

$$\gamma = -\frac{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{1'})}{(\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{1'})}, \quad \beta = -\frac{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{2'})}{(\mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{2'})}. \tag{1.23}$$

Геометрически формулы (1.19) и (1.23) означают, что для построения вектора $\mathbf{e}_{3'}$ нужно из вектора $\mathbf{e}_3$ вычесть его ортогональную проекцию на линейное подпространство $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Далее процесс продолжается.

Для получения ортонормированного семейства векторов из ортогонального семейства достаточно разделить каждый вектор на его норму:

$$\mathbf{e}_{1''} = \frac{\mathbf{e}_{1'}}{\|\mathbf{e}_{1'}\|}, \ldots, \mathbf{e}_{k''} = \frac{\mathbf{e}_{k'}}{\|\mathbf{e}_{k'}\|}.$$

□

1.37. Многочлены Лежандра. В пространстве вещественных непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $\mathbb{C}[-1,1]$ вводится скалярное умножение следующим образом:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt. \tag{1.24}$$

Соответственно

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} f^2(t)\,dt. \tag{1.25}$$

Возьмем линейно независимое семейство одночленов

$$1, t, t^2, t^3, \ldots, t^k, \ldots \tag{1.26}$$

и применим к нему процесс ортогонализации. В результате получим последовательность многочленов

$$f_0(t) = 1, \quad f_1(t) = t, \quad f_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}, \quad f_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t, \quad \ldots. \tag{1.27}$$

После специальной подстановки вида

$$p_k(t) = \lambda_k f_k(t), \tag{1.28}$$

где λ_k выбираются из условия

$$p_k(1) = 1. \tag{1.29}$$

Можно доказать, что

$$p_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} \left\{ (t^2 - 1) \right\}, \quad \|p_k(t)\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \tag{1.30}$$

Многочлены (1.30) носят название многочленов Лежандра.

6. Ортогональные проекторы

1.38. Определение. Ортогональной проекцией векторы x на линейное подпространство $\mathcal{P}$ евклидова $\mathcal{E}$ или унитарного пространства $\mathcal{U}$ называется такой вектор $y \in \mathcal{P}$, что разность $x - y$ ортогональна $\mathcal{P}$.

1.39. Лемма. Ортогональная проекция произвольного вектора x на любое заданное нетривиальное линейное подпространство $\mathcal{P}$ определяется единственным образом и является линейной функцией от x.

Доказательство. Существование проекции. Для этого в евклидовом $\mathcal{E}$ (в унитарном пространстве $\mathcal{U}$) выберем какой–либо ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ таким образом, чтобы набор векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, $m = \dim \mathcal{P}$, образовывал базис линейного подпространства $\mathcal{P}$ и построим вектор y по правилу

$$y = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i. \tag{1.31}$$

Тогда с учетом результата теоремы 1.35 имеем

$$x = \sum_{j=1}^{n} (x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \tag{1.32}$$

и поэтому

$$x - y = \sum_{j=m+1}^{n} (x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i \perp \mathcal{P} = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) \qquad (1.33)$$

Единственность проекции. Пусть существует две ортогональные проекции $y_1, y_2 \in \mathcal{P}$. Тогда $x - y_1, x - y_2 \perp \mathcal{P}$. Пусть $z \in \mathcal{P}$. Тогда имеем

$$((x - y_1) - (x - y_2), z) = (x - y_1, z) - (x - y_2, z) = 0 \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{P}.$$

С одной стороны,

$$y_1 - y_2 \in \mathcal{P},$$

а с другой стороны, справедлива следующая цепочка соотношений:

$$y_1 - y_2 = (y_1 - x) - (y_2 - x) \perp \mathcal{P} \Rightarrow y_1 - y_2 = \theta$$

в силу результата леммы 1.26 поскольку $y_1 - y_2 \in \mathcal{P}$.

Линейная зависимость от x. Из формулы (1.31) в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу вытекает линейная зависимость $y = y(x)$. □

1.40. Определение. Оператор P, сопоставляющий всякому вектору x его ортогональную проекцию на линейное подпространство $\mathcal{P}$, называется ортогональным проектором на подпространство $\mathcal{P}$.

1.41. Лемма. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ при $m = \dim \mathcal{P}$ — какой–либо ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$, то ортогональный проектор на $\mathcal{P}$ задается формулой

$$Px = \sum_{j=1}^{m} (x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j \qquad (1.34)$$

и, в частности, является линейным оператором.

Доказательство. Достроим ортонормированный базис базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ во всем евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (унитарного пространства $\mathcal{U}$). С этой целью сначала просто достраиваем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ до базиса во всем линейной пространстве, а затем используем процедуру ортогонализации Штурма. После этого достаточно воспользоваться доказательством леммы 1.39. □

1.42. Лемма. Оператор P удовлетворяет равенству $P^2 = P$ и поэтому является проектором.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ — какой–то ортонормированный базис в линейном подпространстве $\mathcal{P}$. Тогда согласно результату леммы 1.41 ортогональный проектор имеет вид (1.34) и, в частности,

$$P\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{m}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m}\delta_{jk}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, m}.$$

Поэтому для любого $x \in \mathcal{E}(\in \mathcal{U})$ имеем

$$P^2 x = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)P\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{m}(x, \mathbf{e}_j)\mathbf{e}_j = Px.$$

□

7. Матрица перехода между ортонормированными базисами

1.43. Лемма. Если два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ унитарного пространства $\mathcal{U}$ связаны матрицей C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)C, \tag{1.35}$$

то справедливо равенство

$$C^T\overline{C} = I. \tag{1.36}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \quad \text{и} \quad \mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}).$$

Тогда

$$x = \mathbf{E}X_e = \mathbf{E}'X_{e'}, \quad y = \mathbf{E}Y_e = \mathbf{E}'Y_{e'},$$

$$X_e = CX_{e'}, \quad Y_e = CY_{e'} \tag{1.37}$$

и справедливы следующие равенства:

$$X_e^T\overline{Y_e} = (x, y) = X_{e'}^T\overline{Y_{e'}}. \tag{1.38}$$

Из (1.37) и (1.38) вытекает равенство

$$X_{e'}^T C^T \overline{C} Y_{e'} = X_{e'}^T\overline{Y_{e'}},$$

которое должно быть выполнено для всех столбцов $X_{e'}, Y_{e'} \in \mathbb{C}^n$. Поэтому приходим к равенству

$$C^T\overline{C} = I.$$

□

1.44. Лемма. Если два ортонормированных базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ евклидова пространства $\mathcal{E}$ связаны матрицей C :

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)C, \tag{1.39}$$

то справедливо равенство

$$C^T C = I. \tag{1.40}$$

Доказательство. Доказывается аналогично доказательству равенству (1.36) леммы 1.43. □