ГЛАВА 1

Линейные операторы

1. Преобразование базисов и координат

1.1. Прежде всего введем (или напомним) обозначения, которые мы будем использовать на протяжении всех лекций. Прежде всего укажем, что для матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, т.е. состоящей из m строк и n столбцов используются три формы записи для элементов матрицы. Первая запись — a^j_k, вторая форма — a_{jk}, и, наконец, третья форма a^{jk}, где $j \in \overline{1,m}$ нумерует строчки матрицы, $k \in \overline{1,n}$ — нумерует столбцы матрицы, на пересечении которых находится соответствующий элемент.

1.2. Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ — две произвольные матрицы. С учетом введенных обозначений в пункте 1.1, произведение $C = AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$ в обозначениях Эйнштейна можно записать следующими шестью способами:

$$c^j_k = a^j_s b^s_k, \quad c_{jk} = a_{js} b_{sk}, \quad c^j_k = a^j_s b_{sk}, \quad c_{jk} = a_{js} b^s_k,$$
$$c^{jk} = a^{js} b^{sk}, \quad c^{jk} = a^{js} b^k_s.$$

Запишем эти суммы произведений в матричных формах записи.

$$c^j_k = a^j_s b^s_k = (a^j_1, \dots, a^j_p) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js} b_{sk} = (a_{j1}, \dots, a_{jp}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^j_k = a^j_s b_{sk} = (a^j_1, \dots, a^j_p) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{pmatrix},$$

$$c_{jk} = a_{js}b^s_k = (a_{j1}, \dots a_{jp}) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js}b^{sk} = (a^{j1}, \dots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^{1k} \\ \vdots \\ b^{pk} \end{pmatrix},$$

$$c^{jk} = a^{js}b^k_s = (a^{j1}, \dots, a^{jp}) \begin{pmatrix} b^k_1 \\ \vdots \\ b^k_p \end{pmatrix}.$$

1.3. Теперь мы сделаем очень важное замечание об обозначениях. Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Тогда для обозначения новых базисов мы будем использовать «штрихованные индексы». Например,

$$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\},\ \{\mathbf{e}_{1''}, \dots, \mathbf{e}_{n''}\} \text{ и так далее.}$$

Нужно сразу же избавится от иллюзии, что два базиса $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ совпадают с точностью до нумерации. Это неверно и в дальнейшем может привести к катастрофическим результатам! Отметим, что в вычислениях для обозначения нового базиса лучше использовать другую букву, например, новый базис можно обозначить так: $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$. Мы, кстати говоря, в дальнейшем тоже будем использовать такое обозначение для нового базиса.

1.4. Итак, пусть нам заданы старый базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и новый базис $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$. Разложим новый базис по старому и для этого разложения будем использовать матрицу $(c^i_{i'})^n_{n'}$, причем натуральные числа n и n' равны. Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}_{1'} = c^1_{1'}\mathbf{e}_1 + \dots + c^n_{1'}\mathbf{e}_n, \tag{1.1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{1.2}$$

$$\mathbf{e}_{n'} = c^1_{n'}\mathbf{e}_1 + \dots + c^n_{n'}\mathbf{e}_n. \tag{1.3}$$

В обозначениях Эйнштейна формулы (1.1)–(1.3) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\mathbf{e}_{i'} = c^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{1.4}$$

Последнее равенство, записанное в координатной форме, можно представить в матричной форме записи:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}C, \tag{1.5}$$

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{1.6}$$

$$C = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^1_{n'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^n_{1'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Из формул (1.5)–(1.7), пользуясь правилом умножения матриц «строчка на столбец», легко получаются равенства (1.1)–(1.3). Для квадратной матрицы C справедлива следующая лемма:

1.5. Лемма. $\det C \neq 0$.

Доказательство. Пусть противное и квадратная матрица C перехода от базиса $\mathbf{E}$ к базису $\mathbf{E}'$ вырождена: $\det C = 0$. Тогда столбцы матрицы C линейно зависимы:

$$\alpha^{1'} C_{1'} + \cdots + \alpha^{n'} C_{n'} = \theta, \quad C = \|C_{1'}, C_{2'}, \ldots, C_{n'}\|, \tag{1.8}$$

где числа $\alpha^{1'}, \ldots, \alpha^{n'}$ одновременно в нуль не обращаются. Согласно правилу умножения «строчка на столбец» из равенства (1.5) получаем равенство

$$\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{E} C_{i'}, \quad i' \in \overline{1', n'}. \tag{1.9}$$

В обозначениях Эйнштейна справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{e}_{i'} \alpha^{i'} = (\mathbf{E} C_{i'})\, \alpha^{i'} = \mathbf{E}\left(C_{i'} \alpha^{i'}\right) = \mathbf{E}\theta = \theta.$$

Таким образом, семейство $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ линейно зависимо, что противоречит тому, что это семейство образует базис. Значит, $\det C \neq 0$. □

1.6. С одной стороны, из результата леммы 1.5 и из равенства (1.5) вытекает равенство

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' C^{-1}. \tag{1.10}$$

Будем в дальнейшем использовать следующее обозначение:

$$C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n.$$

С другой стороны, из равенства (1.4) в наших обозначениях (штрихованные индексы) вытекает обратное равенство

$$\mathbf{e}_i = c^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}. \tag{1.11}$$

Из сравнения (1.10) с (1.11) приходим к выводу о том, что

$$C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n = \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \cdots & c^{1'}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n'}_1 & \cdots & c^{n'}_n \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$CC^{-1} = I, \quad C^{-1}C = I \Leftrightarrow \boxed{c^i_{i'} c^{i'}_j = \delta^i_j,} \quad \boxed{c^{i'}_i c^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}.}$$

Сделаем еще одно замечание. Если вы захотите записать транспонированную к матрице C, определенной равенством (1.7), то нельзя переставлять местами индексы. Транспонированной к матрице C является следующая матрица:

$$C^T = \begin{pmatrix} c^1_{1'} & \cdots & c^n_{1'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^1_{n'} & \cdots & c^n_{n'} \end{pmatrix}, \quad \text{а не матрица} \quad \begin{pmatrix} c^{1'}_1 & \cdots & c^{1'}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c^{n'}_1 & \cdots & c^{n'}_n \end{pmatrix},$$

которая является обратной к матрице C. Таким образом, если мы в матрице $C = (c^i_{i'})^n_{n'}$ переставим местами индексы, то мы получим не транспонированную матрицу C^T, а обратную матрицу $C^{-1} = (c^{i'}_i)^{n'}_n$.

1.7. Мы получили формулы (1.4) и (1.11) перехода от одного базиса линейного пространства к другому базису. Теперь наша задача выяснить как при переходе к другому базису преобразуются координаты векторов линейного пространства.

1.8. Действительно, пусть $x \in \mathcal{L}$ — это произвольных вектор. Тогда с учетом равенства (1.4) и линейной независимости семейства векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (базиса в $\mathcal{L}$) справедливы следующие равенства:

$$x = x^k \mathbf{e}_k = x^{k'} \mathbf{e}_{k'} = x^{k'} c^k_{k'} \mathbf{e}_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^k - c^k_{k'} x^{k'}) \mathbf{e}_k = \theta \Leftrightarrow \boxed{x^k = c^k_{k'} x^{k'}.} \tag{1.13}$$

Кроме того, имеем

$$x = x^{k'} \mathbf{e}_{k'} = x^k \mathbf{e}_k = x^k c^{k'}_k \mathbf{e}_{k'} \Rightarrow \boxed{x^{k'} = c^{k'}_k x^k.} \tag{1.14}$$

Аналогичные рассуждения можно провести в матричной форме записи. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$x = \mathbf{E} X_e = \mathbf{E}' X_{e'}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Из (1.15) с учетом (1.5) приходим к следующей цепочке выражений:

$$\mathbf{E} X_e = \mathbf{E} C X_{e'} \Leftrightarrow \mathbf{E}\left(X_e - C X_{e'}\right) = \theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X_e = CX_{e'},\ X_{e'} = C^{-1}X_e.} \tag{1.16}$$

Сравним теперь законы преобразования базисов и координат:

$$\boxed{\mathbf{e}_{k'} = c^k_{k'}\mathbf{e}_k, \quad x^{k'} = c^{k'}_k x^k} \tag{1.17}$$

или

$$\boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E}C, \quad X_{e'} = C^{-1}X_e.} \tag{1.18}$$

Как мы видим, что закон преобразования базисов отличается от закона преобразования координат вектора линейного пространства при переходе от старого базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ к новому базису $\mathbf{E}' = (\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'})$.

1.9. Определение. Закон преобразования базиса линейного пространства $\mathcal{L}$ при переходе от старого базиса к новому базису называется *ковариантным*, а соответствующий закон преобразования координат вектора линейного пространства называется *контраваариантным*.

1.10. Лемма. Справедливы следующие формулы преобразования взаимного базиса $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ в $\mathcal{L}^*$ (к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в $\mathcal{L}$) к взаимному базису $\{\mathbf{e}^{1'}, \dots, \mathbf{e}^{n'}\}$ в $\mathcal{L}^*$ (к базису $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ в $\mathcal{L}$):

$$\mathbf{e}^{j'} = c^{j'}_j \mathbf{e}^j, \quad \mathbf{e}^j = c^j_{j'}\mathbf{e}^{j'} \tag{1.19}$$

или

$$\hat{\mathbf{E}}' = C^{-1}\hat{\mathbf{E}}, \quad \hat{\mathbf{E}} = C\hat{\mathbf{E}}', \tag{1.20}$$

где

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}^n \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}' = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{1'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{n'} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{e}^{1'}, \dots, \mathbf{e}^{n'}\}$ — взаимные базисы к базисам $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ соответственно. Справедлива следующая формула перехода от старого взаимного базиса к новому:

$$\mathbf{e}^{j'} = d^{j'}_j \mathbf{e}^j. \tag{1.21}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\delta^{j'}_{k'} = \langle \mathbf{e}^{j'}, \mathbf{e}_{k'} \rangle = \langle d^{j'}_j \mathbf{e}^j, c^k_{k'}\mathbf{e}_k \rangle = d^{j'}_j c^k_{k'} \langle \mathbf{e}^j, \mathbf{e}_k \rangle = d^{j'}_j c^k_{k'} \delta^j_k = d^{j'}_j c^j_{k'}.$$

Отсюда приходим к выводу о том, что $d_j^{j'} = c_j^{j'}$. И поэтому справедливы равенства (1.19). Используя правило умножения «строчка на столбец» можно доказать, что справедливы равенства (1.20). □

1.11. Лемма. Справедливы следующие формулы преобразования координат линейной формы $f \in \mathcal{L}^*$:

$$f_j = f_{j'} c_j^{j'}, \quad f_{j'} = f_j c_{j'}^j, \quad f = f_j \mathbf{e}^j, \quad f = f_{j'} \mathbf{e}^{j'} \tag{1.22}$$

или

$$F_{e'} = F_e C, \quad F_e = F_{e'} C^{-1}, \tag{1.23}$$

$$F_e = (f_1, \ldots, f_n), \quad F_{e'} = (f_{1'}, \ldots, f_{n'}).$$

Доказательство. С учетом (1.19) справедливы следующие равенства:

$$f = f_j \mathbf{e}^j = f_{j'} \mathbf{e}^{j'} = f_{j'} c_j^{j'} \mathbf{e}^j \Rightarrow f_j = f_{j'} c_j^{j'}.$$

Меняя местами j и j', получим равенство

$$f_{j'} = f_j c_{j'}^j.$$

Следовательно, равенства (1.22) доказаны. Докажем теперь равенства (1.23). Действительно, с учетом (1.20) справедливы равенства

$$f = F_e \hat{\mathbf{E}} = F_{e'} \hat{\mathbf{E}}' = F_{e'} C^{-1} \hat{\mathbf{E}} \Rightarrow F_e = F_{e'} C^{-1}.$$

Отсюда сразу же получаем второе равенство: $F_{e'} = F_e C$. Тем самым, равенства (1.23) доказаны. □

1.12. Из результатов лемм 1.10 и 1.11 вытекает, что взаимный базис при переходе к новому базису преобразуется <u>контравариантным</u> образом, а координаты линейной формы при переходе к новому базису преобразуется <u>ковариантным</u> образом.

1.13. Из полученных формул преобразования базисов, взаимных базисов, координат вектора и координат ковектора вытекает общее правило. Пусть у нас имеется один из перечисленных объектов a_i, $a_{i'}$, a^i и $a^{i'}$, то преобразуются эти объекты следующим образом:

$$a_i = c_i^{i'} a_{i'}, \quad a_{i'} = c_{i'}^i a_i, \quad a^i = c_{i'}^i a^{i'}, \quad a^{i'} = c_i^{i'} a^i.$$

Это правило позволяет не задумываться над тем как преобразуются эти объекты, а писать «машинально» правильные формулы.

2. Линейные операторы

1.14. Определение. Линейным оператором $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется однозначное отображение линейного пространства $\mathcal{L}$ в линейное пространство $\mathcal{M}$, обладающее свойством линейности

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

1.15. Определение. Множество $\{y = Ax :\ x \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{M}$ называется образом оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и обозначается символом $\operatorname{im} A$.

1.16. Определение. Множество $\{x \in \mathcal{L} :\ \ Ax = \theta \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{L}$ называется ядром оператора $A : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и обозначается символом $\ker A$.

1.17. Лемма. Множества $\operatorname{im} A \subset \mathcal{M}$ и $\ker A \subset \mathcal{L}$ являются линейными подпространствами в соответствующих линейных пространствах.

Доказательство. Шаг 1. $\operatorname{im} A$. Пусть $y_1, y_2 \in \operatorname{im} A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что

$$y_1 = Ax_1, \quad y_2 = Ax_2.$$

Докажем, что $\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2 \in \operatorname{im} A$. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2 = \alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2 = A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) \in \operatorname{im} A,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A.

Шаг 2. $\ker A$. Пусть $x_1, x_2 \in \ker A$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2 = \alpha^1 \theta + \alpha^2 \theta = \theta,$$

где мы воспользовались линейностью оператора A. Следовательно, $\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \in \ker A$. □

1.18. Определение. Линейный оператор $A :\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ называется линейным оператором в пространстве $\mathcal{L}$.

1.19. Определение. Операторы $A, B :\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называются равными, если $Ax = Bx$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

1.20. Пример. Оператор I в пространстве $\mathcal{L}$, определяемый равенством $Ix = x$ для всех $x \in \mathcal{L}$, является линейным оператором.

□ Действительно, для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$I(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = \alpha^1 Ix_1 + \alpha^2 Ix_2. \quad \boxtimes$$

1.21. Определение. Оператор I называется единичным оператором.

1.22. Пример. Оператор $O: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, определяемый равенством

$$Ox = \theta \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L},$$

где θ — нулевой элемент линейного пространства $\mathcal{M}$, является линейным оператором.

□ Действительно, для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы равенства

$$O(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \theta = \alpha^1\theta + \alpha^2\theta = \alpha^1 Ox_1 + \alpha^2 Ox_2. \quad \boxtimes$$

1.23. Определение. Оператор O называется нулевым оператором.

1.24. Пример. В пространстве полиномов P^n степени не выше $n \in \mathbb{N}$ определим дифференцирование $D: P^n \to P^{n-1}$ формулой

$$Dp(t) = \frac{dp(t)}{dt}.$$

Оператор D является линейным оператором.

□ Действительно, для любых $p_1(t), p_2(t) \in P^n$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливы следующие равенства:

$$D(\alpha^1 p_1(t) + \alpha^2 p_2(t)) = \frac{d}{dt}\left(\alpha^1 p_1(t) + \alpha^2 p_2(t)\right) = \\ = \alpha^1 \frac{dp_1(t)}{dt} + \alpha^2 \frac{dp_2(t)}{dt} = \alpha^1 Dp_1(t) + \alpha^2 Dp_2(t). \quad \boxtimes$$

1.25. Пример. Зададим отображение $A: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{m\times 1}$ следующим образом:

$$Y = AX, \tag{1.24}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix}.$$

Отображение A является линейным.

□ Действительно, для любых $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу свойств сложения матриц и умножения матриц на числа справедливы равенства

$$A(\alpha^1 X_1 + \alpha^2 X_2) = \alpha^1 AX_1 + \alpha^2 AX_2. \quad \boxtimes$$

1.26. Определение. Одномерным линейным оператором $A: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется такой линейный оператор, что $\dim \operatorname{im} A = 1$.

1.27. Лемма. Для того чтобы линейный оператор $A: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ был одномерным, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие $f \in \mathcal{M}$, $f \neq \theta$ и $l \in \mathcal{L}^*$, что было справедливо равенство

$$Ax = \langle l, x\rangle f \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть линейный оператор $A: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ одномерный, т.е. $\dim \operatorname{im} A = 1$. Ввиду одномерности оператора A он представим в следующем виде:

$$Ax = l(x)f \subset \{\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{K}\}, \quad f \in \mathcal{M},\ f \neq \theta, \tag{1.26}$$

поскольку

$$\dim\{\alpha f,\ \alpha \in \mathbb{K}\} = 1, \quad \text{если} \quad f \neq \theta^*,$$

где функция $l(x)$ — скалярная функция. В силу линейности оператора A для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ справедливо равенство

$$A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2,$$

из которого с учетом (1.26) справедливо равенство

$$\begin{aligned} &l(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)f = \alpha^1 l(x_1)f + \alpha^2 l(x_2)f \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow \left[l(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) - \alpha^1 l(x_1) - \alpha^2 l(x_2)\right] f = \theta \Rightarrow \\ &\quad\quad \Rightarrow l(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) - \alpha^1 l(x_1) - \alpha^2 l(x_2) = 0, \end{aligned}$$

поскольку $f \neq \theta$. Значит, форма $l \in \mathcal{L}^*$, т.е. является линейной формой. Стало быть, справедливо равенство (1.25).

Достаточность. Пусть отображение $A: \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ задано формулой (1.25). Тогда для любых $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ в силу линейности f справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} &A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \langle l, \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \rangle f = \\ &\quad = \alpha^1 \langle l, x_1 \rangle f + \alpha^2 \langle l, x_2 \rangle f = \alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2. \end{aligned}$$

Значит, оператор A линейный, а поскольку $f \neq \theta$, то $\dim \operatorname{im} A = 1$.

$\square$

3. Матрица линейного оператора

1.28. Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве $\mathcal{L}$, т.е.

$$A: \mathcal{L} \to \mathcal{L}.$$

Для того чтобы задать линейный оператор A нам нужно знать его значение Ax на каждом $x \in \mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение вектора $x \in \mathcal{L}$ по этому базису

$$x = x^j \mathbf{e}_j.$$

В силу линейности оператора A имеют место следующие равенства:

$$A(x) = A(x^j \mathbf{e}_j) = x^j A(\mathbf{e}_j). \tag{1.27}$$

Отсюда приходим к выводу о том, что для того чтобы задать линейный оператор, необходимо и достаточно, задать его значения на базисе рассматриваемого линейного пространства $\mathcal{L}$.

1.29. Разложим теперь $A\mathbf{e}_j$ по базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a_j^k \mathbf{e}_k \tag{1.28}$$

или в матричной форме (используя правило умножения матриц «строчка на столбец»)

$$(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

1.30. Определение. Матрица

$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

называется матрицей линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$.

1.31. Рассмотрим уравнение

$$y = Ax, \quad y = y^k \mathbf{e}_k, \quad x = x^j \mathbf{e}_j,$$

из которого получаем равенства

$$y^k \mathbf{e}_k = A(x^j \mathbf{e}_j) = x^j A(\mathbf{e}_j) = x^j a_j^k \mathbf{e}_k \Rightarrow y^k = a_j^k x^j$$

или в матричной форме

$$\boxed{Y_e = A_e X_e,} \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{1.31}$$

1.32. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — старый базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$ — новый базис в $\mathcal{L}$ с матрицей перехода $C = (c_{j'}^j)_{n'}^n$ от старого базиса к новому:

$$\mathbf{e}_{j'} = c_{j'}^j \mathbf{e}_j.$$

Пусть A_e — матрица линейного оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, а $A_{e'}$ — в базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}\}$. Справедлива следующая теорема:

1.33. Теорема. *Имеют место равенства*

$$\boxed{A_{e'} = C^{-1} A_e C} \quad \textit{или} \quad \boxed{a_{j'}^{k'} = c_{j'}^j c_k^{k'} a_j^k.} \tag{1.32}$$

Доказательство. Первый способ. Используя формулы связывающие элементы старого и нового базисов, приходим к следующим равенствам:

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = a^{k'}_{j'}\mathbf{e}_{k'} = a^{k'}_{j'}c^{k}_{k'}\mathbf{e}_{k}, \tag{1.33}$$

$$A(\mathbf{e}_{j'}) = A(c^{j}_{j'}\mathbf{e}_{j}) = c^{j}_{j'}A(\mathbf{e}_{j}) = c^{j}_{j'}a^{k}_{j}\mathbf{e}_{k}. \tag{1.34}$$

Из (1.33) и (1.34) вытекает равенство

$$a^{k'}_{j'}c^{k}_{k'}\mathbf{e}_{k} = c^{j}_{j'}a^{k}_{j}\mathbf{e}_{k} \Rightarrow a^{k'}_{j'}c^{k}_{k'} = c^{j}_{j'}a^{k}_{j} \tag{1.35}$$

или переставляя множители, получим равенство

$$c^{k}_{k'}a^{k'}_{j'} = a^{k}_{j}c^{j}_{j'} \tag{1.36}$$

или в матричной форме

$$CA_{e'} = A_{e}C \Leftrightarrow A_{e'} = C^{-1}A_{e}C. \tag{1.37}$$

Из полученной формулы (1.37) вытекает следующая цепочка равенств:

$$a^{k'}_{j'} = \{A_{e'}\}^{k'}_{j'} = \{C^{-1}\}^{k'}_{k}\{A_{e}C\}^{k}_{j'} = c^{k'}_{k}a^{k}_{j}c^{j}_{j'}.$$

Второй способ. Воспользуемся равенством (1.31) в старом и новом базисах:

$$Y_{e} = A_{e}X_{e}, \quad Y_{e'} = A_{e'}X_{e'}, \tag{1.38}$$

где

$$X_{e} = \begin{pmatrix} x^{1} \\ \vdots \\ x^{n} \end{pmatrix}, \; X_{e'} = \begin{pmatrix} x^{1'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{pmatrix}, \; Y_{e} = \begin{pmatrix} y^{1} \\ \vdots \\ y^{n} \end{pmatrix}, \; Y_{e'} = \begin{pmatrix} y^{1'} \\ \vdots \\ y^{n'} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что имеют место следующие формулы:

$$X_{e} = CX_{e'}, \quad Y_{e} = CY_{e'}. \tag{1.39}$$

Из формул (1.38) и (1.39) вытекают следующие равенства:

$$CY_{e'} = Y_{e} = A_{e}X_{e} = A_{e}CX_{e'} \Rightarrow CA_{e'}X_{e'} = A_{e}CX_{e'} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (CA_{e'} - A_{e}C)X_{e'} = O \Rightarrow CA_{e'} = A_{e}C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{A_{e'} = C^{-1}A_{e}C,}$$

где мы воспользовались тем, что столбец $X_{e'}$ произвольный. $\square$

1.34. Лемма. Для элементов матрицы линейного оператора A, действующего в линейном пространстве $\mathcal{L}$, в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ справедливо следующее выражение:

$$a^{k}_{i} = \langle \mathbf{e}^{k}, A\mathbf{e}_{i} \rangle, \tag{1.40}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.

Доказательство. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}^k, a_i^j \mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_j \rangle a_i^j = \delta_j^k a_i^j = a_i^k.$$

□

1.35. Пример. Рассмотрим линейное пространство P^n полиномов степени не выше $n \in \mathbb{N}$. Выберем в этом линейном пространстве базис следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 = t, \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \dots, \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{1.41}$$

Оператор дифференцирования $\hat{D}$ действует следующим образом:

$$\hat{D}\mathbf{e}_1 = \theta = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \dots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \tag{1.42}$$

$$\hat{D}\mathbf{e}_2 = 1 = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \dots + 0\mathbf{e}_{n+1}, \tag{1.43}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{D}\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_n = 0\mathbf{e}_1 + \dots + 1\mathbf{e}_n + 0\mathbf{e}_{n+1}. \tag{1.44}$$

С учетом равенств (1.42)–(1.44) приходим к следующему выражению:

$$\left(\hat{D}\mathbf{e}_1, \hat{D}\mathbf{e}_2, \dots, \hat{D}\mathbf{e}_{n+1}\right) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n+1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

Таким образом, матрица D линейного оператора

$$\hat{D}: \ P^n \to P^{n-1} \subset P^n$$

в рассматриваемом базисе имеет следующий вид:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

4. Линейное пространство линейных операторов

1.36. Определение. Множество всех линейных операторов $A:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ будем обозначать символом $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$.

1.37. Определение. Суммой линейных операторов $A, B:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ называется оператор $C:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, действующий по правилу $Cx = Ax + Bx$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

1.38. Определение. Произведением оператора $A:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ на скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$ называется оператор $D:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, действующий по правилу $Dx = \alpha Ax$ для всех $x \in \mathcal{L}$.

1.39. Лемма. Сумма линейных операторов и произведение линейного оператора на число являются линейным операторами.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha, \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} C(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) &= A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) + B(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \\ &= \alpha^1 A x_1 + \alpha^2 A x_2 + \alpha^1 B x_1 + \alpha^2 B x_2 = \\ &= \alpha^1 (A x_1 + B x_1) + \alpha^2 (A x_2 + B x_2) = \alpha^1 C x_1 + \alpha^2 C x_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) &= \alpha A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha\alpha^1 A x_1 + \alpha\alpha^2 A x_2 = \\ &= \alpha^1 \alpha A x_1 + \alpha^2 \alpha A x_2 = \alpha^1 D(x_1) + \alpha^2 D(x_2). \end{aligned}$$

□

1.40. Лемма. Множество $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ является линейным пространством относительно введенных операций сложения операторов и умножения оператора на число.

Доказательство. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ — произвольные линейные операторы и $x \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ — произвольны.

Шаг 1. Коммутативность сложения. Справедливы равенства

$$(A + B)x = Ax + Bx = Bx + Ax = (B + A)x,$$

поскольку $Ax, Bx \in \mathcal{M}$, а $\mathcal{M}$ — линейное пространство и, следовательно, в нем справедливо свойство коммутативности сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$A + B = B + A.$$

Шаг 2. Ассоциативность сложения. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} ((A + B) + C)x &= (Ax + Bx) + Cx = Ax + (Bx + Cx) = \\ &= Ax + (B + C)x = (A + (B + C))x, \end{aligned}$$

поскольку $\mathcal{M}$ — линейное пространство и поэтому в нем справедлива ассоциативность сложения векторов. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Шаг 3. Свойство нулевого оператора. Справедливы равенства

$$(A + O)x = Ax + Ox = Ax + \theta = Ax.$$

Здесь мы воспользовались свойством нулевого вектора θ линейного пространства $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:

$$A + O = A.$$

Шаг 4. Существование противоположного оператора. Для линейного оператора A противоположным является линейный оператор $(-1)A$. Действительно, имеют место равенства

$$(A + (-1)A)x = Ax + (-1)Ax = (1 - 1)Ax = 0Ax = \theta = Ox.$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью сложения векторов в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A + (-1)A = O.$$

Шаг 5. Свойство единицы. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(1 \cdot A)x = 1Ax = Ax,$$

где мы воспользовались свойством единицы в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$1A = A.$$

Шаг 6. Ассоциативность умножения на число. Справедливы равенства

$$((\alpha\beta)A)x = (\alpha\beta)Ax = \alpha(\beta Ax) = (\alpha(\beta A))x,$$

где мы воспользовались свойством ассоциативности умножения на числа в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Шаг 7. Дистрибутивность относительно сложения операторов. Справедливы равенства

$$(\alpha(A+B))x = \alpha(A+B)x = \alpha Ax+\alpha Bx = (\alpha A)x+(\alpha B)x = (\alpha A+\alpha B)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности операции сложения векторов в $\mathcal{M}$ относительно умножения на числа. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

Шаг 8. Дистрибутивность относительно сложения чисел. Имеют место следующие равенства:

$$((\alpha+\beta)A)x = (\alpha+\beta)Ax = \alpha Ax + \beta Ax = (\alpha A + \beta A)x,$$

где мы воспользовались свойством дистрибутивности относительно сложения чисел в линейном пространстве $\mathcal{M}$. В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к выводу, что

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$$

$\square$

1.41. Определение. Матрица $A_{ef} = (\alpha_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n}$, определенная равенством

$$A\mathbf{e}_i = \alpha_i^k \mathbf{f}_k \quad \text{или} \quad (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)A_{ef}, \tag{1.46}$$

называется матрицей линейного оператора A, где $A : \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ — базисы соответствующих линейных пространств.

1.42. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\}$ — базис линейного пространства $\mathcal{M}$. Рассмотрим следующие одномерные операторы (см. определение 1.26 и лемму 1.27):

$$A_k^i x \stackrel{def:}{=} \langle \mathbf{e}^i, x\rangle \mathbf{f}_k : \ \mathcal{L} \to \mathcal{M}, \tag{1.47}$$

где $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\} \subset \mathcal{L}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$. Справедлива следующая теорема:

1.43. Теорема. *Одномерные операторы* $A_k^i \in L(\mathcal{L};\mathcal{M})$, *определенные равенством* (1.47) *образуют базис линейного пространства* $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$.

Доказательство. Линейная независимость. Прежде всего заметим, что

$$A_k^i \mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j\rangle \mathbf{f}_k = \delta_j^i \mathbf{f}_k. \tag{1.48}$$

Рассмотрим линейную комбинацию

$$\beta_i^k A_k^i = O. \tag{1.49}$$

Применим обе части этого равенства ко всем векторам базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ и с учетом (1.48) получим равенства

$$\beta_i^k A_k^i \mathbf{e}_j = \beta_i^k \delta_j^i \mathbf{f}_k = \beta_j^k \mathbf{f}_k = \theta \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.50}$$

Из (1.50) в силу линейной независимости базиса $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$ приходим к равенствам

$$\beta_j^k = 0 \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Значит, семейство $\{A_k^i\}_m^n$ является линейно независимым в линейном пространстве $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$.

Полнота. Пусть

$$x = x^i \mathbf{e}_i \in \mathcal{L}, \quad A\mathbf{e}_i = \alpha_i^k \mathbf{f}_k. \tag{1.51}$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$Ax = x^i A\mathbf{e}_i = x^i \alpha_i^k \mathbf{f}_k = \langle \mathbf{e}^i, x\rangle \alpha_i^k \mathbf{f}_k = \alpha_i^k \langle \mathbf{e}^i, x\rangle \mathbf{f}_k = \alpha_i^k A_k^i x, \tag{1.52}$$

из которого в силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к следующему равенству:

$$A = \alpha_i^k A_k^i. \tag{1.53}$$

□

1.44. Лемма. Для элементов матрицы линейного оператора $A:\ \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ справедливо следующее выражение:

$$\alpha_i^k = \langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i\rangle, \tag{1.54}$$

где $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ — базис, а $\{\mathbf{f}^1, \ldots, \mathbf{f}^m\} \in \mathcal{M}^*$ — взаимный базис к базису $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$.

Доказательство. Из (1.46) вытекает следующее равенство:

$$\langle \mathbf{f}^k, A\mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{f}^k, \alpha_i^j \mathbf{f}_j\rangle = \alpha_i^j \langle \mathbf{f}^k, \mathbf{f}_j\rangle = \alpha_i^j \delta_j^k = \alpha_i^k. \tag{1.55}$$

□

1.45. Следствие. *Матрица одномерного оператора* A_k^i, *определенного равенством* (1.47), *равна*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.56}$$

где 1 *расположена на пересечении* k*–ой строчки и* i*–го столбца.*

Доказательство. Доказательство следует из равенства (1.48). Действительно, используя правило умножения матриц «строчка на столбец», получим следующее равенство:

$$(A_k^i \mathbf{e}_1, \ldots, A_k^i \mathbf{e}_n) = (\delta_1^i \mathbf{f}_k, \ldots, \delta_n^i \mathbf{f}_k) =$$

$$= (\theta, \ldots, \theta, \delta^i_i \mathbf{f}_k, \theta, \ldots, \theta) = (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

1.46. Следствие. *Справедливо равенство*

$$\dim L(\mathcal{L}; \mathcal{M}) = \dim \mathcal{L} \cdot \dim \mathcal{M}.$$

Доказательство. Равенство является следствием теоремы 1.43, из которой вытекает, что число элементов в базисе линейного пространства $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ равно $m \cdot n$, где $m = \dim \mathcal{M}$ и $n = \dim \mathcal{L}$. $\square$

1.47. Лемма. Матрица линейной комбинации $\alpha A + \beta B$ линейных операторов $A, B \in L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ с числами $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ получается следующим образом:

$$(\alpha A + \beta B)^k_i = \alpha (A)^k_i + \beta (B)^k_i. \tag{1.57}$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства:

$$(\alpha A + \beta B)\mathbf{e}_i = (\alpha A + \beta B)^k_i \mathbf{f}_k, \tag{1.58}$$

$$(\alpha A + \beta B)\mathbf{e}_i = \alpha A \mathbf{e}_i + \beta B \mathbf{e}_i, \tag{1.59}$$

$$\alpha A \mathbf{e}_i = \alpha (A)^k_i \mathbf{f}_k, \quad \beta B \mathbf{e}_i = \beta (B)^k_i \mathbf{f}_k. \tag{1.60}$$

Из (1.58) и (1.60) вытекает следующее равенство:

$$(\alpha A + \beta B)^k_i \mathbf{f}_k = \alpha (A)^k_i \mathbf{f}_k + \beta (B)^k_i \mathbf{f}_k = (\alpha (A)^k_i + \beta (B)^k_i) \mathbf{f}_k. \tag{1.61}$$

Поскольку $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \in \mathcal{M}$ — базис, то из (1.61) вытекает искомое равенство (1.57). $\square$

1.48. Лемма. Линейное пространство $L(\mathcal{L}; \mathcal{M})$ изоморфно линейному пространству матриц $\mathbb{K}^{m \times n}$ при фиксированных базисах $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ и $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m\} \subset \mathcal{M}$, где $m = \dim \mathcal{M}$, $n = \dim \mathcal{L}$, базис которого образуют матрицы E^k_i, у которых все элементы равны нулю за исключением элемента, расположенного на пересечении k–ой строчки и i–го столбца и равного 1.

Доказательство. Докажем, что матрицы E^k_i образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{K}^{m \times n}$. Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^k E_i^k = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \cdots & \alpha_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_i^k = 0 \quad \text{для всех} \quad i \in \overline{1,n},\ k \in \overline{1,m}.$$

Значит, матрицы E_i^k линейно независимы и их количество равно mn. Кроме того, любую матрицу $A = (a_i^k)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n}$ можно представить в следующем виде:

$$A = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i^k E_i^k.$$

Значит, семейство матриц $\{E_i^k\}$ при $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$ образуют базис в $\mathbb{K}^{m\times n}$.

С учетом результата леммы 1.47 приходим к результату о изоморфизме линейного пространства $L(\mathcal{L};\mathcal{M})$ и линейного пространства $\mathbb{K}^{m\times n}$.

□

5. Алгебры операторов и матриц

1.49. В этом параграфе мы рассмотрим новую операцию — операцию умножения операторов и докажем, что операторы из линейного пространства $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ образуют ассоциативную и некоммутативную алгебру операторов с единицей. Учтем результаты предыдущего раздела в случае $\mathcal{M} = \mathcal{L}$ и докажем, что алгебра операторов $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$, где $n = \dim\mathcal{L}$.

1.50. Определение. Произведением линейных операторов

$$A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$$

называется оператор $C:\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$Cx \stackrel{def:}{=} B(Ax) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L}. \tag{1.62}$$

1.51. Лемма. Оператор C — линейный, т.е. $C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда в силу линейности операторов $A, B \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ справедливы следующие равенства:

$$C(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = B(A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)) =$$
$$= B(\alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2) = \alpha^1 B(Ax_1) + \alpha^2 B(Ax_2) = \alpha^1 Cx_1 + \alpha^2 Cx_2.$$

□

1.52. Заметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

1.53. Лемма. Для любых $A, B, C \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ справедливы свойства дистрибутивности справа и слева

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC, \tag{1.63}$$

а также ассоциативности

$$(AB)C = A(BC). \tag{1.64}$$

Доказательство. Шаг 1. Дистрибутивность. Пусть $x \in \mathcal{L}$ — произвольный вектор. Тогда с учетом определения сложения операторов и произведения операторов справедливы следующие равенства:

$$(A + B)Cx = A(Cx) + B(Cx) = \\ = (AC)x + (BC)x = (AC + BC)x.$$

В силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Докажем второе равенство из (1.63). Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A(B + C)x = A(Bx) + A(Cx) = \\ = (AB)x + (AC)x = (AB + AC)x,$$

из которого в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Ассоциативность. Справедливы равенства

$$(AB)Cx = A(B(Cx)) = A((BC)x) = A(BC)x,$$

из которых в силу произвольности вектора $x \in \mathcal{L}$ вытекает равенство (1.64). □

1.54. Определение. Алгеброй над числовым полем $\mathbb{K}$ называется линейное пространство $\mathcal{A}$, снабженное внутренней операцией умножения $\bullet$:

$$x \bullet y : \ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \tag{1.65}$$

обладающее следующим свойствами дистрибутивности слева и справа:

$$(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z, \tag{1.66}$$

$$x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z \tag{1.67}$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется ассоциативной, если для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ выполнено равенство

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z), \tag{1.68}$$

и коммутативной, если для любых $x, y \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$x \bullet y = y \bullet x. \tag{1.69}$$

Также говорят, что у алгебры $\mathcal{A}$ есть единица $\mathbf{e}$, если существует такой вектор $\mathbf{e} \in \mathcal{A}$, что для всех $x \in \mathcal{A}$ справедливы равенства

$$x \bullet \mathbf{e} = \mathbf{e} \bullet x = x. \tag{1.70}$$

1.55. Теорема. *Линейное пространство линейных операторов $L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ является ассоциативной, некоммутативной алгеброй с единицей относительно операции умножения операторов.*

Доказательство. Утверждение является следствием лемм 1.51, 1.53. Единицей этой алгебры является единичный оператор. □

1.56. Посмотрим, что происходит с матрицами линейных операторов при произведении операторов. Пусть $A, B, C \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Справедливы следующие равенства:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \mathbf{e}_k, \quad A\mathbf{e}_i = a_i^l \mathbf{e}_l, \quad B\mathbf{e}_l = b_l^k \mathbf{e}_k. \tag{1.71}$$

С учетом равенств (1.71) при $C = BA$ имеет место следующая цепочка выражений:

$$C\mathbf{e}_i = c_i^k \mathbf{e}_k = B(A\mathbf{e}_i) = B(a_i^l \mathbf{e}_l) = a_i^l B\mathbf{e}_l = a_i^l b_l^k \mathbf{e}_k = b_l^k a_i^l \mathbf{e}_k. \tag{1.72}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, то из (1.72) приходим к следующему равенству:

$$c_i^k = b_l^k a_i^l \Leftrightarrow C_e = B_e A_e, \tag{1.73}$$

где $C_e = (c_i^k)_n^n$, $A_e = (a_i^l)_n^n$ и $B_e = (b_l^k)_n^n$. Таким образом, доказана следующая лемма:

1.57. Лемма. Произведению BA операторов $A, B \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ соответствует произведение матриц операторов в этом базисе $B_e A_e \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

1.58. В курсе «Аналитическая геометрия» фактически было доказано следующее утверждение:

1.59. Теорема. *Линейное пространство квадратных матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ является ассоциативной и некоммутативной алгеброй с единицей относительно операции умножения матриц.*

1.60. Теорема. *Алгебра операторов $L(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ изоморфна алгебре матриц $\mathbb{K}^{n\times n}$ при фиксированном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$.*

Доказательство. Доказательство утверждения теоремы является следствием результатов теорем 1.55, 1.59 и лемм 1.51–1.57. Отметим, что при фиксированном базисе в $\mathcal{L}$ единичный оператор при данном изоморфизме переходит в единичную матрицу. □

6. Транспонированный оператор

1.61. Теорема. *Для каждого линейного оператора* $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ *найдется единственный оператор* $A^T \in L(\mathcal{L}^*;\mathcal{L}^*)$ *такой, что*

$$\langle A^T f, x\rangle = \langle f, Ax\rangle \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathcal{L}, \quad f \in \mathcal{L}^*. \tag{1.74}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию от векторов из $\mathcal{L}$ при фиксированном $f \in \mathcal{L}^*$:

$$l(x) := \langle f, Ax\rangle. \tag{1.75}$$

Докажем, что это линейная функция. Действительно, справедливы равенства

$$l(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \langle f, A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2)\rangle = \langle f, \alpha^1 A x_1 + \alpha^2 A x_2\rangle = \\ = \alpha^1\langle f, Ax_1\rangle + \alpha^2\langle f, Ax_2\rangle = \alpha^1 l(x_1) + \alpha^2 l(x_2).$$

Значит, найдется такая линейна форма $l \in \mathcal{L}^*$, что будет для всех $x \in \mathcal{L}$ справедливо равенство

$$\langle f, Ax\rangle = \langle l, x\rangle. \tag{1.76}$$

Отметим, что для каждого $f \in \mathcal{L}^*$ форма $l \in \mathcal{L}^*$ единственная. Действительно, пусть $f \in \mathcal{L}^*$ соответствуют две линейный формы $l^1, l^2 \in \mathcal{L}^*$ такие, что справедливы равенства

$$\langle f, Ax\rangle = \langle l_1, x\rangle = \langle l_2, x\rangle \Rightarrow \langle l_1 - l_2, x\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathcal{L} \Rightarrow \\ \Rightarrow l_1 - l_2 = \theta \Rightarrow l_1 = l_2.$$

Итак, определено однозначное отображение

$$A^T(f) = l, \quad A^T:\ \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*. \tag{1.77}$$

Докажем линейность оператора A^T. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\langle A^T(\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2), x\rangle = \langle \alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2, Ax\rangle = \\ = \alpha_1\langle f^1, Ax\rangle + \alpha_2\langle f^2, Ax\rangle = \alpha^1\langle A^T f^1, x\rangle + \alpha_2\langle A^T f^2, x\rangle = \\ = \langle \alpha^1 A^T f^1, x\rangle + \langle \alpha^2 A^T f^2, x\rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle A^T(\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2) - \alpha^1 A^T f^1 - \alpha^2 A^T f^2, x\rangle = 0.$$

В силу произвольности $x \in \mathcal{L}$ приходим к равенству

$$A^T(\alpha_1 f^1 + \alpha_2 f^2) = \alpha^1 A^T f^1 + \alpha^2 A^T f^2.$$

Значит, оператор A^T линейный и поэтому $A^T \in L(\mathcal{L}^*;\mathcal{L}^*)$. Отсюда с учетом (1.76) и (1.77) приходим к существованию единственного отображения $A^T \in L(\mathcal{L}^*; \mathcal{L}^*)$, что для всех $x \in \mathcal{L}$ и всех $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство

$$\langle f, Ax\rangle = \langle A^T f, x\rangle.$$

$\square$

1.62. Определение. Оператор $A^T \in L(\mathcal{L}^*; \mathcal{L}^*)$ называется транспонированным оператором.

1.63. Обсудим связь матриц $(A^T)_e$ и A_e транспонированного и исходного операторов. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}$, а $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ взаимный базис в $\mathcal{L}^*$. Пусть $x, y \in \mathcal{L}$ и $f, g \in \mathcal{L}^*$ таковы, что имеют место равенства

$$y = Ax, \quad y = y^i \mathbf{e}_i, \quad x = x^k \mathbf{e}_k, \tag{1.78}$$

$$f = A^T g, \quad f = f_i \mathbf{e}^i, \quad g = g_k \mathbf{e}^k. \tag{1.79}$$

Из (1.78) вытекают равенства

$$y^i \mathbf{e}_i = A(x^k \mathbf{e}_k) = x^k \alpha^i_k \mathbf{e}_i \Leftrightarrow y^i = \alpha^i_k x^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y_e = A_e X_e, \quad X_e = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \quad Y_e = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}, \tag{1.80}$$

а из (1.79) вытекают следующие равенства:

$$f_i \mathbf{e}^i = A^T(g_k \mathbf{e}^k) = g_k (\alpha^T)^k_i \mathbf{e}^i \Rightarrow f_i = g_k (\alpha^T)^k_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_e = G_e (A^T)_e, \quad F_e = (f_1, \ldots, f_n), \quad G_e = (g_1, \ldots, g_n). \tag{1.81}$$

В силу (1.74) справедливы равенства

$$(\alpha^T)^k_i = \langle A^T \mathbf{e}^k, \mathbf{e}_i\rangle = \langle \mathbf{e}^k, A\mathbf{e}_i\rangle = \alpha^k_i \Rightarrow (A^T)_e = A_e.$$

Теперь мы видим, что матрицы исходного и транспонированного оператора совпадают, однако если в формуле (1.80) матрица A_e умножается справа на столбец, то в формуле (1.81) матрица $(A^T)_e$ матрица слева умножается на строчку. Вот такое отличие.

7. Дважды транспонированный оператор*

1.64. Данный параграф при первом чтении можно опустить.

1.65. Лемма. Справедливо равенство

$$A^{TT} = JAJ^{-1}, \tag{1.82}$$

где J — линейный оператор взаимно однозначного отображения $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^{**}$, введенный в третьей главе.

Доказательство. При доказательстве этого утверждения мы будем использовать обозначения третьей главы.

Шаг 1. Транспонированный оператор к A^T. Для любых $\hat{x} \in \mathcal{L}^{**}$ и $f \in \mathcal{L}^*$ справедливо равенство

$$\langle \hat{x}, A^T f \rangle_* = \langle A^{TT} \hat{x}, f \rangle_*, \tag{1.83}$$

где $A^{TT} = (A^T)^T \in L(\mathcal{L}^{**}; \mathcal{L}^{**})$. Доказательство равенства (1.83) в точности повторяет доказательство теоремы 1.61 с точностью до обозначений.

Шаг 2. Равенство (1.82). Для доказательства равенства (1.82) воспользуемся результатом теоремы **??**. С учетом результата теоремы 1.61 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\langle f, Ax \rangle = \langle A^T f, x \rangle = \langle Jx, A^T f \rangle_* = \\ = \langle A^{TT} Jx, f \rangle_* = \langle f, J^{-1} A^{TT} Jx \rangle,$$

которые выполнены для всех $x \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$. Поэтому справедливы равенства

$$\langle f, Ax - J^{-1} A^{TT} Jx \rangle = 0 \Rightarrow Ax - J^{-1} A^{TT} Jx = \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow A = J^{-1} A^{TT} J \Leftrightarrow A^{TT} = JAJ^{-1}.$$

□

1.66. Иногда авторы называют транспонированный оператор сопряженным и утверждают, что $A^{TT} = A$. Из результата леммы 1.65 вытекает, что это равенство неверно.

1.67. Определение. Оператор $A^{TT} \in L(\mathcal{L}^{**}; \mathcal{L}^{**})$ называется дважды транспонированным оператором.

8. Теорема об обратном операторе

1.68. Теорема. *Если* $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, *то справедливо равенство*

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}, \tag{1.84}$$

где, напомним,

$$\ker A = \{x \in \mathcal{L} : \ Ax = \theta\}, \quad \operatorname{im} A = \{y = Ax : \ x \in \mathcal{L}\}.$$

Доказательство. Ранее в лемме 1.17 было доказано, что $\ker A \subset \mathcal{L}$ и $\operatorname{im} A \subset \mathcal{L}$ являются подпространствами в $\mathcal{L}$. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис в $\ker A$, где $\dim \ker A = k$. Дополним это семейство векторов до базиса в $\mathcal{L}$. Пусть

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\} \tag{1.85}$$

— базис в $\mathcal{L}$. Рассмотрим теперь набор
$$\{A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n\} \subset \operatorname{im} A. \tag{1.86}$$
Докажем, что этот набор линейно независим. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:
$$\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s A\mathbf{e}_s = \theta \Rightarrow A\left(\sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \mathbf{e}_s\right) = \theta \Rightarrow \sum_{s=k+1}^{n} \alpha^s \mathbf{e}_s \in \ker A.$$
Следовательно, найдутся такие числа β^j, $j = \overline{1,k}$, что
$$\alpha^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + \alpha^n \mathbf{e}_n = \beta^1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta^k \mathbf{e}_k,$$
а поскольку набор (1.85) линейно независим, то все числа
$$\alpha^{k+1} = \cdots = \alpha^n = \beta^1 = \cdots = \beta^k = 0.$$
Итак, набор (1.86) линейно независим. Докажем его полноту в $\operatorname{im} A$. Действительно, для любого $y \in \operatorname{im} A$ найдется такое $x \in \mathcal{L}$, что справедливы следующие равенства:
$$y = Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma^j \mathbf{e}_j\right) = A\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma^j \mathbf{e}_j\right) + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \mathbf{e}_j\right) =$$
$$= \theta + A\left(\sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} \gamma^j A\mathbf{e}_j.$$
Итак, полнота набора (1.86) в $\operatorname{im} A$ доказана. Следовательно, этот набор образует базис в $\operatorname{im} A$. Таким образом, имеют место равенства
$$\dim \operatorname{im} A = n-k = \dim \mathcal{L} - \dim \ker A \Leftrightarrow \dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}.$$
$\square$

1.69. Следствие. *Справедливы следующие равенства:*
$$\dim \ker A^T + \dim \operatorname{im} A^T = \dim \mathcal{L}^* = \dim \mathcal{L}. \tag{1.87}$$

1.70. Теорема. *Следующие три свойства для оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ эквивалентны:*

1. *Оператор A обратим и $A^{-1} \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$;*
2. $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$*;*
3. $\ker A = \{\theta\}$.

Доказательство. Докажем, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$.

Шаг 1. $1 \Rightarrow 2$. Пусть оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ обратим. Тогда уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение для любого $y \in \mathcal{L}$. Поэтому $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$.

Шаг 2. $2 \Rightarrow 3$. Пусть $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. Тогда $\dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}$ и из равенства (1.84) вытекает, что $\dim \ker A = 0$. Следовательно, $\ker A = \{\theta\}$.

Шаг 3. $3 \Rightarrow 1$. Пусть $\ker A = \{\theta\}$. Тогда $\dim \ker A = 0$. В силу равенства (1.84) получаем, что $\dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}$. Значит, $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$. С одной стороны, из равенства $\operatorname{im} A = \mathcal{L}$ вытекает, что уравнение $Ax = y$ для каждого $y \in \mathcal{L} = \operatorname{im} A$ имеет решение $x \in \mathcal{A}$. С другой стороны, если для некоторого $y_0 \in \mathcal{L}$ существует два решения $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, то имеют место следующие равенства:

$$Ax_1 = y_0 = Ax_2 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = \theta \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker A = \{\theta\} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Стало быть, для каждого $y \in \mathcal{L}$ существует единственное решение $x \in \mathcal{L}$ уравнения $Ax = y$. Поэтому определено обратное отображение A^{-1}. Докажем, что $A^{-1} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, т.е. осталось доказать линейность оператора A^{-1}. Пусть $y_1, y_2 \in \mathcal{L}$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда найдутся такие единственные $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$, что справедливы равенства

$$Ax_1 = y_1, \quad Ax_2 = y_2, \quad x_1 = A^{-1}y_1, \quad x_2 = A^{-1}y_2,$$

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2) &= A^{-1}(\alpha^1 A x_1 + \alpha^2 A x_2) = \\ &= A^{-1}A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = \alpha^1 A^{-1} y_1 + \alpha^2 A^{-1} y_2. \end{aligned}$$

Итак, оператор A^{-1} — линейный. □

9. Инвариантные подпространства линейного оператора

1.71. Определение. Линейное подпространство $U \subset \mathcal{L}$ называется инвариантным подпространством относительно линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, если

$$AU \subset U,$$

т.е. $Ax \in U$ для всех $x \in U$. Символом $A|_U$ мы обозначаем ограничение оператора A на инвариантное подпространство U.

1.72. Лемма. Ограничение $A|_U$ линейного оператора A на инвариантное подпространство U является линейным оператором:

$$A|_U \in L(U; U).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in U$ и $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}$ — произвольны. Тогда, с одной стороны, поскольку U — линейное подпространство в линейном пространстве $\mathcal{L}$, то $\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 \in U$. С другой стороны, в силу того, что U — инвариантное подпространство оператора A справедливы следующие соотношения:

$$A|_U(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = A(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) =$$

$$= \alpha^1 Ax_1 + \alpha^2 Ax_2 = \alpha^1 A|_U x_1 + \alpha^2 A|_U x_2.$$

□

1.73. Лемма. Если базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ выбран таким образом, что инвариантное подпространство $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, то матрица A_e оператора A в этом базисе имеет следующий блочный вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{1.88}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, C — квадратная матрица порядка $n - k$ и D — какая–то матрица размера $k \times (n - k)$.

Доказательство. Справедливо следующее равенство:

$$A\mathbf{e}_j = a^i_j \mathbf{e}_i. \tag{1.89}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — это базис инвариантного подпространства U, то $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j = \overline{1, k}$ и поэтому $a^i_j = 0$ при $i = \overline{k + 1, n}$. Поэтому справедливо следующее выражение:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\times$$

$$\times \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & a^1_{k+1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k & a^k_{k+1} & \cdots & a^k_n \\ 0 & \cdots & 0 & a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & D \\ O & C \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

Заметим, что $A\mathbf{e}_j = A|_U \mathbf{e}_j$ при $j = \overline{1, k}$. Поэтому из равенства (1.89) получаем равенство

$$A|_U \mathbf{e}_j = a^i_j \mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1, k}, \quad i = \overline{1, k}. \tag{1.91}$$

Но тогда справедливо равенство

$$(A|_U \mathbf{e}_1, \ldots, A|_U \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)B.$$

Следовательно, B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейного подпространства $U \subset \mathcal{L}$. □

1.74. Лемма. Если $\mathcal{L} = U \oplus V$, где U и V — инвариантные подпространства оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, то в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$ таком, что $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$, $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ матрица A_e этого линейного оператора имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \tag{1.92}$$

где B — матрица оператора $A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$, а C — матрица оператора $A|_V$ в базисе $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Пусть $U = L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ и $V = L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$. С одной стороны, справедливо равенство (1.89). С другой стороны, $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)$ при $j \in \overline{1,k}$ и $A\mathbf{e}_j \in L(\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ при $j \in \overline{k+1,n}$. Поэтому в равенстве (1.89) $a^i_j = 0$ при $i = \overline{k+1,n}$, $j = \overline{1,k}$ и $a^i_j = 0$ при $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{k+1,n}$. Следовательно, справедливы следующие выражения:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_k, A\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)\times$$

$$\times \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix} \tag{1.93}$$

Заметим, что

$$A|_U\mathbf{e}_j = a^i_j\mathbf{e}_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad j = \overline{1,k}, \tag{1.94}$$

$$A|_V\mathbf{e}_j = a^i_j\mathbf{e}_i, \quad i = \overline{k+1,n}, \quad j = \overline{k+1,n}. \tag{1.95}$$

Поэтому справедливы следующие равенства:

$$(A|_U\mathbf{e}_1, \ldots, A|_U\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k) \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^k_1 & \cdots & a^k_k \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k)B,$$

$$(A|_V\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, A|_V\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} a^{k+1}_{k+1} & \cdots & a^{k+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)C.$$

□

1.75. Лемма. Если $\mathcal{L} = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$, то в базисе $\mathcal{L}$, составленном из базисов инвариантных подпространств $U_1, \ldots, U_m$ оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, матрица A_e оператора A примет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathrm{O} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & A_m \end{pmatrix},$$

где A_j — матрица оператора $A|_{U_j}$ в соответствующем базисе линейного подпространства U_j.

10. Собственные векторы

1.76. Основной задачей теории линейных операторов является нахождение такого базиса, в котором его матрица является наиболее простой. Пределом мечтаний является нахождение базиса, в котором матрица линейного оператора диагональна. Как мы покажем, такой базис может не существовать.

1.77. Определение. Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ называется собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, если $Ae = \lambda e$. Число $\lambda \in \mathbb{K}$ называется при этом собственным значением оператора A, отвечающим собственному вектору e.

1.78. Лемма. Ненулевой вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, тогда и только тогда, когда линейное подпространство $L(e)$ инвариантно и $\dim L(e) = 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. Тогда e — базис в линейной оболочке $L(e)$. Предположим, что $y \in L(e)$. Тогда найдется такое число $\alpha \in \mathbb{K}$, что $y = \alpha e$. Справедливы следующие равенства:

$$Ay = \alpha Ae = \alpha\lambda e \in L(e).$$

Следовательно, $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство.

Достаточность. Пусть $L(e)$ — одномерное инвариантное подпространство. Пусть e — его базис. Тогда справедливо соотношение

$$Ae \in L(e) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad Ae = \lambda e.$$

Следовательно, $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора A. □

1.79. Лемма. Для того чтобы матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ состоял из собственных векторов этого линейного оператора A; при этом диагональные элементы матрицы A_e являются собственными значениями оператора A.

Доказательство. Шаг 1. Достаточность. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это такой базис линейного пространства $\mathcal{L}$, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Тогда для матрицы A_e оператора A в этом базисе имеет следующий вид:

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\lambda_1 \mathbf{e}_1, \ldots, \lambda_n \mathbf{e}_n) =$$
$$= (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) A_e.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L}$ матрица A_e оператора $A \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ имеет следующий диагональный вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

но тогда согласно определению матрицы оператора справедливы равенства

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) A_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathrm{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

из которых получаем, что

$$A\mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j, \quad j = \overline{1, n},$$

причем поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$, то $\mathbf{e}_j \neq \theta$. □

1.80. Собственные значения λ_j, $j = \overline{1, n}$ могут попарно совпадать. Например, у единичного оператора.

1.81. Пример. Выберем базис в линейном пространстве P^n многочленов степени не выше $n \in \mathbb{N}$ следующим специальным образом:

$$\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = t, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{t^2}{2!}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_{n+1} = \frac{t^n}{n!}. \tag{1.96}$$

Любой полином $p_n(t) \in P^n$ можно разложить по базису (1.96) следующим образом:

$$p_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a_n \frac{t^n}{n!}. \tag{1.97}$$

Теперь изучим вопрос о существовании собственного вектора оператора дифференцирования $D: \ P^n \to P^{n-1} \subset P^n$. С этой целью применим оператор дифференцирования D к полиному $p_n(t)$ и получим полином $p_{n-1}(t) \in P^{n-1} \subset P^n$:

$$p_{n-1}(t) \stackrel{def:}{=} Dp_n(t) = a_1 + a_2 t + \cdots + a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{1.98}$$

Рассмотрим равенство

$$Dp_n(t) = \lambda p_n(t) \Rightarrow p_{n-1}(t) = \lambda p_n(t). \tag{1.99}$$

Сначала рассмотрим случай $\lambda \neq 0$. Тогда в равенстве (1.99) в правой части содержится слагаемое с старшей степенью $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda a_n \frac{t^n}{n!},$$

а в левой части слагаемое со старшей степенью — это слагаемое

$$a_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Поскольку равенство (1.99) должно быть выполнено для всех $t \in \mathbb{R}$, то приходим к выводу о том, что $\lambda a_n = 0$, т.е. $a_n = 0$. Далее повторяем все рассуждения и мы получим в итоге равенство $\lambda a_0 = 0$, т.е. $a_0 = 0$. Стало быть, с одной стороны, у оператора дифференцирования $D: \ P^n \to P^n$ не может быть собственного вектора с собственным значением $\lambda \neq 0$. С другой стороны, $\lambda = 0$ является собственным значением собственного вектора $\mathbf{e}_1$

$$D\mathbf{e}_1 = \theta = 0\mathbf{e}_1$$

и других собственных векторов у оператора дифференцирования нет. Стало быть, у оператора дифференцирования D в линейном пространстве P^n <u>нет собственного базиса.</u>

1.82. Теорема. *Вектор $e \in \mathcal{L}$ является собственным вектором оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующего собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, тогда и только тогда, когда в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ справедливо равенство*

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e, \tag{1.100}$$

где $X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ — нетривиальное решение однородной системы уравнений

$$A_e X_e = \lambda X_e, \tag{1.101}$$

а A_e — матрица оператора A в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e \in \mathcal{L}$ — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$Ae = \lambda e, \quad e \neq \theta. \tag{1.102}$$

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $\mathcal{L}$. Разложим собственный вектор $e \in \mathcal{L}$ по этому базису и получим следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{1.103}$$

Тогда справедливы следующие равенства

$$Ae = (A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n)X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A_e X_e, \tag{1.104}$$

$$\lambda e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\lambda X_e. \tag{1.105}$$

Следовательно, из равенств (1.102)–(1.105) получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A_e X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\lambda X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\left(A_e X_e - \lambda X_e\right) = \theta \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_e X_e - \lambda X_e = O \Leftrightarrow A_e X_e = \lambda X_e,\end{aligned} \tag{1.106}$$

поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис.

Достаточность. Справедливо следующее равенство:

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e \neq \theta,$$

поскольку в противном случае

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e = \theta$$

в силу линейной независимости системы векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ получим $X_e = O$, что противоречит условию $X_e \neq O$.

Из (1.100), (1.101), поскольку $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис, вытекают следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A_e X_e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\lambda X_e, \quad e \neq \theta,$$
$$A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e = \lambda(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e,$$
$$Ae = \lambda e, \quad e \neq \theta.$$

Следовательно, e — собственный вектор оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующее собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

1.83. Лемма. Если X_e — решение однородной системы уравнений (1.101), записанной в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, то в любом другом базисе $\{\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}\}$ справедливо равенство

$$A_{e'}X_{e'} = \lambda X_{e'}. \tag{1.107}$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$(\mathbf{e}_{1'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)C. \tag{1.108}$$

Тогда имеем

$$A_{e'} = C^{-1}A_eC, \quad X'_e = C^{-1}X_e. \tag{1.109}$$

Из равенства (1.101) с учетом (1.108), (1.109) приходим к следующим равенствам:

$$C^{-1}A_eX_e = \lambda C^{-1}X_e \Leftrightarrow C^{-1}A_eCC^{-1}X_e = \lambda C^{-1}X_e \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_{e'}X_{e'} = \lambda X_{e'}.$$

$\square$

1.84. Таким образом, вопрос о существовании собственного вектора у линейного оператора сводится к изучению однородной системы уравнений (1.101), а именно к изучению вопроса существования нетривиального решения (решений) этой системы уравнений. В частности, из общей теории линейных однородных квадратных систем уравнений вытекает следующее утверждение:

1.85. Лемма. Для того чтобы существовало нетривиальное решение уравнения (1.101), необходимо и достаточно, чтобы $\det(A_e - \lambda I) = 0$.

1.86. Определение. Многочлен $f(\lambda) = \det(A_e - \lambda I)$ называется характеристическим многочленом.

1.87. Лемма. Характеристический многочлен не зависят от выбора базиса, в котором записана матрица A_e линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$.

Доказательство. С учетом (1.109) справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_{e'} - \lambda I = C^{-1}A_eC - \lambda C^{-1}C = C^{-1}(A_e - \lambda I)C,$$

из которой получаем равенства

$$\det(A_{e'} - \lambda I) = \det(C^{-1}(A_e - \lambda I)C) =$$

$$= \det C^{-1} \det(A_e - \lambda I) \det C = \frac{1}{\det C} \det(A_e - \lambda I) \det C =$$
$$= \det(A_e - \lambda I).$$

□

1.88. Отметим, что из (1.86) вытекает, что характеристический многочлен имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Из этого явного вида вытекает, в частности, что коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$, а коэффициент при λ^0 равен $\det A_e$. Несколько сложнее заметить, что коэффициент при λ^{n-1} равен $-\operatorname{tr} A$, где

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + \cdots + a_n^n.$$

1.89. Теорема. *Корни характеристического многочлена из поля K, над которым рассматривается линейное пространство $\mathcal{L}$ ($A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$) в точности собственные значения линейного оператора.*

Доказательство. Это следствие теоремы 1.82, леммы 1.85 и определения 1.86. □

1.90. Лемма. Любой оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в комплексном линейном пространстве $\mathcal{L}$ имеет собственный вектор.

Доказательство. Согласно основной теореме алгебры уравнение $\det(A_e - \lambda I) = 0$ имеет корень $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Поэтому существует нетривиальное решение линейной однородной системы уравнений

$$A_e X_e = \lambda_0 X_e.$$

Но тогда $e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) X_e \neq \theta$ в силу результата теоремы 1.82 является нетривиальным решением уравнения

$$Ae = \lambda_0 e,$$

т.е. собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ_0. □

11. Комплексификация*

При первом чтении параграф можно опустить.

1.91. Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ определено над полем вещественных чисел и оператор A линейный относительно линейных комбинаций с вещественными числами. Нам нужно построить такое продолжение A_C этого оператора, чтобы он был тоже линейным, но уже относительно линейных комбинаций относительно комплексных чисел, причем сужение A_C на векторы исходного линейного пространства совпадало с исходным оператором A. С этой целью нам нужно воспользоваться процедурой «комплексификации». Эта процедура аналогичны построению множества комплексных чисел из множества вещественных чисел.

Определим линейное пространство $\mathcal{L}_C$ как множество упорядоченных пар (x, y), где $x, y \in \mathcal{L}$. Определим операции сложения и умножения на комплексные числа следующим образом:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$
$$(\lambda + i\mu)(x, y) = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y).$$

Отождествим каждую пару вида (x, θ) с вектором $x \in \mathcal{L}$. Тогда линейное пространство $\mathcal{L}$ окажется вложенным подпространством в $\mathcal{L}_C$ в виде вещественного подпространства.

Пусть теперь $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ базис в $\mathcal{L}$. Тогда набор

$$\{(\mathbf{e}_1, \theta), \ldots, (\mathbf{e}_n, \theta)\}$$

образует «вещественный» базис построенного пространства $\mathcal{L}_C$. Действительно, с одной стороны, заметим, что

$$i(\mathbf{e}_k, \theta) = (\theta, \mathbf{e}_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

С другой стороны, справедлива следующая цепочка равенств:

$$(x, y) = (x, \theta) + (\theta, y) = \sum_{j=1}^{n} x^j (\mathbf{e}_j, \theta) + \sum_{k=1}^{n} y^k (\theta, \mathbf{e}_k) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x^j (\mathbf{e}_j, \theta) + i \sum_{k=1}^{n} y^k (\mathbf{e}_k, \theta) = \sum_{s=1}^{n} (x^s + i y^s)(\mathbf{e}_j, \theta),$$

где

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^j \mathbf{e}_j, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k.$$

Введем оператор A_C следующим образом:

$$A_C(x, y) \stackrel{def:}{=} (Ax, Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathcal{L}.$$

Докажем, что оператор $A_C \in L(\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_C)$. Действительно, пусть

$$\alpha^1 = \lambda^1 + i\mu^1, \quad \alpha^2 = \lambda^2 + i\mu^2.$$

Тогда справедливы следующие равенства:

$$\begin{gathered}
A_C(\alpha^1(x_1, y_1) + \alpha^2(x_2, y_2)) = \\
= A_C\left((\lambda^1 x_1 - \mu^1 y_1, \mu^1 x_1 + \lambda^1 y_1) + (\lambda^2 x_2 - \mu^2 y_2, \mu^2 x_2 + \lambda^2 y_2)\right) = \\
= A_C\left(\lambda^1 x_1 - \mu^1 y_1 + \lambda^2 x_2 - \mu^2 y_2, \mu^1 x_1 + \lambda^1 y_1 + \mu^2 x_2 + \lambda^2 y_2\right) = \\
= \left(A(\lambda^1 x_1 - \mu^1 y_1 + \lambda^2 x_2 - \mu^2 y_2), A(\mu^1 x_1 + \lambda^1 y_1 + \mu^2 x_2 + \lambda^2 y_2)\right) = \\
= (\lambda^1 A x_1 - \mu^1 A y_1, \mu^1 A x_1 + \lambda^1 A y_1) + \\
+ (\lambda^2 A x_2 - \mu^2 A y_2, \mu^2 A x_2 + \lambda^2 A y_2) = \\
= \alpha^1 A_C(x_1, y_1) + \alpha^2 A_C(x_2, y_2). \quad (1.110)
\end{gathered}$$

В «вещественном» базисе $\{(\mathbf{e}_1, \theta), \ldots, (\mathbf{e}_n, \theta)\}$ матрица A_{Ce} оператора A_C определяется следующим образом:

$$\begin{gathered}
(A_C(\mathbf{e}_1, \theta), \ldots A_C(\mathbf{e}_n, \theta)) = ((A\mathbf{e}_1, \theta), \ldots, (A\mathbf{e}_n, \theta)) = \\
= ((\mathbf{e}_1, \theta), \ldots (\mathbf{e}_n, \theta))A_{Ce},
\end{gathered}$$

где

$$A_{Ce} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$

причем, как нетрудно заметить, что

$$(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A_e,$$

где

$$A_e = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix},$$

т.е. матрицы $A_{Ce} = A_e$ в «вещественном» базисе. Хотя в $\mathcal{L}_C$ существуют другие базисы.

1.92. Лемма. Если элемент $(x, y) \in \mathcal{L}_C$ является собственным вектором оператора A_C с мнимым собственным значением $\lambda + i\mu$, $\mu \neq 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $U = L(x, y) \subset \mathcal{L}$ — двумерное инвариантное подпространство для оператора A, причем

$$Ax = \lambda x - \mu y, \quad Ay = \mu x + \lambda y. \quad (1.111)$$

Доказательство. Пусть

$$A_C(x,y) = (\lambda + i\mu)(x,y), \quad \mu \neq 0, \quad x, y \in \mathcal{L}, \quad (x,y) \neq (\theta,\theta).$$

Отсюда получаем равенство

$$(Ax, Ay) = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y),$$

которое равносильно двум равенствам из (1.111). Теперь докажем, что $x \neq \theta$. Действительно, пусть $x = \theta$. Тогда из (1.111) получаем, что $\mu y = \theta$. Поскольку по условию $\mu \neq 0$, то приходим к выводу о том, что $y = \theta$, но тогда $(x,y) = (\theta,\theta)$. Противоречие. Точно также доказываем, что $y \neq \theta$.

Теперь докажем, что векторы x и y линейно независимы. Пусть они линейно зависимы. Тогда найдется такое $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$, что

$$y = \alpha x.$$

Подставляя это равенство в (1.111), получим равенства

$$Ax = \lambda x - \mu\alpha x, \quad \alpha Ax = \mu x + \lambda\alpha x.$$

Исключая Ax, с одной стороны, приходим к следующему равенству:

$$\mu(1+\alpha^2)x = \theta \Rightarrow \mu(1+\alpha^2) = 0,$$

поскольку по доказанному $x \neq \theta$. С другой стороны, $\mu \neq 0$ по условию. Следовательно, $1+\alpha^2 = 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Противоречие. Значит, $\dim L(x,y) = 2$. □

12. Собственные векторы. Продолжение

1.93. Теорема. *Любой оператор $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ над полем вещественных чисел имеет одномерное или (и) двумерное инвариантное подпространство.*

Доказательство. Шаг 1. Вещественный корень. Если существует вещественный корень характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$, то существует собственный вектор $e \neq \theta$ этого оператора, а следовательно, его линейная оболочка $L(e)$ является одномерным инвариантным подпространством этого оператора.

Шаг 2. Комплексный корень. Пусть $\lambda_0 = l + i\mu \in \mathbb{C}$ при $\mu \neq 0$ — корень характеристического многочлена, который, как мы знаем, существует в силу основной теоремы алгебры, т.е. $\det(A_e - \lambda_0 I) = 0$. В силу этого равенства однородная система уравнений

$$A_e Z = (l + i\mu)Z, \quad Z \in \mathbb{C}^{n\times 1}$$

имеет нетривиальное решение $Z = X + iY$, $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$A_e(X+iY) = (l+i\mu)(X+iY) \Leftrightarrow A_e X + iA_e Y = lX - \mu Y + i(lY + \mu X),$$

из которой получаем два равенства

$$A_e X = lX - \mu Y, \quad A_e Y = lY + \mu X. \tag{1.112}$$

Рассмотрим элементы линейного пространства $\mathcal{L}$:

$$u = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X \quad \text{и} \quad v = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)Y. \tag{1.113}$$

Справедливы следующие равенства:

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A_e X = A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X = Au,$$
$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)A_e Y = A(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)Y = Av.$$

Тогда из равенств (1.112) с учетом (1.113) получим следующие равенства:

$$Au = lu - \mu v, \quad Av = lv + \mu u, \quad u, v \in \mathcal{L}. \tag{1.114}$$

Отсюда сразу же в силу линейности оператора A получаем, что линейное подпространство $L(u, v)$ является инвариантным подпространством для оператора A.

Шаг 4. Размерность. Докажем, что $\det L(u, v) = 2$.

Сначала докажем, что $X \neq O$. Действительно, пусть $X = O$. Тогда из (1.112) вытекает равенство

$$\mu Y = 0 \Rightarrow Y = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $X \neq O$.

Теперь докажем, что $Y \neq O$. Пусть $Y = O$. Тогда из (1.112) получаем равенство

$$\mu X = 0 \Rightarrow X = O,$$

поскольку $\mu \neq 0$. Следовательно, $Z = X + iY = O$, что противоречит нетривиальности $Z \neq O$. Итак, $Y \neq O$.

Предположим, что столбцы X и Y линейно зависимы. Тогда существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $X = \alpha Y$, и из равенств (1.112) получаем следующие выражения:

$$\alpha A_e Y = \alpha\lambda Y - \mu Y, \quad AY = \lambda Y + \alpha\mu Y, \quad Y \neq O,$$

из которых исключая AY получим равенство $\mu\alpha^2 + \mu = 0$, которое невозможно поскольку $\mu \neq 0$. Итак, столбцы X и Y линейно независимы, а, стало быть, линейно независимы и элементы (1.113). Значит, $\det L(u, v) = 2$. □

1.94. Лемма. Множество всех $e \in \mathcal{L}$ таких, что

$$e = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)X_e, \tag{1.115}$$

где X_e пробегает все множество решений линейной однородной системы уравнений

$$A_e X_e = \lambda X_e, \quad X_e \in \mathbb{K}^{n \times 1}, \quad \lambda \in \mathbb{K} \tag{1.116}$$

образуют линейное подпространство

$$V_\lambda(A) \stackrel{def:}{=} \ker(A - \lambda I) \subset \mathcal{L}, \qquad (1.117)$$

где A_e — матрица оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

Доказательство. Заметим, что $V_\lambda(A)$ — это есть линейное подпространство в $\mathcal{L}$, состоящее из линейной оболочки всех собственных векторов оператора A, соответствующих собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$. Утверждение леммы вытекает из результатов теоремы 1.82, а также установленного ранее свойства, что ядро линейного оператора образует линейное подпространство. □

1.95. Определение. Подпространство $V_\lambda(A) \stackrel{def:}{=} \ker(A - \lambda I)$ называется собственным подпространством линейного оператора A.

1.96. Теорема. *Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ оператора A, линейно независимы.*

Доказательство. Докажем утверждение теоремы по индукции. При $m = 1$ доказывать нечего. Пусть $m > 1$ и $\theta \neq e_k \in V_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I)$ и $k = \overline{1,m}$ и утверждение теоремы выполнено для $m-1$ собственных векторов. Рассмотрим следующую линейную комбинацию:

$$\alpha^1 e_1 + \cdots + \alpha^{m-1} e_{m-1} + \alpha^m e_m = \theta. \qquad (1.118)$$

Применим оператор A к обеим частям равенства (1.118) и в результате получим равенство

$$\alpha^1 Ae_1 + \cdots + \alpha^{m-1} Ae_{m-1} + \alpha^m Ae_m = \theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \alpha^1 e_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\alpha^{m-1} e_{m-1} + \lambda_m \alpha^m e_m = \theta. \qquad (1.119)$$

Теперь умножим обе части равенства (1.118) на λ_m и вычтем получившееся равенство из (1.119). В результате получим равенство

$$\alpha^1(\lambda_1 - \lambda_m)e_1 + \cdots + \alpha^{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)e_{m-1} = \theta. \qquad (1.120)$$

Поскольку все собственные числа попарно не совпадают и в силу предположения индукции векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{m-1}$ линейно независимы получаем, что $\alpha^1 = \cdots = \alpha^{m-1} = 0$. Тогда из равенства (1.118) получаем, что $\alpha^m = 0$. Итак, равенство (1.118) возможно тогда и только тогда, когда все числа $\alpha^1 = \cdots = \alpha^m = 0$, т.е. соответствующие собственные векторы линейно независимы. □

1.97. Следствие. *Если характеристический многочлен* $\det(A-\lambda I)$ *имеет* $n = \dim \mathcal{L}$ *различных корней из поля* $\mathbb{K}$, *над которым определено линейное пространство* $\mathcal{L}$, *то существует собственный базис этого оператора в линейном пространстве* $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — попарно различные собственные числа из поля $\mathbb{K}$, а e_k при $k = \overline{1,n}$ — это соответствующие собственные векторы. В силу результата теоремы 1.96 получаем, что они линейно независимы и их число совпадает с размерностью n линейного пространства $\mathcal{L}$. Значит, они образуют базис. □

1.98. Результат этого следствия является достаточным условием существования собственного базиса линейного оператора. Например, с одной стороны, характеристический многочлен единичного оператора равен $f(\lambda) = (1-\lambda)^n$ и имеет n–кратный корень $\lambda = 1$. С другой стороны, любой базис линейного пространства $\mathcal{L}$ является собственным для единичного оператора.

1.99. Пример. Пусть $\mathcal{L} = U \oplus W$. Тогда для любого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие единственные $y \in U$ и $z \in W$, что справедливо равенство $x = y + z$. Определим следующее отображение:

$$Px = y. \tag{1.121}$$

Сначала докажем, что это отображение $P \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$. Действительно, пусть

$$x_1 = y_1 + z_1, \quad x_2 = y_2 + z_2, \quad y_1, y_2 \in U, \quad z_1, z_2 \in W, \quad \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{K}.$$

Тогда имеем

$$\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = (\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2) + (\alpha^1 z_1 + \alpha^2 z_2),$$

причем $\alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2 \in U$ и $\alpha^1 z_1 + \alpha^2 z_2 \in W$ и справедлива следующая цепочка равенств:

$$P(\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2) = \alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2 = \alpha^1 P(x_1) + \alpha^2 P(x_2).$$

Введенный **оператор P называется проектором на подпространство U параллельно подпространству W.** Отметим, что подпространства U и W являются инвариантными подпространствами проектора P. Действительно, справедливы следующие равенства:

$$Px = x = 1x \quad \text{для всех} \quad x \in U, \tag{1.122}$$

$$Px = \theta = 0x \quad \text{для всех} \quad x \in W, \quad (\theta \in W). \tag{1.123}$$

Значит, $U = V_1(P) = \ker(P - 1 \cdot I)$ и $W = V_0(P) = \ker(P - 0 \cdot I)$. И у оператора P существует собственный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m) = U$ и $L(\mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n) = W$. В этом базисе матрица оператора P имеет следующий диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \text{O} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \text{O} & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

1.100. Теорема. *Оператор $P \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$ является проектором для каких–то линейных подпространств U и W, $\mathcal{L} = U \oplus W$, тогда и только тогда, когда справедливо равенство $P^2 = P$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $P \in L(\mathcal{L}; \mathcal{L})$, $\mathcal{L} = U \oplus W$ и P — проектор на U параллельно W. Тогда для каждого $x \in \mathcal{L}$ найдутся такие единственные $y \in U$ и $z \in W$, что

$$x = y + z \Rightarrow P^2 x = P(Px) = Py = y = Px \Rightarrow P^2 = P.$$

Достаточность. Пусть $P^2 = P$. Ранее нами было доказано равенство

$$\dim \ker A + \dim \operatorname{im} A = \dim \mathcal{L}.$$

Отсюда вытекает, что $\ker A \oplus \operatorname{im} A = \mathcal{L}$ точно тогда, когда

$$\ker A \cap \operatorname{im} A = \{\theta\}.$$

Докажем теперь, что $\mathcal{L} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Для этого нам нужно доказать, что $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\theta\}$. Действительно, пусть $x \in \operatorname{im} P$, т.е. найдется такое $y \in \mathcal{L}$, что $x = Py$. Тогда справедливы равенства

$$P(x) = P^2(y) = P(y) = x.$$

Поэтому если $x \in \ker P \cap \operatorname{im} P$, то $x = P(x) = \theta$. Следовательно,

$$\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\theta\} \Rightarrow \mathcal{L} = \ker P \oplus \operatorname{im} P$$

и поэтому разложение любого элемента $x \in \mathcal{L}$ вида

$$x = y + z, \quad y \in \ker P, \quad z \in \operatorname{im} P$$

единственно. Рассмотрим следующее разложение:

$$x = (x - P(x)) + P(x).$$

Заметим, что $P(x - P(x)) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = \theta$. Следовательно, имеем $x - P(x) \in \ker P$, а $P(x) \in \operatorname{im} P$. Итак, P — проектор на $U = \operatorname{im} P$ параллельно $W = \ker P$. $\square$

1.101. Лемма. Характеристический многочлен ограничения линейного оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора.

Доказательство. Пусть $U \subset \mathcal{L}$ — это инвариантное подпространства линейного оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ и $B = A|_U$ — ограничение линейного оператора A на инвариантном подпространстве U. Рассмотрим следующий базис в $\mathcal{L}$:

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}, \quad U = L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m).$$

В этом базисе, как нами ранее было показано, матрица A_e оператора A имеет следующий вид:

$$A_e = \begin{pmatrix} B_e & * \\ O & C_e \end{pmatrix},$$

где B_e — это матрица оператора $B = A|_U$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$. Заметим, что справедливо следующее равенство:

$$A_e - \lambda I = \begin{pmatrix} B_e - \lambda I & * \\ O & C_e - \lambda I \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \det(A_e - \lambda I) = \det(B_e - \lambda I)\det(C_e - \lambda I). \quad (1.124)$$

Следовательно, характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I)$ оператора A делится на характеристический многочлен $\det(B_e - \lambda I)$ оператора $B = A|_U$. □

1.102. Определение. Алгебраической кратностью n_{λ_0} собственного значения λ_0 называется его кратность как корня характеристического многочлена.

1.103. Определение. Геометрической кратностью p_{λ_0} собственного значения λ_0 называется размерность собственного подпространства $V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$.

1.104. Теорема. *Алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 не меньше его геометрической кратности p_{λ_0} :*

$$n_{\lambda_0} \geqslant p_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Рассмотрим собственное подпространство

$$V_{\lambda_0}(A) = \ker(A - \lambda_0 I)$$

оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, соответствующее собственному значению λ_0. Ранее мы доказали, что оно инвариантно относительно оператора A. Сужение оператора A на $V_{\lambda_0}(A)$ равно

$$B = A|_{V_{\lambda_0}} = \lambda_0 I|_{V_{\lambda_0}},$$

где $I|_{V_{\lambda_0}}$ единичный оператор на $V_{\lambda_0} \subset \mathcal{L}$. Характеристический многочлен оператора введенного оператора B имеет следующий вид:

$$\det(B_e - \lambda I|_{V_{\lambda_0}}) = (\lambda - \lambda_0)^{p_{\lambda_0}},$$

поскольку размер квадратной матрицы B_e равен размерности подпространства $V_{\lambda_0}(A)$. В силу результата леммы 1.101 характеристический многочлен $\det(A_e - \lambda I)$ оператора A делится на характеристический многочлен $(\lambda - \lambda_0)^{p_{\lambda_0}}$ оператора B. Но это означает, что алгебраическая кратность n_{λ_0} собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена $\det(A_e - \lambda I)$ не меньше, чем p_{λ_0} — его геометрическая кратность. □

1.105. Теорема. *Для существования базиса из собственных векторов линейного оператора* $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *характеристический многочлен* $\det(A - \lambda I)$ *разлагается на линейные множители из поля* $\mathbb{K}$, *над которым рассматривается линейное пространство* $\mathcal{L}$;
2) *геометрическая кратность* p_λ *каждого собственного значения равна алгебраической кратности* n_λ.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все корни характеристического многочлена $\det(A - \lambda I)$ из поля $\mathbb{K}$ и $n_{\lambda_1}, \ldots, n_{\lambda_s}$ — их алгебраические кратности, а V_{λ_i}, $i = \overline{1, s}$ — это соответствующие собственные подпространства, размерности p_{λ_i}. Согласно результату теоремы 1.104 имеют место следующие соотношения:

$$p_{\lambda_i} := \dim V_{\lambda_i} \leqslant n_{\lambda_i} \tag{1.125}$$

и, значит, имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{s} p_{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} \leqslant n. \tag{1.126}$$

Однако единственный способ получить базис из собственных векторов — взять объединение базисов собственных подпространств. Для того чтобы при этом действительно получился базис пространства $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{s} \dim V_{\lambda_i} = n.$$

Отсюда и с учетом (1.125) и (1.126) приходим к двум условиям:

$$\sum_{i=1}^{s} n_{\lambda_i} = n \quad \text{и} \quad p_{\lambda_i} = n_{\lambda_i}.$$

Первое из этих условий означает, что характеристический многочлен разлагается на линейные множители из поля $\mathbb{K}$, а второе — это второе условие теоремы. □

1.106. Спектральное разложение. Пусть выполнены условия теоремы 1.105 и $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все различные собственные значения оператора $A \in L(\mathcal{L};\mathcal{L})$ из поля $\mathbb{K}$, над которым определено линейное пространство $\mathcal{L}$. Тогда справедливо разложение линейного пространства $\mathcal{L}$ в прямую сумму

$$\mathcal{L} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}, \quad V_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j I), \quad j = \overline{1, s}.$$

Отметим, что

$$A|_{V_{\lambda_j}} = \lambda_j I|_{V_{\lambda_j}},$$

где $I|_{V_{\lambda_j}}$ — единичный оператор на V_{λ_j}. Символом P_j обозначим проектор на собственное подпространство V_{λ_j}. Отметим, что тогда

$$P_j|_{V_{\lambda_j}} = I|_{V_{\lambda_j}}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Тогда справедливо следующее спектральное разложение линейного оператора A:

$$A = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j P_j.$$