Лекция 2

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Системы

Любую систему из m линейных уравнений относительно n неизвестных можно записать в следующем общем виде:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\
a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \cdots + a_n^2 x^n = b^2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m.
\end{array}
\right.
\tag{1.1}
$$

Прежде всего заметим, что система уравнений (1.1) может иметь единственное решение, иметь бесконечно много решений и не иметь решений. Давайте обсудим форму записи системы уравнений (1.1).

Наблюдение 1. Неизвестные переменные мы пронумеровали верхним индексом и это не случайно. Напомним, что элементы столбца (т.е. матрица размера $n \times 1$) мы как раз нумеруем верхним индексом. Поэтому введём столбец переменных длины n поскольку у нас как раз n переменных:

$$
X := \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.
\tag{1.2}
$$

Наблюдение 2. Коэффициенты при неизвестных $x^1, x^2, \cdots, x^n$ мы занумеровали двумя индексами a_k^j. Заметим, что верхний индекс указывает на номер уравнения системы уравнений где расположен коэффициент a_k^j, а нижний индекс указывает на неизвестную переменную x^k, на которую умножается коэффициент a_k^j. Однако, используя нашу систему записи матриц мы можем составить матрицу коэффициентов размера $m \times n$:

$$A := \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Н а б л ю д е н и е 3. Столбец X является матрицей размера $n \times 1$, матрица A имеет размер $m \times n$. Поэтому согласно определению произведения матриц определено произведение матрицы A на матрицу X, причем их произведение есть матрица AX размера $m \times 1$, т.е. столбец длины m. Давайте перемножим матрицу A на столбец X:

$$AX = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} A^1X \\ A^2X \\ \vdots \\ A^mX \end{Vmatrix}, \tag{1.4}$$

где $A^j = (a_1^j, a_2^j, \cdots, a_n^j)$ — j–ая строчка матрицы A. Поскольку длина строчки матрицы A равна n, а длина столбца X тоже n, то согласно правила умножения «строчка на столбец» произведение A^jX определено и представляет собой следующее число:

$$A^jX = a_1^j x^1 + a_2^j x^2 + \cdots + a_n^j x^n. \tag{1.5}$$

Следовательно, из (1.4) и (1.5) вытекает, что

$$AX = \begin{pmatrix} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n \\ \vdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где в правой части равенства (1.6) расположен столбец длины m. Теперь введём столбец правой части системы уравнений (1.1).

$$B = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

который как мы видим имеет длину m. Систему уравнений (1.1) можно записать в виде равенства двух столбцов длины m :

$$\begin{pmatrix} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \cdots + a_n^1x^n \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \cdots + a_n^2x^n \\ \vdots \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + \cdots + a_n^mx^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

а с учетом (1.6) и обозначения (1.7) систему уравнений (1.1) можно записать в компактной матричной форме записи:

$$AX = B, \tag{1.9}$$

где матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, столбец неизвестных $X \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ и столбец $B \in \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ правой части определены формулами (1.3), (1.2) и (1.7), соответственно. В дальнейшем нам понадобиться так называемая расширенная матрица системы уравнений (1.10), которая имеет следующий вид:

$$\widetilde{A} = \|A|B\| = \|A_1, A_2, \cdots, A_n, B\|. \tag{1.10}$$

Чем удобна форма записи (1.10) по сравнению с записью системы линейных уравнений (1.1)? Оказывается из рассмотрения матричной формы (1.10) можно доказать фундаментальный результат о структуре множества всех решений системы уравнений (1.1).

Однородные системы линейных уравнений. Дадим определение.

Определение 1. *Система уравнений* (1.1) *называется однородной, если все числа* $b^1, b^2, \cdots, b^m$ *в правых частях уравнений равны нулю.*

Соответственно в матричной форме записи однородная система уравнений имеет следующий вид:

$$AX = O, \tag{1.11}$$

где $O \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ — нулевая матрица. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Если* X_1, X_2 *— два произвольных столбцы–решения системы линейных однородных уравнений* (1.11,) *то и столбец* $X_3 = = \alpha X_1 + \beta X_2$ *— тоже столбец–решение системы уравнений* (1.11) *для любых чисел* α *и* β.

Доказательство. По условию утверждения выполнены следующие матричные равенства:

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O. \tag{1.12}$$

В силу свойств произведения матриц имеет место следующая цепочка равенств:

$$A(\alpha X_1 + \beta X_3) = \alpha AX_1 + \beta AX_2 = \alpha O + \beta O = O \tag{1.13}$$

для любых чисел α и β.

Теорема доказана.

Неоднородные системы линейных уравнений. Рассмотрим общий случай, когда столбец $B \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ — произвольный. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Если* $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ *— это какие–то два столбца–решения системы уравнений* (1.10), *то их разность* $X_1 - X_2$ *является решением соответствующей однородной системы уравнений.*

Доказательство.

Справедливы следующие равенства:

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = O - O = O. \qquad (1.14)$$

Теорема доказана.

Из этого утверждения вытекает, что общее решение неоднородной системы уравнений (1.10),т. е. множество всех решений неоднородной системы уравнений, можно описать как сумму частного решения неоднородной системы уравнений и общего решения однородной системы уравнений, т.е. множество всех решений однородной системы уравнений.

§ 2. Метод Гаусса

Опишем четыре так называемых элементарных преобразования над уравнениями системы уравнений (1.1), которые не меняют множества всех решений этой системы уравнений.

Элементарное преобразование типа I. Это преобразование заключается в том, что любые два каких–то уравнения из системы уравнений (1.1) меняются местами. Ясно, что это преобразование меняет форму записи системы уравнений (1.1), но не меняет множество решений этой системы уравнений. Например, если поменять местами j–ое и k–ое уравнения системы (1.1) при $j < k$, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^k x^1 + a_2^k x^2 + \cdots + a_n^k x^n = b^k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^j x^1 + a_2^j x^2 + \cdots + a_n^j x^n = b^j, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \cdots + a_n^m x^n = b^m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

которая в матричной форме записи примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^k \\ \vdots \\ b^j \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Если ввести расширенную матрицу исходной системы уравнений (1.1)

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{c} \widetilde{A}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{A}^j \\ \vdots \\ \widetilde{A}^k \\ \vdots \\ \widetilde{A}^m \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j & b^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k & b^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^n \end{pmatrix},$$

то после перестановки j–ой и k–ой строчек мы получим следующую расширенную матрицу:

$$\widetilde{A}' = \left\| \begin{array}{c} \widetilde{A}^1 \\ \vdots \\ \widetilde{A}^k \\ \vdots \\ \widetilde{A}^j \\ \vdots \\ \widetilde{A}^m \end{array} \right\| = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k & b^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j & b^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^n \end{pmatrix}.$$

Элементарное преобразование типа II. Это преобразование заключается в том, что произвольное уравнение из системы (1.1) умножается на не нулевое число. Это преобразование не меняет множества решений рассматриваемой системы уравнений. Отметим, что если мы умножим какое–либо уравнение на число нуль, то мы получим, вообще говоря, другую систему уравнений с другим множеством решений. Например, если j–ое уравнение системы уравнений (1.1) умножить на число α, то в матричной форме записи мы получим следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_1^j & \alpha a_2^j & \cdots & \alpha a_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ \alpha b^j \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}$$

при этом преобразовании расширенная матрица системы уравнений (1.1) примет следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_1^j & \cdots & \alpha a_n^j & \alpha b^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Элементарное преобразование типа III. Это преобразование заключается в том, что к произвольному уравнению из системы уравнений (1.1) прибавляется любое другое уравнение из той же системы (1.1), умноженное на произвольное число. Например, прибавим к j–му уравнению системы (1.1) k–ое уравнение, умноженное на число α. Пусть для определённости $j < k$. В матричной форме записи мы получим следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j + \alpha a_1^k & \cdots & a_n^j + \alpha a_n^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_n^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^j + \alpha b^k \\ \vdots \\ b^k \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix},$$

а расширенная матрица системы после этого преобразования примет следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^j + \alpha a_1^k & \cdots & a_n^j + \alpha a_n^k & b^j + \alpha b^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^k & \cdots & a_n^k & b^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}.$$

Элементарное преобразование IV. Это преобразование заключается в том, что мы переобозначаем переменные. Например, пусть $j < k$ и исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1^1 x^1 + \cdots + a_j^1 x^j + \cdots + a_k^1 x^k + \cdots + a_n^1 x^n = b^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^m x^1 + \cdots + a_j^m x^j + \cdots + a_k^m x^k + \cdots + a_n^m x^n = b^m. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Перейдём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a^1_1 y^1 + \dots + a^1_k y^j + \dots + a^1_j y^k + \dots + a^1_n y^n = b^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a^m_1 y^1 + \dots + a^m_k y^j + \dots + a^m_j y^k + \dots + a^m_n y^n = b^m, \end{cases} \tag{2.4}$$

относительно новых переменных

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^j \\ \vdots \\ y^k \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

которые получены из исходных переменных переобозначением $y^j = x^k$ и $y^k = x^j$. При этом преобразовании расширенная матрица системы принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_k & \cdots & a^1_j & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_k & \cdots & a^m_j & b^m \end{pmatrix}$$

Элементарное преобразование V. Это преобразование заключается в том, что если в системе уравнений (1.1) имеется уравнение такого вида

$$0x^1 + 0x^2 + \dots + 0x^n = 0 \tag{2.5}$$

и в системе уравнений (1.1) имеется еще одно уравнение (возможно такое же), то уравнение (2.5) «вычеркивается». Пусть, например, j–ое уравнение системы уравнений (1.1) имеет вид (2.5). Тогда после его «вычеркивания» мы получим в матричной форме записи следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{j-1}_1 & \cdots & a^{j-1}_n \\ a^{j+1}_1 & \cdots & a^{j+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^{j-1} \\ b^{j+1} \\ \vdots \\ b^m \end{pmatrix}.$$

После этого преобразования расширенная матрица системы примет следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} & b^{j-1} \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} & b^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}$$

Вывод. Пять указанных элементарных преобразований равносильны соответствующим преобразованиям над строками и столбцами расширенной матрицей системы (1.1). Первому преобразованию соответствует перестановка двух строк расширенной матрицы. Второму преобразованию соответствует умножение строчки расширенной матрицы системы на не нулевое число. Третьему преобразованию соответствует прибавление к заданной строчке другой строчки, умноженной на произвольное число. Четвертому преобразованию соответствует перестановка двух столбцов расширенной матрицы, причём последний столбец не участвует в этом преобразовании. Пятому преобразованию соответствует удаление из расширенной матрицы системы нулевой строчки.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Используя только указанные первые четыре элементарные преобразования исходную систему уравнений* (1.1) *можно свести к эквивалентной системе уравнений с расширенной матрицей следующих четырёх видов*:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b^m \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r+1}^r & \cdots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}, \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{m+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{m+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^m_{m+1} & \cdots & \overline{a}^m_n & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m > n, \tag{2.9}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m = n. \tag{2.10}$$

Прежде, чем доказывать эту теорему рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + 2x^3 + x^4 = 1, \\ 2x^1 + 3x^2 + 0x^3 + x^4 = 0, \\ 3x^1 + 4x^2 + 2x^3 + 2x^4 = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Выпишем расширенную матрицу системы.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right). \tag{2.12}$$

Шаг 1. Вычтем из третьей строки сумму первой и второй. В результате получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.13}$$

Шаг 2. Вычеркнем третью строчку. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{2.14}$$

Шаг 3. Вычтем из второй строчки первую умноженную на 2. В результате получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right). \tag{2.15}$$

Шаг 4. Вычтем из первой строчки вторую. В результате получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array}\right). \tag{2.16}$$

Итак, мы пришли к следующей эквивалентной системе двух неоднородных уравнений

$$\begin{cases} x^1 + 6x^3 + 2x^4 = 3, \\ \quad x^2 - 4x^3 - x^4 = -2, \end{cases}$$

которую можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} x^1 = -6x^3 - 2x^4 + 3, \\ x^2 = 4x^3 + x^4 - 2, \end{cases} \tag{2.17}$$

Какие выводы мы можем сделать из вида этой системы уравнений?

Наблюдения. Очевидно, что решений системы уравнений (2.17) бесконечно много. Если положить переменные x^3 и x^4 равными каким-либо числам c^1 и c^2, соответственно, то переменные x^1 и x^2 будут определены однозначным образом

$$x^1 = -6c^1 - 2c^2 + 3, \quad x^2 = 4c^1 + c^2 - 2.$$

Таким образом, мы можем описать все множество решений системы уравнений (2.11) следующим аналитическим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6c^1 - 2c^2 \\ -2 + 4c^1 + c^2 \\ c^1 \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $c^1, c^2 \in \mathbb{R}$ — произвольные числа.

Доказательство теоремы 3. Пусть у основной матрицы A системы 1.1

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^j & \cdots & a_k^j & \cdots & a_n^j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

элемент $a_k^j \neq 0$, в противном случае расширенная матрица системы имеет следующий вид:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b^m \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Переставляя местами строчки и столбцы (если необходимо и только столбцы основной матрицы) мы можем добиться, что элемент a_k^j окажется на пересечении первой строчки и первого столбца. Поэтому без ограничения общности можно считать, что либо основная матрица A системы нулевая либо элемент a_1^1 исходной матрицы отличен от нуля.

Разделим всю первую строчку расширенной матрицы на элемент $a_1^1 \neq 0$ и в результате этого преобразования мы получим расширенную матрицу систему следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Теперь вычтем из второй строчки первую, умноженную на a_1^2, тогда получим следующую расширенную матрицу систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m & b^m \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Аналогичным образом вычитая из каждой j–ой строчки при $j \geqslant 2$ первую строчку, умноженную на a_1^j, мы в результате получим расширенную матрицу следующего вида (для удобства элементы расширенной матрицы, полученные после преобразований, будем обозначать чертой сверху):

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & \overline{a}_2^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a}_2^m & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Здесь возможны две ситуации либо подматрица размера $(m-1) \times (n-1)$ основной матрицы

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_2^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_2^m & \cdots & \overline{a}_n^m \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

оказалась нулевой

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

либо найдётся ненулевой элемент $\overline{a}_k^j$ в подматрице (2.34) при $j \in \overline{2, m}$ и $k \in \overline{2, n}$. В первом случае мы привели исходную расширенную матрицу систему к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Во втором случае переставляя строчки и столбцы, не переставляя первую строчку и первый столбец, мы можем добиться, что элемент $\overline{a}_2^2 \neq 0$. Поэтому сразу же предположим, что $\overline{a}_2^2 \neq 0$. Разделим вторую строчку на число $\overline{a}_2^2$ и в результате получим расширенную матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \overline{a}_2^m & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Вычитая из j–ых строчек при $j \geqslant 3$ вторую строчку, умноженную на a_2^j, мы получим матрицу следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Далее рассуждения повторяются. Поэтому за конечное число шагов мы получим расширенную матрицу системы одного из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_r^1 & \overline{a}_{r+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_r^2 & \overline{a}_{r+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r+1}^r & \cdots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}, \tag{2.28}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_m^1 & \overline{a}_{m+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_m^2 & \overline{a}_{m+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{m+1}^m & \cdots & \overline{a}_n^m & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.29}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m > n, \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m = n. \tag{2.31}$$

Теперь мы воспользуемся «обратным ходом» метода Гаусса на примере расширенной матрицы системы (2.28). Умножим r–ю строчку матрицы (2.28) на элемент a_r^j и вычтем полученную строчку из j–ой строчки при $j = \overline{1, r-1}$. В результате получим следующую расширенную матрицу систему

$$\begin{pmatrix} 1 & \overline{a}_2^1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^1 & \cdots & \overline{a}_n^1 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}_{r+1}^2 & \cdots & \overline{a}_n^2 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}_{r+1}^r & \cdots & \overline{a}_n^r & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Теперь умножим $(r-1)$–ю строчку матрицы (2.32) на a_{r-1}^j и вычтем из j–ой строчки при $j = \overline{1, r-2}$. Повторяя эту процедуру, в левом верхнем угле расширенной матрицы получим единичную матрицу порядка $r \times$

$\times r$:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{r+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{r+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^r_{r+1} & \cdots & \overline{a}^r_n & \overline{b}^r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{array}\right), \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}. \tag{2.33}$$

Если применить обратный ход к расширенным матрицам вида (2.29)–(2.31), то мы получим следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{m+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{m+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^m_{m+1} & \cdots & \overline{a}^m_n & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.34}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m > n, \tag{2.35}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m = n. \tag{2.36}$$

Теорема доказана.

Выводы. Проанализируем результаты доказанной теоремы 3. Если мы пришли к расширенной матрице, у которой есть строчка следующего вида:

$$(0, \cdots, 0, \overline{b}^j), \quad b^j \neq 0,$$

то этой строчке соответствует следующее уравнение:

$$0x^1 + \cdots + 0x^n = b^j \neq 0,$$

которое противоречиво и, следовательно, исходная система уравнений не имеет решений. Таким образом, методом Гаусса можно не только строить решение системы уравнений, но и доказывать их отсутствие. Поэтому важным следствием доказанной теоремы 3 является следующая:

Теорема 4. *Система уравнений* (1.1) *либо не имеет решений либо элементарными преобразованиями пяти типов может быть приведена к эквивалентной системе уравнений с расширенной матрицей одного из четырёх видов*:

$$(0, \cdots, 0, 0), \tag{2.37}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{r+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{r+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^r_{r+1} & \cdots & \overline{a}^r_n & \overline{b}^r \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\}, \tag{2.38}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{a}^1_{m+1} & \cdots & \overline{a}^1_n & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{a}^2_{m+1} & \cdots & \overline{a}^2_n & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{a}^m_{m+1} & \cdots & \overline{a}^m_n & \overline{b}^m \end{pmatrix}, \quad m < n, \tag{2.39}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \overline{b}^1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \overline{b}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{b}^n \end{pmatrix}, \quad m \geqslant n, \tag{2.40}$$

Теперь наша задача выписать решения системы уравнений, соответствующие расширенным матрицам (2.37), (2.38) и (2.40). Расширенной матрице (2.37) соответствует следующая система уравнений, состоящая из одного уравнения:

$$0x^1 + 0x^2 + \cdots + 0x^n = 0, \tag{2.41}$$

решениями которой является столбец–решение

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}, \quad c^1, c^2, \cdots, c^n \in \mathbb{C} \tag{2.42}$$

— произвольные числа. Заметим, что столбец–решение (2.42) можно записать в следующем полезном виде:

$$X = c^1\mathbf{e}_1 + c^2\mathbf{e}_2 + \cdots + c^n\mathbf{e}_n, \tag{2.43}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Расширенной матрице (2.40) соответствует следующая система n уравнений относительно n неизвестных:

$$y^1 = \overline{b}^1, \quad y^2 = \overline{b}^2, \cdots, y^n = \overline{b}^n. \tag{2.45}$$

При этом, если при получении расширенной матрицы (2.40) пользовались элементарным преобразованием четвертого типа, то решение

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

исходной системы уравнений (1.1) единственно и может быть получено из столбца

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

однозначно определенной перестановкой строк. Приступим к анализу расширенной матрицы (2.38). Система уравнений, соответствующая расширенной этой матрице имеет следующий вид:

$$\begin{cases} y^1 = -\overline{a}^1_{r+1} y^{r+1} - \cdots - \overline{a}^1_n y^n + \overline{b}^1, \\ y^2 = -\overline{a}^2_{r+1} y^{r+1} - \cdots - \overline{a}^2_n y^n + \overline{b}^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^r = -\overline{a}^r_{r+1} y^{r+1} - \cdots - \overline{a}^r_n y^n + \overline{b}^r. \end{cases} \tag{2.46}$$

Решение этой системы неединственно, поскольку $1 \leqslant r < n$. Заметим, что переменные $\{y^1, y^2, \cdots, y^r\}$ однозначно определяются, если задать произвольные значения оставшихся переменных $\{y^{r+1}, \cdots, y^n\}$. Положим

$$y^{r+1} = c^1, \cdots, y^n = c^{n-r}, \quad c^1, \cdots, c^{n-r} \in \mathbb{C}. \tag{2.47}$$

Тогда решение системы уравнений, соответствующей расширенной матрице (2.38), можно записать следующим образом:

$$Y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^r \\ y^{r+1} \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1}c^1 - \cdots - \overline{a}^1_n c^{n-r} + \overline{b}^1 \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1}c^1 - \cdots - \overline{a}^r_n c^{n-r} + \overline{b}^r \\ c^1 \\ \vdots \\ c^{n-r} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{b}^1 \\ \vdots \\ \overline{b}^r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c^1 \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c^{n-r} \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_n \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_n \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (2.48)$$

Если в процессе получения расширенной матрицы (2.38) мы пользовались элементарным преобразованием четвертого типа, то для получения столбца–решения исходной системы уравнений (1.1)

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

нужно сделать соответствующие перестановки строк в полученном столбце–решении Y (2.48). Расширенная матрица (2.39) анализируется точно также, как и расширенная матрица (2.38).

Заметим, что справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 5. *Пусть задана однородная система m линейных уравнений относительно $n > m$ неизвестных. Тогда решение этой системы неединственно и, в частности, существует нетривиальное решение.*

Доказательство. Поскольку однородная система линейных уравнений всегда имеет тривиальное решение, то рассматриваемую систему можно привести либо к системе с расширенной матрицей (2.37) либо к системе с расширенной матрицей (2.38) или с расширенной матрицей (2.39). Во всех случаях, как мы выяснили, решение неединственно.

Теорема доказана.

§ 3. Матрицы элементарных преобразований

Введём строчку размера $1 \times m$

$$I^j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \qquad (3.1)$$

на месте j–го столбца которой располагается число 1, а на остальных местах находятся числа 0. Теперь введём столбец размера $n \times 1$

$$I_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

на месте k–ой строчки которого располагается число 1, а на остальных местах числа 0. Запишем матрицу A в виде блоков–столбцов и в виде блоков–строк:

$$A = \|A_1, \cdots, A_n\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\| \tag{3.3}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$I^j A_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^{j-1} \\ a_k^j \\ a_k^{j+1} \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = a_k^j, \tag{3.4}$$

$$A^j I_k = (a_1^j, \cdots, a_{k-1}^j, a_k^j, a_{k+1}^j, \cdots, a_n^j) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_k^j. \tag{3.5}$$

Заметим, что <u>первые три элементарных преобразований</u> над матрицами можно записать в виде произведения некоторых квадратных матриц $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$ слева на матрицу A и при этом получается матрица A' следующего вида:

$$A' = PA, \quad A' \in \mathbb{C}^{m \times n}. \tag{3.6}$$

Матрица элементарного преобразования первого типа. Для определенности рассмотрим операцию перестановки j–ой и

k–ой строчек при условии, что $j < k$. Эта матрица имеет следующий вид:

$$P_{jk} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^j \\ I^k \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{jk}A = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^j \\ I^k \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| = \begin{Vmatrix} I^1A_1 & I^1A_2 & \cdots & I^1A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1}A_1 & I^{j-1}A_2 & \cdots & I^{j-1}A_n \\ I^kA_1 & I^kA_2 & \cdots & I^kA_n \\ I^{j+1}A_1 & I^{j+1}A_2 & \cdots & I^{j+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{k-1}A_1 & I^{k-1}A_2 & \cdots & I^{k-1}A_n \\ I^jA_1 & I^jA_2 & \cdots & I^jA_n \\ I^{k+1}A_1 & I^{k+1}A_2 & \cdots & I^{k+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^mA_1 & I^mA_2 & \cdots & I^mA_n \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \\ a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_n^{k-1} \\ a_1^j & a_2^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \tag{3.8}$$

Матрица элементарного преобразования второго типа. Для определённости предположим, что j–ая строчка умножается на число $\alpha \neq 0$. Матрица этого элементарного преобразования имеет следующий вид:

$$P_{\alpha j} = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ \alpha I^j \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{\alpha j} A = \left\| \begin{matrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ \alpha I^j \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{matrix} \right\| \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| = \begin{pmatrix} I^1 A_1 & I^1 A_2 & \cdots & I^1 A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1} A_1 & I^{j-1} A_2 & \cdots & I^{j-1} A_n \\ \alpha I^j A_1 & \alpha I^j A_2 & \cdots & \alpha I^j A_n \\ I^{j+1} A_1 & I^{j+1} A_2 & \cdots & I^{j+1} A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^m A_1 & I^m A_2 & \cdots & I^m A_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ \alpha a_1^j & \alpha a_2^j & \cdots & \alpha a_n^j \\ a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \tag{3.10}$$

Матрица элементарного преобразования третьего типа. Для определённости предположим, что к j–ой строчке матрицы прибавляется k–ая строчка, умноженная на произвольное число α, причём $j < k$. Матрица этого преобразования имеет следующий вид:

$$P_{j+\alpha k} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^j + \alpha I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^k \\ I^{k+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$P_{j+\alpha k}A = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^j + \alpha I^k \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^{k-1} \\ I^k \\ I^{k+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| =$$

$$= \begin{Vmatrix} I^1A_1 & I^1A_2 & \cdots & I^1A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1}A_1 & I^{j-1}A_2 & \cdots & I^{j-1}A_n \\ I^jA_1 + \alpha I^kA_1 & I^jA_2 + \alpha I^kA_2 & \cdots & I^jA_n + \alpha I^kA_n \\ I^{j+1}A_1 & I^{j+1}A_2 & \cdots & I^{j+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{k-1}A_1 & I^{k-1}A_2 & \cdots & I^{k_1}A_n \\ I^kA_1 & I^kA_2 & \cdots & I^kA_n \\ I^{k+1}A_1 & I^{k+1}A_2 & \cdots & I^{k+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^mA_1 & I^mA_2 & \cdots & I^mA_n \end{Vmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\
a_1^j + \alpha a_1^k & a_2^j + \alpha a_2^k & \cdots & a_n^j + \alpha a_n^k \\
a_1^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_n^{k-1} \\
a_1^k & a_2^k & \cdots & a_n^k \\
a_1^{k+1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_n^{k+1} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}. \quad \boxtimes \tag{3.12}
$$

Матрица элементарного преобразования четвертого типа. Элементарное преобразование четвёртого типа в отличие от рассмотренных выше элементарных преобразований первых трёх типов записывается квадратной матрицей $P^{jk} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и эта матрица умножается на матрицу A не слева как раньше, а справа

$$
A' = AP^{jk}. \tag{3.13}
$$

Докажем, что матрица P^{jk} при необременительном условии, что $j < k$, имеет следующий вид:

$$
P^{jk} = \|I_1, \cdots, I_{j-1}, I_k, I_j, \cdots, I_{k-1}, I_j, I_{k+1}, \cdots, I_n\| =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}. \tag{3.14}
$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$
AP^{jk} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} \|I_1, \cdots, I_k, \cdots, I_j, \cdots, I_n\| =
$$

$$
= \begin{Vmatrix}
A^1 I_1 & \cdots & A^1 I_k & \cdots & A^1 I_j & \cdots & A^1 I_n \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
A^m I_1 & \cdots & A^m I_k & \cdots & A^m I_j & \cdots & A^m I_n
\end{Vmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_j^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_j^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \qquad (3.15)
$$

М а т р и ц а э л е м е н т а р н о г о п р е о б р а з о в а н и я п я т о г о т и п а. Выпишем матрицу преобразования, в результате которого из матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ удаляется j–ая строчка. Матрица этого преобразования $P_{j-} \in \mathbb{C}^{(m-1)\times n}$ имеет следующий вид:

$$
P_{j-} = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix}. \qquad (3.16)
$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$
P_{j-}A = \begin{Vmatrix} I^1 \\ \vdots \\ I^{j-1} \\ I^{j+1} \\ \vdots \\ I^m \end{Vmatrix} \|A_1, A_2, \cdots, A_n\| =
$$

$$
= \begin{Vmatrix} I^1A_1 & I^1A_2 & \cdots & I^1A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{j-1}A_1 & I^{j-1}A_2 & \cdots & I^{j-1}A_n \\ I^{j+1}A_1 & I^{j+1}A_2 & \cdots & I^{j+1}A_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^mA_1 & I^mA_2 & \cdots & I^mA_n \end{Vmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & a_2^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a^{j+1} & a_2^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \quad \boxtimes \qquad (3.17)
$$