Лекция 9

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Различные уравнения прямой в пространстве

Уравнение прямой в векторной параметрической форме было получено нами в предыдущей лекции:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \tag{1.1}$$

Пусть в пространстве фиксирована общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и справедливы следующие разложения векторов по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Из равенств (1.1)–(1.3) вытекает следующее равенство:

$$(x - x_0 - lt)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - mt)\mathbf{e}_2 + (z - z_0 - nt)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}, \tag{1.4}$$

которое эквивалентно следующим трём равенствам:

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \quad l^2 + m^2 + n^2 > 0. \tag{1.5}$$

Определение 1. *Уравнения* (1.5) *называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве.*

Из уравнений (1.5) вытекает следующее уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{1.6}$$

причём если в этом равенстве знаменатель обращается в ноль, то и числитель тоже обращается в ноль. При этом все знаменатели в ноль обратится не могут, так как тогда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. А вот два знаменателя в ноль могут обратиться. Предположим, что это числа $l = m = 0$ и $n \neq 0$. Тогда

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Уравнения $x = x_0$ и $y = y_0$ определяют две пересекающиеся по прямой плоскости в пространстве.

Определение 2. *Уравнение* (1.6) *называется каноническим уравнением прямой в пространстве.*

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 1. *Уравнение прямой* (1.1) *эквивалентно уравнению*

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m}, \quad (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0. \tag{1.7}$$

Доказательство.

Пусть нам задано векторное параметрическое уравнение прямой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \Leftrightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a} \Rightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \Leftrightarrow [\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}],$$

причём $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$.

Пусть теперь нам задано уравнение (1.7) при указанном условии, что $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$. Пусть

$$\mathbf{r}_0 = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[[\mathbf{a}, \mathbf{m}], \mathbf{a}] = -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{m}]] =$$

$$= -\frac{1}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}\{\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) - \mathbf{m}(\mathbf{a}, \mathbf{a})\} = \mathbf{m},$$

поскольку по условию $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$. Тогда уравнение (1.7) эквивалентно следующему уравнению:

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \Leftrightarrow [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}.$$

Из последнего равенства вытекает, что векторы $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны, т. е. линейно зависимы. Следовательно, найдутся такие числа α и β, $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, что

$$\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \beta\mathbf{a} = \mathbf{0}. \tag{1.8}$$

Докажем, что $\alpha \neq 0$.

□ Действительно, в противном случае из (1.8) получаем равенство $\beta\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\beta \neq 0$. Следовательно, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, но вектор $\mathbf{a}$ является направляющим вектором прямой и поэтому $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. ⊠

Итак, из (1.8) приходим к следующему равенству:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}, \quad t = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для того чтобы уравнение*

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{m} \tag{1.9}$$

имело решение $\mathbf{r}$, *необходимо и достаточно*, *чтобы было выполнено равенство* $(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть уравнение (1.9) имеет решение $\mathbf{r}_0$, т. е. имеет место равенство $[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{m}$. Тогда по свойству векторного произведения векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ вектор

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \perp \mathbf{r}_0 \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \perp \mathbf{a}.$$

Но тогда

$$([\mathbf{r}_0, \mathbf{a}], \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow (\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие $(\mathbf{m}, \mathbf{a}) = 0$. Тогда как было доказано в теореме 1 уравнение (1.9) имеет решение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 := \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}.$$

Следствие доказано.

§ 2. Различные уравнения плоскости в пространстве

Дадим вывод векторного параметрического уравнения плоскости. Пусть π — это некоторая плоскость в пространстве. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — это два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости. Пусть O — это произвольная точка пространства и нам заданы радиус–вектор $\mathbf{r}_0$ фиксированной точки $M_0 \in \pi$ и радиус–вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки $M \in \pi$. Очевидно, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — это базис на плоскости и поэтому найдутся такие числа t, s, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} + s\mathbf{b}. \tag{2.1}$$

Заметим, что если точка M не лежит на плоскости π, то тройка векторов $\{\overrightarrow{M_0M}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ является не компланарной тройкой векторов и поэтому вектор $\overrightarrow{M_0M}$ разложить по базису на плоскости $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ <u>нельзя</u>, т. е. в этом случае равенство (2.1) не имеет место. Таким образом, векторное равенство (2.1) является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка $M(\mathbf{r})$ лежала на плоскости π.

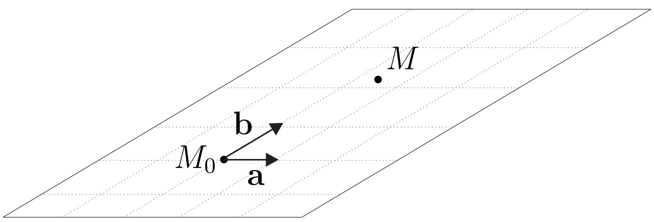

Рис. 1. Плоскость.

Определение 3. *Уравнение* (2.1) *называется векторным параметрическим уравнением плоскости в пространстве.*

Пусть в пространстве задана общая декартова система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть радиус–векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$ точек M и M_0 заданы своими разложениями по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{e}_1 + y_0\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3. \tag{2.2}$$

И заданы направляющие векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ плоскости π :

$$\mathbf{a} = l_1\mathbf{e}_1 + m_1\mathbf{e}_2 + n_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = l_2\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *В общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *векторное параметрическое уравнение плоскости* (2.1) *эквивалентно следующим уравнениям*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 & l_2 \\ y - y_0 & m_1 & m_2 \\ z - z_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4}$$

Доказательство.
Шаг 1. Из уравнений (2.1)–(2.3) вытекает векторное равенство

$$(x - x_0 - tl_1 - sl_2)\mathbf{e}_1 + (y - y_0 - tm_1 - sm_2)\mathbf{e}_2 + \\ + (z - z_0 - tn_1 - sn_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \tag{2.5}$$

Поскольку $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис в пространстве из (2.5) вытекают следующие три равенства:

$$x - x_0 - tl_1 - sl_2 = 0, \quad y - y_0 - tm_1 - sm_2 = 0, \quad z - z_0 - tn_1 - sn_2$$

или в форме одного равенства для столбцов

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Но тогда по свойствам определителя третьего порядка имеют место следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & l_1 & l_2 \\ y - y_0 & m_1 & m_2 \\ z - z_0 & n_1 & n_2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}.$$

Шаг 2. Теперь предположим, что имеет место равенство (2.4). Тогда найдутся такие числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, что имеет место следующее равенство

$$\alpha \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если предположить, что $\alpha = 0$, то из последнего равенства получим следующее:

$$\beta \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta| + |\gamma| > 0. \tag{2.6}$$

Докажем, что тогда справедливо следующее векторное равенство:

$$\beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad |\beta| + |\gamma| > 0. \tag{2.7}$$

□ Действительно, с одной стороны, (2.6) равносильно трём равенствам

$$\beta l_1 + \gamma l_2 = \beta m_1 + \gamma m_2 = \beta n_1 + \gamma n_2 = 0. \tag{2.8}$$

С другой стороны, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b} = \beta(l_1\mathbf{e}_1 + m_1\mathbf{e}_2 + n_1\mathbf{e}_3) + \gamma(l_2\mathbf{e}_1 + m_2\mathbf{e}_2 + n_2\mathbf{e}_3) = \\ = (\beta l_1 + \gamma l_2)\mathbf{e}_1 + (\beta m_1 + \gamma m_2)\mathbf{e}_2 + (\beta n_1 + \gamma n_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{2.9}$$

Но по определению плоскости векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, а значит, линейно независимы. Противоречие. Итак, $\alpha \neq 0$ и мы приходим к равенству

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad t = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad s = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

т. е. к параметрическому уравнению плоскости в координатах.

Теорема доказана.

Разложим определитель в левой части равенства (2.4) по первой строчке и получим следующее уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{2.10}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad B = -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Числа A, B и C, определенные равенствами* (2.11), *одновременно в ноль не обращаются.*

Доказательство.

Отметим, что по условию векторы $\mathbf{a} = \{l_1, m_1, n_1\}$ и $\mathbf{b} = \{l_2, m_2, n_2\}$ являются неколлинеарными. Предположим, что

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.12}$$

Если $l_1 = m_1 = n_1 = 0$, то вектор $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ и, следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Поэтому хотя бы одно из чисел l_1, m_1 и n_1 отлично от нуля. Пусть, например, $l_1 \neq 0$. Тогда, с одной стороны, из последнего равенства (2.12) приходим к равенствам

$$l_1 m_2 = l_2 m_1 \Leftrightarrow m_2 = \frac{l_2}{l_1} m_1 \Leftrightarrow \lambda := \frac{l_2}{l_1}, \quad l_2 = \lambda l_1, \quad m_2 = \lambda m_1. \qquad (2.13)$$

С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_2 l_1 = n_1 l_2 \Leftrightarrow n_2 = \frac{l_2}{l_1} n_1 = \lambda n_1. \qquad (2.14)$$

Из полученных равенств (2.13) и (2.14) вытекает векторное равенство $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, т. е. векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ коллинеарны. Противоречие.

Лемма доказана.

Уравнение (2.10) с учётом леммы 1 можно переписать в следующей форме:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0. \qquad (2.15)$$

Определение 4. *Уравнение* (2.15) *называется общим уравнением плоскости в пространстве.*

Теорема 3. *Уравнение плоскости в форме* (2.4) *эквивалентно общему уравнению плоскости в форме* (2.15).

Доказательство.

Осталось доказать, что из общего уравнения плоскости в форме (2.15) вытекает уравнение вида (2.4). Поскольку $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, то существует по меньшей мере одна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, удовлетворяющая общему уравнению плоскости (2.15), т. е. справедливо равенство

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Поэтому общее уравнение плоскости примет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Без ограничения общности предположим, что $A \neq 0$. Введём вещественные параметры t и s следующим не однозначным образом:

$$y - y_0 = t, \quad z - z_0 = s, \qquad (2.16)$$

тогда

$$x - x_0 = \beta \cdot t + \gamma \cdot s, \quad \beta := -\frac{B}{A}, \quad \gamma := -\frac{C}{A}. \qquad (2.17)$$

Равенства (2.16) и (2.17) можно записать в виде одного равенства для соответствующих столбцов:

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (2.18)$$

из которого вытекают следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \beta & \gamma \\ y-y_0 & 1 & 0 \\ z-z_0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти равенства совпадают с равенствами (2.4) при

$$l_1=\beta, \quad m_1=1, \quad n_1=0, \quad l_2=\gamma, \quad m_2=0, \quad n_2=1,$$

т. е. в частности, направляющие векторы плоскости имеют следующий вид:

$$\mathbf{a} = -\frac{B}{A}\cdot\mathbf{e}_1 + 1\cdot\mathbf{e}_2 + 0\cdot\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{b} = -\frac{C}{A}\cdot\mathbf{e}_1 + 0\cdot\mathbf{e}_2 + 1\cdot\mathbf{e}_3.$$

Можно проверить, что эти два векторы линейно независимые.

Теорема доказана.

§ 3. Нормальное уравнение плоскости

Дадим определение.

Определение 5. *Нормальным уравнением плоскости в общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *называется следующее уравнение*:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ *— это радиус–вектор точки* M, *лежащей на данной плоскости.*

Корректность определения. Прежде всего нужно проверить корректность этого определения. Докажем, что уравнение (3.1) действительно описывает плоскость. Пусть

$$\mathbf{r}_0 := \frac{\mathbf{n}}{(\mathbf{n},\mathbf{n})}D. \tag{3.2}$$

Очевидно, что

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = D.$$

Поэтому уравнение (3.1) эквивалентно следующему уравнению:

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \Leftrightarrow (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.$$

Вектор $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$, где точка M_0 — это некоторая фиксированная точка. Теперь заметим, что конец M направленного отрезка $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на плоскости, тогда и только тогда, когда направленный отрезок $\overrightarrow{M_0M}$ ортогонален вектору нормали к плоскости. В данном случае — это вектор $\mathbf{n}$.

Итак, в любой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вектор $\mathbf{n}$ в нормальном уравнении плоскости (3.1) — это вектор нормали к плоскости.

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть *взаимный базис* к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве.

Взаимный базис. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — это правая тройка некомпланарных векторов в пространстве. Отметим, что смешанное произведение $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) > 0$. Введём так называемый взаимный базис в пространстве $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, определённый формулами

$$\mathbf{f}_1 := \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_2 := \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{f}_3 := \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

1. Прежде всего докажем, что векторы $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, образуют базис.

$\square$. Действительно, рассмотрим уравнение

$$\alpha\mathbf{f}_1 + \beta\mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{f}_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \beta[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \gamma[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно обе части последнего уравнения на векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, с учётом свойств векторных произведений получим равенства

$$\alpha(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \beta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0, \quad \gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Следовательно, векторы семейства $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ образуют базис в пространстве. $\boxtimes$

2. Скалярно умножая векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ на векторы семейства $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ получим следующие равенства:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1) = 1, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_3) = 0; \tag{3.3}$$

$$(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2) = 1, \quad (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_3) = 0; \tag{3.4}$$

$$(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_3) = 1. \tag{3.5}$$

3. Векторно умножая между собой векторы взаимного базиса $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ получим следующие равенства:

$$[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = \frac{\mathbf{e}_3}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = \frac{\mathbf{e}_1}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = \frac{\mathbf{e}_2}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}.$$

$\square$ Действительно, докажем, например, первое равенство. Справедливы следующие равенства:

$$[[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] = \{\mathbf{x} := [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]\} = [\mathbf{x}, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]] = \mathbf{e}_3(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) - \mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) =$$
$$= \{(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) = 0\} = \mathbf{e}_3([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3. \quad \boxtimes \tag{3.6}$$

4. В том случае, когда векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образуют правый ортонормированный базис имеют место равенства

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Лемма 2. *Если* $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — *это взаимный базис к базису* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *и* $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_1 + a_y\mathbf{e}_2 + a_z\mathbf{e}_3$, *то*

$$a_x = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_1), \quad a_y = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_2), \quad a_z = (\mathbf{a}, \mathbf{f}_3).$$

Доказательство.

Для доказательства нужно воспользоваться линейностью скалярного произведения по первому аргументу и формулами из второго пункта.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *В произвольной общей декартовой системе координат* $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0$$

эквивалентно нормальному уравнению плоскости

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$$

с некоторым вектором нормали к плоскости $\mathbf{n}$.

Доказательство.

Шаг 1. Сначала рассмотрим случай прямоугольной декартовой системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Введём вектор $\mathbf{n}$ с координатами (A, B, C) :

$$\mathbf{n} = A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2 + C\mathbf{e}_3.$$

Тогда

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{n}, \mathbf{r}) + D = 0,$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ — это радиус–вектор произвольной точки плоскости с координатами (x, y, z). Это выполнено в силу доказанного нами ранее представления скалярного произведения векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе.

Шаг 2. Теперь мы рассмотрим случай общей декартовой системы координат. В этом случае тройку векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ будем считать произвольным базисом.

1. Пусть в рассматриваемой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задано уравнение

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$$

и радиус–вектор $\mathbf{r}$ произвольной точки задается задаётся своим разложением по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Заметим, что в силу линейности скалярного произведения по первому аргументу справедливо равенство

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n})x + (\mathbf{e}_2, \mathbf{n})y + (\mathbf{e}_3, \mathbf{n})z.$$

Итак,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0,$$

где
$$A=(\mathbf{e}_1,\mathbf{n}),\quad B=(\mathbf{e}_2,\mathbf{n}),\quad C=(\mathbf{e}_3,\mathbf{n}).$$

2. Пусть в общей декартовой системе координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ нам задана плоскость общим уравнением
$$Ax+By+Cz+D=0,\quad A^2+B^2+C^2>0.$$
Найдём такой вектор $\mathbf{n}$, чтобы были справедливы следующие равенства:
$$(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)=A,\quad (\mathbf{n},\mathbf{e}_2)=B,\quad (\mathbf{n},\mathbf{e}_3)=C.$$
Будем искать вектор $\mathbf{n}$ в виде разложения по взаимному базису $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}$ к базису $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$:
$$\mathbf{n}=A\mathbf{f}_1+B\mathbf{f}_2+C\mathbf{f}_3.$$
Умножая последовательно это равенство на $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ мы получим следующие равенства:
$$(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)=A,\quad (\mathbf{n},\mathbf{e}_2)=B,\quad (\mathbf{n},\mathbf{e}_3)=C.$$
Итак,
$$\mathbf{n}=\frac{A[\mathbf{e_2},\mathbf{e}_3]+B[\mathbf{e_3},\mathbf{e}_1]+C[\mathbf{e_1},\mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}.$$
Но тогда имеют место следующие выражения:
$$Ax+By+Cz+D=0\Rightarrow(\mathbf{n},\mathbf{e}_1)x+(\mathbf{n},\mathbf{e}_2)y+(\mathbf{n},\mathbf{e}_3)z+D=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(\mathbf{n},\mathbf{r})+D=0,\quad \mathbf{r}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2+z\mathbf{e}_3.$$

Теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 4 можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 5. *Для того чтобы две плоскости, заданные общими уравнениями*
$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\quad \textit{и}\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$
в некоторой общей декартовой системе координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, *были параллельны или совпадали необходимо и достаточно, чтобы*
$$A_1=\lambda A_2,\quad B_1=\lambda B_2,\quad C_1=\lambda C_2\quad \textit{при}\quad \lambda\neq 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис с базисом $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$.

Необходимость. Пусть плоскости параллельны. Уравнения плоскостей можно записать в следующем нормальном виде:
$$(\mathbf{r},\mathbf{n}_1)=D_1,\quad (\mathbf{r},\mathbf{n}_2)=D_2,$$
$$\mathbf{n}_1=A_1\mathbf{f}_1+B_1\mathbf{f}_2+C_1\mathbf{f}_3,\quad \mathbf{n}_2=A_2\mathbf{f}_1+B_2\mathbf{f}_2+C_2\mathbf{f}_3$$

Векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — это векторы нормалей к соответствующим плоскостям. В силу параллельности плоскостей вектора нормалей коллинеарны. Итак, найдется такое число $\lambda \neq 0$, что

$$\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2 \Leftrightarrow (A_1 - \lambda A_2)\mathbf{f}_1 + (B_1 - \lambda B_2)\mathbf{f}_2 + (C_1 - \lambda C_2)\mathbf{f}_3 = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2.$$

Достаточность. Пусть $A_1 = \lambda A_2, \quad B_1 = \lambda B_2, \quad C_1 = \lambda C_2$. Тогда из тех же формул для векторов нормалей получим равенство $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_2$. Это означает, что плоскости параллельны.

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Для того чтобы вектор $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$ был компланарен плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство.

Запишем уравнение плоскости в нормальном виде

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D, \quad \mathbf{n} = A\mathbf{f}_1 + B\mathbf{f}_2 + C\mathbf{f}_3,$$

а вектор $\mathbf{a}$ задан разложением по базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3.$$

Искомое необходимое и достаточное условие — это равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = 0. \tag{3.8}$$

Осталось воспользоваться линейностью скалярного произведения по обоим аргументам и доказанными ранее равенствами (3.3)–(3.5) и получить равенство

$$(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n. \tag{3.9}$$

Итак,из равенств (3.8) и (3.9) вытекает условие (3.7).

Лемма доказана.

Непосредственным следствием этой леммы является следующее утверждение:

Лемма 4. *Два из возможных неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которые являются направляющими векторами плоскости, заданной общим уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A \neq 0,$$

в некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, имеют следующий вид:

$$\mathbf{a} = -B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = -C\mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + A\mathbf{e}_3. \tag{3.10}$$

Доказательство.

Непосредственно можно проверить, что векторы (3.10) удовлетворяют равенству (3.7).

□ Действительно, имеем $\mathbf{a} = \{-B, A, 0\}$ и $\mathbf{b} = \{-C, 0, A\}$. Справедливы следующие равенства:

$$-AB + AB + 0C = 0 \quad \text{и} \quad -AC + 0B + AC = 0. \quad \boxtimes$$

Теперь рассмотрим их линейную комбинацию

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (-\alpha B - \beta C)\mathbf{e}_1 + \alpha A\mathbf{e}_2 + \beta A\mathbf{e}_3,$$

но тогда равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

возможно, тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$. Значит, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы при $A \neq 0$.

Лемма доказана.

ПРИМЕР 1. Нужно составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и компланарной вектору $\mathbf{a} = \{l, m, n\}$, при условии что направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарен вектору $\mathbf{a}$. Очевидно, в качестве точки M_0 можно взять точку M_1, а в качестве вектора $\mathbf{b}$ можно взять вектор, порождённый направленным отрезком $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тогда уравнение следующее (см. (2.4)):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

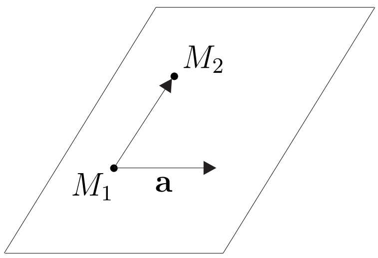

Рис. 2. Плоскость, проходящая через две точки и не коллинеарный им вектор.

ПРИМЕР 2. Провести плоскость через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Положим $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{M_1M_3}$. Тогда уравнение следующее (см. (2.4)):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

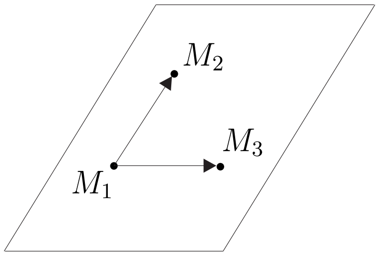

Рис. 3. Плоскость, проходящая через три точки.

П Р И М Е Р 3. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Положим $M_0 = M_1$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ (см. (1.6)):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

§ 4. Взаимное расположение двух прямых

Пусть нам заданы две прямые:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 \tau, \quad \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \quad t, \tau \in \mathbb{R}. \qquad (4.1)$$

Из геометрических соображений вытекает наличие четырёх случаев в пространстве, в отличие от трёх случаев на плоскости: 1. прямые совпадают, 2. прямые параллельны, 3. прямые пересекаются, 4. прямые скрещиваются, т. е. не параллельны и не пересекаются.

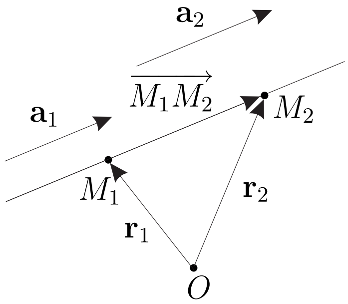

Рис. 4. Прямые совпадают.

П е р в ы й с л у ч а й. Прямые совпадают, если уравнения (4.1) являются эквивалентными. Эти уравнения эквивалентны, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны и вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ коллинеарен обеим прямым:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] = \mathbf{0}.$$

Второй случай. Прямые параллельны, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны, но вектор $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ не коллинеарен обеим прямым:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1] \neq \mathbf{0}.$$

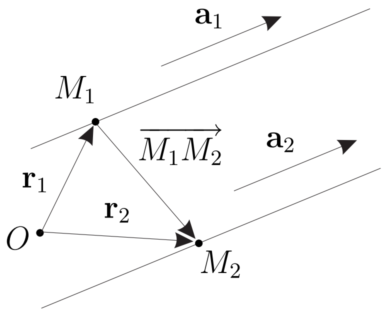

Рис. 5. Прямые параллельны.

Третий случай. Прямые пересекаются, т. е. в частности лежат в одной некоторой плоскости, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны, а векторы $\mathbf{r_1} - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ компланарны:

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0.$$

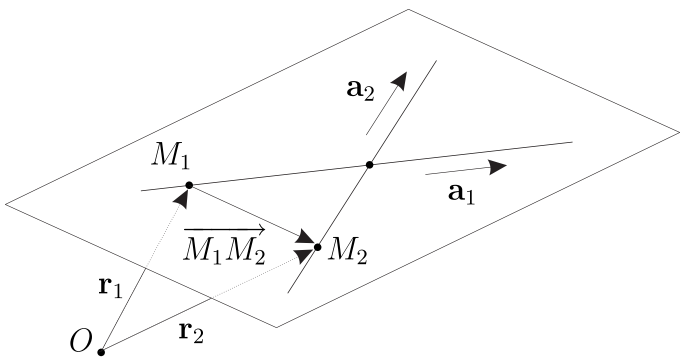

Рис. 6. Прямые пересекаются.

Четвёртый случай. Прямые скрещиваются, если направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны и векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не компланарны:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) \neq 0.$$

Замечание 1. Для первых трёх случаев имеет место равенство $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$, а для третьего случая $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \neq 0$.

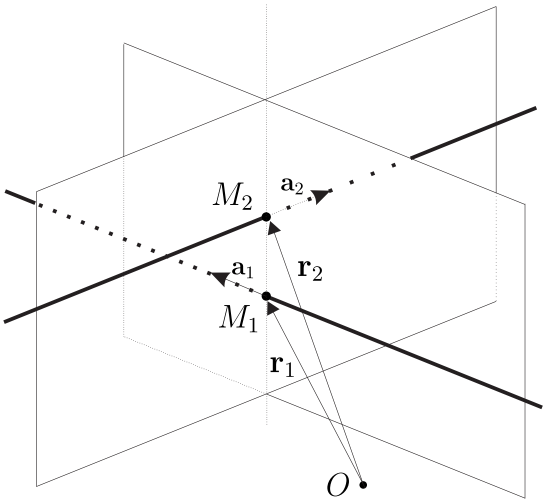

Рис. 7. Скрещивающиеся прямые.

§ 5. Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть сначала плоскости заданы общими уравнениями в общей декартовой системе координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (5.1)$$

$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Пусть эти плоскости пересекаются. Условие того, чтобы эти плоскости пересекались будет получено вместе с координатами направляющего вектора прямой, по которой пересекаются плоскости.

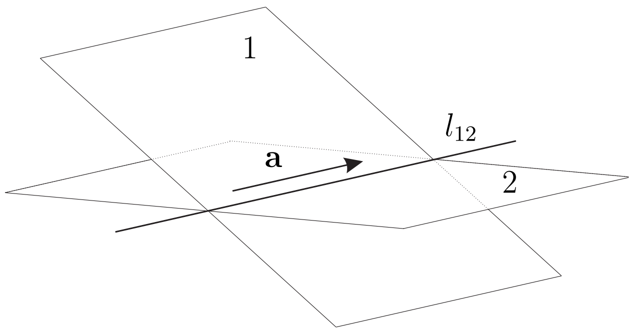

Рис. 8. Пересекающиеся плоскости.

Ясно, что направляющий вектор искомой прямой пересечения двух плоскостей может быть найден как такой вектор

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3,$$

который одновременно компланарен и первой и второй плоскостям, т. е. в силу леммы 3 может быть найден как решение следующей системы двух уравнений:

$$A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0, \quad A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0. \tag{5.2}$$

Рассмотрим сначала следующий равный нулю определитель:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

который равен нулю, поскольку у него две одинаковые строчки. Разложим его по первой строчке и получим равенство

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

Теперь рассмотрим следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{5.5}$$

у которого тоже две одинаковые строчки. Разложим его по первой строчке и получим следующее равенство:

$$A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.6}$$

Значит, направляющий вектор искомой прямой равен

$$\mathbf{a} = \{l, m, n\}, \quad l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{5.7}$$

И необходимое и достаточное условие пересечения данных плоскостей имеет следующий вид:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 > 0. \tag{5.8}$$

□ Действительно, как мы установили в теореме 5 для того чтобы плоскости (5.1) были параллельны или совпадали, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие равенства

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1, \quad \lambda \neq 0.$$

Но тогда
$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Значит, плоскости пересекаются, тогда и только тогда, когда выполнено неравенство в формуле (5.8). ⊠

Далее осталось найти какую–либо точку пересечения плоскостей. Действительно, без ограничения общности можно считать, что
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда систему уравнений (5.1) можно переписать в следующем виде:
$$A_1x + B_1y = -C_1z - D_1, \quad A_2x + B_2y = -C_2z - D_2. \tag{5.9}$$

Эта система уравнений имеет бесконечное множество решений и пусть $M_0(x_0, y_0 z_0)$ — это одно из решений, тогда уравнение прямой имеет следующий вид:
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{5.10}$$

§ 6. Полупространства, определяемые плоскостью

Справедлива следующая теорема, доказательство которой в точности повторяет доказательства соответствующих утверждений из предыдущей лекции:

Теорема 6. *Пусть относительно общей декартовой системы координат задано уравнение плоскости*
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Тогда для координат x, y, z точки $M(x, y, z)$, лежащих по одну сторону от плоскости, выполнено неравенство
$$Ax + By + Cz + D > 0,$$

а для координат точек $M(x, y, z)$, лежащих по другую сторону от плоскости, выполнено неравенство
$$Ax + By + Cz + D < 0.$$

Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ направлен в сторону «положительного» полупространства $Ax + By + Cz + D > 0$.

§ 7. Некоторые метрические задачи

Справедливо следующее утверждение:

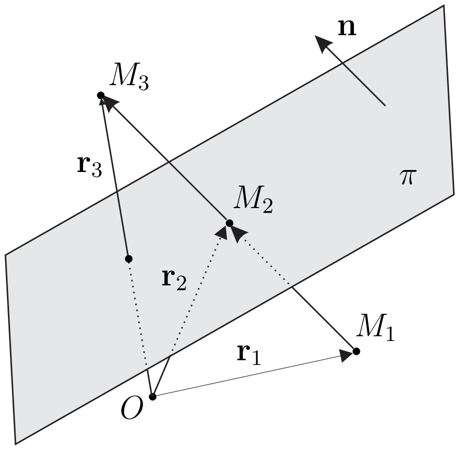

Рис. 9. К теореме 7.

Т е о р е м а 7. *Пусть в пространстве даны точка* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *и плоскость, заданная нормальным уравнением* $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. *Тогда*

1. *радиус–вектор* $\mathbf{r}_2$ *точки* M_2, *являющейся ортогональной проекцией точки* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *на плоскость* π, *выражается формулой*
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 - \frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}; \tag{7.1}$$
2. *расстояние от точки* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *до плоскости* π *выражается формулой*
$$d(M_1, \pi) = \frac{|(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D|}{|\mathbf{n}|}; \tag{7.2}$$
3. *Радиус вектор* $\mathbf{r}_3$ *точки* M_3, *симметричной точке* $M_1(\mathbf{r}_1)$ *относительно плоскости* π, *выражается формулой*
$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 - 2\frac{(\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) + D}{(\mathbf{n}, \mathbf{n})}\mathbf{n}. \tag{7.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В точности повторяет доказательство результата теоремы **??** шестой лекции.

Т е о р е м а д о к а з а н а.