Лекция 1

МАТРИЦЫ

§ 1. Матрицы

На этой лекции мы введём основное для всего курса аналитической геометрии понятие матрицы. Необходимость введения понятия матрицы обусловлена, например, компактностью записи линейных уравнений. Так система трех уравнений относительно трех неизвестных

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{1.1}$$

может быть записана в следующей матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Для того чтобы найти решение системы уравнений (1.1) нужно рассмотреть так называемую расширенную матрицу системы (1.1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right). \tag{1.3}$$

В следующей лекции мы детально изучим этот вопрос. Дадим определение матрицы размера $m \times n$.

Определение 1. *Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, на пересечении которых располагаются элементы матрицы.*

Для обозначения матриц используется различные варианты. Рассмотрим все основные из них.

Обозначение 1. Матрица $A = (a_k^j)_n^m$. В этом обозначении верхний индекс j указывает на номер строчки, где располагается элемент a_k^j, а нижний индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a_k^j:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & k & & & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
j & * & * & a_k^j & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array} \tag{1.4}$$

О б о з н а ч е н и е 2. Матрица $A = (a_{jk})_{m,n}$. Здесь первый индекс j указывает на номер строчки матрицы, где расположен элемент a_{jk}, а второй индекс k указывает на номер столбца, где располагается элемент a_{jk} :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & k & & & & & \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
j & * & * & a_{jk} & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * & * & * & * & *
\end{array} \tag{1.5}$$

О б о з н а ч е н и е 3. *Развернутая форма записи.* Матрицу A можно записать в развернутой форме двумя способами — либо с одни нижним и одним верхним либо с двумя нижними индексами:

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^j & \cdots & a_k^j & \cdots & a_n^j \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Особую роль играют матрицы размеров $m \times 1$ и $1 \times n$. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 2. *Матрицы размера $m \times 1$ называются столбцами длины m, а матрицы размера $1 \times n$ называются строчками длины n.*

О б о з н а ч е н и е. Для матриц–столбцов и матриц–строчек используются следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^j \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_1, & \cdots, & a_k, & \cdots, & a_n \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Отметим, что удобно (и важно!) использовать верхний индекс для нумерации элементов столбца и нижний индекс для нумерации элементов строчки. В связи с тем, что мы ввели матрицу–столбец и матрицу–строчку, то для матрицы $A = (a_k^j)_n^m$ используются еще две важные формы записи матриц.

О б о з н а ч е н и е 4. *Запись матрицы через столбцы.* Эта форма записи имеет следующий вид:

$$A = \| \, A_1 | \cdots | A_k | \cdots | A_n \, \| , \tag{1.8}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^j \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^j \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^j \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

О б о з н а ч е н и е 5. *Запись матрицы через строчки.* Эта форма записи матрицы имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$$A^j = \begin{pmatrix} a_1^j & \cdots & a_k^j & \cdots & a_n^j \end{pmatrix}, \quad A^m = \begin{pmatrix} a_1^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Обсудим теперь вопрос: *какие элементы могут составлять матрицу*? Ответ — *абсолютно любые*. Чаще всего элементами матрицы являются вещественные или комплексные числа. Например, в квантовой механике в теории *спина электрона* широко используются так называемые матрицы В. Паули, имеющие следующий вид:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

Однако возможны и «экзотические» ситуации, когда элементами матрицы могут быть не только числа но и *операторы*, например, оператор дифференцирования:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & d/dx \\ d/dx & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где id — это так называемый единичный оператор, который действует на функцию $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\mathrm{id}\, f(x) = f(x),$$

а оператор d/dx — это оператор, который действует на дифференцируемую функцию $f(x)$ следующим образом:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x).$$

Теперь мы рассмотрим еще один способ записи матриц.

Обозначение 6. *Запись матрицы через блоки — блочные матрицы.* Один из примеров блочной записи матриц:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ \hline a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\|,$$

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad A_2^1 = \begin{pmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \end{pmatrix}, \quad A_1^2 = (a_1^3, a_2^3), \quad A_2^2 = a_3^3.$$

Отметим, что известный физик П. А. М. Дирак при рассмотрении релятивистской теории электрона ввёл следующие блочные 4×4 матрицы:

$$\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O \\ \hline O & -\sigma_0 \end{array} \right\|, \quad \gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O \end{array} \right\|, \tag{1.15}$$

$$\gamma_2 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O \end{array} \right\|, \quad \gamma_3 = \left\| \begin{array}{c|c} O & \sigma_3 \\ \hline -\sigma_3 & O \end{array} \right\|, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где матрицы В. Паули σ_0, σ_1, σ_2 и σ_3 размера 2×2 определены равенствами (1.12) и (1.13). Таким образом, в развернутой форме записи 4×4 матрицы γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 имеют следующий вид:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1.18)$$

где мы использовали правило умножения матрицы на число для нахождения 2×2 матриц $-\sigma_0$, $-\sigma_1$, $-\sigma_2$ и $-\sigma_3$, которое мы детально обсудим в следующем разделе.

Рассмотрим теперь матрицы частного вида, широко использующиеся в дальнейшем.

Квадратная матрица. Эта матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, т. е. матрица имеет следующий вид $A = (a_k^j)_n^n$ или в развернутой форме записи

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Элементы $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ называются главной диагональю квадратной матрицы A.

Нулевая матрица. Это матрица A (размера $m \times n$), элементами которой являются число нуль. Например, такая матрица размера 3×5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является нулевой.

Диагональная матрица. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю. Например, матрица П. А. М. Дирака γ_0 является диагональной

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что диагональной матрицей является и нулевая матрица. Например, такая

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След квадратной матрицы. Пусть задана квадратная матрица $A = (a_k^j)_n^n$. Тогда ее следом называется следующая величина:

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n, \qquad (1.19)$$

т.е. след квадратной матрицы — это сумма слагаемых, расположенных на главной диагонали матрицы. Заметим, что все 4×4 матрицы П. А.

М. Дирака γ_0, γ_1, γ_2 и γ_3 обладают важным свойством — их следы равны нулю! Матрицы 2×2 В. Паули σ_1, σ_2 и σ_3 тоже имеют нулевой след, а вот матрица В. Паули σ_0 имеет след равный двум.

§ 2. Сложение матриц и умножение матриц на числа

Пусть $A = \{a_k^j\}_n^m$ — матрица размера $m\times n$, состоящая из вещественных или комплексных чисел. Будем использовать следующее обозначение:

$$\{A\}_k^j := a_k^j. \tag{2.1}$$

Фигурные скобки в этом определении означают операцию «извлечения элемента из матрицы». Сначала дадим определение равных матриц.

Определение 3. *Две матрицы A и B одинакового размера $m\times n$ называются равными, если $\{A\}_k^j = \{B\}_k^j$.*

Дадим определение операции умножения матрицы на число.

Определение 4. *Произведением вещественного или комплексного числа α на матрицу $A = \{a_k^j\}_n^m$ называется матрица того же размера $B = \{b_k^j\}_n^m$, элементы которой равны $b_k^j = \alpha a_k^j$.*

$$\alpha\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \cdots & \alpha a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_1^m & \cdots & \alpha a_n^m \end{pmatrix}.$$

Определение 5. *Суммой двух матриц одного и того же размера $A = (a_k^j)_n^m$ и $B = (b_k^j)_n^m$ называется матрица того же размера $C = (c_k^j)_n^m$, элементы которой равны $c_k^j = a_k^j + b_k^j$.*

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & \cdots & b_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1+b_1^1 & \cdots & a_n^1+b_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m+b_1^m & \cdots & a_n^m+b_n^m \end{pmatrix}.$$

С учетом обозначения (2.1) операции умножения матрицы на число и сложения матриц одинакового размера можно записать в следующих формах:

$$\{\alpha A\}_k^j = \alpha\{A\}_k^j, \quad \{A+B\}_k^j = \{A\}_k^j + \{B\}_k^j \tag{2.2}$$

для всех $j = \overline{1,m}$ и $k = \overline{1,n}$.

Сложение матриц одного размера и умножение матриц на числа (вещественные или комплексные) обладают набором из восьми свойств, которые мы сейчас последовательно сформулируем и докажем. Все матрицы размера $m\times n$, состоящие из вещественных чисел мы будем для удобства обозначать как $\mathbb{R}^{m\times n}$, а состоящие из комплексных чисел будем обозначать как $\mathbb{C}^{m\times n}$. Заметим, что имеет место теоретико–множественное вложение $\mathbb{R}^{m\times n}\subset\mathbb{C}^{m\times n}$.

Пусть $A, B, C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ — фиксированные матрицы, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ — фиксированные комплексные числа.

Свойство 1. *Коммутативность сложения матриц.* Это свойство означает, что $A + B = B + A$.

□ Действительно, имеет место цепочка равенств

$$\{A + B\}_k^j = \{A\}_k^j + \{B\}_k^j = \{B\}_k^j + \{A\}_k^j = \{B + A\}_k^j. \tag{2.3}$$

Здесь мы воспользовались коммутативностью сложения комплексных чисел. ⊠

Свойство 2. *Ассоциативность сложения матриц.* Это свойство означает, что $(A + B) + C = A + (B + C)$.

□ Действительно, справедлива цепочка равенств

$$\{(A + B) + C\}_k^j = \{A + B\}_k^j + \{C\}_k^j = (\{A\}_k^j + \{B\}_k^j) + \{C\}_k^j = \\ = \{A\}_k^j + (\{B\}_k^j + \{C\}_k^j) = \{A\}_k^j + \{B + C\}_k^j = \\ = \{A + (B + C)\}_k^j. \tag{2.4}$$

Здесь мы воспользовались ассоциативностью сложения комплексных чисел. ⊠

Свойство 3. *Существование нулевой матрицы.* Существует такая матрица, которая обозначается как $O \in \mathbb{C}^{m\times n}$, что $A + O = A$.

□ Пусть O — это нулевая матрица размера $m \times n$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\{A + O\}_k^j = \{A\}_k^j + \{O\}_k^j = \{A\}_k^j + 0 = \{A\}_k^j. \quad ⊠ \tag{2.5}$$

Свойство 4. *Существование обратной матрицы по отношению к операции сложения матриц.* Свойство означает, что для всякой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ определена такая матрица $A' \in \mathbb{C}^{m\times n}$, что $A + A' = O$, где O — нулевая матрица размера $m \times n$.

□ Действительно, для заданной матрицы $A = (a_k^j)_n^m \in \mathbb{C}^{m\times n}$ в качестве матрицы $A' \in \mathbb{C}^{m\times n}$ возьмём такую матрицу, что

$$\{A'\}_k^j := -\{A\}_k^j \Rightarrow \{A + A'\}_k^j = \{A\}_k^j + \{A'\}_k^j = \{A\}_k^j - \{A\}_k^j = 0. \quad ⊠ \tag{2.6}$$

Свойство 5. *Свойство числа* $1 \in \mathbb{R}$. Свойство заключается в том, что $1 \cdot A = A$.

□ Действительно, справедливы равенства

$$\{1A\}_k^j = 1\{A\}_k^j = \{A\}_k^j. \quad ⊠ \tag{2.7}$$

Свойство 6. *Ассоциативность умножения на числа.* Свойство заключается в том, что $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

□ Действительно, справедливы равенства

$$\{\alpha(\beta A)\}_k^j = \alpha\{\beta A\}_k^j = \alpha(\beta\{A\}_k^j) = (\alpha\beta)\{A\}_k^j = \{(\alpha\beta)A\}_k^j. \tag{2.8}$$

Здесь мы воспользовались ассоциативностью умножения комплексных чисел. ⊠

Свойство 7. *Дистрибутивность относительно сложения матриц*. Свойство означает, что $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{\alpha(A+B)\}_k^j=\alpha\{A+B\}_k^j=\alpha\left(\{A\}_k^j+\{B\}_k^j\right)= \\ =\alpha\{A\}_k^j+\alpha\{B\}_k^j=\{\alpha A\}_k^j+\{\alpha B\}_k^j=\{\alpha A+\alpha B\}_k^j. \quad (2.9)$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью комплексных чисел относительно сложения. ⊠

Свойство 8. *Дистрибутивность относительно сложения чисел*. Свойство означает, что $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{(\alpha+\beta)A\}_k^j=(\alpha+\beta)\{A\}_k^j=\alpha\{A\}_k^j+\beta\{A\}_k^j= \\ =\{\alpha A\}_k^j+\{\beta A\}_k^j=\{\alpha A+\beta A\}_k^j. \quad (2.10)$$

Здесь мы воспользовались дистрибутивностью комплексных чисел относительно сложения. ⊠

В дальнейшем в курсе «Линейная алгебра» будет введено понятие абстрактного *линейного пространства*, в котором определены две операции — сложения элементов и умножения элемента на число (вещественное или комплексное), которые должны удовлетворять этим восьми свойствам. В связи с этим понятием мы будем называть операции сложения матриц и умножения матриц на числа (вещественные или комплексные) *линейными операциями*.

Заметим, что следствием рассмотренных свойств операций над матрицами являются некоторые несложные утверждения, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

Свойство 9. Из равенства $A+B=A$ вытекает, что $B=O$ — нулевая матрица.

□ Действительно, имеем

$$\{A\}_k^j=\{A+B\}_k^j=\{A\}_k^j+\{B\}_k^j\Leftrightarrow\{B\}_k^j=0. \quad ⊠$$

Свойство 10. Обратная матрица A' из свойства 4 единственна.

□ Действительно, пусть существуют две матрицы $B_1, B_2\in\mathbb{C}^{m\times n}$ такие, что

$$A+B_1=A+B_2=O\Rightarrow B_1=B_1+O=B_1+(A+B_2)= \\ =(B_1+A)+B_2=(A+B_1)+B_2=O+B_2=B_2. \quad ⊠ \quad (2.11)$$

Свойство 11. $nA=A+A+\cdots+A$.

□ Доказательство проведем по индукции. Действительно, в силу свойств 5 и 8 справедливо равенство

$$2A=(1+1)A=1A+1A=A+A.$$

Пусть $n \geqslant 3$ и для $n-1$ утверждение доказано. Тогда в силу свойств 5 и 8 справедливо следующее равенство:

$$nA = (n-1+1)A = (n-1)A + 1A = (n-1)A + A = A + A + \cdots + A. \quad \boxtimes$$

Свойство 12. Обратная относительно операции сложения матрица $A' = (-1)A$.

□ Действительно, справедливы равенства

$$\{A + (-1)A\}_k^j = A_k^j + \{(-1)A\}_k^j = \\ = \{A\}_k^j + (-1)\{A\}_k^j = \{A\}_k^j - \{A\}_k^j = 0 \Rightarrow A' = (-1)A. \quad (2.12)$$

В силу единственности (см. свойство 10) обратной матрицы A' относительно операции сложения матриц приходим к утверждению. ⊠

§ 3. Умножение матриц

Зачем нам нужно умножать матрицы? Прежде всего для того, чтобы записать произвольную линейную систему уравнений в виде произведения матриц. Например, система трех уравнений (1.1) записана при помощи умножения матриц в виде (1.2).

Умножение матриц основано на правиле умножения «строчка на столбец». Именно,

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix} := a_1 b^1 + a_2 b^2 + \cdots + a_n b^n.$$

Сразу же отметим, что мы можем умножить строчку на столбец одинаковых длин!

Теперь сформулируем общее определение умножения матриц. Пусть матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{C}^{p \times n}$.

Определение 6. *Произведением матрицы A размера $m \times p$ на матрицу B размера $p \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, имеющая следующий вид*:

$$C = (c_k^j)_n^m \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad c_k^j = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s. \quad (3.1)$$

Наблюдение 1. Давайте раскроем знак суммы в формуле (3.1) и получим следующее равенство:

$$c_k^j = a_1^j b_k^1 + a_2^j b_k^2 + \cdots + a_p^j b_k^p = (a_1^j, a_2^j, \cdots, a_p^j) \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix},$$

где мы воспользовались правилом умножения «строчка на столбец». Заметим, чтобы получить элемент c_k^j, расположенный на пересечении j–й строчки и k–го столбца нужно умножить j–ю строчку матрицы A на k–й столбец матрицы B :

$$
\begin{pmatrix}
c_1^1 & \cdots & c_k^1 & \cdots & c_n^1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_1^j & \cdots & c_k^j & \cdots & c_n^j \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_1^m & \cdots & c_k^m & \cdots & c_n^m
\end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_s^1 & \cdots & a_p^1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^j & \cdots & a_s^j & \cdots & a_p^j \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_p^m & \cdots & a_p^m
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_1^1 & \cdots & b_k^1 & \cdots & b_n^1 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_1^s & \cdots & b_k^s & \cdots & b_n^s \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_1^p & \cdots & b_k^p & \cdots & b_n^p
\end{pmatrix}. \tag{3.2}
$$

Наблюдение 2. Умножить матрицу A на матрицу B можно тогда и только тогда, когда длина строчек матрицы A совпадает с длиной столбцов матрицы B или, что равносильно, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Пример. Вычисли следующие произведения матриц:

$$
(1,1,1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + \cdot 1 = 3, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Как мы видим результат произведения двух матриц (при условии, что их можно перемножить как в одном порядке, так и в противоположном) существенно зависит от порядка произведения матриц.

Коммутатор матриц. Пусть нам заданы две квадратные матрицы одинакового размера $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Дадим определение.

Определение 7. *Коммутатором квадратных матриц* $A, B \in \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *называется матрица из* $\mathbb{C}^{n\times n}$, *имеющая следующий вид*:

$$
[A, B] := AB - BA. \tag{3.3}
$$

Если коммутатор $[A, B] = O$ *— нулевая матрица размера* $n \times n$, *то матрицы* A *и* B *называются коммутирующими. Антикоммутатором матриц* A *и* B *называется следующая величина*:

$$
AB + BA. \tag{3.4}
$$

Наблюдение. Очевидно, что две равные квадратные матрицы коммутируют. Кроме того, справедливо следующее равенство $[A, B] = = -[B, A]$.

Пример. Коммутаторы матриц В. Паули. Докажем, что справедливы следующие три равенства:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \quad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \quad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2. \tag{3.5}$$

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_3, \tag{3.6}$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i\sigma_3. \tag{3.7}$$

Итак, из равенств (3.6) и (3.7) вытекает первое равенство из формулы (3.5). Аналогичным образом доказываются оставшиеся равенства из формулы (3.5).

Произведение блочных матриц. Выпишем матрицы $A \in \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$ в следующих блочных видах:

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad B = \|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\|, \tag{3.8}$$

$$A^j = (a^j_1, \cdots, a^j_p), \quad B_k = \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.9}$$

Отметим, что поскольку длина каждой строчки A^j матрицы A равна p, а длина каждого столбца B_k матрицы B тоже равна p, то поэтому для любых $j = \overline{1, m}$ и $k = \overline{1, n}$ определено произведение

$$A^j B_k = (a^j_1, \cdots, a^j_p) \begin{pmatrix} b^1_k \\ \vdots \\ b^p_k \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{p} a^j_s b^s_k \in \mathbb{C}.$$

Отметим, что матрица $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ как блочная матрица имеет размер $m \times 1$, а матрица $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$ как блочная матрица имеет размер $1 \times \times n$. Поэтому согласно правилу «строчка на столбец» можно умножить блочную матрицу A на матрицу B и их произведение AB будет состоять из $m \times n$ блоков вида $A^j B_k$, причем по доказанному блок $A^j B_k$ — это комплексное число, т.е. матрица размера 1×1:

$$AB = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} \|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\| =$$

$$= \begin{pmatrix} A^1B_1 & \cdots & A^1B_k & \cdots & A^1B_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^jB_1 & \cdots & A^jB_k & \cdots & A^jB_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^mB_1 & \cdots & A^mB_k & \cdots & A^mB_n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Из этого представления вытекают важные наблюдения.

Наблюдения. Запишем произведение матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \in \mathbb{C}^{p\times n}$ в двух блочных видах через столбцы и через строчки

$$C = AB = \|C_1, \cdots, C_k, \cdots C_n\|, \quad C = AB = \begin{Vmatrix} C^1 \\ \vdots \\ C^j \\ \vdots \\ C^m \end{Vmatrix}. \quad (3.11)$$

Из сравнения равенств (3.10) и (3.11) приходим к следующим формулам:

$$C_k = \begin{pmatrix} A^1B_k \\ \vdots \\ A^jB_k \\ \vdots \\ A^mB_k \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^j \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix} B_k = AB_k, \quad (3.12)$$

где мы опять воспользовались правилом умножения «строчка на столбец», поскольку блочная матрица A имеет размер $m \times 1$ а блочная матрица B_k имеет размер (как блочной матрицы) 1×1. Кроме того, произведение A^jB_k определено и представляет собой число из $\mathbb{C}$. Аналогичным образом можно доказать справедливость следующих равенств:

$$C^j = \left(A^jB_1, \cdots, A^jB_k, \cdots, A^jB_n\right) =$$
$$= A^j\|B_1, \cdots, B_k, \cdots B_n\| = A^jB. \quad (3.13)$$

Теперь мы приступим к рассмотрению произведения блочных матриц более сложного вида. Действительно, рассмотрим следующие две блочные матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$, составленные из блоков следующим образом:

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\|, \quad B = \left\| \begin{array}{c|c} B_1^1 & B_2^1 \\ \hline B_1^2 & B_2^2 \end{array} \right\|, \tag{3.14}$$

блоки которых являются матрицами следующих размеров:

$$A_1^1 \in \mathbb{C}^{m_1\times p_1}, \quad A_2^1 \in \mathbb{C}^{m_1\times p_2}, \quad A_1^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times p_1}, \quad A_2^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times p_2}, \tag{3.15}$$

$$B_1^1 \in \mathbb{C}^{p_1\times n_1}, \quad B_2^1 \in \mathbb{C}^{p_1\times n_2}, \quad B_1^2 \in \mathbb{C}^{p_2\times n_1}, \quad B_2^2 \in \mathbb{C}^{p_2\times n_2}, \tag{3.16}$$

$$m_1 + m_2 = m, \quad p_1 + p_2 = p, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Согласно определению произведения матриц имеем

$$C = AB, \quad c_k^j = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.17}$$

Теперь рассмотрим формальное произведение блочных матриц (3.14), полученное как если бы элементами матриц были не блоки, а числа. В результате получим следующую матрицу:

$$D := \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2 & A_1^1B_2^1 + A_2^1B_2^2 \\ \hline A_1^2B_1^1 + A_1^2B_1^2 & A_1^2B_2^1 + A_2^2B_2^2 \end{array} \right\|, \tag{3.18}$$

в которой все матричные произведения определены в силу сделанных нами предположений относительно размеров блоков. Кроме того,

$$A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2 \in \mathbb{C}^{m_1\times n_1}, \quad A_1^1B_2^1 + A_2^1B_2^2 \in \mathbb{C}^{m_1\times n_2}, \tag{3.19}$$

$$A_1^2B_1^1 + A_1^2B_1^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times n_1}, \quad A_1^2B_2^1 + A_2^2B_2^2 \in \mathbb{C}^{m_2\times n_2}. \tag{3.20}$$

Предположим, что $j \in \overline{1,m_1}$ и $k \in \overline{1,n_1}$. Рассмотрим тогда элемент d_k^j блочной матрицы (3.18), расположенный в блоке

$$A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2$$

на пересечении j–ой строчки и k–го столбца. Справедливы следующие равенства:

$$d_k^j = \sum_{s_1=1}^{p_1} a_{s_1}^j b_k^{s_1} + \sum_{s_2=p_1+1}^{p_2} a_{s_2}^j b_k^{s_2} = \sum_{s=1}^{p} a_s^j b_k^s = a_k^j. \tag{3.21}$$

Итак, $\{D\}_k^j = \{C\}_k^j$. Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Таким образом,

$$AB = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1B_1^1 + A_2^1B_1^2 & A_1^1B_2^1 + A_2^1B_2^2 \\ \hline A_1^2B_1^1 + A_1^2B_1^2 & A_1^2B_2^1 + A_2^2B_2^2 \end{array} \right\|. \tag{3.22}$$

Совершенно понятно, что аналогичная формула умножения имеет место для блочных матриц произвольного порядка.

Пример. Антикоммутатор матриц П. А. М. Дирака. Напомним, что матрицы Дирака имеют блочный вид (1.15) и (1.16). Докажем, что справедлива следующая формула:

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = O_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \tag{3.23}$$

где O_4 — нулевая матрица.

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0\gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_0\sigma_1 \\ \hline \sigma_0\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\|, \tag{3.24}$$

$$\gamma_1\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_0\sigma_1 \\ \hline -\sigma_0\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\|. \tag{3.25}$$

Из формул (3.24) и (3.25) вытекает следующая формула:

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & [\sigma_0, \sigma_1] \\ \hline [\sigma_0, \sigma_1] & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & O_2 \\ \hline O_2 & O_2 \end{array} \right\| = O_4, \tag{3.26}$$

поскольку справедливо следующее равенство:

$$[\sigma_0, \sigma_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2,$$

где $O_2 \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ — нулевая матрица. ☒

Докажем, что справедлива следующая формула:

$$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 = O_4 \in \mathbb{C}^{4\times 4}. \tag{3.27}$$

☐ Действительно, имеем

$$\gamma_1\gamma_2 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_1\sigma_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right\|, \tag{3.28}$$

$$\gamma_2\gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_1 \\ \hline -\sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_2\sigma_1 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_2\sigma_1 \end{array} \right\|. \tag{3.29}$$

Теперь заметим, что

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

$$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Следовательно,

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2. \tag{3.32}$$

Поэтому из (3.28)–(3.32) вытекают следующие равенства:

$$\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 = \left\| \begin{array}{c|c} -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 \end{array} \right\| = O_4. \quad \boxtimes \tag{3.33}$$

§ 4. Свойства произведения матриц

Операция умножения матриц обладает определенным набором свойств, которые мы последовательно сформулируем и докажем.

Свойство 1. *Ассоциативность умножения.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times r}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times n}$ справедливо равенство

$$A(BC) = (AB)C. \tag{4.1}$$

$\square$ Действительно, во–первых, матрицы $A(BC)$ и $(AB)C$ имеют одинаковый размер $m \times n$, а во вторых, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \{A(BC)\}^j_k &= \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{BC\}^s_k = \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \sum_{l=1}^{r} \{B\}^s_l \{C\}^l_k = \\ &= \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{B\}^s_l \right) \{C\}^l_k = \sum_{l=1}^{r} \{AB\}^j_l \{C\}^l_k = \\ &= \{(AB)C\}^j_k. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{4.2}$$

Свойство 2. *Дистрибутивность слева.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$, $B, C \in \mathbb{C}^{p\times n}$ справедливо следующее равенство:

$$A(B + C) = AC + BC. \tag{4.3}$$

$\square$ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \{A(B+C)\}^j_k &= \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{B+C\}^s_k = \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \left(\{B\}^s_k + \{C\}^s_k\right) = \\ &= \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{B\}^s_k + \sum_{s=1}^{p} \{A\}^j_s \{C\}^s_k = \{AB\}^k_k + \{AC\}^j_k. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{4.4}$$

Свойство 3. *Дистрибутивность справа.* Для любых матриц $A, B \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$ справедливо следующее равенство:

$$(A + B)C = AC + BC. \tag{4.5}$$

Доказывается точно также как свойство 2.

Свойство 4. *Свойство единичной матрицы.* Пусть $I_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — это так называемая единичная матрица, т. е. диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены числа 1:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть I_n и I_m — единичные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно. Тогда для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ справедливы следующие равенства:

$$I_m A = A \quad \text{и} \quad AI_n = A. \tag{4.6}$$

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\{I_m A\}^j_k = \sum_{s=1}^{m} \{I_m\}^j_s \{A\}^s_k = \sum_{s=1}^{m} \delta^j_s \{A\}^s_k = \{A\}^j_k, \tag{4.7}$$

$$\{AI_n\}^j_k = \sum_{s=1}^{n} \{A\}^j_s \{I_n\}^s_k = \sum_{s=1}^{n} \{A\}^j_s \delta^s_k = \{A\}^j_k, \tag{4.8}$$

где символом δ^j_k мы обозначаем символ Кронекера

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases} \quad \boxtimes$$

Свойство 4. *Свойство следа.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ справедливо равенство следов произведений этих матриц

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA. \tag{4.9}$$

□ Действительно, отметим, что в силу определения матриц A и B оба произведения AB и BA определены, причем $AB \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $BA \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Поэтому и следы $\operatorname{tr} AB$ и $\operatorname{tr} BA$ тоже определены. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} AB = \sum_{j=1}^{m} \{AB\}^j_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \{A\}^j_k \{B\}^k_j \right) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \{B\}^k_j \{A\}^j_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \{BA\}^k_k = \operatorname{tr} BA. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{4.10}$$

§ 5. Обратная матрица

Определение 8. *Матрица* $A^{-1} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *называется обратной к матрице* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *если выполнены следующие равенства*:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n. \tag{5.1}$$

Обратная матрица обладает набором свойств, которые мы сейчас сформулируем и докажем.

Свойство 1. *Единичная матрица* I_n *обратима и справедливо равенство* $I_n^{-1} = I_n$.

□ Действительно, это следствие следующего очевидного равенства:

$$I_n I_n = I_n. \quad \boxtimes$$

Свойство 2. *Обратная матрица* A^{-1} *если существует*, *то единственна*.

□ Действительно, пусть существуют две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1} к матрице $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}I_n = A_1^{-1}(AA_2^{-1}) = (A^{-1}A)A_2^{-1} = I_nA_2^{-1} = A_2^{-1}. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. *Если матрицы* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *обратимы*, *то их произведение* $AB \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *тоже обратимо и* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n. \quad \boxtimes$$

Свойство 4. *Если матрица* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *имеет обратную* A^{-1}, *то обратной к* A^{-1} *является матрица* $A : (A^{-1})^{-1}$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A. \quad \boxtimes$$

Обратная к матрице 2×2. Пусть нам задана матрица $A \in \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

причём $ad - bc \neq 0$, тогда обратная к этой матрице существует и имеет следующий вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

□ Действительно, проверим равенства (5.1):

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \quad (5.4)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$A^{-1}A = I_2. \quad \boxtimes$$

Пример. Вычисление обратных к матрицам В. Паули. Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$\sigma_j^{-1} = \sigma_j \quad \text{при} \quad j = 0,1,2,3. \quad (5.5)$$

$\square$ Действительно, $\sigma_0 = I_2$ и поэтому в силу свойства 1 равенство (5.5) при $j = 0$ доказано. Теперь докажем, например, равенство (5.5) при $j = 2$. Действительно, в силу (5.3) справедливы следующие равенства:

$$\sigma_2^{-1} = \frac{1}{i^2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2. \quad \boxtimes$$

Пример. Вычисление обратных к матрицам П. А. М. Дирака. Мы пока не знаем, как вычислять обратные матрицы к квадратным матрицам из $\mathbb{C}^{n\times n}$ при $n > 2$. Однако, мы можем воспользоваться тем, что матрицы Дирака записываются в блочном виде 2×2 через матрицы Паули и нулевую матрицу O_2, а для матриц Паули справедливы равенства (5.5), которые означают, что

$$\sigma_j^2 = \sigma_j\sigma_j = I_2 \quad \text{при} \quad j = 0,1,2,3. \quad (5.6)$$

Именно, докажем, что справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0^{-1} = \gamma_0, \quad \gamma_j^{-1} = -\gamma_j \quad \text{при} \quad j = 1,2,3. \quad (5.7)$$

$\square$ Действительно, имеют место следующие равенства:

$$\gamma_0\gamma_0 = \left\|\begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} \sigma_0^2 & O_2 \\ \hline O_2 & \sigma_0^2 \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c} I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & I_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| = I_4 \Rightarrow \gamma_0^{-1} = \gamma_0, \quad (5.8)$$

$$\gamma_j\gamma_j = \left\|\begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_j \\ \hline -\sigma_j & O_2 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_j \\ \hline \sigma_j & O_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c|c} -\sigma_j^2 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_j^2 \end{array}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c} -I_2 & O_2 \\ \hline O_2 & -I_2 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\| = -I_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_j^{-1} = -\gamma_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad \boxtimes \quad (5.9)$$

§ 6. Транспонированная матрица

Определение 9. *Матрицей, транспонированной по отношению к матрице $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, называется матрица $A^T \in \mathbb{C}^{n \times m}$, с элементами $\{A^T\}^j_k = \{A\}^k_j$.*

Пример. Транспонированные матрицы к матрицами В. Паули. Справедливы следующие равенства:

$$\sigma_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0, \quad \sigma_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \qquad (6.1)$$

$$\sigma_2^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2, \quad \sigma_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3. \quad (6.2)$$

Пример. Транспонированные к матрицам П. А. М. Дирака. Прежде всего заметим, что транспонированная к блочной матрице

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} A_1^1 & A_2^1 \\ \hline A_1^2 & A_2^2 \end{array} \right\| \qquad (6.3)$$

имеет следующий вид:

$$A^T = \left\| \begin{array}{c|c} (A_1^1)^T & (A_1^2)^T \\ \hline (A_2^1)^T & (A_2^2)^T \end{array} \right\|, \qquad (6.4)$$

где символами $(A_k^j)^T$ мы обозначили матрицу транспонированную к матрице A_k^j. С учетом равенств (6.3) и (6.4) справедливы следующие равенства:

$$\gamma_0^T = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0^T & O_2^T \\ \hline O_2^T & -\sigma_0^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_0 & O_2 \\ \hline O_2 & -\sigma_0 \end{array} \right\| = \gamma_0, \qquad (6.5)$$

$$\gamma_1^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_1^T \\ \hline \sigma_1^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_1 \\ \hline \sigma_1 & O_2 \end{array} \right\| = -\gamma_1, \qquad (6.6)$$

$$\gamma_2^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_2^T \\ \hline \sigma_2^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & \sigma_2 \\ \hline -\sigma_2 & O_2 \end{array} \right\| = \gamma_2, \qquad (6.7)$$

$$\gamma_3^T = \left\| \begin{array}{c|c} O_2^T & -\sigma_3^T \\ \hline \sigma_3^T & O_2^T \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} O_2 & -\sigma_3 \\ \hline \sigma_3 & O_2 \end{array} \right\| = -\gamma_3. \qquad (6.8)$$

Введём важные понятия симметричной и антисимметричной матриц.

Определение 10. *Квадратная матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется симметрично, если $A^T = A$, и называется антисимметричной, если $A^T = -A$.*

Замечание. Очевидно, всякая нулевая квадратная матрица $O \in \in \mathbb{C}^{n\times n}$ является и симметричной и антисимметричной одновременно. И это единственная матрица с таким свойством. Докажите!

Примеры симметричных и антисимметричных матриц. Формулы (6.1) и (6.2) означают, что матрицы В. Паули σ_0, σ_1 и σ_3 являются симметричными, а матрица σ_2 — антисимметричной. Формулы (6.5)–(6.8) означают, что матрицы П. А. М. Дирака γ_0 и γ_2 симметричные, а матрицы γ_1 и γ_3 антисимметричные.

Операция транспонирования обладает определенными свойствами, которые мы сформулируем и докажем.

Свойство 1. *Линейность операции транспонирования.* Для любых матриц $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ и для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ справедливо следующее равенство: $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$.

$\square$ Действительно, согласно определению операции транспонирования имеем

$$\{(\alpha A + \beta B)^T\}_k^j = \{\alpha A + \beta B\}_j^k = \\ = \alpha\{A\}_j^k + \beta\{B\}_j^k = \alpha\{A^T\}_k^j + \beta\{B^T\}_k^j. \quad \boxtimes \tag{6.9}$$

Свойство 2. *Инволютивность.* Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ справедливо равенство $(A^T)^T = A$.

$\square$ Действительно, имеем

$$\{(A^T)^T\}_k^j = \{A^T\}_j^k = \{A\}_k^j. \quad \boxtimes$$

Свойство 3. *Транспонирование произведения.* Для любых матриц $A \in \mathbb{C}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{C}^{p\times n}$ справедливо равенство $(AB)^T = B^T A^T$.

$\square$ Действительно, имеем

$$\{(AB)^T\}_k^j = \{AB\}_j^k = \sum_{s=1}^{p}\{A\}_s^k\{B\}_j^s = \sum_{s=1}^{p}\{A^T\}_k^s\{B^T\}_s^j = \\ = \sum_{s=1}^{p}\{B^T\}_s^j\{A^T\}_k^s = \{B^T A^T\}_k^j. \quad \boxtimes \tag{6.10}$$

Свойство 4. *Транспонирование обратной матрицы.* Для любой обратимой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ справедливо следующее равенство: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

$\square$ Действительно, в силу свойства 3 имеем

$$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$
$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

Следовательно, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Замечание. Заметим, что любую матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц.

□ Действительно, справедливо следующее равенство:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} := A_1 + A_2. \tag{6.11}$$

Ясно, что в силу свойств 1 и 2 имеем $A_1^T = A_1$, $A_2^T = -A_2$. ⊠