Лекция 6

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ЕГО СВОЙСТВА

§ 1. Определение векторного пространства

На прошедших лекциях мы ввели понятие свободного вектора и матрицы размера $m \times n$ и ввели операции сложения свободных векторов, матриц одного размера и умножения свободного вектора на вещественные числа и умножение матриц на вещественные и комплексные числа. При этом доказали, что эти операции обладают одними и теми же 8 свойствами. Теперь мы можем ввести абстрактное векторное пространство или линейное пространство.

Рассмотрим множество $\mathcal{L}$, элементы которого мы будем называть векторами. Пусть на множестве $\mathcal{L}$ определены операция суммы векторов $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{L}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$, а также операция умножения на вещественные числа $\lambda \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{L}$ для любых $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ и для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Дадим определение.

Определение 1. *Множество $\mathcal{L}$ с операциями на нём сложения векторов и умножения векторов на вещественные числа называется векторным пространством, если справедливы следующие свойства*:

ВП1. *коммутативность сложения*: *для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

ВП2. *ассоциативность сложения*: *для любых векторов* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *и* $\mathbf{z}$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

ВП3. *свойство нулевого вектора*: *существует нулевой вектор* $\mathbf{0}$ *такой, что для любого вектора* $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x};$$

ВП4. *существование противоположного элемента*: *для любого вектора* $\mathbf{x}$ *существует такой вектор* $-\mathbf{x}$, *что*

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0};$$

ВП5. *свойство единицы*: *для любого вектора* $\mathbf{x}$

$$1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x};$$

ВП6. *ассоциативность умножения на число*: *для любого вектора* $\mathbf{x}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x});$$

ВП7. *дистрибутивность относительно сложения векторов*: *для любых векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и любого числа* α

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y};$$

ВП8. *дистрибутивность относительно сложения чисел*: *для любого вектора* $\mathbf{x}$ *и любых чисел* α *и* β

$$(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}.$$

Примеры векторных пространств.

Пример 1. Нулевое пространство, которое состоит из одного нулевого элемента $\{\mathbf{0}\}$, является векторным пространством.

Пример 2. Пространства векторов $\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ и $\mathbb{V}_3$ на прямой на плоскости и в пространстве являются векторными пространствами.

Пример 3. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ является векторным пространством.

§ 2. Линейные оболочки и подпространства

Пусть дано семейство векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \in \mathcal{L}$ и семейство чисел $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$.

Определение 2. *Линейной комбинацией векторов называется сумма*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r.$$

Определение 3. *Линейная комбинация векторов называется тривиальной, если* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Определение 4. *Линейной оболочкой векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \in \in \mathcal{L}$ *называется следующее множество*:

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

Лемма 1. *Пусть векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ *принадлежат линейной оболочке векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. *Тогда*

$$L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p) \subset L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

Доказательство.

По условию $\mathbf{y}_j \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$ для любого $j = \overline{1,p}$. Поэтому найдутся такие числа

$$a_j^k \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1,r}, \quad j = \overline{1,p},$$

что справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{y}_j = \sum_{k=1}^{r} a_j^k \mathbf{x}_k. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathbf{z} \in L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p)$. Тогда найдутся такие числа $\alpha_j \in \mathbb{C}$ при $j = \overline{1, p}$, что в силу (2.1) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j \mathbf{y}_j = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j \sum_{k=1}^{r} a_j^k \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \mathbf{x}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r), \tag{2.2}$$

где

$$\beta^k = \sum_{j=1}^{p} \alpha^j a_j^k.$$

Лемма доказана.

Определение 5. *Подмножество $P \subset \mathcal{L}$ векторного пространства $\mathcal{L}$ называется подпространством, если*

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in P$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$.

Пример 4. Очевидно, $\mathbb{V}_1$ подпространство плоскости $\mathbb{V}_2 \supset \mathbb{V}_1$, а $\mathbb{V}_2$ подпространство пространства $\mathbb{V}_3 \supset \mathbb{V}_2$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Линейная оболочка $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$ семейства элементов $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ векторного пространства $\mathcal{L}$ является его подпространством.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$, тогда

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} \beta^k \mathbf{x}_k.$$

$$\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha \alpha^k + \beta \beta^k\right) \mathbf{x}_k = \sum_{k=1}^{r} \delta^k \mathbf{x}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r),$$

где $\delta^k = \alpha \alpha^k + \beta \beta^k$.

Лемма доказана.

§ 3. Линейная зависимость и независимость

Определение 6. *Семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ называется линейно зависимым, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору*:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq (0, \ldots, 0).$$

В случае, когда

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = (0, \ldots, 0).$$

семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *называется линейно независимым.*

Пример 5. В векторном пространстве $\{\mathbf{0}\}$ нет линейно независимых векторов.

□ Действительно, рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию

$$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \alpha \neq 0. \quad \boxtimes$$

Пример 6. В векторном пространстве $\mathbb{V}_1$ любой ненулевой вектор образует линейно независимое семейство векторов. В векторном пространстве $\mathbb{V}_2$ любые два неколлинеарных вектора образуют линейно независимое семейство. В векторном пространстве $\mathbb{V}_3$ любые три некомпланарных вектора образуют линейно независимое семейство векторов.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Однородная линейная система уравнений*

$$AX = A_1x^1 + \cdots + A_nx^n = O \tag{3.1}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы $A_1, \ldots, A_n$ *её основной матрицы* A *линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система уравнений (3.1) имеет нетривиальное решение

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T \neq O,$$

тогда имеет место равенство

$$A_1x_0^1 + \cdots + A_nx_0^n = O.$$

Откуда вытекает, что столбцы основной матрицы линейно зависимы.

Шаг 2. Достаточность. Пусть столбцы линейно зависимы, т. е.

$$A_1x_0^1 + \cdots + A_nx_0^n = O$$

при некотором семействе $(x_0^1, \cdots, x_0^n) \neq (0, \cdots, 0)$. Следовательно,

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T$$

— это нетривиальное решение системы уравнений (3.1).

Лемма доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства*:

1. *Любое семейство векторов с повторениями линейно зависимо.*
2. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *имеется нулевой вектор* $\mathbf{0}$, *то это семейство линейно зависимо.*

3. *Семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно зависимо тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*
4. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_s$ *имеется линейно зависимое подсемейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, *то и все семейство линейно зависимо.*
5. *Любая часть линейно независимого семейства является линейно независимо.*
6. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а семейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *линейно зависимо, то вектор* $\mathbf{x}$ *является линейной комбинацией семейства* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$.
7. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а вектор* $\mathbf{x}$ *нельзя через них выразить, то семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *также линейно независимо.*

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть, например, в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ первый и второй векторы совпадают $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Тогда справедливо равенство

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + (-1) \cdot \mathbf{x}_2 + 0 \cdot \mathbf{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

2. □ Действительно, пусть например первый вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. Тогда

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

3. □ Действительно, пусть семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимо. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1}\mathbf{x}_r.$$

Наоборот пусть

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r \Leftrightarrow (-1) \cdot \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}. \quad ⊠$$

4. □ Действительно, пусть семейство $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимые, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r + 0 \cdot \mathbf{x}_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \quad ⊠$$

5. □ Действительно, это следствие утверждения 4. ⊠

6. □ Действительно, поскольку семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ линейно зависимо, то найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$, что

$$\alpha \mathbf{x} + \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $\alpha = 0$, но тогда в силу линейной независимости семейства $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ отсюда получаем, что

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Пришли к противоречию с условием нетривиальности набора $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. ⊠

7. □ Действительно, это следствие утверждения 6. ⊠

Теорема доказана.

§ 4. Линейная зависимость и независимость. Продолжение

Справедливо следующее важное утверждение:

Теорема 2. *Если векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$, *причём* $s > r$, *то векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ *линейно зависимы.*

Доказательство.

Введём обозначения.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s). \tag{4.1}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию найдутся такие числа a_k^j при $j = \overline{1, r}$ и $k = \overline{1, s}$, что

$$\begin{array}{l} \mathbf{y}_1 = a_1^1 \mathbf{x}_1 + a_1^2 \mathbf{x}_2 + \cdots + a_1^r \mathbf{x}_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{y}_s = a_s^1 \mathbf{x}_1 + a_s^2 \mathbf{x}_2 + \cdots + a_s^r \mathbf{x}_r \end{array}. \tag{4.2}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (4.1) и (4.3) выражение (4.2) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{4.4}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \dots + a_s^2 z^s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \dots + a_s^r z^s = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Поскольку в однородной системе линейных уравнений (4.6) число переменных s больше числа уравнений r существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$:

$$z_0^1 \mathbf{y}_1 + \dots + z_0^s \mathbf{y}_s = \mathbf{Y} Z_0 = \mathbf{X} A Z_0 = \mathbf{X} O = O. \tag{4.8}$$

Следовательно, векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Следствием этой теоремы является следующая:

Теорема 3. *Если векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$, принадлежащие линейной оболочке $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$, линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 4. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк типов $1-3$. Тогда*

1. *Если столбцы матрицы A линейно независимы, то столбцы матрицы A' также линейно независимы, и обратное тоже верно.*
2. *Если между столбцами матрицы A имеется линейная зависимость*

$$c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \dots + c^s A_{k_s} = O, \quad k_1, k_2, \dots, k_s \in \overline{1, n},$$

то для соответствующих столбцов матрицы A' имеет место такая же зависимость

$$c^1 A'_{k_1} + c^2 A'_{k_2} + \dots + c^s A'_{k_s} = O,$$

и обратное тоже верно.

3. *Справедливо следующее равенство*:

$$L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) = L(A^1, A^2, \dots, A^m). \tag{4.9}$$

Доказательство.

Шаг 1. Пусть столбцы матрицы $A = \|A_1, \dots, A_n\|$ являются линейно независимыми и матрица A' получена из матрицы A некоторой последовательностью элементарных преобразований первых трех типов.

Тогда, как мы уже отмечали, существует такая невырожденная матрица P размера $m \times m$, что

$$A^{'} = PA \Rightarrow A_k' = PA_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}.$$

Отметим, что P — это матрица, полученная произведением матриц последовательности элементарных преобразований. Рассмотрим линейную комбинацию столбцов матрицы $A^{'}$

$$c^1 A_1^{'} + c^2 A_2^{'} + \dots + c^n A_n^{'} = O \Leftrightarrow c^1 PA_1 + c^2 PA_2 + \dots + c^n PA_n = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P^{-1}P\left(c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n\right) = P^{-1}O = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n = O \Leftrightarrow c^1 = c^2 = \dots = c^n = 0.$$

Итак, столбцы матрицы A' линейно независимы. Теперь заметим, что

$$A' = PA \Leftrightarrow A = P^{-1}A' = RA' \Rightarrow A_k = RA_k', \quad R = P^{-1}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть столбцы матрицы A' линейно независимы и

$$c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n = O \Leftrightarrow c^1 RA_1' + c^2 RA_2' + \dots + c^n RA_n' = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R\left(c^1 A_1' + c^2 A_2' + \dots + c^n A_n'\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow R^{-1}R\left(c^1 A_1' + c^2 A_2' + \dots + c^n A_n'\right) = R^{-1}O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 A_1' + c^2 A_2' + \dots + c^n A_n' = O \Leftrightarrow c^1 = c^2 = \dots = c^n = 0.$$

Следовательно, столбцы матрицы A линейно независимы.

Шаг 2. Умножим обе части равенства

$$c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \dots + c^s A_{k_s} = O, \quad k_1, k_2, \dots, k_s \in \overline{1, n},$$

на P слева и получим

$$P\left(c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \dots + c^s A_{k_s}\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 PA_{k_1} + c^2 PA_{k_2} + \dots + c^s PA_{k_s} = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1 A_{k_1}^{'} + c^2 A_{k_2}^{'} + \dots + c^s A_{k_s}^{'} = O.$$

Шаг 3. Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$A' = PA, \quad A = RA', \quad R = P^{-1}, \tag{4.10}$$

$$A^{'j} = \sum_{s=1}^{m} \{P\}_s^j A^s, \quad j \in \overline{1, m}, \tag{4.11}$$

$$A^j = \sum_{\sigma=1}^{m} \{R\}_\sigma^j A^{'\sigma}, \quad j \in \overline{1, m}. \tag{4.12}$$

Из равенства (4.11) и результата леммы 2 вытекает вложение $L(A'^1, A'^2, \cdots, A'^m) \subset L(A^1, A^2, \cdots, A^m)$, а из равенства (4.12) и леммы 2 вытекает обратное вложение $L(A^1, A^2, \cdots, A^m) \subset$ $\subset L(A'^1, A'^2, \cdots, A'^m)$. Следовательно, имеем

$$L(A'^1, A'^2, \cdots, A'^m) = L(A^1, A^2, \cdots, A^m).$$

Теорема доказана.

Заметим, что описать результата применения элементарного преобразования четвертого типа можно описать как произведение матрицы P размера $n \times n$ справа на матрицу A :

$$A' = AP \Rightarrow A'^j = A^j P \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями столбцов четвертого типа, но для всех столбцов матрицы A, включая последний. Тогда*

1. *Если строки матрицы A линейно независимы, то строки матрицы A' также линейно независимы, и обратное тоже верно.*
2. *Если между строками матрицы A имеется линейная зависимость*

$$c_1 A^{j_1} + c_2 A^{j_2} + \cdots + c_s A^{j_s} = O, \quad j_1, j_2, \cdots, j_s \in \overline{1, m},$$

то для соответствующих матрицы A' имеет место такая же зависимость

$$c_1 A'^{j_1} + c_2 A'^{j_2} + \cdots + c_s A'^{j_s} = O,$$

и обратное тоже верно.

3. *Справедливо равенство множеств*

$$L(A'_1, A'_2, \dots, A'_n) = L(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Доказательство.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Нужно только умножать не слева на матрицу P элементарных преобразований, а справа.

Теорема доказана.

§ 5. Размерность и базис векторного пространства

Определение 7. *Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в векторном пространстве $\mathcal{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathcal{L}$ называется бесконечномерным.*

Определение 8. *Векторное пространство $\mathcal{L}$ называется конечномерным, если выполнены следующие два условия:*

1. *в $\mathcal{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;*
2. *любое семейство векторов из $\mathcal{L}$, состоящее из $n+1$ вектора линейно зависимо.*

Число n называется размерностью векторного пространства $\mathcal{L}$ и обозначается $\dim \mathcal{L}$. Векторное пространство $\{\mathbf{0}\}$ называется нульмерным.

Пример 7. Векторное пространство $\{\mathbf{0}\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.
P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.
P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

Определение 9. *Базисом векторного пространства $\mathcal{L}$ называется линейно независимое семейство векторов $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$:*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Набор коэффициентов X называется координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Заметим, что

Лемма 4. *Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$ — это базис, то $L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.*

Доказательство.

Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L};$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} c^k \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n).$$

Лемма доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 5. *Разложение по базису векторного пространства единственно.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (x^n - y^n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем

$$x^1 = y^1, \ldots, x^n = y^n.$$

Лемма доказана.

Правило суммирования Эйнштейна. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении индекс встречается ровно два раза один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$

2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,

$$a_k b^k c^k,$$

хотя

$$(a_k + b_k) c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) c^k.$$

Напомним важный *символ Кронекера*

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Заметим, что

$$a_j \delta^j_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta^j_k = a_k.$$

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 6. *Все базисы конечномерного векторного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности $\dim \mathcal{L}$ векторного пространства $\mathcal{L}$.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m) = \mathcal{L}, \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}.$$

Следовательно, в силу теоремы 3 имеют место два неравенства

$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$

С другой стороны, любое семейство из $n + 1$ векторов

$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$

поэтому в силу теоремы 2 семейство $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,

$$n = \dim \mathcal{L}.$$

Теорема доказана.

Свойство координат вектора. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} (x^k + y^k) \mathbf{e}_k, \quad \alpha \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha x^k \mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Монотонность размерности. Справедлива лемма.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — это два подпространства в $\mathcal{L}$, причём $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Тогда*

1. $\dim \mathcal{Q} \leqslant \dim \mathcal{P}$;
2. *если* $\dim \mathcal{Q} = \dim \mathcal{P}$, *то* $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство.

1. $\square$ Действительно, пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

В силу теоремы 3 имеем $\dim \mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim \mathcal{P}$. $\boxtimes$

2. $\square$ Действительно, пусть $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т.е. $s = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$, что $\mathbf{z} \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$. Следовательно, семейство

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. $\boxtimes$

Лемма доказана.

Пример 8. Базис пространства столбцов $\mathbb{K}^n$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dim \mathbb{K}^n = n.$$

Пример 9. Базис пространства $\mathbb{K}^{3\times 2}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dim \mathbb{K}^{m\times n} = mn.$$

Отметим, что любое линейное подпространство P линейного пространства $\mathcal{L}$ само является линейным пространством. Таким образом, для любого линейного подпространства определено понятие базиса, размерности и координат вектора из этого линейного подпространства. В частности, в продолжение результатов теорем 4 и 5 справедливы следующие результаты:

Теорема 7. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк типов $1-3$. Тогда*

1. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'^1, A'^2, \ldots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m), \qquad (5.1)$$

2. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n). \qquad (5.2)$$

Доказательство.

Шаг 1. Равенство (5.4) является очевидным следствием равенства множеств (5.6).

Шаг 2. Докажем равенство (5.5). Здесь мы воспользуемся результатом пункта 2 теоремы 4. Пусть $\{A_{k_1}, A_{k_2}, \ldots, A_{k_s}\}$ — базис линейной оболочки $L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Докажем, что $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ — базис линейной оболочки $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Прежде всего заметим, что в силу результата 2 теоремы 4 семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ — линейно независимое семейство в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$.

□ Действительно, пусть противное и семейство векторов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ линейно зависимое. Тогда найдутся такие числа $\{c^1, c^2, \ldots, c^s\} \neq \{0, 0, \ldots, 0\}$, что справедливо равенство

$$c^1 A'_{k_1} + c^2 A'_{k_2} + \cdots + c^s A'_{k_s} = O \Rightarrow c^1 A_{k_1} + c^2 A_{k_2} + \cdots + c^s A_{k_s} = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{c^1, c^2, \cdots, c^s\} = \{0, 0, \cdots, 0\}. \qquad (5.3)$$

Пришли к противоречию с линейной независимостью семейства $\{A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_s}\}$. ⊠

Предположим, что линейно независимое семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ не образует базис в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Но тогда найдется по меньшей мере столбец $A'_{k_{s+1}} \in L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ такой, что семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}, A'_{k_{s+1}}\}$ является линейно независимо в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Но тогда согласно результату пункта 2 теоремы 4 семейство столбцов $\{A_{k_1}, A_{k_2}, \cdots, A_{k_s}, A_{k_{s+1}}\}$ линейно независимо в линейной оболочке $L(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, что противоречит определению базиса. Следовательно, семейство столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$ является максимальным линейно независимым семейством в линейной оболочке $L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$. Докажем, что любой столбец $B \in L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$ линейно выражается через столбцы $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$.

$\square$ Действительно, пусть противное. Тогда в силу результата пункта 7 теоремы 1 мы приходим к выводу о том, что семейство столбцов

$$\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}, B\} \subset L(A'_1, A'_2, \cdots, A'_n)$$

является линейно независимым. Противоречие с максимальностью линейно независимого семейства столбцов $\{A'_{k_1}, A'_{k_2}, \ldots, A'_{k_s}\}$. $\boxtimes$

Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями столбцов четвертого типа. Тогда*

1. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n), \tag{5.4}$$

2. *справедливо равенство размерностей линейных оболочек*

$$\dim L(A'^1, A'^2, \ldots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m). \tag{5.5}$$

Доказательство.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7 и основано на применении результатов теоремы 5.

Теорема доказана.

Из теорем 7 и 8 вытекает следующее важное утверждение:

Теорема 9. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями в любой последовательности строк первых трех типов и всех столбцов четвертого типа. Тогда справедливы следующие равенства*:

$$\dim L(A'^1, A'^2, \ldots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \ldots, A^m), \tag{5.6}$$

$$\dim L(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n) = \dim L(A_1, A_2, \ldots, A_n). \tag{5.7}$$

Доказательство.

После применения элементарного преобразования любого из четырех типов имеют место равенства (5.6) и (5.7). Отсюда вытекает справедливость этих равенств после конечного числа элементарных преобразований первых четырех типов, причем и применения элементарного преобразования четвертого типа для всех столбцов матрицы A.

Теорема доказана.