0.5 setgray0 0.5 setgray1

Консультация 7

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

ЗАДАЧА 1. Представить прямую

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

как линию пересечения плоскостей, параллельных осям Ox и Oy. Система координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ общая декартова.

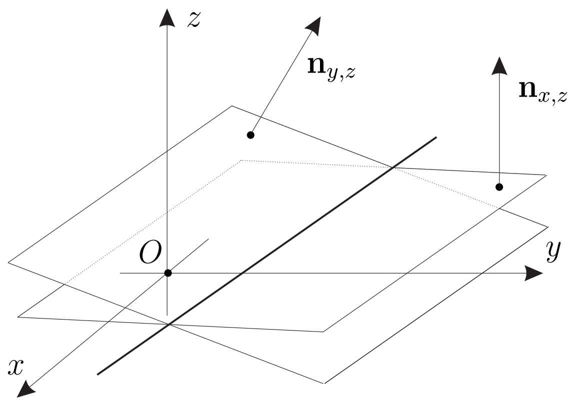

Рис. 1. К задаче 1.

Решение. Рассмотри плоскость

$$\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

— она параллельна оси Ox; плоскость

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{z-z_0}{c}$$

параллельна оси Oy. Действительно, проверим это. Общий вид плоскости, проходящей через точку $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ параллельно векторам

$$\mathbf{a}=\{a,b,c\}\quad \text{и}\quad \mathbf{e}_1=\{1,0,0\}$$

следующий:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

Аналогично общий вид второй плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}.$$

ЗАДАЧА 2. Найти ортогональные проекции прямой

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \tag{0.1}$$

на координатные плоскости Oyz, Ozx, Oxy. Система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ декартова прямоугольная.

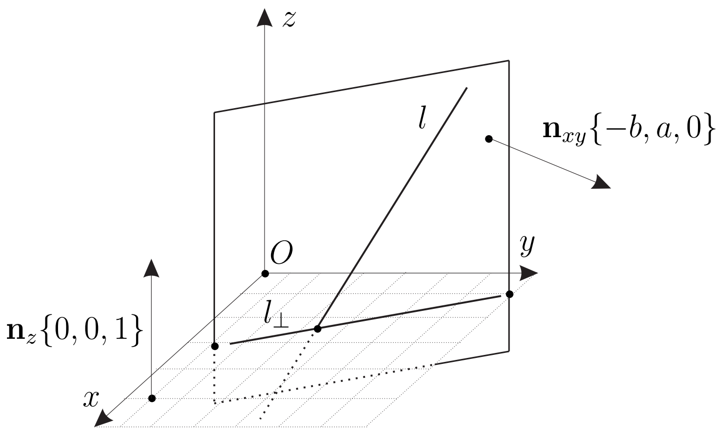

Рис. 2. К задаче 2.

Решение. Докажем, например, что ортогональная проекция заданной прямой на плоскость Oyz имеет следующий вид:

$$x = 0, \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

□ Действительно, уравнение прямой (0.1) можно переписать в следующем параметрическом виде:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct. \tag{0.2}$$

Докажем, что эта прямая лежит на плоскости

$$p_{yz}: \quad \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}. \tag{0.3}$$

Для этого подставим уравнения (0.2) в уравнение плоскости (0.3) и получим тождество. С одной стороны, вектор нормали $\mathbf{n}_{yz}$ к плоскости p_{yz} имеем следующий вид:

$$\mathbf{n}_{yz} = \{0, c, -b\}. \tag{0.4}$$

С другой стороны, вектор нормали к плоскости $p_x : \ x = 0$ имеет вид $\mathbf{n}_x = \{1, 0, 0\}$. Векторы

$$\mathbf{n}_{yz} \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_x$$

ортогональны. Поэтому плоскости p_{yz} и p_x ортогональны и плоскость p_{yz} содержит указанную в условии задачи прямую. Следовательно, ортогональная проекция этой прямой на плоскость $x = 0$ — это пересечение двух плоскостей

$$x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \quad \boxtimes$$

Аналогичным образом получаем, что ортогональная проекция прямой на плоскость Oxz имеет вид

$$y = 0, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c},$$

а на плоскость Oxy имеет вид

$$z = 0, \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

ЗАДАЧА 3. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями $M_1 = (0, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой же прямой с третьей координатной плоскостью. Система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ общая декартова.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 имеет следующий вид:

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y - y_1}{-y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Положим в этом равенстве $z = 0$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$x = -x_2 \frac{z_1}{z_2 - z_1}, \quad y = y_1 + y_1 \frac{z_1}{z_2 - z_1} = y_1 \frac{z_2}{z_2 - z_1}.$$

Итак,

$$M_3 = \left(-x_2 \frac{z_1}{z_2 - z_1}, y_1 \frac{z_2}{z_2 - z_1}, 0 \right).$$

ЗАДАЧА 4. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости

$$y + 2z = 0$$

и пересекающей прямые

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad z = 4t$$

и

$$x = 2 - \tau, \quad y = 4 + 2\tau, \quad z = 1.$$

Система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ общая декартова.

Решение. Находим точки пересечения указанных двух прямых с плоскостью $y + 2z = 0$. Получим

$$M_1 = (1, 0, 0), \quad M_2 = (5, -2, 1).$$

Проведём прямую через эти точки. Искомое уравнение прямой следующее:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = z \Leftrightarrow x = 1 + 4s, \quad y = -2s, \quad z = s.$$

ЗАДАЧА 5. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M = (3, -1, -4)$, пересекающей ось Oy и коллинеарной плоскости $y + 2z = 0$. Система координат аффинная.

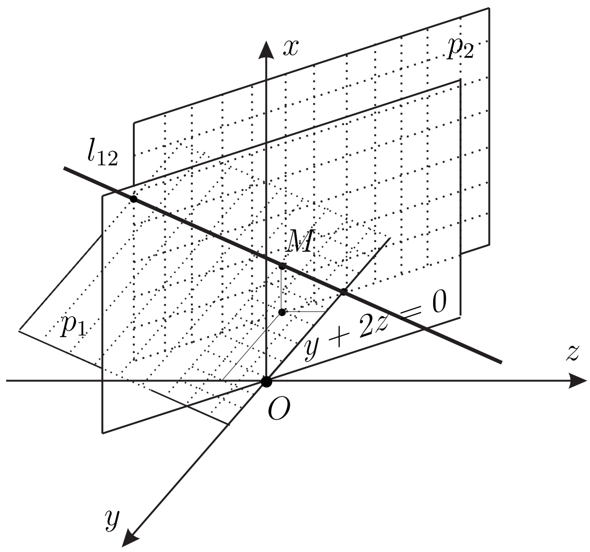

Рис. 3. К задаче 5.

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точку $M = (3, -1, -4)$ и содержащую ось Oy. Для этого достаточно написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M(3, -1, -4)$ и $O(0, 0, 0)$ и параллельной вектору $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}$, который коллинеарен оси Oy. Уравнение следующее:

$$p_1 : \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z+4 \\ 3-0 & -1-0 & -4-0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3z + 4x = 0. \qquad (0.5)$$

Заметим, что есть общий результат о том, что вид плоскости параллельной $Ax+By+Cz+D=0$ следующий:

$$Ax+By+Cz+D_1=0.$$

Поэтому найдём плоскость, параллельную плоскости $y+2z=0$ и проходящую через точку $M=(3,-1,-4)$. Уравнение искомой плоскости имеет следующий вид:

$$p_2:\ y+2z+9=0. \tag{0.6}$$

Отметим, что плоскости (0.5) и (0.6) не параллельны. Значит, они пересекаются. При этом по построению искомая прямая $l_{12}=p_1\cap p_2$:

1. $M\in p_1\cap p_2=l_{12}$,

2. $l_{12}\cap Oy\neq\varnothing$. $\square$ Последнее утверждение, проверяется непосредственно. Уравнение оси Oy — это пересечение двух плоскостей

$$x=0 \quad \text{и} \quad z=0.$$

Тогда из уравнений (0.5) и (0.6) плоскостей получим, что

$$p_1\cap p_2\cap Oy=M_1(0,-9,0). \quad \boxtimes$$

3. $l_{12}\in p_2$, а по построению плоскость p_2 параллельна плоскости $y+2z=0$. Значит, прямая l_{12} коллинеарна плоскости.

Итак, уравнение искомой прямой можно записать в следующем виде:

$$3z+4x=0 \quad \text{и} \quad y+2z+9=0.$$

ЗАДАЧА 6. В плоскости, проходящей через точки

$$A=(2,1,3), \quad B=(2,4,0), \quad C=(-3,0,4),$$

выбрана аффинная система координат с началом в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти: 1. пространственные координаты точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u=5$, $v=3$; 2. плоскостные координаты (u,v) точки пересечения данной плоскости с осью Oz. Система координат $\{O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ общая декартова.

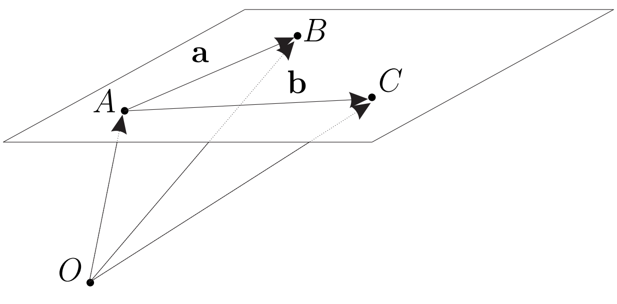

Рис. 4. К задачам 6 и 7.

Решение. Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \{2,4,0\} - \{2,1,3\} = \{0,3,-3\},$$
$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = \{-3,0,4\} - \{2,1,3\} = \{-5,-1,1\}.$$

Тогда векторное параметрическое уравнение плоскости следующее:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Решение первого задания следующее:

$$\mathbf{r} = \{2,1,3\} + 5\{0,3,-3\} + 3\{-5,-1,1\} = \{-13,13,-9\}.$$

Решение второго задания такое. Произвольный радиус–вектор точки лежащей на оси Oz имеет вид $\mathbf{r} = \{0,0,z\}$. Поэтому справедливы следующие уравнения:

$$0 = 2 + u\cdot 0 + v\cdot(-5) \quad \text{и} \quad 0 = 1 + u\cdot 3 + v\cdot(-1) \Rightarrow u = -\frac{1}{5}, \quad v = \frac{2}{5},$$
$$z = 3 + u\cdot(-3) + v\cdot 1 = 4.$$

ЗАДАЧА 7. В плоскости $2x+3y-4z+12=0$ выбрана общая декартова система координат $\{C,\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы базисных векторов соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy. 1. Найти пространственные координаты (x,y,z) точки E этой плоскости, плоскостные координаты которой $u=1$, $v=1$. 2. Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых (AB), (BC) и (CA). 3. Написать в плоскостной системе координат уравнение прямой пересечения данной плоскости с плоскостью $5x+3z-8=0$.

Решение. Точки C, A и B имеют следующие координаты:

$$C = (0,0,3), \quad A = (-6,0,0), \quad B = (0,-4,0).$$

Пусть

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{CA} = \{-6,0,-3\}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{CB} = \{0,-4,-3\}.$$

Уравнение плоскости следующее:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}. \tag{0.7}$$

Решение первого задания:

$$\mathbf{r}_E = \{0,0,3\} + \{-6,0,-3\} + \{0,-4,-3\} = \{-6,-4,-3\}.$$

Решение для второго задания. Точки A, B и C имеют следующие плоскостные координаты:

$$A = (u_A, v_A) = (1,0), \quad B = (u_B, v_B) = (0,1), \quad C = (0,0).$$

Уравнение (AB) следующее:

$$\frac{u-u_A}{u_B-u_A} = \frac{v-v_A}{v_B-v_A} \Leftrightarrow u+v-1=0.$$

Уравнение (BC) следующее:

$$(BC): \quad \frac{u-u_B}{u_C-u_B} = \frac{v-v_B}{v_C-v_B} \Rightarrow u = 0.$$

Уравнение (CA) следующее:

$$(CA): \quad \frac{u-u_C}{u_A-u_C} = \frac{v-v_C}{v_A-v_C} \Rightarrow v = 0.$$

Решение третьего задания. Распишем параметрическое уравнение плоскости, заданной уравнением (0.7):

$$x = -6u, \quad y = -4v, \quad z = 3 - 3u - 3v.$$

Подставим эти равенства в уравнение плоскости $5x + 3z - 8 = 0$ и получим искомое плоскостное уравнение прямой

$$39u + 9v - 1 = 0.$$

ЗАДАЧА 8. Даны три прямые:

$$l_1: \quad x = 3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t,$$
$$l_2: \quad x = -2 + 3\tau, \quad y = -1, \quad z = 4 - \tau,$$
$$l_3: \quad x - 3y + z = 0, \quad x + y - z + 4 = 0.$$

Написать уравнение прямой, пересекающей первые две из данных прямых и параллельной третьей прямой. Система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ общая декартова.

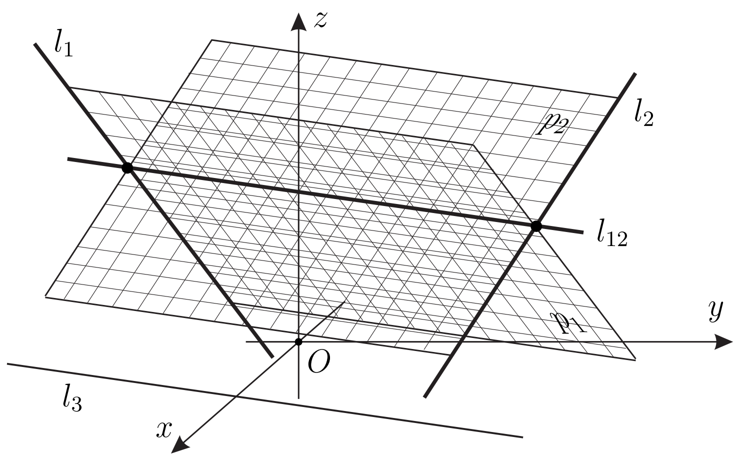

Рис. 5. К задаче 8.

Решение. Сначала для удобства перепишем все три уравнения прямых l_1, l_2 и l_3 в векторной параметрической форме.

□ Действительно, первые прямые примут следующий вид:

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{r}_1 = \{3, -1, 0\}, \quad \mathbf{a}_1 = \{1, 2, 4\};$$

$$l_2: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 \tau, \quad \mathbf{r}_2 = \{-2, -1, 4\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{3, 0, -1\}.$$

Рассмотрим третью прямую l_3. Найдём какую либо точку прямой l_3. Для этого подставим в уравнения плоскостей, определяющих эти прямые, $z = 0$ и получим следующую систему уравнений:

$$x - 3y = 0 \quad \text{и} \quad x + y = -4 \Leftrightarrow y = -1, \quad x = -3.$$

Итак, точка $M_3(-3, -1, 0) \in l_3$. Теперь найдём направляющий вектор $\mathbf{a}_3$ прямой l_3. Его можно выбрать равным

$$\mathbf{a}_3 = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + n\mathbf{e}_3 \tag{0.8}$$

как нетривиальное решение следующей системы уравнений

$$l - 3m + n = 0 \quad \text{и} \quad l + m - n = 0. \tag{0.9}$$

□ Действительно, вектор нормали $\mathbf{n}_1$ к первой плоскости $x - 3y + z = 0$ равен

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{f}_1 - 3\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3,$$

а вектор нормали $\mathbf{n}_2$ ко второй плоскости $x + y - z + 4 = 0$ равен

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3,$$

где $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ — это взаимный базис к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Тогда направляющий вектор прямой пересечения этих двух плоскостей

$$\mathbf{a} = l\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2 + l\mathbf{e}_3$$

должен быть коллинеарным к обеим плоскостям. Значит, направляющий вектор $\mathbf{a}$ должен быть ортогональным обеим нормалям

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}_1) = 0, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{n}_2) = 0, \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{0}.$$

Из этих равенств приходим к уравнениям (0.9). ☒

Например, нетривиальное решение

$$l = m = \frac{1}{2}, \quad n = 1. \tag{0.10}$$

Итак, приходим к следующему векторному параметрическому уравнению прямой l_3 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + \mathbf{a}_3 s, \quad \mathbf{r}_3 = \{-3, -1, 0\}, \quad \mathbf{a}_3 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Заметим, что <u>прямые l_1, l_2 и l_3 не коллинеарны</u>.

Проведём плоскость через прямую l_1 параллельно прямой l_3. Уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$p_1: \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2y - z + 2 = 0.$$

Проведём теперь плоскость через прямую l_2 параллельно прямой l_3. Уравнение плоскости имеет следующий вид:

$$p_2: \quad \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 3z - 17 = 0.$$

Искомая прямая является прямой, по которой пересекаются плоскости

$$2y - z + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x - 7y + 3z - 17 = 0.$$

Действительно, прямая l_{12}, по которой пересекаются эти две плоскости

1. параллельны прямой l_3;

2. пересекает прямые l_1 и l_2, поскольку направляющий вектор $\mathbf{a}_3$ прямой $l_{12} \| l_3$ не коллинеарен направляющим векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ прямых l_1 и l_2.

З А Д А Ч А 9. Показать, что прямые

$$l_1: \quad x = 1 + 2t, \quad y = 2t, \quad z = t,$$
$$l_2: \quad x = 11 + 8\tau, \quad y = 6 + 4\tau, \quad z = 2 + \tau$$

пересекаются, и написать уравнение биссектрисы тупого угла между ними. Система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ прямоугольная.

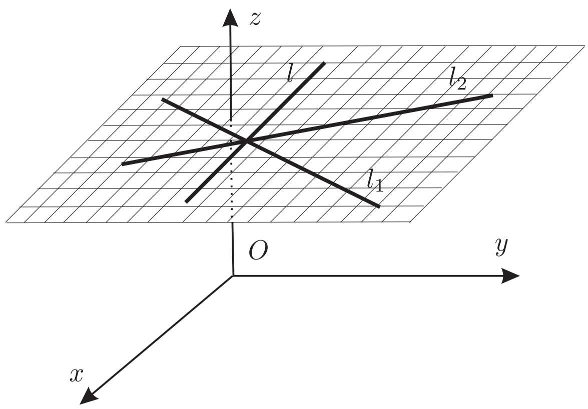

Рис. 6. К задаче 9.

Р е ш е н и е. Перепишем уравнения прямых l_1 и l_2 в векторной параметрической форме. Имеем

$$l_1: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t, \quad \mathbf{r}_1 = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{a}_1 = \{2, 2, 1\},$$

$$l_2: \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2\tau, \quad \mathbf{r}_2 = \{11, 6, 2\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{8, 4, 1\}.$$

Ясно, что направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны. Прямые пересекаются если векторы $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \{10, 6, 2\}$ $\mathbf{a}_1 = \{2, 2, 1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{8, 4, 1\}$ компланарны„ т. е. если следующий определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

но это действительно так.

□ Действительно,

$$\begin{vmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10(2-4) - 6(2-8) + 2(8-16) = -20 + 36 - 16 = 0. \quad \boxtimes$$

Найдём координаты точки A пересечения этих двух прямых.

□ Действительно,

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_1 t - \mathbf{a}_2\tau \Leftrightarrow \{10, 6, 2\} = \{2, 2, 1\}t - \{8, 4, 1\}\tau \Rightarrow \tau = -1, \quad t = 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}_A = \{1, 0, 0\} + \{2, 2, 1\} = \{3, 2, 1\}.$$

Следовательно, $A = (3, 2, 1)$. ⊠

Угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ острый. Значит тупой угол — это угол между векторами $-\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Будем искать направляющий вектор биссектрисы в следующем виде:

$$\mathbf{a}_3 = -\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2,$$

причём

$$-\frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_3|} = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_3||\mathbf{a}_2|} \Leftrightarrow -\frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_2|}.$$

После подстановки в это равенство координат векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ приходим к следующему равенству:

$$\frac{9\lambda - 25\mu}{3} = \frac{-25\lambda + 81\mu}{9} \Rightarrow \lambda = 3\mu.$$

□ Действительно, имеем

$$|\mathbf{a}_1|^2 = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = 9 \Rightarrow |\mathbf{a}_1| = 3,$$
$$|\mathbf{a}_2|^2 = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = 81 \Rightarrow |\mathbf{a}_1| = 9,$$
$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = -\lambda(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) + \mu(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = -9\lambda + 25\mu,$$
$$(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2) = -\lambda(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \mu(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = -25\lambda + 81\mu. \quad \boxtimes$$

Поэтому имеем

$$\mathbf{a}_3 = \mu\left(-3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\right), \quad -3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 2\{1, -1, -1\} = 2\mathbf{a}_4.$$

Итак искомое уравнение биссектрисы следующее:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{a}_4 s, \quad \mathbf{r}_A = \{3, 2, 1\}, \quad \mathbf{a}_4 = \{1, -1, -1\}.$$

ЗАДАЧА 10. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра $ABCD$ и через середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.

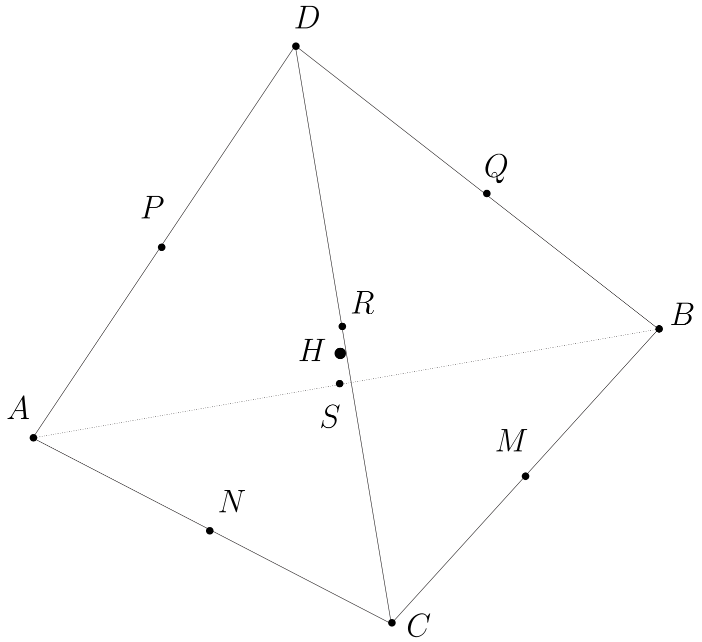

Рис. 7. К задаче 10.

Решение. Введём общую декартову систему координат $\{D, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, где

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{DA}, \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{DB}, \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{DC}.$$

Пусть

$$M \in BC, \quad N \in AC, \quad S \in AB, \quad P \in AD, \quad Q \in DB, \quad R \in DC$$

— это середины соответствующих рёбер тетраэдра $ABCD$. Справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) = 0 \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{DS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{b} + 0 \cdot \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{a} + 0\cdot\mathbf{b} + 0\cdot\mathbf{c},$$
$$\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = 0\cdot\mathbf{a} + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{b} + 0\cdot\mathbf{c},$$
$$\overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = 0\cdot\mathbf{a} + 0\cdot\mathbf{b} + \frac{1}{2}\cdot\mathbf{c}.$$

Тогда в указанной системе координат

$$D = (0,0,0), \quad A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1),$$
$$M = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad N = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$
$$P = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \quad Q = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right), \quad R = \left(0, 0, \frac{1}{2}\right).$$

По условию задачи нужно рассмотреть следующие шесть плоскостей:

$$(ADM), \quad (DBN), \quad (DCS), \quad (PBC), \quad (QAC), \quad (RAB).$$

Их уравнения следующие:

$$(ADM): \quad y - z = 0, \quad (DBN): \quad x - z = 0, \quad (DCS): \quad x - y = 0,$$
$$(PBC): \quad x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0, \quad (QAC): \quad \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0,$$
$$(RAB): \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

□ Действительно, плоскость (ADM) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \\ x_M - x_A & y_M - y_A & z_M - z_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y & z \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - z = 0;$$

плоскость (DBN) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_N & y - y_N & z - z_N \\ x_B - x_N & y_B - y_N & z_B - z_N \\ x_D - x_N & y_D - y_N & z_D - z_N \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & y & z - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z - x = 0;$$

плоскость (DCS) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_S & y - y_S & z - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \\ x_D - x_S & y_D - y_S & z_D - z_S \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & y - \frac{1}{2} & z \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} - \left(y - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0;$$

плоскость (PBC) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C & z_B - z_C \\ x_P - x_C & y_P - y_C & z_P - z_C \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

плоскость (QAC) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ x_A - x_C & y_A - y_C & z_A - z_C \\ x_Q - x_C & y_Q - y_C & z_Q - z_C \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z - 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$

плоскость (RAB) имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_B & y - y_B & z - z_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ x_R - x_B & y_R - y_B & z_R - z_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y - 1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z - \frac{1}{2} = 0. \quad \boxtimes$$

Заметим, что плоскости (ADM), (DBN) и (DCS) пересекаются по прямой $x = y = z$. После подстановки этих равенств в любое из уравнений плоскостей (PBC), (QAC) или (RAB) мы получим равенства

$$x = y = z = \frac{1}{4}.$$

Отдельно рассмотрим систему уравнений плоскостей (PBC), (QAC) и (RAB):

$$x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = \frac{1}{2}.$$

Определитель матрицы этой системы равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Поэтому эти три плоскости пересекаются в единственной точке

$$H = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

в которой пересекаются и все шесть плоскостей.

З А Д А Ч А 11. Найти основание $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикуляра, опущенного из точки $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ на прямую

$$l: \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

а также точку $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, симметричную точке M_1 относительно прямой l.

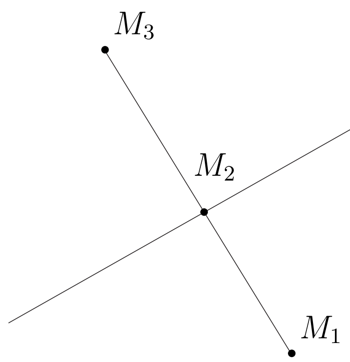

Рис. 8. К задаче 11.

Р е ш е н и е. Напишем уравнение плоскости p, проходящей через точку M_1 и перпендикулярно прямой l :

$$p: \; a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Напишем параметрические уравнения в координатах прямой

$$l: \; x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct.$$

Основание перпендикуляра — это точка пересечения $M_2 = p \cap l$:

$$t_0 = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Поэтому имеем

$$x_2 = x_0 + \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} a,$$
$$y_2 = x_0 + \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} b,$$
$$z_2 = x_0 + \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} c.$$

Найдём точку $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$, симметричную точке M_1 относительно прямой l :

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{M_3M_2}.$$

Из этого равенства имеем

$$x_3 = 2x_2 - x_1 = 2x_0 + 2\frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} a - x_1,$$
$$y_3 = 2y_2 - y_1 = 2y_0 + 2\frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} b - y_1,$$
$$z_3 = 2z_2 - z_1 = 2z_0 + 2\frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2} c - z_1.$$

ЗАДАЧА 12. Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым:

$$l_1: \quad \frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1}, \quad l_2: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

и найти расстояние d между этими прямыми. Система координат $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ — правая декартова прямоугольная.

Решение. Направляющие векторы этих двух прямых

$$\mathbf{a}_1 = \{8, 4, 1\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{2, -2, 1\}.$$

Направляющий вектор $\mathbf{b}$ искомого перпендикуляра можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = 6\{1, -1, -4\}.$$

Проведём плоскость p_1 через прямую l_1 параллельно вектору $\mathbf{b}$:

$$p_1: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 8 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5x - 11y + 4z + 5 = 0.$$

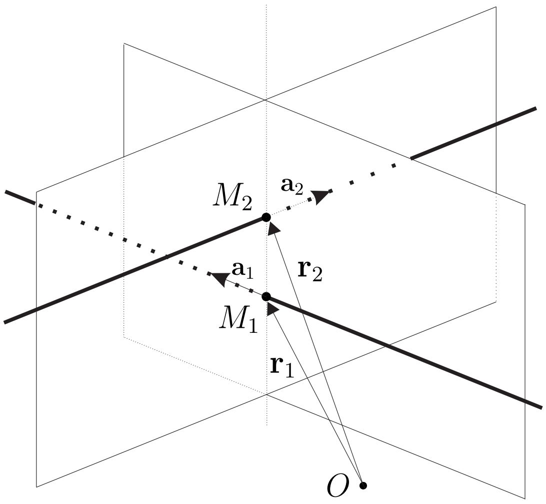

Рис. 9. К задаче 12.

Теперь проведём плоскость через прямую l_2 параллельно вектору $\mathbf{b}$:

$$p_2: \quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x+y-1=0.$$

Искомый перпендикуляр к обеим прямым — это $p_1 \cap p_2$. Действительно, это пересечение прямая, которая параллельна вектору $\mathbf{b}$ и проходит через обе прямые.

ЗАДАЧА 13. К непересекающимся диагоналям граней куба, имеющих общее ребро, провести общий перпендикуляр. В каком отношении точки пересечения диагоналей с их общим перпендикуляром делят эти диагонали?

Решение. Без ограничения общности можно считать длину ребра куба, раной 1. Тогда координаты точек, указанных на рисунке следующие:

$$O=(0,0,0), \quad A=(0,0,1), \quad C=(0,1,0), \quad B=(1,0,1).$$

Тогда

$$l_1=(OB): \quad x=t, \quad y=0, \quad z=t;$$

$$l_2=(AC): \quad x=0, \quad y=\tau, \quad z=1-\tau.$$

□ Действительно, имеем

$$l_1: \ \frac{x-x_O}{x_B-x_O}=\frac{y-y_O}{y_B-y_O}=\frac{z-z_O}{z_B-z_O} \Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1},$$

$$l_2: \ \frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}=\frac{z-z_A}{z_C-z_A} \Leftrightarrow \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}. \quad \boxtimes$$

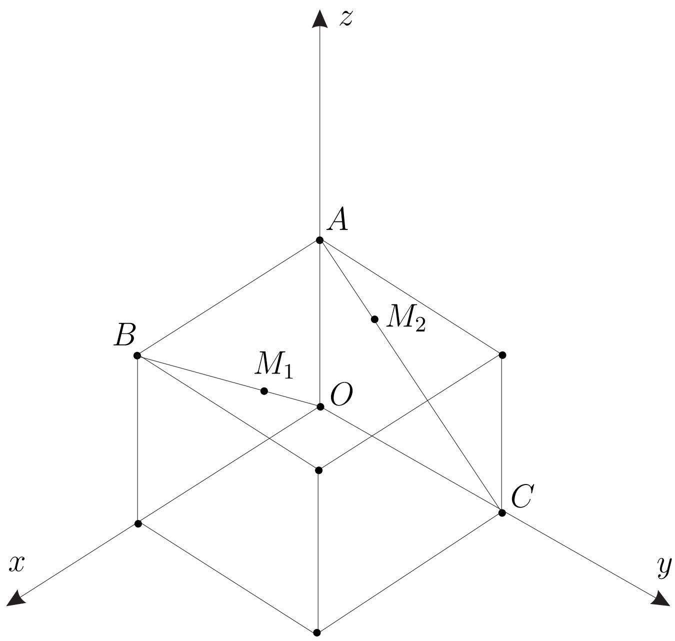

Рис. 10. К задаче 589.

Направляющие векторы прямых l_1 и l_2 — это векторы

$$\mathbf{a}_1 = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{0, 1, -1\}.$$

Вектор $\mathbf{b}$, перпендикулярный этим векторам имеет следующий вид:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \{-1, 1, 1\}.$$

Пусть p_1 — это плоскость, проходящая через прямую l_1 параллельно $\mathbf{b}$:

$$p_1 : \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0.$$

Пусть p_2 — это плоскость, проходящая через прямую l_2 параллельно $\mathbf{b}$:

$$p_2 : \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z - 1 = 0.$$

Искомый перпендикуляр определяется пересечением плоскостей p_1 и p_2 :

$$x + 2y - z = 0 \quad \text{и} \quad 2x + y + z - 1 = 0.$$

Найдём точку $M_2 = p_1 \cap l_2$:

$$3\tau - 1 = 0 \Rightarrow \tau = \frac{1}{3}, \quad M_2 = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Найдём точку $M_1 = p_2 \cap l_1$:

$$3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}, \quad M_1 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right).$$

Тогда имеем
$$\overrightarrow{OM_1} = \lambda \overrightarrow{M_1B}, \quad \overrightarrow{AM_2} = \mu \overrightarrow{M_2C}$$

и справедливы следующие равенства:

$$\overrightarrow{OM_1} = \left\{\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \quad \overrightarrow{M_1B} = \left\{\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}\right\},$$
$$\overrightarrow{AM_2} = \left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}, \quad \overrightarrow{M_2C} = \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}.$$

Следовательно, $\lambda = \mu = 2$.

ЗАДАЧА 14. Найти тот угол между плоскостями

$$8x + 4y + z + 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 1 = 0,$$

в котором лежит точка $M = (1, 1, 1)$.

Решение. Прежде всего нужно воспользоваться тем, что вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ направлен в то полупространство из двух, на которые делит плоскость

$$p: \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

пространство, в котором $Ax + By + Cz + D > 0$. Теперь убедимся в том, что угол между векторами $\mathbf{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ соответствует тем двум областям, для точек $M(x_0, y_0, z_0)$ которых выполнено неравенство

$$(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0.$$

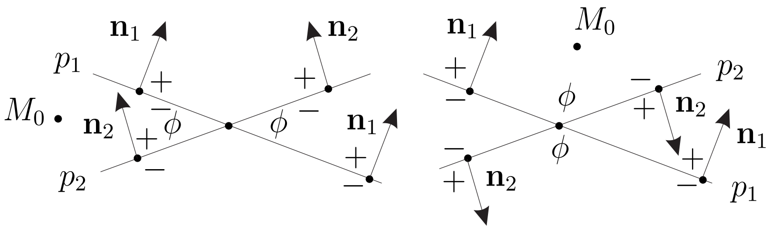

Рис. 11. К задаче 14.

Теперь мы можем перейти к решению данной задачи. Векторы нормали к плоскостям имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = \{8, 4, 1\}, \quad \mathbf{n}_2 = \{2, -2, 1\}.$$

Угол между нормалями $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ соответствует тому углу между соответствующими плоскостями, в котором $(8x + 4y + z + 1)(2x - 2y + z + 1) < 0$. Заметим, что

$$8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 > 0 \quad \text{и} \quad 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 > 0.$$

Поэтому искомый угол равен

$$\cos\varphi = -\frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = -\frac{1}{3}.$$