Лекция 1

Сайт лектора Колыбасовой Валентины Викторовны (конспекты лекций):

http://sites.google.com/site/vkolybasova

Группы ВКонтакте, посвящённые обсуждению учебных вопросов:

http://vk.com/vvkolybasova

http://vk.com/club54291252

Рекомендуемая литература:

1. *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* Аналитическая геометрия.
2. *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* Линейная алгебра.
3. *С.Б. Кадомцев.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
4. *А.В. Овчинников.* Курс лекций по аналитической геометрии. На сайте кафедры математики: http://math.phys.msu.ru/People/Staff/Ovchinnikov_Alexey_Vitalevich/show_page

В нашем курсе аналитической геометрии будут изучаться матрицы, определители, векторы, прямые, плоскости, кривые и поверхности 2-го порядка, системы линейных алгебраических уравнений.

Решение системы из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными: формулы Крамера

Рассмотрим систему из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ — известные числа, x, y — неизвестные.

Решим её методом исключения неизвестных. Предположим, что система (1) имеет решение, т.е. существуют такие числа x, y, которые обращают уравнения системы (1) в тождества. Будем считать, в систему (1) подставлено её решение. Тогда уравнения обращаются в тождества. Для того чтобы исключить y, умножим первое тождество системы (1) на a_{22}, второе — на a_{12} и вычтем из первого второе. Получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{2}$$

Аналогично, умножив первое тождество системы (1) на a_{21}, второе — на a_{11} и вычтя из второго первое, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \tag{3}$$

Введём обозначения:

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}, \qquad \Delta_x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, \qquad \Delta_y = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$

Тогда тождества (2), (3) принимают вид

$\Delta \cdot x = \Delta_x, \qquad \Delta \cdot y = \Delta_y.$

Если $\Delta \neq 0$, то можно поделить на Δ, и получим так называемые *формулы Крамера*:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.} \tag{4}$$

Таким образом, мы доказали, что если решение системы (1) существует и $\Delta \neq 0$, то оно выражается формулами Крамера. Из этого следует, что при $\Delta \neq 0$ система (1) не может иметь более одного решения.

Теперь докажем, что числа x, y, полученные по формулам Крамера (4), действительно являются решением системы (1). Для этого достаточно подставить выражения для x, y в систему (1) и убедиться, что оба её уравнения обращаются в тождества (сделайте это самостоятельно). Таким образом мы доказали, что при $\Delta \neq 0$ система (1) имеет решение.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1.1 (о формулах Крамера для системы из двух уравнений). Если $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, причём это решение выражается формулами Крамера (4).

Замечание. В случае $\Delta = 0$ формулы Крамера неприменимы. В этом случае система может не иметь решений или иметь бесконечно много решений.

Матрицы

Определение. Прямоугольная таблица из чисел, содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$.

Обычно матрицы записывают в круглых или в двойных прямых скобках (две формы записи).

Пример:

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ или $\left\| \begin{matrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{matrix} \right\|$ — это матрица размера 2×3.

Произвольная матрица размера $m \times n$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n},$$

где a_{ij} — элементы матрицы (i — номер строки, j — номер столбца).

Определение. Матрица размера $n \times n$ (количество строк = количеству столбцов) называется *квадратной матрицей порядка n.*

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ — квадратная матрица порядка 4.

У квадратной матрицы есть главная диагональ (выделена жёлтым) и побочная диагональ (выделена зелёным). Главная диагональ состоит из элементов a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, …, т.е. тех элементов, для которых номер строки и столбца совпадает: $i = j$.

Определение. Квадратная матрица порядка n называется *единичной*, если она имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(На главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю.)

Определители 1-го, 2-го, 3-го порядков

Каждой *квадратной* матрице A порядка n ставится в соответствие (единственным образом, по определённому закону) некоторое число $\det A$, которое называется *определителем* (или *детерминантом*) матрицы A:

матрица размера $n \times n$ $\mapsto$ число.

1. Определитель 1-го порядка ($n = 1$). Матрица размера 1×1 состоит из одного элемента: $A = (a_{11})$. Её определителем называется этот элемент: $\det A = a_{11}$.

2. Определитель 2-го порядка ($n = 2$). По определению:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Определитель матрицы записывается так же, как сама матрица, но в одинарных прямых скобках. Для матрицы размера 2×2 определитель равен разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

← побочная диагональ

← главная диагональ

Далее будем называть элементами, строками и столбцами определителя $\det A$ элементы, строки и столбцы матрицы A.

Замечание. Выражения Δ, Δ_x и Δ_y, фигурирующие в формулах Крамера, можно записать в виде определителей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Из формулы для определителя второго порядка вытекают следующие его свойства (проверьте самостоятельно).

1⁰. *Линейность* по каждому столбцу:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} + a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через A_1, A_2 столбцы матрицы A, а через $\Delta(A_1, A_2)$ — её определитель. Тогда свойство линейности запишется в виде

$$\Delta(\lambda A_1, A_2) = \lambda(A_1, A_2), \qquad \Delta(A_1 + A'_1, A_2) = \Delta(A_1, A_2) + \Delta(A'_1, A_2),$$
$$\Delta(A_1, \lambda A_2) = \lambda(A_1, A_2), \qquad \Delta(A_1, A_2 + A'_2) = \Delta(A_1, A_2) + \Delta(A_1, A'_2).$$

(Столбцы складываются и умножаются на число λ поэлементно.)

2⁰. *Кососимметричность*. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} \text{ или } \Delta(A_1, A_2) = -\Delta(A_2, A_1).$$

3⁰. *Нормировка.* Определитель единичной матрицы равен 1:

$$\det I = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

3. <u>Определитель 3-го порядка ($n = 3$).</u>

Определение. Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется числовая функция её столбцов, которая обладает следующими свойствами.

1⁰. Линейность по каждому столбцу.

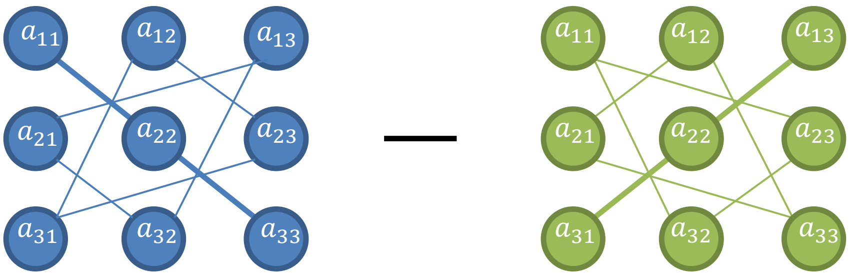
2⁰. Кососимметричность: при перестановке любых двух столбцов определитель меняет знак.

3⁰. Нормировка: $\det I = 1$.

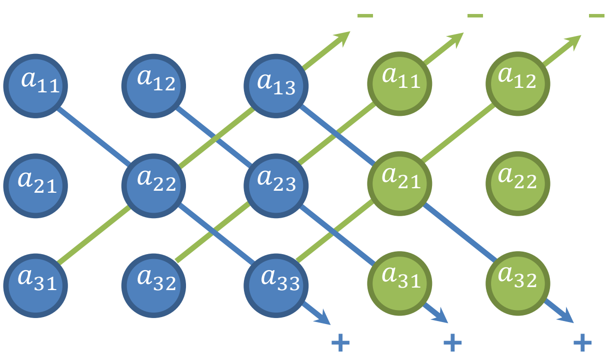
Можно доказать, что определитель существует для каждой квадратной матрицы порядка n, единственен, и выразить его значение через его элементы. Это будет сделано в конце семестра, а пока что приведём результат для определителя 3 порядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}. \qquad (\blacklozenge)$$

Запомнить эту формулу можно с помощью правила треугольников



или правила Саррюса



Разложение определителя 3-го порядка по строке или столбцу

Сгруппируем в выражении для определителя 3-го порядка все члены, содержащие элементы первого столбца a_{11}, a_{21}, a_{31}:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} =$$
$$= a_{11}\underbrace{(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})}_{A_{11}} + a_{21}\underbrace{(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33})}_{A_{21}} + a_{31}\underbrace{(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}_{A_{31}}.$$

Определение. *Алгебраическим дополнением* к элементу a_{ij} определителя матрицы A называется число A_{ij} такое, что

$$\det A = a_{ij}A_{ij} + \underbrace{(\dots)}_{\text{не содержит } a_{ij}}.$$

Упражнение. Получите явный вид всех алгебраических дополнений и проверьте справедливость следующих формул разложения определителя 3-го порядка по строкам и столбцам:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \text{ (разложение по первой строке)}, \\ a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{ (разложение по второй строке)}, \\ a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \text{ (разложение по третьей строке)}, \\ a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \text{ (разложение по первому столбцу)}, \\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \text{ (разложение по второму столбцу)}, \\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \text{ (разложение по третьему столбцу)}. \end{cases}$$

Определение. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, получаемый из данного определителя путём вычёркивания той строки и того столбца, на пересечении которых находится данный элемент.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Связь миноров и алгебраических дополнений:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.} \qquad ⍟$$

Мнемоническое правило для запоминания знаков при M_{ij}:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Упражнение. Проверьте самостоятельно справедливость формулы ⍟ для всех миноров M_{ij} в определителе 3-го порядка, используя полученные в предыдущем упражнении выражения для алгебраических дополнений A_{ij}.

Таким образом, для определителя 3-го порядка справедливы следующие формулы разложения по i-й строке и по j-му столбцу:

$$\det A = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+j} M_{ij}\,, \qquad \det A = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+j} M_{ij}\,, \qquad \text{где } i, j = 1, 2, 3.$$

Продолжение перечисления свойств определителей

Перечислим ещё некоторые свойства определителей 3-го порядка.

4^0. Если определитель имеет два одинаковых столбца, то он равен нулю.

Доказательство. Пусть определитель имеет два одинаковых столбца. Поменяем их местами. Тогда, с одной стороны, определитель поменяет знак в силу свойства кососимметричности, а с другой стороны, определитель не изменится, так как эти столбцы одинаковые. Тогда $\det A = -\det A$, откуда $\det A = 0$.

5^0. Если элементы двух столбцов пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \lambda a_1 & b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 & b_2 \\ a_3 & \lambda a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. $\Delta(A_1, \lambda A_1, A_3) = \lambda(A_1, A_1, A_3) = 0$ (по свойству линейности и свойству **4°**).

6^0. Если все элементы некоторого столбца равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. $\Delta(0 \cdot A_2, A_2, A_3) = 0$ по свойству **5°**.

7^0. Если ко всем элементам некоторого столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на число λ, то величина определителя не изменится.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

$\Delta(A_1 + \lambda A_2, A_2, A_3) = \Delta(A_1, A_2, A_3) + \underbrace{\Delta(\lambda A_2, A_2, A_3)}_{0} = \Delta(A_1, A_2, A_3)$ по свойству линейности и свойству **5°**.

8^0. Определитель не изменится, если строки и столбцы этого определителя поменять ролями (транспонировать):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство: распишем определители в левой и правой частях доказываемого равенства и убедимся, что они тождественно совпадают.

Из свойства **8^0** вытекает, что строки и столбцы определителя равноправны, т.е. все свойства определителей, которые справедливы для столбцов, будут справедливы и для строк. В частности, свойства $\mathbf{1^0}$, $\mathbf{2^0}$, $\mathbf{4^0}$–$\mathbf{7^0}$ справедливы и для строк.

Нетрудно убедиться, что все перечисленные свойства справедливы и для определителей 2-го порядка. (В конце семестра будет показано, что они справедливы и для определителей n-го порядка.)

Формулы Крамера для системы из трёх линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

С помощью определителей 3-го порядка можно записать формулы Крамера для системы из трёх уравнений с тремя неизвестными.

Рассмотрим систему из трёх алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \tag{5}$$

Введём обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.2 (о формулах Крамера для системы из трёх уравнений). Если $\Delta \neq 0$, то система (5) имеет единственное решение, причём это решение выражается *формулами Крамера*

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.}$$

(Теорема будет доказана в конце семестра для произвольного n.)