Вариационные и проекционные методы решения задач математической физики

1 Вариационные постановки краевых задач математической физики

Иногда при постановке краевых задач математической физики бывает удобнее использовать не дифференциальные, а интегральные уравнения, и формулировать задачу как задачу о поиске минимума некоторого функционала. Такой подход, в частности, позволяет формулировать обобщенные постановки задач, в которых от решения требуется меньшая гладкость, чем при использовании дифференциальных уравнений. Рассмотрим несколько примеров одномерных и многомерных вариационных постановок задач.

1.1 Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке

Рассмотрим задачу для линейного стационарного уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x) = f(x), \;\; x \in (0,l), \\ -\alpha_1 \dfrac{du}{dx} + \beta_1 u\Big|_{x=0} = 0, \;\; \alpha_2 \dfrac{du}{dx} + \beta_2 u\Big|_{x=l} = 0, \\ p(x) > 0, \;\; q(x) \geqslant 0, \;\; \alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0, \;\alpha_i + \beta_i > 0, \; i = 1,2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Функция $u(x)$ называется классическим решением задачи (1.1), если она дважды непрерывно дифференцируема при $x \in (0,l)$, один раз непрерывно дифференцируема при $x \in [0,l]$, при подстановке обращает уравнение и граничные условия в верные равенства.

Рассматриваемая задача может иметь классическое решение, если $p(x)$ непрерывно дифференцируема, а $q(x)$ и $f(x)$ — непрерывны на $[0, l]$. В противном случае можно говорить только об обобщенном решении задачи. Далее будем считать, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ по крайней мере квадратично интегриремы на отрезке $x \in [0, l]$:

$$\int_0^l p^2 dx < \infty, \quad \int_0^l q^2 dx < \infty, \quad \int_0^l f^2 dx < \infty.$$

Получим вариационную постановку задачи (1.1). Для того, чтобы понять, минимумом какого функционала должно быть ее решение, используем энергетический метод. Умножим уравнение в задаче (1.1) на функцию $u(x)$ и проинтегрируем правую и левую часть по x в пределах от 0 до l:

$$-\int_0^l (pu')' u dx + \int_0^l qu^2 dx = \int_0^l fu dx. \tag{1.2}$$

Первый интеграл в левой части полученного равенства возьмем по частям, учитывая граничные условия задачи:

$$\int_0^l (pu')' u dx = pu'u\Big|_0^l - \int_0^l p(u')^2 dx.$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $u(0) = 0$, если же $\alpha_1 \neq 0$, то граничное условие при $x = 0$ можно переписать в виде $u'(0) = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} u(0)$. То же самое справедливо для граничного условия при $x = l$: $u(l) = 0$, если $\alpha_2 = 0$ и $u'(l) = -\dfrac{\beta_2}{\alpha_2} u(l)$, если $\alpha_2 \neq 0$. Для краткости введем обозначение

$$\gamma_i = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\beta_i}{\alpha_i}, \ \alpha_i \neq 0, \\ 0, \ \alpha_i = 0. \end{array} \right.$$

Тогда

$$\int_0^l (pu')' u dx = -\gamma_1 p(0) u^2(0) - \gamma_2 p(l) u^2(l) - \int_0^l p(u')^2 dx,$$

и равенство (1.2) принимает вид:

$$\int_0^l \left\{ p(u')^2 + qu^2 \right\} dx + \gamma_1 p(0) u^2(0) + \gamma_2 p(l) u^2(l) = \int_0^l fu dx. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) имеет смысл, если функция $u(x)$ квадратично интегрируема на отрезке $[0, l]$ и имеет кусочно непрерывную производную $u'(x)$, квадратично интегрируемую на отрезке $[0,l]$. Это более слабое требование, чем то, что накладывается на классическое решение задачи (1.1).

Выражение в левой части (1.3) можно рассматривать как функционал Φ, действующий на функцию $u(x)$:

$$\Phi[u] = \int\limits_0^l \left\{p(u')^2 + qu^2\right\} dx + \gamma_1 p(0)u^2(0) + \gamma_2 p(l)u^2(l).$$

Назовем множество всех кусочно-непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,l]$ функций $v(x)$, таких что

$$\int\limits_0^l (v^2 + (v')^2)dx < \infty,$$

множеством допустимых функций. Если $\gamma_1 = 0$, то дополнительно потребуем, чтобы все допустимые функции $v(x)$ обращались в нуль при $x = 0$. Аналогично, если $\gamma_2 = 0$, то потребуем, чтобы для всех допустимых функций выполнялось условие $v(l) = 0$.

На множестве допустимых функций рассмотрим функционал

$$D[v] = \Phi[v] - 2\int\limits_0^l fvdx. \tag{1.4}$$

Покажем, что если функционал D достигает минимума на некоторой функции $u(x)$ из множества допустимых функций, то функция $u(x)$ является классическим решением задачи (1.1), если она дважды непрерывно дифференцируема, и наоборот, если $u(x)$ — решение задачи (1.1), то на ней достигается минимум функционала D. Для этого произвольную функцию $v(x)$ из множества допустимых функций запишем в виде $v(x) = u(x)+\lambda w(x)$, где $w(x)$ принадлежит множеству допустимых функций, λ — число. Тогда $D[v] = D[u + \lambda w]$ можно рассматривать как функцию параметра λ. Если минимум функционала достигается на функции $u(x)$, то это означает, что минимум $D[v]$ как функции параметра λ достигается при $\lambda = 0$, то есть

$$\left.\frac{d}{d\lambda}D[u + \lambda w]\right|_{\lambda=0} = 0, \tag{1.5}$$

и наоборот, если выполнено условие (1.5), то на функции $u(x)$ достигается минимум функционала D. Распишем выражение в левой части равенства (1.5) подробнее:

$$D[u + \lambda w] = \int\limits_0^l \left\{p\left[(u')^2 + 2\lambda u'w' + \lambda^2(w')^2\right] + q\left[u^2 + 2\lambda uw + \lambda^2 w^2\right]\right\} dx+$$
$$+\gamma_1 p(0)\left\{u^2(0) + 2\lambda u(0)w(0) + \lambda^2 w^2(0)\right\} + \gamma_2 p(l)\left\{u^2(l) + 2\lambda u(l)w(l) + \lambda^2 w^2(l)\right\} -$$

$$-2\int_0^l f(u+\lambda w)dx,$$

откуда получаем

$$\frac{d}{d\lambda}D[u+\lambda w]\bigg|_{\lambda=0} = 2\left\{\int_0^l (pu'w'+quw-fw)dx + \gamma_1 p(0)u(0)w(0) + \gamma_2 p(l)u(l)w(l)\right\}.$$

Если pu' — дифференцируемая функция, то первый интеграл в правой части полученного равенства можно взять по частям:

$$\frac{d}{d\lambda}D[u+\lambda w]\bigg|_{\lambda=0} = 2\left\{\int_0^l \{-(pu')'+qu-f\}\, wdx + \right.$$

$$\left. + p(l)w(l)\left[u'(l)+\gamma_2 u(l)\right] - p(0)w(0)\left[u'(0)-\gamma_1 u(0)\right]\right\}. \tag{1.6}$$

Если выполнено равенство (1.5), то есть на функции $u(x)$ функционал D достигает минимального значения, то выражение (1.6) равно нулю при любой функции $w(x)$ из множества допустимых функций, в частности, для всех $w(x)$, которые обращаются в нуль на концах отрезка $[0,l]$. Следовательно, для всех таких $w(x)$ имеет место равенство

$$\int_0^l \{-(pu')'+qu-f\}\, w(x)dx = 0, \tag{1.7}$$

откуда следует, что

$$-(pu')'+qu-f=0.$$

Таким образом, функция $u(x)$, на которой достигается минимум функционала D, удовлетворяет уравнению в задаче (1.1). Остается показать, что она удовлетворяет граничным условиям задачи (1.1). Будем рассматривать только те функции $w(x)$, которые обращаются в нуль при $x=l$. Тогда с учетом (1.7) получаем

$$p(0)w(0)\left[u'(0)-\gamma_1 u(0)\right]=0,$$

откуда следует, что

$$u'(0)-\gamma_1 u(0)=0 \;\Leftrightarrow\; -\alpha_1 u'(0)+\beta_1 u(0)=0.$$

Аналогично можно показать, что $u(x)$ удовлетворяет граничному условию при $x=l$. Итак, мы доказали, что если на функции $u(x)$ достигается минимум функционала D, то она удовлетворяет задаче (1.1).

Если функция $u(x)$ — решение задачи (1.1), то выражение в правой части равенства (1.6) обращается в нуль при любой функции $w(x)$ из множества допустимых функций. Следовательно, выполняется равенство (1.5), а значит на функции $u(x)$ достигается минимум функционала D.

Итак, если задача (1.1) допускает классическое решение, то она эквивалентна задаче о поиске минимума функционала (1.4). При этом функционал (1.4) на множестве допустимых функций может достигать минимума и в том случае, когда исходная дифференциальная задача не имеет классического (то есть, достаточно гладкого), решения. Поэтому задачу о поиске минимума функционала (1.4) можно рассматривать как обобщенную постановку задачи (1.1), а функцию из множества допустимых, на которой реализуется минимум, принять за обобщенное решение задачи.

Подчеркнем еще раз, что если при $x = 0$ или $x = l$ задано условие Дирихле, то его выполнения нужно требовать от *всех* допустимых функций. Если граничное условие выполняется для всех элементов множества, на котором ищем минимум соответствующего функционала, такое граничное условие называется *главным*. Итак, для рассматриваемой задачи условия Дирихле — это главные граничные условия. Если граничное условие задачи не обязано выполняться для *всех* допустимых функций, то оно называется *естестественным*. В рассматриваемой задаче условия Неймана и условия третьего рода являются естественными. Они встраиваются в структуру минимизируемого функционала, и их выполнения не нужно требовать от всех функций $v(x)$.

1.2 Краевая задача для уравнения Лапласа

Получим вариационную постановку задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad M \in G, \\ u|_{\Sigma} = \mu(P), \quad P \in \Sigma, \end{cases} \tag{1.8}$$

где G — ограниченная двух- или трехмерная область с границей Σ.

Воспользуемся тем, что если функция, на которой достигает минимума функционал

$$D[u(x, y, z)] = \int\limits_G F(u, u_x, u_y, u_z) dxdydz,$$

является достаточно гладкой, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial u_z}\right) = 0.$$

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ представляет собой уравнение Эйлера задачи на минимум функционала Дирихле:

$$D[u] = \int\limits_G (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz.$$

Назовем множеством допустимых функций для рассматриваемой задачи множество непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$, кусочно-гладких в открытой области G функций, принимающих на границе Σ значения $\mu(P)$. Минимум функционала Дирихле на множестве допустимых функций можно рассматирвать как обобщенное решение задачи (1.8).

1.3 Вариационная постановка задачи на собственные функции и собственные значения для оператора Лапласа

Получим вариационную постановку задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \quad M \in G, \\ u(P) = 0, \quad P \in \Sigma, \end{cases} \tag{1.9}$$

где G — ограниченная область с границей Σ. Пусть $u(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ. Умножим уравнение в задаче (1.9) на $u(x)$, проинтегрируем по области G и воспользуемся первой формулой Грина:

$$\int\limits_G u \Delta u dV + \lambda \int\limits_G u^2 dV = 0,$$

$$\int\limits_G u \Delta u dV = \int\limits_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int\limits_G |\nabla u|^2 dV,$$

где $\vec{n}$ — вектор единичной внешней нормали к границе Σ. Так как $u|_\Sigma = 0$, то

$$\lambda = \frac{\int\limits_G |\nabla u|^2 dV}{\int\limits_G u^2 dV}.$$

Назовем множеством допустимых функций для задачи (1.9) множество непрерывных в замкнутой области $\bar{G}$, кусочно-гладких в открытой области G функций, обращающихся в нуль на границе Σ.

На множестве допустимых функций рассмотрим функционал

$$J[v] = \frac{\int\limits_G |\nabla v|^2 dV}{\int\limits_G v^2 dV}. \tag{1.10}$$

Покажем, что если функционал (1.10) достигает минимального значения J_{min} на дважды непрерывно дифференцируемой в области G функции $u(M)$ из множества допустимых функций, то $\lambda_1 = J_{min}$ — минимальное собственное значение задачи Штурма-Лиувилля (1.9), а функция $u(M)$ — отвечающая этому собственному значению собственная функция.Пусть $v(M) = u(M) + \varepsilon w(M)$, где $w(M)$ — произвольная допустимая функция, ε — число. Тогда

$$F(\varepsilon) = J[u + \varepsilon w] = \frac{\int\limits_G |\nabla u + \varepsilon \nabla w|^2 dV}{\int\limits_G (u + \varepsilon w)^2 dV} =$$

$$= \frac{\int\limits_G |\nabla u|^2 dV + 2\varepsilon \int\limits_G (\nabla u, \nabla w) dV + \varepsilon^2 \int\limits_G |\nabla w|^2 dV}{\int\limits_G u^2 dV + 2\varepsilon \int\limits_G uw dV + \varepsilon^2 \int\limits_G w^2 dV} \geqslant J_{min}.$$

Если функционал J достигает минимального значения на функции $u(M)$, то функция $F(\varepsilon)$ имеет экстремум при $\varepsilon = 0$, то есть

$$\left.\frac{dF}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_G (\nabla u, \nabla w) dV \int\limits_G u^2 dV - \int\limits_G |\nabla u|^2 dV \int\limits_G uw dV = 0.$$

При этом справедливо равенство

$$\int\limits_G |\nabla u|^2 dV = J_{min} \int\limits_G u^2 dV,$$

откуда в случае дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x)$ получаем

$$0 = \int\limits_G (\nabla u, \nabla w) dV - J_{min} \int\limits_G uw dV = -\int\limits_G (\Delta u + J_{min} u) w dV.$$

Полученное равенство выполняется при любой допустимой функции $w(M)$, откуда следует, что

$$\begin{cases} \Delta u + J_{min} u = 0, \; M \in G, \\ u|_\Sigma = 0. \end{cases}$$

Таким образом, J_{min} — собственное значение задачи (1.9), а $u(M)$ — соответствующая ему собственная функция. Так как J_{min} — минимальное значение функционала J, то это минимальное собственное значение λ_1 задачи Штурма-Лиувилля. И наоборот, если $u(M)$ — собственная функция задачи (1.9), отвечающая минимальному собственному значению λ_1, то

$$\lambda_1 = \frac{\int\limits_G |\nabla u|^2 dV}{\int\limits_G u^2 dV} = J[u].$$

Так как λ_1 — минимальное собственное значение, то $J[u] = J_{min}$.

Подводя итог, вариационную постановку задачи (1.9) на собственные функции и собственные значения можно сформулировать следующим образом: среди допустимых функций найти такую функцию u_1, для которой функционал J достигает минимального значения; это минимальное значение функционала есть наименьшее из собственных значений.

Так как собственные функции задачи (1.9), отвечающие различным собственным значеним ортогональны, то вариационную постановку задачи для λ_2 нужно формулировать на множестве допустимых функций $v(M)$, ортогональных уже найденной функции $u_1(M)$:

$$\int\limits_G u_1 v dV = 0,$$

и так далее.

2 Метод Ритца приближенного поиска минимума функционала

Рассмотренные выше примеры показывают, что в соответствие краевым задачам математической физики можно ставить задачи о поиске минимума функционала. Обычно этот минимум ищут приближенно на некотором конечномерном множестве функций.

Пусть $\{\varphi_i(M)\}$, $i = 1, 2, ...$ — базис в пространстве допустимых функций, то есть любую допустимую функцию $v(M)$ можно представить в виде

$$v(M) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \varphi_i(M).$$

Будем искать минимум возникающих при вариационных постановках задач функционалов D на линейных оболочках H_N конечного числа N базисных элементов:

$$\forall v_N \in H_N : \quad v_N = \sum_{i=1}^{N} C_i \varphi_i.$$

При этом будем получать приближенные решения u_N исходных задач:

$$u_N : \quad D^N_{min} = \min_{\{C_i\}} D[v_N].$$

Описанный метод поиска приближенного решения называется методом Ритца. Проиллюстрируем его на примере краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения.

Пример 2.1. *С помощью метода Ритца постройте приближенное решение задачи*

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = \mu, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $p(x) > 0$ *и* $q(x) \geqslant 0$*.*

Решение. Множество допустимых функций: кусочно-непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции, квадратично интегрируемые со своей производной на отрезке $[0,1]$, обращающиеся в нуль при $x = 0$ (главное граничное условие).

Получим вариационную постановку задачи. Для этого умножим уравнение на произвольную допустимую функцию $v(x)$, проинтегрируем по x в пределах от 0 до 1 и учтем граничные условия задачи. В рузультате получим равенство:

$$\underbrace{\int\limits_0^1 \{p(x)v'(x)u'(x) + q(x)v(x)u(x)\}\,dx + p(1)v(1)u(1)}_{D_1[v,u]} - \underbrace{p(1)v(1)\mu}_{D_2[v,\mu]} - \underbrace{\int\limits_0^1 f(x)v(x)dx}_{D_3[v,f]} = 0.$$

Итак, для точного решения задачи имеет место равенство

$$D_1[v,u] - D_2[v,\mu] - D_3[v,f] = 0 \tag{2.2}$$

для любой допустимой функции $v(x)$. Далее будем называть обобщенным решением рассматриваемой задачи функцию $u(x)$ из множества допустимых функций, удовлетворяющую уравнению (2.2) при любой допустимой функции $v(x)$.

Заметим, что $D_1[v,u] = D_1[u,v]$ для любых допустимых функций u и v. Покажем, что решение уравнения (2.2) доставляет минимум функционалу

$$D[v] = D_1[v,v] - 2D_2[v,\mu] - 2D_3[v,f],$$

и наоборот, минимум функционала D на множестве основных функций удовлетворяет уравнению (2.2). Пусть $w = u + \lambda v$, где v — произвольная допустимая функция. Тогда в силу симметричности билинейной формы $D_1[v,u]$ получаем:

$$\frac{d}{d\lambda} D[u + \lambda v]\bigg|_{\lambda=0} = 2D_1[v,u] - 2D_2[v,\mu] - 2D_3[v,f].$$

Следовательно, если $u(x)$ — решение уравнения (2.2), то

$$\frac{d}{d\lambda} D[u + \lambda v]\bigg|_{\lambda=0} = 0, \tag{2.3}$$

и если выполнено равенство (2.3), то $u(x)$ удовлетворяет (2.2).

Покажем, что билинейная форма $D_1[v,u]$, помимо того, что она самосопряженная, является также положительно определенной. На множестве допустимых функций введем скалярное произведение:

$$(v,u) = \int\limits_0^1 \{v(x)u(x) + v'(x)u'(x)\}\, dx.$$

Далее будем пользоваться следующим неравенством:

$$v(x) = \int\limits_0^x v'(x)dx \;\Rightarrow\; |v(x)| \leqslant \int\limits_0^1 |v'(x)|dx \;\Rightarrow\; \int\limits_0^1 v^2(x)dx \leqslant \int\limits_0^1 (v'(x))^2 dx,$$

из которого получается оценка:

$$D_1[v,v] = \int\limits_0^1 \left\{p(x)(v'(x))^2 + q(x)v(x)^2\right\} dx + p(1)v(1)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_0^1 \left\{p(x)(v'(x))^2 + q(x)v^2(x)\right\} dx \geqslant \int\limits_0^1 p(x)(v'(x))^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \min_{x\in[0,1]} p(x) \int\limits_0^1 (v'(x))^2 dx \geqslant \frac{1}{2} \min_{x\in[0,1]} p(x) \int\limits_0^1 \left\{(v'(x))^2 + v^2(x)\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \min_{x\in[0,1]} p(x)\|v\|^2, \;\; \|v\|^2 = (v,v).$$

Замечание 2.1 *Самосопряженность и положительная определенность билинейной формы $D_1[v,u]$ — это условие применимости метода Ритца.*

Обратимся теперь непосредственно к построению приближенного решения методом Ритца. Явный вид функционала, который нужно минимизировать, следующий:

$$D[v] = \int\limits_0^1 \left\{p(x)(v'(x))^2 + q(x)v^2(x)\right\} dx + p(1)v^2(1) - 2p(1)v(1)\mu - 2\int\limits_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Построим систему базисных функций $\{\varphi_i(x)\}$, удовлетворяющих условию $\varphi_i(0) = 0$. В качестве такой системы можно взять собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \;\; x \in (0,1), \\ \varphi(0) = 0, \;\; \varphi'(1) = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \varphi_i(x) = \sin\frac{\pi(2i+1)x}{2}, \;\; i = 0,1,... \tag{2.4}$$

Так как в исходной задаче при $x = 1$ задано естественное граничное условие, в задаче Штурма-Лиувилля (2.4) при $x = 1$ можно взять условие Неймана, а не условие третьего рода, так как в этом случае собственные функции находятся в явном виде.

Пусть H_N — линейная оболочка $(N+1)$ базисной функции (так как в данном случае нумерация φ_i начинается с нуля), то есть любая функция $v_N \in H_N$ имеет вид:

$$v_N(x) = \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{N} C_i \sin \frac{\pi(2i+1)x}{2}.$$

Тогда

$$D[v_N] = \int_0^1 \left\{ p(x) \left(\sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i'(x) \right)^2 + q(x) \left(\sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(x) \right)^2 \right\} dx +$$

$$+ p(1) \left(\sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(1) \right)^2 - 2p(1)\mu \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(1) - 2 \int_0^1 f(x) \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(x) dx.$$

Будем рассматривать $D[v_N]$ как функцию параметров C_0, C_1, ..., C_N. Минимум этой функция достигается для тех значений коэффициентов C_0, C_1, ..., C_N, при которых выполнены условия:

$$\frac{\partial}{\partial C_n} D[v_N] = 0, \quad n = 0, 1, ..., N.$$

Запишем эти условия в явном виде (сокращая на множитель 2, получающийся в результате дифференцирования):

$$\int_0^1 \left\{ p(x) \varphi_n'(x) \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i'(x) + q(x) \varphi_n(x) \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(x) \right\} dx +$$

$$+ p(1) \varphi_n(1) \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(1) - p(1)\mu \varphi_n(1) - \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx = 0, \; n = 0, 1, ..., N. \qquad (2.5)$$

Замечание 2.2 *Отметим, что система равенств (2.5) эквивалентна следующей:*

$$\int_0^1 \left(p(x) v_N'(x) \varphi_n'(x) + q(x) v_N(x) \varphi_n(x) \right) dx + p(1) v_N(1) \varphi_n(1) =$$

$$= p(1)\mu \varphi_n(1) + \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 0, 1, ..., N. \qquad (2.6)$$

Система (2.6) может быть получена и без минимизации функционала. Для этого достаточно для каждого фиксированного n «спроектировать» исходную задачу на базисные элементы $\varphi_n(x)$, то есть, умножить уравнение в задаче (2.1) на базисный элемент $\varphi_n(x)$, проинтегрировать по x в пределах от 0 до 1, учитывая граничные условия, а потом в полученном равенстве вместо искомой функции $u(x)$ подставить $v_N(x)$. На этой *идее основан проекционный метод Галеркина построения приближенного решения.*

Система равенств (2.5) — это линейная система относительно искомых коэффициентов $C_0, C_1, ..., C_N$. Ее можно переписать в более удобном виде, введя обозначения:

$$A_{ni} = \int\limits_0^1 p(x)\varphi_n'(x)\varphi_i'(x)dx + \int\limits_0^1 q(x)\varphi_n(x)\varphi_i(x)dx + p(1)\varphi_n(1)\varphi_i(1),$$

$$F_n = p(1)\mu\varphi_n(1) + \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx.$$

При этом

$$\sum_{i=0}^{N} A_{ni}C_i = F_n, \;\; n = 0, 1, ..., N. \tag{2.7}$$

Решая систему, находим коэффициенты C_i, $i = 0, 1, ..., N$, и приближенное решение задачи

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^{N} C_i \sin\frac{\pi(2i+1)x}{2}.$$

Проиллюстрируем описанный метод в частном случае, когда $p(x) = (2-x)^2$, $q(x) = 0$, $f(x) = \dfrac{\pi^2}{4}(2-x)\sin\dfrac{\pi x}{2}$, $\mu = 2$. В этом случае точное решение задачи имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2-x}\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Найдем в явном виде элементы A_{ni} матрицы системы (2.7) и столбец ее правых частей:

$$A_{ni} = \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^1 (2-x)^2(2i+1)(2n+1)\cos\frac{\pi(2i+1)x}{2}\cos\frac{\pi(2n+1)x}{2}dx+$$

$$+\sin\frac{\pi(2i+1)}{2}\sin\frac{\pi(2n+1)}{2} = \frac{\pi^2(2i+1)(2n+1)}{8}(I_{ni}^1 + I_{ni}^2) + (-1)^{n+1},$$

где

$$I_{ni}^1 = \frac{2}{\pi^2(n+i+1)^2}\left[2 + (-1)^{n+i}\right],$$

$$I_{ni}^2 = \left[\begin{array}{l} \dfrac{7}{3}, \;\; \text{если } i = n, \\ \dfrac{2}{\pi^2(n-i)^2}\left[2 + (-1)^{n-i+1}\right], \;\; \text{если } i \neq n, \end{array}\right.$$

$$F_n = \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^1 (2-x)\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}dx + 2\sin\frac{\pi(2n+1)}{2} = \frac{\pi^2}{8}(I_n^1 - I_n^2) + 2(-1)^n,$$

где

$$I_0^1 = \frac{3}{2}, \quad I_n^1 = \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2}, \text{ если } n \neq 0; \;\; I_n^2 = \frac{1+(-1)^n}{\pi^2 (n+1)^2}.$$

Точное решение задачи можно видеть на рис. 1, а приближенные при $N = 3$, $N = 10$ и $N = 100$ на рис. 2.

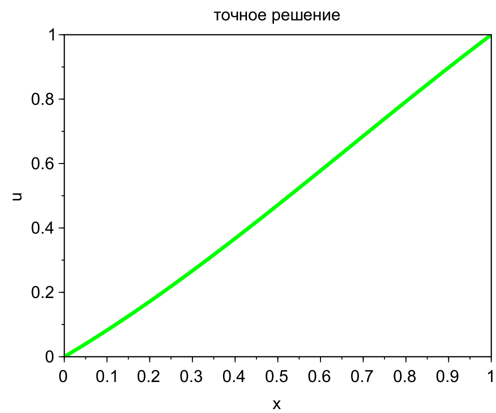

Рис. 1: Точное решение для рассмотренного в примере 2.1. частного случая

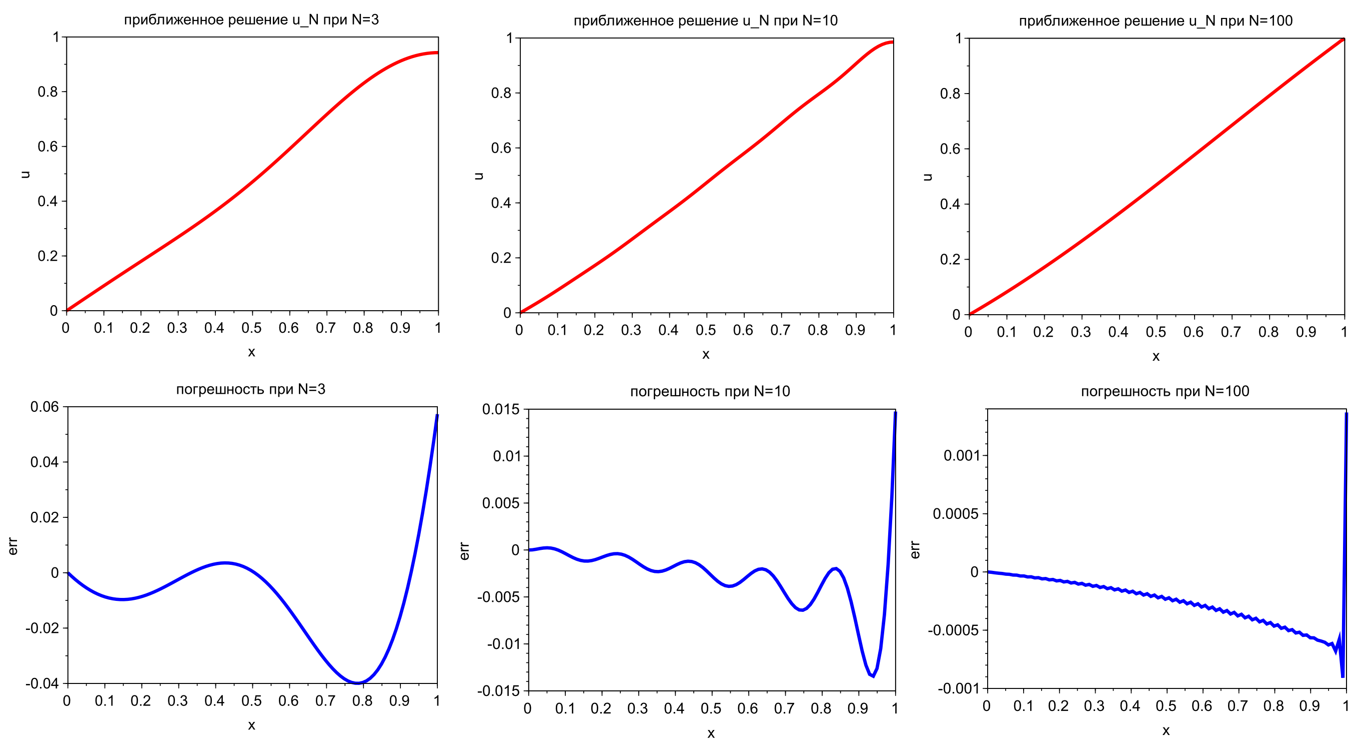

Рис. 2: Приближенные решения и их погрешности для рассмотренного в примере 2.1. частного случая при различных N

```
// Реализация метода Ритца
// Задание точек, в которых будем рассматривать значения функций (для построения графиков):-
M=100;
x=zeros(M,1);
h=1/(M-1);
for m=1:M
    x(m)=(m-1)*h;
end
pi=3.1415926535;
// точное решение задачи:
u=zeros(M,1);
for m=1:M
    u(m)=sin(pi*x(m)/2)/(2-x(m));
end
// приближенное решение задачи:
N=100;          // число базисных функций
A=zeros(N,N); // создание матрицы размером N на N
F=zeros(N,1); // создание столбца высотой N
for i=1:N
    for n=1:N
// Заполнение матрицы коэффициентов A, состоящей из A_in, где номер i идет по верпикали (номер строки), n - по горизонтали (номер столбца). Здесь учитываем, что, так как индексы могут меняться только от 1, а не от 0, как в теории, то теоретические i и n заменяем на (i-1) и (n-1).
        I1_in=2*(2+(-1)^(n+i-2))/(n-1+i)^2;
        if i==n
            I2_in=pi^2*7/3;
        else
            I2_in=2*(2+(-1)^(n-i+1))/(n-i)^2;
        end
        A(i,n)=(2*(n-1)+1)*(2*(i-1)+1)/8*(I1_in+I2_in)+(-1)^(n+i-2);
    end
// Заполнение столбца правых частей системы для коэффициентов. Как и в предыдущем случае, меняем i на (i-1).
    if i==1
        I1_i=pi^2*3/2;
    else
        I1_i=(1-(-1)^(i-1))/(i-1)^2;
    end
    I2_i=(1+(-1)^(i-1))/i^2;
    F(i)=(I1_i-I2_i)/8+2*(-1)^(i-1);
end
// Решение системы A*a=F для коэффициентов a_i
a=A^(-1)*F;
X_basis=zeros(M,N);
uN=zeros(M,1);
err=zeros(M,1);
for m=1:M
// задание базисных функций в точках x
    for i=1:N
        X_basis(m,i)=sin(pi*(2*(i-1)+1)*x(m)/2);
    end
end
for i=1:N
    uN=uN+a(i)*X_basis(:,i);
end
err=u-uN;
figure
plot(x, u,"g","linewidth", 2)
xlabel("x")
ylabel("u")
title("точное решение")

figure
plot(x, uN,"r","linewidth",  2)
xlabel("x")
ylabel("u")
title("приближенное решение")

figure
plot(x, err,"b","linewidth",  2)
xlabel("x")
ylabel("err")
title("погрешность")
```

Еще раз отметим, что в разобранном примере (как и во многих прикладных задачах) минимизируемый с помощью метода Ритца функционал можно разбить на несколько характерных слагаемых:

$$D[v] = D_1[v, v] - 2D_2[v, \mu] - 2D_3[v, f],$$

где $D_1[v, v]$ зависит только от функции v, $D_2[v, \mu]$ зависит от функции v и функции в правой части граничного условия задачи, $D_3[v, f]$ зависит от v и правой части уравнения f, причем для точного решения задачи u выполняется равенство

$$D_1[v, u] - D_2[v, \mu] - D_3[v, f] = 0 \tag{2.8}$$

при любой допустимой функции v.

Сходимость построенных по методу Ритца приближенных решений u_N к точному решению задачи при $N \to \infty$ можно строго обосновать, только если слагаемое D_1 удовлетворяет условиям симметричности:

$$D_1[u, v] = D_1[v, u] \tag{2.9}$$

для любых допустимых функций u и v и положительной определенности, то есть существует такое число $\gamma > 0$, что

$$D_1[v, v] \geqslant \gamma \|v\|^2 \tag{2.10}$$

для любой допустимой функции v, где квадрат нормы функции v определяется через скалярное произведение, введенное на множестве допустимых функций: $\|v\|^2 = (v, v)$. В рассмотренном примере указанные требования для слагаемого D_1 выполнены.

3 Проекционные методы. Метод Галеркина

Условия применимости вариационного метода Ритца выполняются далеко не для всех краевых задач математической физики. Обобщением метода Ритца является, например, метод Галеркина. Метод Галеркина принадлежит к классу так называемых *проекционных методов*. В разобранном в предыдущем пункте примере 2.1. было отмечено, что та же самая линейная система для коэффициентов приближенного решения u_N, которая получается при минимизации функционала, может быть получена вообще без использования функционала. Для этого нужно скалярно умножить (или *спроектировать*) правую и левую части рассматриваемого уравнения на элементы базиса, учесть граничные условия, а затем в полученные равенства вместо точного решения u подставить приближенное решение u_N. При этом нет необходимости требовать, чтобы D_1 был симметричным и положительно определенным. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 3.1. *Постройте приближенное решение задачи*

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u'(x) = f(x), \;\; x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

где $p(x) > 0$, методом Галеркина.

Решение. Прежде всего, выберем базис, по которому будем раскладывать приближенное решение. В данном случае при $x = 0$ и $x = 1$ поставлены условия Дирихле (главные), то есть их выполнения нужно требовать от всех допустимых функций. Следовательно, все базисные элементы $\{\varphi_i\}$ должны обращаться в нуль при $x = 0$ и $x = 1$. Выберем в качестве базисных функций систему собственных функций задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0, \;\; x \in (0,1), \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi_i(x) = \sin \pi i x, \;\; i = 1, 2, ...$$

Спроектируем уравнение в задаче (3.1) на базисные элементы с учетом граничных условий:

$$\underbrace{\int\limits_0^1 \{p(x)u'(x)\varphi_n'(x) - q(x)u(x)\varphi_n'(x)\}\, dx}_{D_1[\varphi_n, u]} = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx. \tag{3.2}$$

Очевидно, что в данном случае $D_1[v, u] \neq D_1[u, v]$, то есть для задачи не выполнены достаточные условия сходимости метода Ритца.

Будем искать приближенное решение в виде:

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} C_i \varphi_i(x).$$

Потребуем, чтобы это приближенное решение удовлетворяло равенствам (3.2) при всех $n = 1, 2, ..., N$:

$$\int\limits_0^1 \left\{ p(x) \sum_{i=1}^{N} C_i \varphi_i'(x)\varphi_n'(x) - q(x) \sum_{i=1}^{N} C_i \varphi_i(x)\varphi_n'(x) \right\} dx = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx, \tag{3.3}$$

или, что то же самое:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ni} C_i = F_n, \;\; n = 1, 2, ..., N,$$

где

$$A_{ni} = \int\limits_0^1 \{p(x)\varphi_i'(x)\varphi_n'(x) - q(x)\varphi_i(x)\varphi_n'(x)\}\, dx, \quad F_n = \int\limits_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Рассмотрим частный случай: $p(x) = q(x) = 1$, $f(x) = e^{2x}$. Точное решение при этом имеет вид

$$u(x) = -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1+e}{2}e^x - \frac{e}{2}.$$

Элементы матрицы системы для коэффициентов $C_1, ..., C_N$ и ее правые части имеют вид:

$$A_{ni} = \frac{\pi^2 n^2}{2}\delta_{ni} - \frac{n}{2}\left(\frac{1-(-1)^{n+i}}{n+i} + (1-\delta_{ni})\frac{1-(-1)^{i-n}}{i-n}\right), \quad F_n = -\frac{\pi n}{4+\pi^2 n^2}(e^2(-1)^n - 1).$$

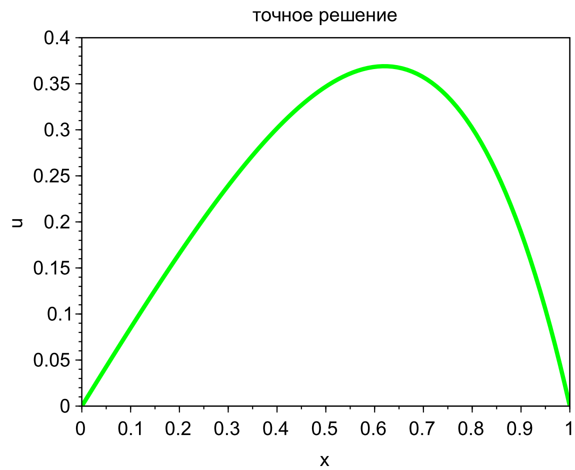

Рис. 3: Точное решение для рассмотренного в примере 3.1. частного случая

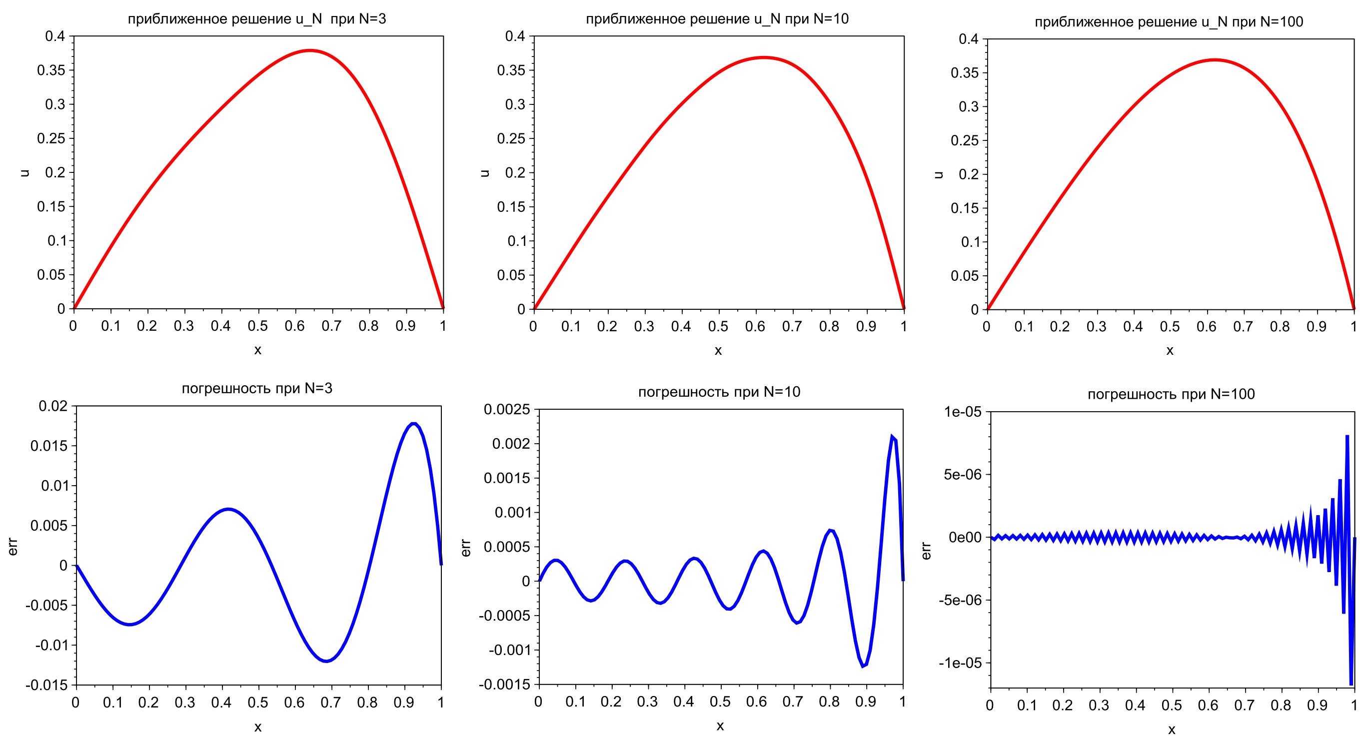

Рис. 4: Приближенные решения и их погрешности для рассмотренного в примере 3.1. частного случая при различных N

Сформулируем идею метода Галеркина в общем случае. Пусть в ограниченной области G с границей Σ нужно решить краевую задачу:

$$\begin{cases} L[u] = f(M), \quad M \in G, \\ l[u] = \mu(P), \quad P \in \Sigma, \end{cases} \tag{3.4}$$

где L — линейный дифференциальный оператор, l — оператор граничных условий. Выберем множество допустимых функций, введем на нем некоторое скалярное произведение, например

$$(u, v) = \int\limits_G uvdV,$$

и спроектируем уравнение на произвольную допустимую функцию v:

$$(v, L[u]) = (v, f).$$

В полученном равенстве применим формулы Грина (в многомерном случае) или интегрирование по частям (в одномерном случае), чтобы понизить порядок производных функции u под интегралом, одновременно учитывая граничные условия задачи (3.4). В результате придем к равенству вида

$$D_1[v, u] + D_2[v, u] = D_3[v, \mu] + D_4[v, f]. \tag{3.5}$$

Пусть слагаемое $D_1[v, u]$ является симметричным и положительно определенным, но эти условия могут не выполняться для слагаемого $D_2[v, u]$.

Назовем обобщенным решением задачи (3.4) допустимую функцию u, удовлетворяющую равенству (3.5) при любой допустимой функции v.

Будем считать, что обобщенное решение задачи (3.4) существует и оно единственно. Выберем базис $\{\varphi_i\}$ в пространстве допустимых функций и будем искать приближенное решение в виде $u_N = \sum\limits_{i=1}^{N} C_i \varphi_i$. Потребуем, чтобы приближенное решение удовлетворяло равенству (3.5), если в нем в качестве v последовательно брать элементы $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N$. В результате получим систему для коэффициентов $C_1, C_2, ..., C_N$:

$$\sum_{i=1}^{N} C_i \left\{ D_1[\varphi_n, \varphi_i] + D_2[\varphi_n, \varphi_i] \right\} = D_3[\varphi_n, \mu] + D_4[\varphi_n, f], \quad n = 1, 2, ..., N.$$