Лекция 5

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой лекции мы рассмотрим некоторые результаты об операторах со слабой особенностью и теорию поверхностей Ляпунова.

§ 0. План лекции

1. Свойства a), b) и c).
2. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.
3. Операторы со слабой особенностью.
4. Теорема о вполне непрерывности.
5. Поверхности Ляпунова. Обсуждение.
6. Общая формула для направляющих косинусов.

$$f(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \tau_x}(0) = 0.$$

7. Обозначения ρ и r.
8. Лемма 1: $|f(\xi')| \leqslant cr^{\alpha+1}$.
9. Лемма 2:

$$|\cos(\mathbf{n}_x, \mathbf{r})| \leqslant cr^{\alpha}, \quad |\cos(\nu_\xi, \mathbf{r})| \leqslant cr^{\alpha}.$$

10. Лемма 3:

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) \geqslant \frac{1}{2}, \quad |\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leqslant a\rho^{\alpha}, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

11. Операторы со слабой особенностью на поверхности Ляпунова.
12. Теорема о вполне непрерывности.

§ 1. Операторы со слабой особенностью в $\mathbb{R}^N$

Пусть D и G — это два измеримых ограниченных множества из $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра:

$$U(x) := \int\limits_G f(x,y)\,dy, \quad x \in D. \tag{1.1}$$

Мы в дальнейшем будем изучать случай несобственных интегралов вида (1.1), т. е. когда функция $f(x,y)$ имеет особенность при $x = y$. Дадим определение равномерной сходимости интеграла (1.1) по $x \in D$.

Определение 1. *Будем говорить, что интеграл* (1.1) *сходится равномерно в* D, *если выполнены следующие два условия*:

(a) *при любом фиксированном* $x \in D$ *функция* $f(x,y)$ *интегрируема по* $y \in G$;

(b) *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого измеримого множества* $g \subset G$ *такого, что* $\mu(g) < \delta$ *имеем*

$$\left|\int\limits_g f(x,y)\,dy\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Дадим определение ещё одного важного свойства.

Определение 2. *Будем говорить, что функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет свойству* (c), *если для всякой точки* $x_0 \in D$ *и для всякого* $\eta > 0$ *найдётся такое* $g(x_0,\eta) \subset G$ $(x_0 \in g(x_0,\eta))$, *что* $\mu(g(x_0,\eta)) < \eta$ *и функция* $f(x,y)$ *непрерывна в точке* x_0 *равномерно по* $y \in G \backslash g(x_0,\eta)$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет свойствам* (a), (b) *и* (c). *Тогда функция* $U(x)$, *определённая формулой* (1.1), *является непрерывной в* D.

Доказательство.

Пусть $x_0 \in D$ — это произвольная фиксированная точка. Интеграл (1.1) сходится равномерно (свойства (a) и (b)), поэтому, с одной стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\eta > 0$ и множество $g(x_0,\eta) \subset G$ такое, что $\mu(g(x_0,\eta)) < \eta$ и

$$\left|\int\limits_{g(x_0,\eta)} f(x,y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad x \in G. \tag{1.2}$$

С другой стороны, при таком фиксированном $\eta > 0$ выберем число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ настолько малым, чтобы (свойство (c)) при

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(G)}, \quad \forall\, y \in G \backslash g(x_0,\eta). \tag{1.3}$$

Итак, в силу (1.2) и (1.3) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{gathered}
|U(x)-U(x_0)| = \left|\int\limits_G [f(x,y)-f(x_0,y)]\;dy\right| \leqslant \\
\leqslant \left|\int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} [f(x,y)-f(x_0,y)]\,dy\right| + \left|\int\limits_{g(x_0,\eta)} [f(x,y)-f(x_0,y)]\,dy\right| \leqslant \\
\leqslant \int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} |f(x,y)-f(x_0,y)|\;dy + \\
+ \int\limits_{g(x_0,\eta)} |f(x,y)|\;dy + \int\limits_{g(x_0,\eta)} |f(x_0,y)|\;dy < \frac{\varepsilon}{3\mu(G)}\mu(G) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Теорема доказана.

Перейдём к исследованию *операторов со слабой особенностью.* Дадим определение.

Определение 3. *Операторы вида* [1])

$$
K(\rho)(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_G \rho(y)\frac{A(x,y)}{r^\lambda}\,dy, \quad r=|x-y|, \quad x\in G, \tag{1.5}
$$

где $G\subset\mathbb{R}^N$ — это ограниченная область, $A(x,y)$ — измеримая и ограниченная в $G\otimes G$ и $0\leqslant\lambda<N$, называются интегральными операторами со слабой особенностью.

Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть $\rho(x)\in L^p(G)$ при $1<p\leqslant\infty$ и*

$$
\lambda p' < N, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad A(x,y)\in\mathbb{C}(\overline{G}\otimes\overline{G}).
$$

Тогда интегральный оператор со слабой особенностью (1.5) *вполне непрерывен как оператор*

$$
K : L^p(G) \to \mathbb{C}(\overline{G}).
$$

Доказательство.

Доказательство проведём в два этапа и за несколько шагов.

Этап I. Прежде всего докажем, что

$$
K : L^p(G) \to \mathbb{C}(\overline{G}).
$$

[1]) Здесь мы символом $\int\limits_G$ обозначаем N–кратный интеграл по измеримому множеству $G\subset\mathbb{R}^N$.

С этой целью нам нужно проверить выполнимость свойств (a), (b) и (c) определений 1 и 2.

Шаг 1. Предположим, что $1 < p < +\infty$ и проверим свойства (a), (b) равномерной сходимости интеграла в правой части (1.5). Заметим, что в силу неравенства Гёльдера справедливо неравенство

$$\int\limits_G \frac{|A(x,y)|}{|x-y|^\lambda}|\rho(y)|\,dy \leqslant M\left(\int\limits_G |\rho(y)|^p\,dy\right)^{1/p}\left(\int\limits_G \frac{dy}{|x-y|^{\lambda p'}}\right)^{1/p'}, \tag{1.6}$$

где

$$M := \sup_{x,y\in G}|A(x,y)|.$$

Поскольку множество $G \subset \mathbb{R}^N$ ограничено, то

$$H := \sup_{x,y\in G}|x-y| < +\infty.\ ^{1)}$$

Область $G \subset O(x,H) := \left\{y \in \mathbb{R}^N :\ |y-x| < H\right\}$ и поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_G \frac{dy}{|x-y|^{\lambda p'}} < \int\limits_{O(x,H)} \frac{dy}{|x-y|^{\lambda p'}}. \tag{1.7}$$

Перейдём к сферической системе координат с полюсом в точке $x \in G$. Тогда получим следующее равенство:

$$\int\limits_{O(x,H)} \frac{dy}{|x-y|^{\lambda p'}} = \int\limits_0^H \int\limits_{\partial O(0,1)} \frac{1}{r^{\lambda p'}} r^{N-1}\,dS\,dr =$$

$$= \omega_N \int\limits_0^H \frac{1}{r^{\lambda p'-N+1}}\,dr = \frac{\omega_N H^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'} < +\infty$$

при условии, что $\lambda p' < N$. Таким образом, подынтегральная функция в (1.5) интегрируема и свойство (a) определения 1 выполнено.

Шаг 2. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $g \subset G$ — это измеримое подмножество, то опять в силу неравенства Гёльдера имеет место оценка вида (1.6):

$$\left|\int\limits_g \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda}\rho(y)\,dy\right| \leqslant M_1\left(\int\limits_g |\rho(y)|^p\,dy\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

[1)] Величину H называют диаметром множества G.

при условии $\lambda p^{'} < N$, где

$$M_1 = M\left(\frac{\omega_N H^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'}\right)^{1/p'}. \tag{1.9}$$

В силу теоремы Лебега об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [1] найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left(\int\limits_g |\rho(y)|^p\,dy\right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{M_1} \quad \text{при} \quad \mu(g) < \delta.$$

Отсюда приходим к выводу о том, что

$$\left|\int\limits_g \frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda}\rho(y)\,dy\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \mu(g) < \delta.$$

Свойство (b) определения 1 доказано. Значит, интеграл в правой части равенства (1.5) сходится равномерно по $x \in G$.

Шаг 3. Докажем, что подынтегральная функция в формуле (1.5) удовлетворяет свойству (c) в том случае, если функция $\rho(y) \in \mathbb{C}(\overline{G})$. [2] Тогда для любого $\eta > 0$ в качестве множества $g(x_0,\eta)$ возьмём $O(x_0,r_0) \cap G$ причём

$$\mu(g(x_0,\eta)) \leqslant \mu(O(x_0,r_0)) = \eta = \frac{\omega_N}{N}r_0^N \Rightarrow r_0 = \left(\frac{N\eta}{\omega_N}\right)^{1/N}.$$

Ясно, что на множестве $g(x_0,\eta)$ подынтегральная функция в формуле (1.5) равномерно по $y \in G\backslash g(x_0,\eta)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Следовательно, свойство (c) определения 3 выполнено в случае $\rho(y) \in \mathbb{C}(G)$.

Шаг 4. Пусть теперь $\rho(y) \in L^p(G)$. Тогда имеет место плотное вложение

$$\mathbb{C}(\overline{G}) \overset{ds}{\subset} L^p(G).$$

Тогда для $\rho(y) \in L^p(G)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая функция $\rho_0(y) \in \mathbb{C}(\overline{G})$, что имеет место следующее неравенство

$$\|\rho - \rho_0\| < \frac{\varepsilon}{9M_1}, \tag{1.10}$$

---

[1] Смотри теорему 5 лекции 2 певой части первого тома курса лекций М. О. Корпусова и А. А. Панина «Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу».

[2] Напомним, что согласно определению 3 множество $G \subset \mathbb{R}^N$ — это замкнутое и ограниченное множество, т. е. компакт.

где постоянная M_1 определена равенством (1.9). Нам согласно цепочки неравенств (1.4) из теоремы 1 нужно получить оценку для интеграла

$$I(x,x_0) := \int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} \left[\rho(y)\frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda} - \rho(y)\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\lambda}\right] dy.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|I(x,x_0)| \leqslant \left|\int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} \left[\rho_0(y)\frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda} - \rho_0(y)\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\lambda}\right] dy\right| + \\ + \left|\int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} [\rho(y)-\rho_0(y)]\frac{A(x,y)}{|x-y|^\lambda}\, dy\right| + \\ + \left|\int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} [\rho(y)-\rho_0(y)]\frac{A(x_0,y)}{|x_0-y|^\lambda}\, dy\right| = \\ =: I_1(x,x_0) + J(x) + J(x_0). \quad (1.11)$$

С одной стороны, в силу результата шага 3 найдётся такое достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$I_1(x,x_0) < \frac{\varepsilon}{9} \quad \text{при} \quad \mu(g(x_0,\eta)) < \eta \quad \text{и} \quad |x-x_0| < \delta(\varepsilon), \quad x \in g(x_0,\eta). \quad (1.12)$$

С другой стороны, для интеграла $J(x)$ имеет место цепочка неравенств

$$J(x) \leqslant \int\limits_{G\setminus g(x_0,\eta)} |\rho(y)-\rho_0(y)|\,\frac{|A(x,y)|}{|x-y|^\lambda}\, dy \leqslant M_1\|\rho-\rho_0\|_p < \frac{\varepsilon}{9} \quad (1.13)$$

для всех $|x-x_0| < \delta(\varepsilon)$, где M_1 определена равенством (1.9). Таким образом, в силу неравенств (1.12) и (1.13) из оценки (1.11) приходим к неравенству

$$|I(x,x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее в силу неравенства (1.4) мы приходим к утверждению теоремы 1 для функций $\rho(y)$ уже из $L^p(G)$.

Этап II. Итак, на первом этапе мы доказали, что при условиях теоремы

$$K : L^p(G) \to \mathbb{C}(\overline{G}).$$

Более того, этот оператор ограничен и его норма

$$\|K\| := \sup_{\|\rho\|_p \leqslant 1} \|K(\rho)\|_{\mathbb{C}(G)} \leqslant M_1,$$

где M_1 определена формулой (1.9). Как известно, *линейный ограниченный оператор непрерывен*. Поэтому для доказательства вполне непрерывности оператора K нам нужно доказать его компактность, т. е. доказать, *что для всякого ограниченного множества* $R \subset L^p(G)$

$$\|\rho\|_p \leqslant c_1 < +\infty \quad \textit{для всех} \quad \rho(x) \in R,$$

где постоянная c_1 *не зависит от* ρ, *множество*

$$\mathfrak{M} := \{K(\rho) : \ \|\rho\|_p \leqslant c_1, \ \rho(x) \in L^p(G)\} \tag{1.14}$$

компактно в $\mathbb{C}(\overline{G})$. Доказательство проведём за несколько шагов.

Шаг 1. $\mathfrak{M}$ ограничено в $\mathbb{C}(\overline{G})$. Действительно, имеет место цепочка неравенств

$$\sup_{\rho\in R}\|K(\rho)\|_{\mathbb{C}(G)} \leqslant \sup_{\|\rho\|_p \leqslant c_1} M_1\|\rho\|_p = c_1 M_1 < +\infty$$

Шаг 2. $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно в $\mathbb{C}(\overline{G})$.

В силу неравенства Гёльдера для произвольного $\eta > 0$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|K(\rho)(x+\Delta x) - K(\rho)(x)| = \left|\int_G \rho(y)\left[\frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda}\right] dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\rho\|_p \left[\int_G \left|\frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda}\right|^{p'} dy\right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left\{\int_{G\setminus\{r<\eta\}} \left|\frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda}\right|^{p'} dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\{r<\eta\}} \left|\frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda}\right|^{p'} dy\right\}^{1/p'},$$

где $r := |x-y|$ и $r_1 := |x+\Delta x - y|$. Применяя несколько раз неравенство Минковского, получим отсюда неравенство

$$|K(\rho)(x+\Delta x) - K(\rho)(x)| \leqslant J_1 + J_2 + J_3, \tag{1.15}$$

$$J_1 := c_1 \left[\int_{G\setminus\{r<\eta\}} \left|\frac{A(x+\Delta x, y)}{r_1^\lambda} - \frac{A(x,y)}{r^\lambda}\right|^{p'} dy\right]^{1/p'}, \tag{1.16}$$

$$J_2 := c_1 \left[\int\limits_{\{r<\eta\}} \frac{|A(x+\Delta x, y)|}{r_1^{p'\lambda}}\, dy \right]^{1/p'}, \tag{1.17}$$

$$J_3 := c_1 \left[\int\limits_{\{r<\eta\}} \frac{|A(x, y)|}{r^{p'\lambda}}\, dy \right]^{1/p'}. \tag{1.18}$$

Прежде всего для интеграла J_3 имеет место следующая оценка:

$$J_3 \leqslant c_1 M \left[\int\limits_{\{|x-y|<\eta\}} \frac{1}{|x-y|^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} \leqslant c_1 M \left[\frac{\omega_N \eta^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'} \right]^{1/p'}, \tag{1.19}$$

поскольку $N > \lambda p'$. Для оценки интеграла J_2 предположим, что

$$|\Delta x| < \frac{\eta}{2} \quad \text{и} \quad r < \eta \Rightarrow r_1 \leqslant r + \frac{\eta}{2} < \frac{3}{2}\eta.$$

Поэтому из условия, что $r < \eta$ вытекает, что $r_1 < 3\eta/2$. Следовательно, справедлива цепочка неравенств

$$J_2 \leqslant c_1 M \left[\int\limits_{\{|x-y|<\eta\}} \frac{1}{|x+\Delta x-y|^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 M \left[\int\limits_{\{|x+\Delta x-y|<3\eta/2\}} \frac{1}{|x+\Delta x-y|^{\lambda p'}} \right]^{1/p'} =$$

$$= c_1 M \left[\frac{\omega_N (3\eta/2)^{N-\lambda p'}}{N-\lambda p'} \right]^{1/p'}. \tag{1.20}$$

В силу оценок (1.19) и (1.20) выберем и фиксируем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$J_2 + J_3 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.21}$$

Для оценки интеграла J_1 заметим, что при $r \geqslant \eta$ и при

$$|\Delta x| < \eta_1 := \min\{\eta/2, \delta(\varepsilon)\}$$

имеет место следующая цепочка оценок снизу

$$r_1 = |x+\Delta x-y| \geqslant |x-y| - |\Delta x| = r - |\Delta x| \geqslant \eta - \eta_1 > 0.$$

Следовательно, подынтегральное выражение в J_1 не имеет особенности при любом малом фиксированном $\eta > 0$. Итак, справедлива следующая оценка:

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\Delta x| < \delta. \tag{1.22}$$

Из (1.21), (1.22) и (2.14) вытекает оценка

$$|K(\rho)(x + \Delta x) - K(\rho)(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\Delta x| < \delta(\varepsilon), \tag{1.23}$$

где величина $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от ρ. Следовательно, множество $\mathfrak{M}$ равностепенно непрерывно.

Таким образом, в силу теоремы Арцела множество $\mathfrak{M}$, определённое формулой (1.14), компактно в $\mathbb{C}(\overline{G})$.

Теорема доказана.

§ 2. Поверхности Ляпунова

Дадим определение.

Определение 4. *Поверхностью $\Gamma \in \mathbb{R}^N$ класса $\mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ при $\alpha \in (0,1]$ или поверхностью Ляпунова называется поверхность, которая обладает следующими свойствами:*

(i) *существует непрерывное поле нормалей n_x в каждой точке $x \in \Gamma$;*

(ii) *существует такая постоянная $d > 0$ одна и та же для всей поверхности Γ, что шар*

$$O(x, d) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |y - x| < d \right\} \quad \textit{для всякой точки} \quad x \in \Gamma$$

вырезает из Γ участок $\Gamma(x) := \Gamma \cap O(x, d)$, который в местной системе координат $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, связанной с точкой x, может быть задан уравнением вида

$$\xi_N = f(\xi^{'}), \quad \xi^{'} = (\xi_1, ..., \xi_{N-1}), \tag{2.1}$$

причём в качестве орта соответствующего координате ξ_N выбирается вектор внешней нормали n_x в точке $x \in \Gamma$, а остальные орты лежат в касательной плоскости к точке x;

(iii) *существуют такие постоянные $a > 0$ и $\alpha \in (0,1]$, что если $\xi, \zeta \in \Gamma(x)$ и τ_x — это произвольный вектор из касательной плоскости к точке $x \in \Gamma$, то имеет место оценка*

$$\left| \frac{\partial f(\xi^{'})}{\partial \tau_x} - \frac{\partial f(\zeta^{'})}{\partial \tau_x} \right| \leqslant a \left[\sum_{k=1}^{N-1} (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{\alpha/2}. \tag{2.2}$$

Обсуждение определения поверхностей Ляпунова. Первое свойство определения 4 мы будем называть *свойством существования непрерывного поля нормалей*. Приведём примеры и контрпримеры на следующем рисунке: Сферу $S_d(x) := \partial O(x, d)$ будем на-

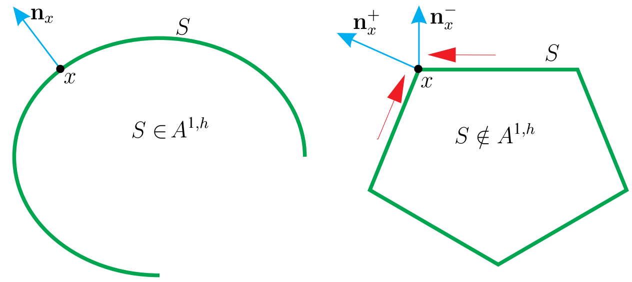

Рис. 1. Два примера существования и несуществования непрерывного поля нормалей.

зывать сферой Ляпунова, а второе свойство будем называть *свойство существования сферы Ляпунова*. Наконец, третье свойство, как мы

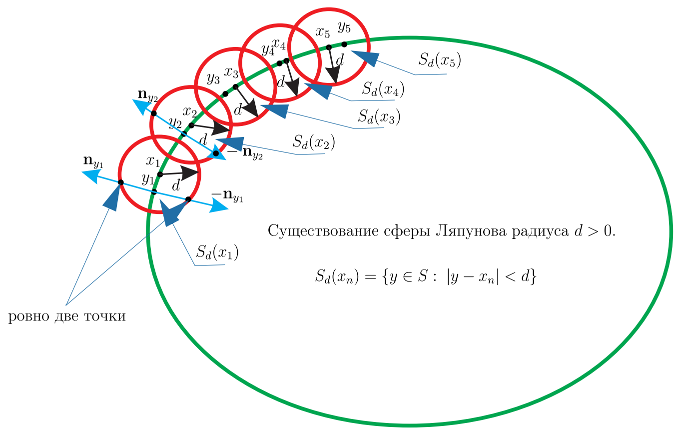

Рис. 2. Существование сферы Ляпунова.

покажем ниже, означает, в частности, *гёльдеровскую непрерывность поля нормалей*.

З а м е ч а н и е 1. Плоскость $\xi_N = 0$ касается поверхности Γ в точке x, которая является началом местной системы координат, поэтому, во–первых, в местной системы координат точка x имеет следующие координаты

$$\xi_N = 0, \quad \xi^{'} = 0 \Rightarrow 0 = f(0, \ldots, 0).$$

во–вторых, рассмотрим локальную запись поверхности $\Gamma(x)$ в следующем виде:

$$F(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N) := \xi_N - f(\xi^{'}) = 0.$$

Согласно известному результату дифференциальной геометрии направляющие косинусы вектора внешней нормали n_x к поверхности

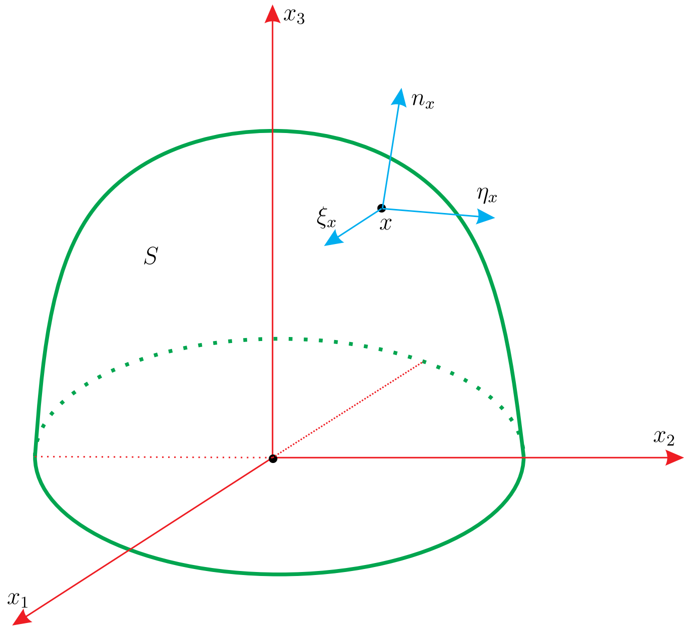

Рис. 3. Локальная система координат.

$F(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N) = 0$ в точке x равны

$$\cos(n_x, \xi_k) = \frac{1}{|\,\mathbf{grad}\, F|} \frac{\partial F}{\partial \xi_k}, \quad k = \overline{1, N}. \tag{2.3}$$

Отсюда поскольку при нашем выборе локальной системы координат $(\xi^{'}, \xi_N)$ имеем

$$\cos(n_x, \xi_k) = 0 \quad \text{для всех} \quad k = \overline{1, N-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \xi_k}(0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0, ..., 0)}{\partial \xi_k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(0, ..., 0)}{\partial \tau_x} = 0$$

для любого вектора τ_x из касательной плоскости к точке $x \in \Gamma$.

Обозначения. Пусть $\xi \in \Gamma(x)$. Расстояние между точками x и ξ будем обозначать через r, а расстояние между x и $\xi^{'} = (\xi_1, ..., \xi_{N-1}, 0)$ будем обозначать посредством ρ. В выбранной локальной ортогональной декартовой системе координат $(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N)$ точка $x \in \Gamma(x)$ имеет координаты

$$\xi_N = 0, \quad \xi^{'} = \underbrace{(0, ..., 0)}_{N-1},$$

поэтому справедливы следующие равенства:

$$\rho^2 = |\xi^{'} - x|^2 = |\xi^{'} - 0|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2, \tag{2.4}$$

$$r^2 = |\xi - x|^2 = |\xi - 0|^2 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^2 = \rho^2 + \xi_N^2. \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу свойства (iii), если положить $\zeta = x$, с учётом

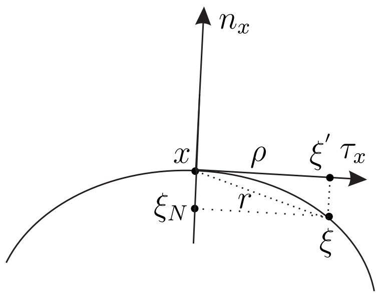

Рис. 4. К формулам (2.4).

доказанных выше равенств

$$f(0, ..., 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_k}(0, ..., 0) = 0 \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}$$

получим следующую оценку:

$$\left| \frac{\partial f(\xi^{'})}{\partial \xi_k} \right| \leqslant a\rho^\alpha \leqslant ar^\alpha \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{2.6}$$

Более того, для всякого направления τ_x в касательной к точке $x \in \Gamma$ плоскости имеет место такая же оценка

$$\left| \frac{\partial f(\xi^{'})}{\partial \tau_x} \right| \leqslant a\rho^\alpha \leqslant ar^\alpha. \tag{2.7}$$

Справедливо следующее утверждение:
Лемма 1. *Имеют место следующие неравенства*:

$$\left| f(\xi^{'}) \right| \leqslant cr^{\alpha+1}, \quad c := \frac{a}{\alpha + 1}, \tag{2.8}$$

$$r^2 \leqslant (1 + c^2 d^{2\alpha})\rho^2 \tag{2.9}$$

где $\xi = (\xi^{'}, \xi_N) \in \Gamma(x)$, $r = |x - \xi| = |0 - \xi|$ *и* $\rho = |x - \xi^{'}| = |0 - \xi^{'}|$.

Доказательство.

Пусть $\xi = (\xi^{'}, \xi_N) \in \Gamma(x)$. Точки x и $\xi^{'}$ лежат на касательной к точке x плоскости $\xi_N = 0$. Соединим точки x и $\xi^{'}$ отрезком

$$[x, \xi^{'}] = [0, \xi^{'}] = \left\{\zeta^{'} \in (1-t)x + t\xi^{'} \equiv (1-t)0 + t\xi^{'},\ t \in [0,1]\right\}.$$

Пусть

$$\rho^{'} := |\zeta^{'} - x| = |\zeta^{'} - 0|.$$

Заметим, что

$$f(\xi^{'}) = \int\limits_0^\rho \frac{\partial f(\zeta^{'})}{\partial \rho^{'}} d\rho^{'},$$

где интегрирование ведётся по отрезку $[x, \xi^{'}]$. Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$|\xi_N| = |f(\xi^{'})| = \left|\int\limits_0^\rho \frac{\partial f(\zeta^{'})}{\partial \rho^{'}} d\rho^{'}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\rho \left|\frac{\partial f(\zeta^{'})}{\partial \rho^{'}}\right| d\rho^{'} \leqslant a \int\limits_0^\rho \rho^{'\alpha} d\rho^{'} = \frac{a}{\alpha+1}\rho^{\alpha+1} \leqslant cr^{1+\alpha}. \quad (2.10)$$

Неравенство (2.8) доказано. Докажем неравенство (2.9). В силу (2.10) имеет место цепочка неравенств

$$r^2 = \rho^2 + \xi_N^2 \leqslant \rho^2 + c^2\rho^{2\alpha+2} \leqslant (1 + c^2 d^{2\alpha})\rho^2,$$

поскольку $\Gamma(x) \subset O(x, d)$.

Лемма доказана.

Замечание 2. Очевидно, радиус $d > 0$ сферы Ляпунова можно выбрать сколь угодно малым и поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$ad^\alpha \leqslant 1 \Rightarrow cd^\alpha = \frac{a}{1+\alpha} d^\alpha < 1.$$

И тогда из неравенства (2.9) получим цепочку неравенств

$$r \leqslant \sqrt{2}\,\rho \leqslant 2\rho \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Gamma(x). \quad (2.11)$$

Обозначения. Обозначим через n_x и ν_ξ — нормали к Γ в точках x, $\xi \in \Gamma(x)$ соответственно. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть $\xi \in \Gamma(x)$, тогда справедливы следующие неравенства*:

$$|\cos(n_x, \mathbf{r})| \leqslant c|\mathbf{r}|^\alpha, \quad \mathbf{r} = \xi - x = \xi - 0, \quad (2.12)$$

$$|\cos(\nu_\xi, \mathbf{r})| \leqslant c|\mathbf{r}|^\alpha, \quad \mathbf{r} = \xi - x = \xi - 0, \quad (2.13)$$

где $c = a/(1+\alpha)$.

Доказательство.

Докажем сначала (2.12). Действительно,

$$|\cos(n_x, \mathbf{r})| = \frac{|\langle n_x, \xi - x\rangle|}{|n_x||\xi - x|} = \frac{|\xi_N|}{r} \leqslant cr^\alpha,$$

где мы воспользовались формулой (2.8). Для доказательства формулы (2.13) нужно выбрать локальную систему координат в точке $\xi \in \Gamma$, причём тогда $x \in \Gamma(\xi)$, и повторить только что приведённые рассуждения с заменой x на ξ и n_x на ν_ξ.

Лемма доказана.

Для дальнейшего нам потребуются оценки для направляющих косинусов нормали ν_ξ относительно локальной системы координат (ξ', ξ_N). Итак, справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Справедливы оценки*

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) \geqslant \frac{1}{2}, \quad |\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leqslant a\rho^\alpha \leqslant ar^\alpha, \quad k = \overline{1, N-1} \tag{2.14}$$

для всех $\xi \in \Gamma(x)$.

Доказательство.

Согласно формуле дифференциальной геометрии имеем

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) = \frac{1}{|\,\mathbf{grad}\, F|}\frac{\partial F}{\partial \xi_N}, \tag{2.15}$$

где $F = \xi_N - f(\xi')$. Поэтому из (2.15) получим следующее равенство:

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) = \left[1 + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2} = \left[1 + \left(\frac{\partial f(\xi')}{\partial \tau_x}\right)^2\right]^{-1/2}, \tag{2.16}$$

где τ_x — направление градиента функции $f(\xi')$. В силу неравенств (2.7) для всех $\xi \in \Gamma(x)$ имеет место следующая оценка снизу:

$$\cos(\nu_\xi, \xi_N) \geqslant \left(1 + a^2\rho^{2\alpha}\right)^{-1/2} \geqslant \left(1 + a^2 d^{2\alpha}\right)^{-1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

Для остальных направляющих косинусов имеет место следующая формула из дифференциальной геометрии:

$$\cos(\nu_\xi, \xi_k) = \pm\frac{\partial F}{\partial \xi_k}\frac{1}{|\,\mathbf{grad}\, F|} =$$
$$= \mp\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\left[1 + \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\right)^2\right]^{-1/2} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{2.18}$$

Отсюда получаем оценку сверху для всех $\xi \in \Gamma(x)$

$$|\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leqslant \left|\frac{\partial f(\xi')}{\partial \xi_k}\right| \leqslant a\rho^\alpha \leqslant ar^\alpha \quad \text{при} \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{2.19}$$

Лемма доказана.

§ 3. Операторы со слабой особенностью на замкнутой поверхности Ляпунова

В этом параграфе мы рассмотрим интегральные операторы, следующего вида:

$$V(\mu)(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi) \frac{A(x,\xi)}{r^\lambda}\, d\xi, \quad r := |x-\xi|, \quad x \in \Gamma, \ ^{1)} \tag{3.1}$$

где $\Gamma \in \mathbb{R}^N$ — это замкнутая поверхность Ляпунова ($\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$). Ясно, что Γ является многообразием размерности $N-1$. Относительно параметра λ предположим, что

$$0 \leqslant \lambda < N-1.$$

Справедливо следующее утверждение:
Теорема 3. *Если* $\mu(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$ *и*

$$0 \leqslant \lambda < N-1, \quad A(x,\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma \otimes \Gamma).$$

Тогда интегральный оператор $V(\mu)$ *действует*

$$V(\mu) : \mathbb{C}(\Gamma) \to \mathbb{C}(\Gamma)$$

и является вполне непрерывным.

Доказательство.

В целом доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 с учётом того, что для пространств $L^p(\Gamma)$ также справедливо неравенство Гёльдера следующего вида:

$$\int\limits_\Gamma f(\xi)g(\xi)\, d\xi \leqslant \left(\int\limits_\Gamma |f(\xi)|^p\, d\xi\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Gamma |g(\xi)|^{p'}\, d\xi\right)^{1/p'} \tag{3.2}$$

для всех $f(\xi) \in L^p(\Gamma)$, $g(\xi) \in L^{p'}(\Gamma)$, где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > 1.$$

[1)] Здесь символом $\int\limits_\Gamma$ мы обозначили поверхностный интеграл по $(N-1)$–мерному многообразию Γ.

Главная часть доказательства этой теоремы — это доказательство конечности следующего интеграла:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{|x-\xi|^{\lambda p'}}\, d\xi < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma, \quad \lambda p^{'} < N-1. \tag{3.3}$$

Докажем эту оценку.

□ Действительно, построим вокруг точки $x \in \Gamma$ шар Ляпунова $O(x,d)$ и представим замкнутую поверхность Ляпунова Γ в следующем виде:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 := \Gamma \cap O(x,d), \quad \Gamma_2 := \Gamma \backslash O(x,d),$$

тогда

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{|x-\xi|^{\lambda p'}}\, d\xi = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{1}{|x-\xi|^{\lambda p'}}\, d\xi + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{1}{|x-\xi|^{\lambda p'}}\, d\xi := I_1 + I_2.$$

Ясно, что

$$0 < I_2 \leqslant c(d)$$

и нам нужно оценить только интеграл I_1. Введём местную систему координат $(\xi_1, ..., \xi_{N-1}, \xi_N)$ с центром в точке x и с осью ξ_N направленной по нормали n_x в этой точке. Положим в локальной системе координат

$$r^2 = |x-\xi|^2 = |0-\xi|^2 = \sum_{k=1}^{N} \xi_k^2,$$

$$\rho^2 = |x-\xi^{'}|^2 = |0-\xi^{'}|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \xi_k^2, \quad \rho \leqslant r.$$

В локальной системе координат обозначим через $G^{'}(x)$ проекцию куска Γ_1 поверхности Γ на касательную плоскость $\xi_N = 0$. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$I_1 = \int\limits_{G^{'}(x)} \frac{1}{r^{\lambda p'}} \frac{d\xi_1\, d\xi_2\, \cdots\, d\xi_{N-1}}{cos(\nu_\xi, \xi_N)} \leqslant 2 \int\limits_{G^{'}(x)} \frac{1}{\rho^{\lambda p'}} d\xi_1\, d\xi_2\, \cdots\, d\xi_{N-1}, \tag{3.4}$$

где мы воспользовались доказанной ранее оценкой $\cos(\nu_\xi, \xi_N) \geqslant 1/2$ на Γ_1. Введём обозначение.

$$h := \sup_{z_1, z_2 \in G^{'}(x)} |z_1 - z_2| < +\infty,$$

$$G^{'}(x) \subset \overline{O(x,h)} := \left\{\xi \in \mathbb{R}_x^{N-1} : \, |\xi - x| \leqslant h\right\},$$

где символом $\mathbb{R}_x^{N-1}$ мы обозначили касательную плоскость в точке $x \in \Gamma$. Продолжим оценку (3.4). С этой целью перейдём к $(N-1)$–

мерной системе сферических координат на плоскости $\mathbb{R}_x^{N-1}$ с центром в точке $x \in \Gamma$.

$$I_1 \leqslant 2\omega_{N-1} \int\limits_0^h \frac{1}{z^{\lambda p'}} z^{N-2}\, dz = 2\omega_{N-1} \frac{h^{N-1-\lambda p'}}{N-1-\lambda p'}$$

при условии $\lambda p' < N-1$, которое выполнимо, поскольку $\lambda < N-1$ и $p > 1$ достаточно велико. Заметим, что $\mathbb{C}(\Gamma) \subset L^p(\Gamma)$ для всех $p > 1$. $\boxtimes$

Теорема доказана.