Лекция 11

ЛЕММА ЖИРО

§ 0. План лекции

1. Предварительные условия.
2. Теорема типа Жиро.
3. Контрпример к теореме Жиро в случае области с угловой точкой на границе.
4. Принцип максимума модуля.
5. Единственность решения задачи Дирихле.
6. Единственность решения задачи Неймана.

§ 1. Лемма Жиро

Пусть n_x — это поле внешних нормалей на ляпуновской границе $\partial D \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, и l_x — это поле внутренних не касательных направлений, т. е. таких векторов l_x, что

$$\cos(n_x, l_x) < 0 \tag{1.1}$$

для ляпуновской границы это означает, что в каждой точке $x_0 \in \in \partial D \cap O(x_0, d)$ ($\partial O(x_0, d)$ — сфера Ляпунова) отрезок $\overrightarrow{x_0, x}$ луча, выпущенного из точки x_0 по направлению l_{x_0} лежит внутри области D при достаточно малом расстоянии $|x - x_0| > 0$.

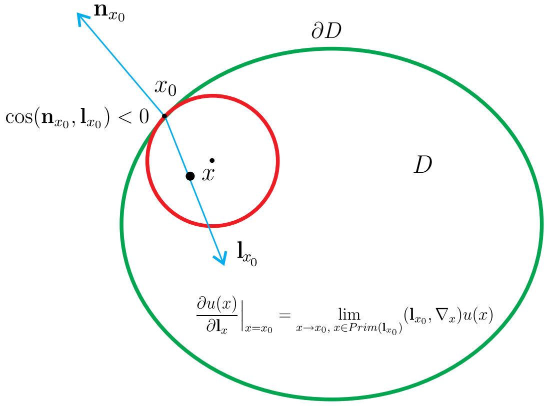

Рис. 1. Поле внутренних не касательных направлений.

Справедлива важная лемма Жиро о знаке косой производной <u>непостоянного решения</u> $u(x)$ в точках ляпуновской границы ∂D области D.

Лемма Жиро. *Пусть выполнены все условия принципа Хопфа относительно коэффициентов эллиптического уравнения*

$$Lu(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = F(x).$$

Причём $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D})$, $u(x) \neq const$ и выполнено одно из следующих неравенств:

$$u(y_0) = \min_{x \in \partial D} u(x) < 0, \quad y_0 \in \partial D, \quad F(x) \leqslant 0 \tag{1.2}$$

или

$$u(y_0) = \max_{x \in \partial D} u(x) > 0, \quad y_0 \in \partial D, \quad F(x) \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Тогда в каждой точке $y_0 \in \partial D$, в которой достигается глобальное минимальное отрицательное значение или глобальное максимальное *положительное значение, выполнены соответствующие неравенства*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial l_x}\Big|_{y_0\in\partial D} > 0 \quad \textit{или} \quad \frac{\partial u(x)}{\partial l_x}\Big|_{y_0\in\partial D} < 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть выполнено неравенство (1.2).

Шаг 1. Поскольку $\partial D \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, то в каждой точке $y_0 \in \partial D$ найдется касающийся границы в этой точке замкнутый шар

$$\overline{O}(x^*,\rho_0), \quad \rho_0 = |y_0 - x^*| > 0, \quad O(x^*,\rho_0) \subset D,$$

где центр шара $x^* \in D$ — принадлежит отрезку луча $\overrightarrow{y_0, x}$, выпущенного по направлению $-n_{y_0}$ — внутренней нормали к точке границы $y_0 \in \partial D$.

Шаг 2. Рассмотрим шар

$$O(y_0,\rho_1), \quad 0 < \rho_1 < \rho_0$$

и пересечение

$$K = O(x^*,\rho_0) \cap O(y_0,\rho_1) \subset D. \tag{1.5}$$

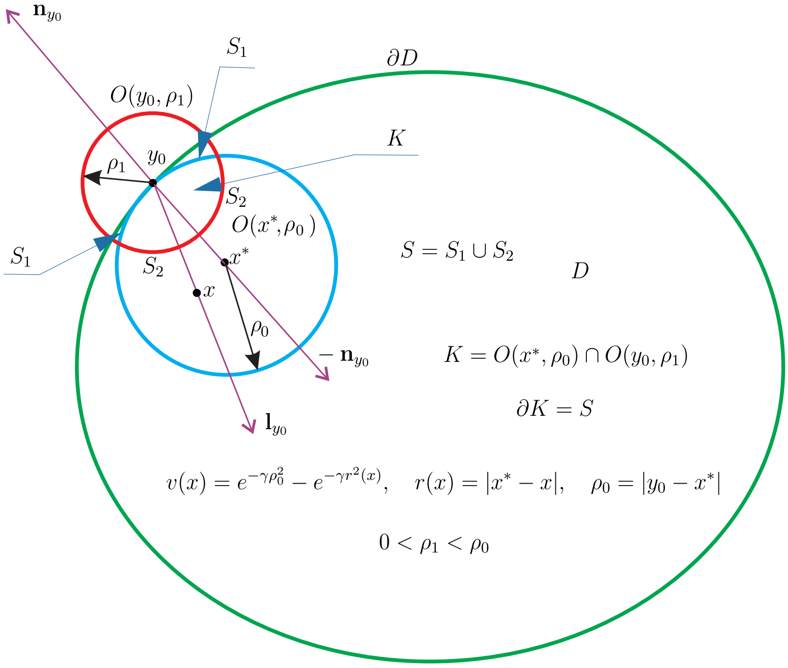

Рис. 2. Построение области K.

Шаг 3. В силу принципа Хопфа (слабый принцип максимума) и условия $u(x) \neq const$ имеем

$$u(x) > u(y_0) \quad \text{для всех} \quad x \in D. \tag{1.6}$$

□ Действительно, поскольку

$$Lu(x) = F(x) \leqslant 0, \quad c(x) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D,$$

то в силу принципа Хопфа (сильный принцип максимума) если решение $u(x) \neq const$, то ни в какой точке $x \in D$ не может достигаться отрицательный глобальный минимум функции $u(x)$ на $\overline{D}$. Следовательно, поскольку $\min\limits_{y \in \partial D} u(y) = u(y_0) < 0$ и

$$\min_{x \in \overline{D}} u(x) = \min_{y \in \partial D} u(y),$$

то

$$u(x) > \min_{y \in \partial D} u(y) = u(y_0) \quad \text{для всех} \quad x \in D. \quad \boxtimes$$

Шаг 4. Рассмотрим функцию

$$v(x) = e^{-\gamma \rho_0^2} - e^{-\gamma r^2(x)}, \quad \rho_0 = |x^* - y_0|, \quad r(x) = |x^* - x|. \tag{1.7}$$

Представим границу S области $K = O(x^*, \rho_0) \cap O(y_0, \rho_1)$ в виде объединения

$$S = S_1 \cup S_2,$$

$$S_1 = S \cap \{x : \ |x - x^*| = \rho_0\}, \quad S_2 = S \cap \{x : |x - x^*| < \rho_0\}.$$

Причем

$$v(x)\Big|_{S_1} = 0, \quad \text{так как} \quad r(x) = |x - x^*|\Big|_{x \in S_1} = \rho_0. \tag{1.8}$$

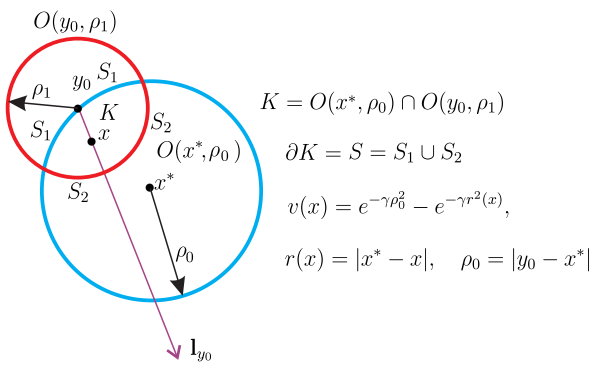

Рис. 3. Шар K и его граница $S = S_1 \cup S_2$.

Шаг 5. Поскольку функция $v(x)$ ограничена в K, то при достаточно малом $\lambda > 0$ из неравенства (1.6) вытекает неравенство снизу

$$u(x) \geqslant u(y_0) - \lambda v(x) \quad \text{на} \quad S. \tag{1.9}$$

□ Действительно, пусть $x \in S_1 \backslash \{y_0\}$, тогда $u(x) > u(y_0)$, а при $x = y_0 \in S_1$ имеем $u(x) = u(y_0)$. Следовательно, поскольку $v(x) = 0$ при $x \in S_1$ имеет место неравенство

$$u(x) \geqslant u(y_0) = u(y_0) - \lambda v(x) \quad \text{при} \quad x \in S_1.$$

Пусть теперь $x \in S_2$. В этом случае $u(x) > u(y_0)$ и, кроме того, $v(x) < 0$ при $x \in S_2$. Но тогда поскольку функция $v(x)$ является ограниченной для всех $\gamma > 0$

$$v(x) = e^{-\gamma r^2(x)} \left(e^{-\gamma(\rho_0^2 - r^2(x))} - 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |v(x)| \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad x : \; r(x) = |x - x^*| < \rho_0.$$

можно выбрать величину $\lambda > 0$ настолько малой, чтобы было выполнено неравенство

$$u(x) \geqslant u(y_0) - \lambda v(x) \quad \text{при} \quad x \in S_2. \quad \boxtimes$$

Шаг 6. Как мы уже доказали при рассмотрении теоремы о принципе Хопфа функция $v(x)$ удовлетворяет при большом $\gamma > 0$ следующему неравенству:

$$L(v)(x) < 0 \quad \text{при} \quad x \in K. \tag{1.10}$$

Введем функцию

$$\varphi(x) = u(x) - u(y_0) + \lambda v(x). \tag{1.11}$$

Поскольку

$$u(y_0) \leqslant 0, \quad c(x) \leqslant 0, \quad F(x) \leqslant 0,$$

то имеет место неравенство

$$L(\varphi)(x) = F(x) - c(x)u(y_0) + \lambda L(v)(x) < 0, \quad x \in K. \tag{1.12}$$

Заметим, что в силу (1.9) функция

$$\varphi(x) = u(x) - u(y_0) + \lambda v(x) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad S.$$

Стало быть, в силу результата следствия 1 из теоремы о принципе Хопфа имеем

$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{K}. \tag{1.13}$$

Шаг 7. Теперь воспользуемся тем, что $v(y_0) = 0$ и в силу неравенства (1.13) выполнено неравенство

$$\frac{u(x) - u(y_0)}{|x - y_0|} \geqslant -\lambda \frac{v(x)}{|x - y_0|} = -\lambda \frac{v(x) - v(y_0)}{|x - y_0|}, \quad x \in K.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\frac{\partial u(x)}{\partial l_x}\Big|_{x=y_0\in\partial D} = \lim_{y_0\leftarrow x\in(x-y_0)=l_{y_0}|x-y_0|}\frac{u(x)-u(y_0)}{|x-y_0|} \geqslant$$
$$\geqslant -\lambda \lim_{y_0\leftarrow x\in(x-y_0)=l_{y_0}|x-y_0|}\frac{v(x)-v(y_0)}{|x-y_0|} =$$
$$= -\lambda\frac{\partial v(r)}{\partial r}\Big|_{x=y_0}\cos(n_{y_0}, l_{y_0}) =$$
$$= -2\lambda\gamma\rho_0 e^{-\gamma\rho_0^2}\cos(n_{y_0}, l_{y_0}) > 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Условие в лемме Жиро, что $\partial D \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, можно заменить условием *сферичности изнутри* в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Свойство сферичности изнутри. [?] Пусть x_0 — это любая точка границы ∂D области D. Если существует замкнутый шар B, такой, что $B \subset \overline{D}$ и $B \cap \partial D = \{x_0\}$, то мы скажем, что точка x_0 обладает *свойством сферичности изнутри*.

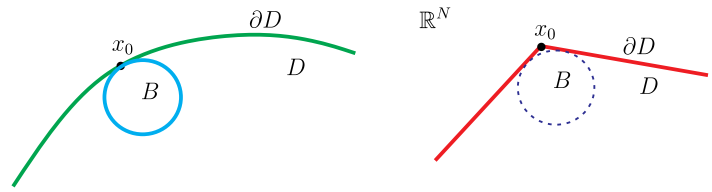

Рис. 4. Пример границы области со свойством сферичности изнутри и пример границы области с точкой без этого условия.

Контрпример к лемме Жиро. [?] Заметим, что лемма Жиро неверна, если граница ∂D области D содержит угловые точки.

□ Действительно, пусть область D определена следующим образом:

$$D:\ x_1^2 + x_2^2 < R^2, \quad x_2 < \gamma_1 x_1, \quad x_2 > \gamma_2 x_1, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2.$$

Тогда угловая точка границы — это точка $x^0 = (0, 0)$. Рассмотрим в области D следующее уравнение:

$$Lu(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad A > |\gamma_1\gamma_2|.$$

Функция

$$u(x_1, x_2) = (x_2 - \gamma_1 x_1)(x_2 - \gamma_2 x_1) + 1$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$u(x) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x^0) = 1, \quad Lu(x) = 2\gamma_1\gamma_2 + 2A > 0,$$

но

$$\frac{\partial u}{\partial l_x}\Big|_{x=x_0} = 0$$

по любому направлению l_{x_0} в точке $x_0 \in \partial D$. ⊠

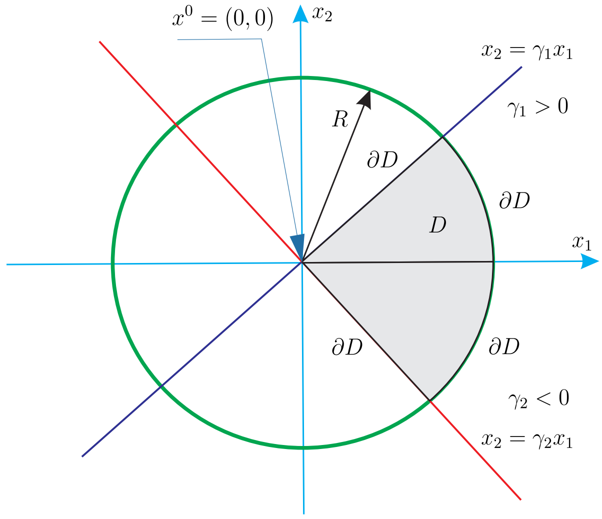

Рис. 5. Область D и ее граница ∂D.

§ 2. Следствия из леммы Жиро

Теперь мы рассмотрим *вторую краевую задачу* или *задачу наклонной производной* при $c(x) \leqslant 0$ в D, причем $\partial D \in \mathbb{C}^{(1,h)}$.

З а д а ч а   н а к л о н н о й   п р о и з в о д н о й. Найти решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D})$ задачи

$$Lu(x) = F(x) \quad \text{в} \quad D, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial l_x} = f(x) \quad \text{на} \quad \partial D, \tag{2.1}$$

где $F(x) \in \mathbb{C}(D)$ и $f(x) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и выполнено неравенство (1.1).

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а   е д и н с т в е н н о с т и   2. *Если* $c(x) = 0$, *то задача наклонной производной единственно с точностью до постоянной. Если* $c(x) \not\equiv 0$, *то решение задачи наклонной производной единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Итак, пусть $u_1(x), u_2(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D})$ — это два решения задачи (2.6). Рассмотрим функцию

$$w(x) \stackrel{def:}{=} u_1(x) - u_2(x).$$

Эта функция удовлетворяет однородной задаче

$$Lw(x) = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad \frac{\partial w(x)}{\partial l_x} = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{2.2}$$

Шаг 2. Предположим, что $w(x) \neq 0$ на границе ∂D и $w(x) \neq const$. Введем следующие величины:

$$m \stackrel{def:}{=} \min_{x \in \partial D} w(x), \quad M \stackrel{def:}{=} \max_{x \in \partial D} w(x). \tag{2.3}$$

Ясно, что $m \leqslant M$. Тогда возможны следующие случаи: 1. $M > 0$ или 2. $M \leqslant 0$. Предположим, например, что $M > 0$, тогда в некоторой точке $y_0 \in \partial D$ выполнено неравенство

$$w(y_0) = \max_{y \in \partial D} w(y) > 0 \tag{2.4}$$

В силу леммы Жиро имеем

$$\left.\frac{\partial w(y)}{\partial l_y}\right|_{y_0 \in \partial D} < 0,$$

но это противоречит (2.2). Случай $M \leqslant 0$ разбивается на следующие два: 3. $m < M \leqslant 0$ и 4. $m = M \leqslant 0$. В третьем случае имеем $m < 0$. Тогда в некоторой точке $y_0 \in \partial D$ имеем

$$w(y_0) = \min_{y \in \partial D} w(y) < 0.$$

В силу леммы Жиро имеем в этой точке

$$\left.\frac{\partial w(y)}{\partial l_y}\right|_{y_0 \in \partial D} > 0.$$

Опять пришли к противоречию с вторым равенством в (2.2). Четвертый случай разбивается еще на следующие два: 5. $m = M < 0$ и 6. $m = M = 0$. В пятом случае снова $m < 0$ и мы снова приходим к противоречию с принципом Хопфа.

Шаг 3. Итак, рассмотрим шестой случай $m = M = 0$, из которого сразу же получаем, что $w(x)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$Lw(x) = 0 \quad \text{в} \quad D, \quad w(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial D. \tag{2.5}$$

В силу теоремы единственности первой краевой задачи мы получим, что $w(x) = 0$, что противоречит условию, что $w(x) \neq const$.

Итак, имеем $w(x) = const$.

Шаг 4. Пусть в некоторой точке $x_0 \in D$ имеем $c(x_0) < 0$. Тогда с одной стороны $w(x) = c_1$, а с другой стороны имеем

$$0 = Lw(x_0) = c(x_0)w(x_0) = c(x_0)c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow w(x) = 0.$$

Теорема доказана.

Наконец, рассмотрим *третью краевую задачу* при $c(x) \leqslant 0$.

Третья краевая задача. Найти решение $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(D) \cap \cap \mathbb{C}^{(1)}(\overline{D})$ следующей задачи:

$$Lu(x) = F(x) \quad \text{в} \quad D, \tag{2.6}$$

$$\left(\frac{\partial u(x)}{\partial l_x} + \alpha(x)u(x)\right)\Big|_{x\in\partial D} = f(x) \quad \text{на} \quad \partial D, \qquad (2.7)$$

где $F(x) \in \mathbb{C}(D)$ и $f(x) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и выполнено неравенство (1.1).

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности 3. *Если $\alpha(x) \leqslant 0$ и $\alpha(x) \not\equiv 0$, решение третьей краевой задачи единственно.*

Доказательство.

Эту теорему мы предлагаем доказать самостоятельно студентам, используя лемму Жиро.

Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что если $\alpha(x) < 0$ на ∂D, то единственность третьей краевой задачи (2.6) может быть доказана без применения леммы Жиро. Действительно, нужно рассмотреть соответствующую однородную задачу: $F(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$. По принципу максимума $u(x)$ должна достигать положительного максимума или отрицательного минимума в некоторой точках границы: $x_0 \in \partial D$ и, следовательно, удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial u(x)}{\partial l_x}\Big|_{x=x_0} \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u(x)}{\partial l_x}\Big|_{x=x_0} \geqslant 0.$$

Но это противоречит равенству

$$\frac{\partial u(x)}{\partial l_x}\Big|_{x=x_0} = -\alpha(x_0)u(x_0).$$

§ 3. Примеры решения задач

Задача 1. Пусть L — это равномерно эллиптический оператор в ограниченной области Ω и $c(x) \leqslant 0$, причем

$$Lu(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega.$$

Пусть $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cap S_2$, $S_1 \neq \varnothing$, а поверхность S_2 удовлетворяет условию сферичности изнутри. Функция

$$u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\Omega) \cap \mathbb{C}^{(1)}(\Omega \cup S_2) \cap \mathbb{C}^{(0)}(\overline{\Omega}),$$

причем выполнены следующие граничные условия

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in S_1, \quad \sum_{i=1}^{N} \beta_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{при} \quad x \in S_2.$$

Векторное поле $\beta(x) = (\beta_1(x), ..., \beta_N(x))$ имеет ненулевую нормальную составляющую в каждой точке $x \in S_2$. Доказать, что $u(x) \equiv 0$ в Ω.

Решение. Пусть $u(x) \not\equiv 0$ в Ω. Следовательно, в некоторой точке $x_0 \in \Omega \cup S_2$ достигается либо положительный максимум (отрицательный минимум). Точка $x_0 \notin \Omega$, в силу сильного принципа максимума,

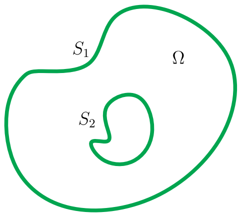

Рис. 6. Область Ω и ее граница $S_1 \cup S_2$.

поскольку в противном случае $u(x) = const = 0$ в силу связности множества Ω. Поэтому $x_0 \in S_2$. Тогда в этой точке в силу леммы Жиро

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i(x_0) \frac{\partial u(x_0)}{\partial x_i} \neq 0,$$

что противоречит условию задачи. Значит, $u(x) \equiv 0$ всюду в Ω.

З а д а ч а 2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta u = |u|^{p-2} u \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 2, \quad p > 2 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_x} + \beta(x)|u|^{q-2} u = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad q > 2, \tag{3.2}$$

где Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ при $\beta(x) \geqslant 0$. Доказать, что в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ решение краевой задачи $u(x) \equiv 0$ в Ω.

Р е ш е н и е. Умножим обе части уравнения (3.1) на само решение и проинтегрируем по частям, в результате получим равенство

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} u(y)\, ds_y + \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx = 0,$$

из которого с учетом граничного условия (3.2) получим равенство

$$\int\limits_{\partial\Omega} \beta(y)|u(y)|^q\, ds_y + \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p\, dx = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \Omega.$$

З а д а ч а 3. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Delta u = |u|^{p-2} u + f(x) \quad \text{при} \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 2, \quad p > 2 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_x} + \beta(x)|u|^{q-2} u = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad q > 2, \tag{3.4}$$

где Ω — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ при $\beta(x) \geqslant 0$. Доказать, что в классе $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ решение краевой задачи единственно.

У к а з а н и е. Решение задачи предлагается студентам. Нужно рассмотреть два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ задачи (3.3) и (3.4), а затем вычесть соответствующие уравнения вида (3.3), справедливые для каждой из функций, умножить на $u_1(x) - u_2(x)$ и проинтегрировать по области Ω с учетом граничных условий.