3. Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении

Предположим, что рядом с населенным пунктом расположен водоем, под которыми находится гидроупорный слой (глина). Введем декартову систему координат (x,z), ось x которой направим параллельно поверхности водоема, а ось z перпендикулярно этой поверхности. Предположим, что населенный пункт находится в области $0<x$, в которой уровень грунтовой воды описывается функцией $u(x,t)$. Водоем занимает область $x<0$. Пусть к моменту $t=0$ вода в водоеме поднялась до отметки $z=0$ и продолжает пребывать по закону $u(0,t)=kt$. Вопрос: насколько быстро вода дойдет до населенного пункта, имеющего координату $x=L$, если населенный пункт расположен на высоте h?

Получим уравнение, описывающее изменение уровня грунтовых вод над гидроупором $u(x,t)$.

Плотность горизонтального потока воды q **равна**

$$q = -D\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (1)$$

где *P* – давление, а *D* – коэффициент проводимости среды.

Давление на высоте *z*, где 0<*z*<*u* равно

$$P(z) = \rho g(u - z), \qquad (2)$$

где ρ **- плотность воды.**

Следовательно, плотность горизонтального потока q воды равна

$$q = -D\rho g \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3)$$

и не зависит от z.

Полный поток, идущий через сечение, будет равен

$$Q = -D\rho g u \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (4)$$

Интегральное уравнение баланса воды в слое, заключенном между сечениями x и $x+\Delta x$ за промежуток времени от момента t до $t+\Delta t$, будет иметь следующий вид:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \varepsilon\big(u(\xi,t+\Delta t)-u(\xi,t)\big)d\xi = \tag{5}$$

$$= \int_{t}^{t+\Delta t} D\rho g\left(u(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}-u(x,\tau+\Delta\tau)\frac{\partial u(x,\tau+\Delta\tau)}{\partial x}\right)d\tau,$$

где ε **- порозность среды. Из уравнения (5) при** $\Delta x \to 0$ **и** $\Delta t \to 0$ **получаем уравнение Буссинеска:**

$$u_t = \frac{D\rho g}{\varepsilon}\left(uu_x\right)_x. \tag{6}$$

Уравнение Буссинеска (6) описывает высоту уровня грунтовых вод над гидроупором.

Сделаем замену переменных: $\tau = \frac{\varepsilon}{D\rho g} t$ **и** $K = \frac{k\varepsilon}{D\rho g}.$

В новых переменных задача имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
u_\tau = \left(u u_x\right)_x, & (7) \\
u\left(x, 0\right) = 0, & (8) \\
u\left(0, \tau\right) = K\tau & (9)
\end{cases}
$$

Построим автомодельное решение задачи (7)-(9) в виде бегущей волны:

$$\begin{cases} u = f\left(\nu\tau - x\right), & \nu\tau - x > 0, \\ u - 0, & \nu\tau - x > 0, \end{cases} \qquad (10)$$

где ν **- постоянная скорость, которую нужно определить.**

Подставив (10) в (7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f\left(\alpha\right), \quad \alpha = \nu\tau - x:$

$$\nu f' = (ff')'. \qquad (11)$$

Интегрируем уравнение (11) от 0 до $\alpha > 0:$

откуда

$$\nu f = ff', \qquad (12)$$

$$f' = \nu. \qquad (13)$$

Вид функции f находим из граничного условия (9):

$$u(0,\tau) = K\tau = f(\nu\tau - 0). \qquad (14)$$

Отсюда

$$f(\alpha) = \frac{K\alpha}{\nu}. \qquad (15)$$

Поскольку $f' = \nu,$ **то** $\dfrac{K}{\nu} = \nu$ **и** $\nu = \sqrt{K}$ **, а** $f(\alpha) = \alpha\sqrt{K}.$

Решение задачи (7)-(9) имеет вид:

$$\begin{cases} u(x,\tau) = K\tau - \sqrt{K}x, & x < \sqrt{K}x, \\ u(x,\tau) = 0, & x \geq \sqrt{K}x. \end{cases} \qquad (16)$$

Наводнение дойдет до населенного пункта в момент τ, который определяется равенством

$$h = K\tau - \sqrt{K}L. \tag{17}$$