ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРА

В. В. Колыбасова, Н. Ч. Крутицкая, А. В. Овчинников

§1. Основные понятия и теоремы

1.1. **Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения.** Пусть линейный оператор $\boldsymbol{A}$ действует в линейном пространстве R_n над числовым полем $\mathbb{K}$. Предположим, что все корни характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{K}$. Рассмотрим характеристический многочлен оператора

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, p$. Здесь

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Число m_i называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_i. Максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_i, называется его *геометрической кратностью* и обозначается s_i.

Теорема. $s_i \leq m_i$.

Если $m_i = s_i$, $i = 1, 2, \dots, p$, то количество линейно независимых собственных векторов оператора $\boldsymbol{A}$ равно размерности пространства, и из них можно составить базис в пространстве R_n. В этом базисе матрица A' оператора $\boldsymbol{A}$ имеет диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2\end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_p & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p\end{matrix}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m_1 \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m_2 \text{ строк} \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} m_p \text{ строк} \end{array};$$

каждое собственное значение λ_i встречается на диагонали этой матрицы столько раз, какова его алгебраическая кратность. Вне диагонали все элементы матрицы равны нулю.

1.2. **Жорданова клетка.** Рассмотрим матрицу оператора

$$J_k(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & & \\ & & \lambda_0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & & \lambda_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

размера $k \times k$. Ее характеристический многочлен $(\lambda_0 - \lambda)^k$ имеет корень λ_0 кратности k. Таким образом, данная матрица имеет собственное значение λ_0 алгебраической кратности

k. Отвечающие ему собственные векторы — это ненулевые решения однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\operatorname{rang} B = k - 1$, так что размерность собственного подпространства равна 1, то существует лишь один линейно независимый собственный вектор. Таким образом, при $k \geq 2$ не существует базиса, состоящего из собственных векторов этого оператора, то есть ни в одном базисе матрица оператора не может иметь диагонального вида. Матрица $J_k(\lambda_0)$ называется *жордановой клеткой порядка* k, соответствующей собственному значению λ_0.

1.3. **Присоединенные векторы.** Элемент $\boldsymbol{x}$ называется *присоединенным вектором* оператора $\boldsymbol{A}$, отвечающим собственному значению λ, если для некоторого натурального числа $m \geq 1$ выполняются соотношения

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{m-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{m}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

При этом число m называется *высотой* присоединенного вектора $\boldsymbol{x}$. Иными словами, если $\boldsymbol{x}$ — присоединенный вектор высоты m, то элемент $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{m-1}\boldsymbol{x}$ является собственным вектором оператора $\boldsymbol{A}$. Очевидно, собственные векторы — это присоединенные векторы высоты 1 (здесь $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^0 = \boldsymbol{I}$).

Рассмотрим последовательность векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m$, для которых выполнены соотношения ($\boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{0}$):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 &= \lambda\boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2 &= \lambda\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_3 &= \lambda\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_m &= \lambda\boldsymbol{e}_m + \boldsymbol{e}_{m-1} \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$\begin{array}{lcl} (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \Longrightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 & \Longrightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 & \Longrightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}, \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{e}_{m-1} & \Longrightarrow & (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Таким образом, цепочка векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m$ состоит из собственного вектора $\boldsymbol{e}_1$ и присоединенных векторов $\boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_m$ (высота присоединенного вектора $\boldsymbol{e}_k$ равна k).

Введем обозначение $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ и запишем предыдущие соотношения в виде

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} & \Longrightarrow & \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 & \Longrightarrow & \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 & \Longrightarrow & \boldsymbol{B}^3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{e}_{m-1} & \Longrightarrow & \boldsymbol{B}^m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}. \end{array}$$

Теорема. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ линейно независимы.

Отметим, что в случае, когда количество векторов $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m$ равно размерности пространства, т.е. $m = n$, эти векторы образуют базис в R_n, а матрица оператора $\boldsymbol{A}$ в этом базисе имеет вид жордановой клетки порядка n с числом λ на диагонали (см. (1)).

1.4. **Жорданов блок.** *Жордановым блоком*, отвечающим собственному значению λ_0, называется блочно-диагональная матрица, каждый блок которой представляет собой жорданову клетку вида (1):

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{i_1}(\lambda_0)} & & & \\ & \boxed{J_{i_2}(\lambda_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{i_s}(\lambda_0)} \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали матрицы расположены s жордановых клеток $J_{i_1}(\lambda_0)$, $J_{i_2}(\lambda_0)$, $\dots$, $J_{i_s}(\lambda_0)$ порядков $i_1, i_2 \dots, i_s$, где s — геометрическая кратность собственного значения λ_0. Сумма порядков этих клеток равна алгебраической кратности собственного значения λ_0, т.е.

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s = m.$$

Все элементы матрицы вне жордановых клеток равны нулю. Порядок расположения жордановых клеток в матрице $A(\lambda_0)$ определен неоднозначно.

Примеры жордановых блоков. Рассмотрим простой случай, когда характеристический многочлен матрицы имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$$

и геометрическая кратность собственного значения λ_0 равна s.

Пример 1. Пусть $m = 2$, $s = 1$. Тогда

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix};$$

имеем одну жорданову клетку порядка 2.

Пример 2. Пусть $m = 3$, $s = 1$. Тогда

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix};$$

имеем одну жорданову клетку порядка 3.

Пример 3. Пусть $m = 3$, $s = 2$. Имеем жорданов блок, состоящий из двух жордановых клеток порядков 1 и 2:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Пусть $m = 4$, $s = 1$. В этом случае имеется одна клетка:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Пусть $m = 4$, $s = 2$. Этой ситуации отвечает жорданов блок, состоящий из двух клеток, но порядки клеток однозначно не определяются: либо имеем две клетки порядка 2 каждая, либо две клетки, одна из которых имеет порядок 1, а вторая — порядок 3:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{либо} \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{либо}$$

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Пусть $m = 4$, $s = 3$. Тогда жорданов блок состоит из трех клеток:

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{либо} \quad A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{либо}$$

$$A(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

1.5. **Теорема о жордановой форме матрицы оператора.** Пусть линейный оператор $\boldsymbol{A}$ действует в линейном пространстве над полем комплексных чисел размерности n и его характеристический многочлен имеет вид

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1}(\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_j \neq \lambda_k$ при $j \neq k$,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = n.$$

Тогда в этом пространстве существует базис, состоящий из собственных и присоединенных векторов оператора $\boldsymbol{A}$, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональную форму (она называется жордановой формой)

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A(\lambda_1)} & & & \\ & \boxed{A(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A(\lambda_p)} \end{pmatrix},$$

где $A(\lambda_j)$ — жорданов блок, соответствующий собственному значению λ_j. Указанный базис называется *жордановым*.

Сформулированная теорема верна и в случае, когда линейный оператор действует в линейном пространстве над произвольным числовым полем $\mathbb{K}$, но все корни характеристического многочлена принадлежат полю $\mathbb{K}$.

Рассмотрим примеры. Обозначаем через n размерность пространства, m_j и s_j — алгебраическую и геометрическую кратности собственного значения λ_j соответственно.

Пример 1. Пусть $n = 2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда матрица оператора может быть приведена к диагональному виду:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Пусть $n = 3$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 2$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = s_2 = 1$). Тогда матрица оператора может быть приведена к виду

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right).$$

Пример 3. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 3$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = s_2 = 1$). Тогда

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right).$$

Пример 4. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = s_1 = 2$) и λ_2 ($m_2 = s_2 = 2$). Тогда

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right).$$

Пример 5. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 2$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = 2$, $s_2 = 1$). Тогда

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right).$$

Пример 6. Пусть $n = 4$ и оператор имеет два различных собственных значения λ_1 ($m_1 = 2$, $s_1 = 1$) и λ_2 ($m_2 = 2$, $s_2 = 2$). Тогда

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

§2. Построение жорданова базиса и жордановой формы матрицы

Пусть λ — собственное значение оператора, m и s — алгебраическая и геометрическая кратности числа λ. Опишем построение линейно независимой совокупности из m собственных и присоединенных векторов, отвечающих данному λ. Этой совокупности векторов в жордановой матрице A' будет соответствовать жорданов блок $A(\lambda)$ (см. § 1).

Обозначим:

$$B = A - \lambda I, \quad B^k = (A - \lambda I)^k, \quad N_k = \ker B^k, \quad n_k = \dim N_k, \quad r_k = \operatorname{rang} B^k.$$

Ясно, что $n_k + r_k = n$. Для удобства считаем, что $B^0 = I$, так что $r_0 = n$, $n_0 = 0$.

Поскольку $\operatorname{rang} B^{k+1} \le \operatorname{rang} B^k$, имеем $n_{k+1} \ge n_k$, так что

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \ldots .$$

Теорема. Существует такое натуральное число q, что

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_q = N_{q+1} = N_{q+2} = \ldots ,$$

т.е. все ядра с номером, бóльшим, чем q, совпадают с ядром N_q. При этом $n_1 = s$, $n_q = m$.

Построим часть жорданова базиса, соответствующую данному собственному значению λ, следующим образом.

1. *Возводя матрицу B в последовательные натуральные степени, найдем показатель q, начиная с которого ранг степеней матрицы B перестает уменьшаться.*

2. *Рассмотрим ядра N_q и N_{q-1}. Пусть векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \dots \in N_q$ достраивают произвольный базис пространства N_{q-1} до базиса пространства N_q; их количество равно $n_q - n_{q-1}$.* Эти векторы являются присоединенными векторами высоты q, и каждый из них порождает цепочку, состоящую из q векторов, которые войдут в состав жорданова базиса. Каждой такой цепочке будет соответствовать жорданова клетка порядка q; таким образом, в состав жордановой формы матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ войдет $n_q - n_{q-1}$ жордановых клеток порядка q.

3. *Рассмотрим ядра N_{q-1} и N_{q-2}, а также векторы $B\boldsymbol{f}_1, B\boldsymbol{f}_2, \ldots$; их количество равно*

$$n_q - n_{q-1} = (n - r_q) - (n - r_{q-1}) = r_{q-1} - r_q.$$

К этим векторам добавим векторы $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots$ из пространства N_{q-1} так, чтобы система векторов

$$B\boldsymbol{f}_1,\ B\boldsymbol{f}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \dots \in N_{q-1}$$

дополняла произвольный базис ядра N_{q-2} до базиса ядра N_{q-1}. Векторы $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots$ являются присоединенными векторами высоты $q-1$, и каждому из них будет соответствовать, во-первых, цепочка векторов жорданова базиса, и во-вторых, жорданова клетка порядка $q-1$. Количество добавляемых векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots$ равно

$$n_{q-1} - n_{q-2} - (n_q - n_{q-1}) = -n_q + 2n_{q-1} - n_{q-2} = r_q - 2r_{q-1} + r_{q-2};$$

таким же будет количество жордановых клеток порядка $q-1$.

4. *Рассмотрим ядра N_{q-2} и N_{q-3} и векторы $B^2\boldsymbol{f}_1, B^2\boldsymbol{f}_2, \ldots,$ $B\boldsymbol{g}_1, B\boldsymbol{g}_2, \ldots$. К этим векторам (если их не хватает) добавим векторы $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots$ из пространства N_{q-2} так, чтобы совокупность векторов*

$$B^2\boldsymbol{f}_1,\ B^2\boldsymbol{f}_2,\ \ldots,\ B\boldsymbol{g}_1,\ B\boldsymbol{g}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots \in N_{q-2}$$

дополняла произвольный базис пространства N_{q-3} до базиса пространства N_{q-2}. Количество добавляемых векторов $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots$ равно

$$n_{q-2} - n_{q-3} - (n_{q-1} - n_{q-2}) = -n_{q-1} + 2n_{q-2} - n_{q-3} = r_{q-1} - 2r_{q-2} + r_{q-3};$$

таким же будет количество жордановых клеток порядка $q-2$.

Процесс продолжаем аналогично. Наконец, рассмотрим ядро N_1 и векторы

$$\left.\begin{array}{l} B^{q-1}\boldsymbol{f}_1,\ B^{q-1}\boldsymbol{f}_2,\ \ldots, \\ B^{q-2}\boldsymbol{g}_1,\ B^{q-2}\boldsymbol{g}_2,\ \ldots, \\ B^{q-3}\boldsymbol{h}_1,\ B^{q-3}\boldsymbol{h}_2,\ \ldots, \\ B\boldsymbol{v}_1,\ B\boldsymbol{v}_2,\ \ldots \end{array}\right\} \in N_1.$$

Если эта система не образует базис пространства N_1, то добавим собственные векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ так, чтобы пополненная система являлась базисом в N_1.

Итак, мы описали процесс построения жорданова базиса и выяснили, что количество жордановых клеток порядка k, входящих в состав жордановой формы матрицы оператора, может быть найдено по формуле

$$t_k = -n_{k+1} + 2n_k - n_{k-1} = r_{k+1} - 2r_k + r_{k-1}.$$

Построенную часть жорданова базиса, состоящую из m векторов, соответствующих данному λ (m — алгебраическая кратность этого собственного значения), запишем в таблицу («жорданова лестница»):

N_q	$\boldsymbol{f}_1$	$\boldsymbol{f}_2$	$\ldots$									
N_{q-1}	$B\boldsymbol{f}_1$	$B\boldsymbol{f}_2$	$\ldots$	$\boldsymbol{g}_1$	$\boldsymbol{g}_2$	$\ldots$						
N_{q-2}	$B^2\boldsymbol{f}_1$	$B^2\boldsymbol{f}_2$	$\ldots$	$B\boldsymbol{g}_1$	$B\boldsymbol{g}_2$	$\ldots$	$\boldsymbol{h}_1$	$\boldsymbol{h}_2$	$\ldots$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
N_1	$B^{q-1}\boldsymbol{f}_1$	$B^{q-1}\boldsymbol{f}_2$	$\ldots$	$B^{q-2}\boldsymbol{g}_1$	$B^{q-2}\boldsymbol{g}_1$	$\ldots$	$B^{q-3}\boldsymbol{h}_1$	$B^{q-3}\boldsymbol{h}_2$	$\ldots$	$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{u}_2$	$\ldots$

Все векторы таблицы линейно независимы, и их число равно m (алгебраической кратности собственного значения λ). Каждому столбцу этой таблицы соответствует одна жорданова клетка, порядок которой равен высоте столбца. Количество столбцов жордановой лестницы, т.е. полное количество жордановых клеток в блоке, соответствующем собственному значению λ, равно геометрической кратности s этого собственного значения.

Будем нумеровать векторы построенной части базиса по столбцам жордановой лестницы: внутри каждого столбца снизу вверх, а сами столбцы в произвольном порядке.

Например, пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_q$ — векторы первого столбца жордановой лестницы. Тогда

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{e}_1 = B^{q-1}\boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{0}, & & A\boldsymbol{e}_1 = \lambda \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{e}_2 = B^{q-2}\boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, & & A\boldsymbol{e}_2 = \lambda \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1, \\ \vdots & \Rightarrow & \vdots & \Rightarrow & \vdots \\ \boldsymbol{e}_{q-1} = B\boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_{q-1} = \boldsymbol{e}_{q-2}, & & A\boldsymbol{e}_{q-1} = \lambda \boldsymbol{e}_{q-1} + \boldsymbol{e}_{q-2}, \\ \boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{f}_1, & & B\boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{e}_{q-1}, & & A\boldsymbol{e}_q = \lambda \boldsymbol{e}_q + \boldsymbol{e}_{q-1}. \end{array}$$

Этой группе векторов (собственный вектор $\boldsymbol{e}_1$ и присоединенные к нему векторы $\boldsymbol{e}_2$, ..., $\boldsymbol{e}_q$) жорданова базиса соответствуют первые q столбцов матрицы A', которые имеют вид

$$\begin{bmatrix} J_q(\lambda) \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $J_q(\lambda)$ — жорданова клетка порядка q с числом λ на главной диагонали.

В следующих q столбцах матрицы A', определенных векторами второго столбца жордановой лестницы, расположена жорданова клетка $J_q(\lambda)$ так, что числа λ стоят на главной диагонали матрицы A', а элементы вне клетки равны нулю. Подобным образом для данного λ получаем m столбцов матрицы A'. На этих m столбцах находится жорданов блок $A(\lambda)$.

Для других собственных значений эта схема повторяется, в результате чего получим жорданову матрицу A', указанную в § 1, и соответствующий жорданов базис.

§3. Примеры решения задач

Дана матрица A линейного оператора в некотором базисе. Требуется найти жорданов базис и жорданову форму матрицы оператора в этом жордановом базисе. Рассмотрим примеры решения такой задачи методом построения жорданова базиса, описанным в § 2.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^3$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 3, т.е. $m = 3$. Матрица $B = A - \lambda I$ равна

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$r_1 = \operatorname{rang} B = 1, \quad n_1 = n - r_1 = 3 - 1 = 2.$$

Собственные векторы находим, решив однородную систему линейных уравнений $BX = O$; фундаментальная совокупность решений состоит из двух векторов, например,

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Количество этих векторов (т.е. геометрическая кратность собственного значения) равно двум, $s = 2$, так что для построения жорданова базиса требуется еще один присоединенный вектор.

Так как $B^2 = O$, то ядро N_2 оператора B^2 совпадает со всем пространством, т.е. $n_2 = 3$, и при этом $q = 2$.

Дополним базис ядра N_1, т.е. набор векторов (2), до базиса ядра N_2, например, вектором

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in N_2, \ \notin N_1.$$

Тогда

$$B\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix} \in N_1.$$

Дополним вектор $B\boldsymbol{f}_1$ до базиса пространства N_1 вектором

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in N_1.$$

Построим жорданову лестницу:

N_2	$\boldsymbol{f}_1$	
N_1	$B\boldsymbol{f}_1$	$\boldsymbol{g}$

Жорданов базис:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}_1 &= B\boldsymbol{f}_1\\ \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{f}_1\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{соответствует жорданова клетка порядка 2,}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{g} \quad \Rightarrow \quad \text{соответствует жорданова клетка порядка 1.}$$

При этом

$$B\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{0}, \quad B\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1, \quad B\boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0},$$

т.е. $\boldsymbol{e}_1$ — собственный вектор, $\boldsymbol{e}_2$ — его присоединенный вектор, $\boldsymbol{e}_3$ — собственный вектор.

В жордановом базисе

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

матрица оператора A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3$$

имеет корень $\lambda = 1$ кратности 3, т.е. $m = 3$. Матрица $B = A - \lambda I$ равна

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

и мы имеем

$$r_1 = 2, \quad n_1 = 1.$$

Фундаментальная совокупность решений системы $BX = O$ состоит из одного вектора, например,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_1.$$

Следовательно, геометрическая кратность собственного значения равна единице:

$$s = 1.$$

Далее, матрица B^2 равна

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix};$$

для нее имеем

$$r_2 = 1, \quad n_2 = 2,$$

и базис ядра N_2 состоит из двух векторов, например,

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $B^3 = O$, так что

$$r_3 = 0, \quad n_3 = 3,$$

то ядро N_3 оператора B^2 совпадает со всем пространством, т.е. $q = 3$.

Вектором $\boldsymbol{f}_1 = (1,\ 0,\ 0)^T$ дополним базис ядра N_2 до базиса пространства N_3. Вектор $B\boldsymbol{f}_1 = (0,\ -2,\ -1)^T$ дополняет базис ядра N_1 (т.е. вектор $(3,\ 1,\ 1)^T$) до базиса ядра N_2. Вектор $B^2\boldsymbol{f}_1 = (3,\ 1,\ 1)^T$ образует базис пространства N_1. Жорданова лестница имеет вид

N_3	$\boldsymbol{f}_1$
N_2	$B\boldsymbol{f}_1$
N_1	$B^2\boldsymbol{f}_1$

Жорданов базис:

$$\boldsymbol{e}_1 = B^2\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = B\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\boldsymbol{e}_1$ — собственный вектор, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — два его присоединенных вектора.

Матрица оператора A' имеет вид жордановой клетки

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\lambda^2$$

имеет два корня: $\lambda_1 = 0$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$ кратности $m_2 = 1$.

Рассмотрим собственное значение $\lambda_1 = 0$. Матрица

$$B = (A - \lambda_1 I) = (A - 0 \cdot I) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_1 = 2$, так что $n_1 = 1$, а фундаментальная совокупность решений однородной системы $BX = O$ состоит из одного вектора, например, $(1,\ 2,\ 3)^T$. Следовательно, геометрическая кратность рассматриваемого собственного значения равна $s = 1$.

Далее,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = B^2.$$

Таким образом, ядра N_2 и N_3 совпадают, так что $q = 2$.

Находим базис ядра N_2, который является фундаментальной совокупностью решений системы $B^2X = O$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

При этом $r_2 = 1$, $s_2 = n_2 = 2$.

Дополним базис в N_1 до базиса в N_2 вектором $\boldsymbol{f}_1 = (1,\ 1,\ 0)^T$. Тогда вектор $B\boldsymbol{f}_1 = (-1,\ -2,\ -3)^T$ уже образует базис в N_1. Жорданова лестница имеет вид

N_2	f_1
N_1	Bf_1

Часть жорданова базиса:

$$\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{e}_1$ — собственный вектор, $\boldsymbol{e}_2$ — его присоединенный вектор. Первый и второй столбцы матрицы оператора A' имеют вид

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots\\0 & 0 & \dots\\0 & 0 & \dots\end{pmatrix}.$$

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = 1$. В этом случае матрица

$$B = (A - \lambda_2 I) = (A - I) = \begin{pmatrix}3 & -5 & 2\\5 & -8 & 3\\6 & -9 & 3\end{pmatrix}$$

имеет ранг $r_1 = 2$, поэтому ее ядро состоит из одного вектора, например, $\boldsymbol{e}_3 = (1,\ 1,\ 1)^T$, который является собственным вектором. При этом $m_2 = s_2 = 1$.

Итак, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ — жорданов базис и

$$A' = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & \boxed{1}\end{pmatrix}.$$

Пример 4.

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\-1 & 3 & 0 & -1\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0 & -1\\-1 & 3-\lambda & 0 & -1\\0 & 0 & 2-\lambda & 0\\0 & 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\-1 & 3-\lambda\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\0 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4. т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу

$$B = A - 2I = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

ее ранг равен $r_1 = 1$ и[1]

$$N_1 = \ker B = L\left\{\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}\right\}, \quad n_1 = 3.$$

Поскольку

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

имеем

$$n_2 = 4, \quad N_2 = \ker B^2 = \mathbb{R}^4.$$

Дополним базис пространства N_1 до базиса пространства N_2; для этого возьмем какой-либо вектор $\boldsymbol{f} \in N_2$, $\boldsymbol{f} \notin N_1$, например, $\boldsymbol{f} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$; он является присоединенным вектором высоты 2. Вектор $B\boldsymbol{f} = (-1,\ -1,\ 0,\ 0)^T \in N_1$ является присоединенным вектором высоты 1, т.е. собственным вектором. Для построения базиса требуется еще два вектора $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$, которые выбираются из N_1. Для их правильного выбора проанализируем линейные зависимости между столбцами матрицы

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&-1\\1&0&0&-1\\0&0&1&0\\1&-1&0&0 \end{pmatrix}$$

(первые три столбца этой матрицы — это базис N_1, последний столбец — вектор $B\boldsymbol{f}$). Приводя эту матрицу методом Гаусса к упрощенной форме,

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

видим, что вектор $B\boldsymbol{f}$ линейно выражается через первые два столбца этой матрицы. Поэтому второй и третий столбцы можно взять в качестве $\boldsymbol{g}_1$ и $\boldsymbol{g}_2$:

$$\boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\-1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, жорданова лестница имеет вид

N_2	$\boldsymbol{f}$		
N_1	$B\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{g}_1$	$\boldsymbol{g}_2$

[1] Через $L\{\}$ обозначена линейная оболочка стоящих в фигурных скобках векторов, которые образуют ее базис.

Жорданов базис состоит из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3-\lambda & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4, т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda I$, ее последовательные степени и их ядра:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 1 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 2, \quad N_1 = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad n_1 = 2,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 1, \quad N_2 = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_2 = 3;$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_3 = 0, \quad N_3 = \mathbb{R}^4, \qquad n_3 = 4.$$

Возьмем какой-либо вектор $\boldsymbol{f} \in N_3$, $\boldsymbol{f} \notin N_2$, например, $\boldsymbol{f} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)^T$. Он является присоединенным вектором высоты 3. Вектор

$$B\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_2$$

является присоединенным вектором высоты 2, а вектор

$$B^2\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N_1$$

— присоединенным вектором высоты 1, т.е. собственным вектором.

Таким образом, мы построили три вектора жорданова базиса: $\boldsymbol{e}_1 = B^2\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}_2 = B\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f}$. Требуется построить еще один вектор; выберем его из пространства $N_1 = \ker B$ так, чтобы он был линейно независим с построенными ранее векторами $\boldsymbol{f}$, $B\boldsymbol{f}$, $B^2\boldsymbol{f}$, например,

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, жорданова лестница имеет вид

N_3	$\boldsymbol{f}$	
N_2	$B\boldsymbol{f}$	
N_1	$B^2\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{g}$

Жорданов базис состоит из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = B^2\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = B\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а матрица оператора в жордановом базисе имеет вид

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Пример 6.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1-\lambda & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4, т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda I$, ее степени и их ядра:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 2, \quad N_1 = L\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_1 = 2,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad r_2 = 0, \quad N_2 = \mathbb{R}^4, \qquad n_2 = 4.$$

Выберем два вектора $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in N_2$, $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \notin N_1$:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Они являются присоединенными векторами высоты 2; соответствующие собственные векторы

$$B\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

лежат в пространстве N_1. Жорданова лестница имеет вид

N_2	$\boldsymbol{f}_1$	$\boldsymbol{f}_2$
N_1	$B\boldsymbol{f}_1$	$B\boldsymbol{f}_2$

Построенные четыре вектора образуют жорданов базис:

$$\boldsymbol{e}_1 = B\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = B\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора в жордановом базисе

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Пример 7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3-\lambda & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)^4$$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности 4, т.е. $m = 4$. Рассмотрим матрицу $B = A - \lambda I$, ее последовательные степени и их ядра:

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_1=3, \quad N_1=L\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad n_1=1,$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_2=2, \quad N_2=L\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad n_2=2,$$

$$B^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_3=1, \quad N_3=L\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \quad n_3=3,$$

$$B^4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r_4=0, \quad N_4=\mathbb{R}^4, \qquad n_4=4.$$

Выберем вектор $\boldsymbol{f} \in N_4$, $\boldsymbol{f} \notin N_3$, например,

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Он является присоединенным вектором высоты 4 и порождает цепочку векторов

$$B\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\in N_3, \quad B^2\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\in N_2, \quad B^3\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\in N_1;$$

$B\boldsymbol{f}$, $B^2\boldsymbol{f}$ — присоединенные векторы высоты 3 и 2 соответственно, $B^3\boldsymbol{f}$ — собственный вектор. Таким образом, жорданова лестница имеет вид

N_4	$\boldsymbol{f}$
N_3	$B\boldsymbol{f}$
N_2	$B^2\boldsymbol{f}$
N_1	$B^3\boldsymbol{f}$

Жорданов базис состоит из векторов $\boldsymbol{e}_1 = B^3\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}_2 = B^2\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}_3 = B\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{f}$; матрица оператора имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 5-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda)^2$$

имеет два корня: $\lambda_1 = 2$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$ кратности $m_2 = 2$.

Рассмотрим собственное значение $\lambda_1 = 2$. Рассмотрим матрицу $B_1 = A - \lambda_1 I = A - 2I$, ее последовательные степени и их ядра[2]:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 2, \quad N_1 = L\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad n_1 = 2,$$
$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -9 & -11 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 2, \quad N_2 = L\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad n_2 = 2.$$

Таким образом, $q = 1$, и мы выбираем два вектора $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in N_2$, которые являются собственными векторами:

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы образуют часть жорданова базиса, которой отвечают две жордановых клетки порядка 1 каждая:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

[2]Для краткости будем обозначать эту матрицу просто через B.

Теперь рассмотрим собственное значение $\lambda_2 = 3$, соответствующую матрицу $B_2 = A - \lambda_2 I = A - 3I$, ее последовательные степени и их ядра[3]:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -7 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 3, \qquad N_1 = L\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad n_1 = 1,$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 7 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad r_2 = 2, \qquad N_2 = L\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad n_2 = 2,$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = r_2 = 2, \qquad n_3 = 2.$$

Таким образом, $q = 2$.

Выберем вектор $\boldsymbol{g} \in N_2$, $\boldsymbol{g} \notin N_1$, например,

$$\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

он является присоединенным вектором высоты 2 и порождает вектор

$$B\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

который является присоединенным вектором высоты 1, т.е. собственным вектором.

Жорданов базис состоит из векторов

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = B\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора в жордановом базисе имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

[3]Как и ранее, для краткости будем обозначать эту матрицу просто через B.

§4. Другой способ построения жорданова базиса

Можно строить жорданов базис, начиная с собственных векторов, решая систему

$$(A-\lambda I)X = O \tag{3}$$

для нахождения собственных векторов, систему

$$(A-\lambda I)Y = X \tag{4}$$

для нахождения присоединенных векторов высоты 1 и т. д. Трудность заключается в том, что система (4) может оказаться разрешимой не при любом собственном векторе X (если собственное подпространство не одномерно), так что приходится заботиться о надлежащем выборе этого собственного вектора, что приводит к решению систем линейных уравнений с параметром. Эта трудность усугубляется в случае, когда собственному вектору отвечает длинная цепочка присоединенных векторов.

Пример 1. Дана матрица оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3 = 0$$

имеет корень $\lambda = 3$ кратности $m = 3$. Система (3) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x^1 = 0$, а x^2, x^3 произвольны. Значит, собственные векторы имеют вид

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где C_1 и C_2 — произвольные числа, не равные нулю одновременно. Линейно независимых собственных векторов два, так что геометрическая кратность данного собственного значения $s = 2$. Остается найти $m - s = 1$ присоединенный вектор. Он должен удовлетворять уравнению (4). Подставляя в (4) $\lambda = 3$ и найденный X из (5), получим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Эта система совместна, если выполнены условия теоремы Кронекера—Капелли:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 3 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Достаточно найти одно из решений системы (6), например,

$$Y = \begin{pmatrix} C_2/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

это и будет вектор, присоединенный к собственному вектору

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Выберем $C_2 = 3$. Жорданов базис будет состоять из собственного вектора

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

присоединенного к нему вектора

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и еще одного собственного вектора, линейно независимого с $\boldsymbol{e}_1$, например,

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В этом базисе матрица оператора имеет жорданову форму

$$A_e = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Жорданова клетка

$$J_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует собственному вектору $\boldsymbol{e}_1$ и присоединенному к нему вектору $\boldsymbol{e}_2$, жорданова клетка

$$J_2 = (3)$$

соответствует собственному вектору $\boldsymbol{e}_3$.

Пример 2. Матрица оператора в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Оператор имеет собственное значение $\lambda = -1$ алгебраической кратности $m = 3$ и геометрической кратности $s = 1$. Собственные векторы:

$$X = C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C \neq 0.$$

Остается найти $m - s = 2$ присоединенных к X вектора из условий

$$(A - \lambda I)Y = X, \tag{7}$$

$$(A - \lambda I)Z = Y. \tag{8}$$

Система (7) совместна при всех C. Из (7) определяем

$$Y = \begin{pmatrix} 0 \\ C/2 \\ -C/2 \end{pmatrix}.$$

Система (8) также совместна при всех C. Из (8) находим

$$Z = \begin{pmatrix} 0 \\ -C/4 \\ 5C/4 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $C = 4$, построим жорданов базис:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

состоит из одной жордановой клетки.

Пример 3. Матрица оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$ кратности $m_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$ кратности $m_2 = 2$. Собственному значению $\lambda_1 = 1$ отвечают собственные векторы

$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1 = 1$ равна 1. Присоединенный к X_1 вектор Y_1 находится из системы

$$(A - \lambda_1 I)Y_1 = X_1,$$

которая совместна при всех C_1. Например,

$$Y_1 = \begin{pmatrix} C_1/2 \\ 0 \\ C_1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Удобно положить $C_1 = 2$.

Корню $\lambda_2 = -1$ отвечают собственные векторы

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения $\lambda_2 = 1$ равна 1. Присоединенный к X_2 вектор Y_2 находится из системы

$$(A - \lambda_2 I)Y_2 = X_2,$$

совместной при всех C_2. Например,

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -C_2/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Удобно положить $C_2 = 4$.

Теперь строим жорданов базис:

$$\boldsymbol{e}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы оператора:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Пример 4. Матрица оператора в некотором базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = 0$ кратности $m = 4$. Собственные векторы имеют вид:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_1^2 + C_2^2 \neq 0,$$

т.е. геометрическая кратность собственного значения $s = 2$. Остается найти $m - s = 2$ присоединенных векторов. При этом возможны два случая: оба присоединенных вектора относятся к одному и тому же собственному вектору либо разным собственным векторам. Жорданова форма матрицы может иметь один из следующих видов:

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad A' = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Будем искать присоединенный вектор Y из уравнения (4). В отличие от системы (6) из примера 1, для системы (4) в данном примере условие совместности выполнено при всех значениях C_1 и C_2. Это значит, что присоединенные векторы существуют для всех собственных векторов, в частности, для каждого из двух линейно независимых собственных векторов будет существовать присоединенный вектор. Значит, в данном примере реализуется жорданова форма с двумя клетками порядка 2 каждая. Частное решение системы (4) имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} C_1/3 + 7C_2/6 \\ 0 \\ 3C_2/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Построим жорданов базис. Положив $C_1 = 3$, $C_2 = 0$, получим собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и присоединенный к нему вектор

$$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Положив $C_1 = 0$, $C_2 = 6$, получим собственный вектор

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 36 \\ 18 \end{pmatrix}$$

и присоединенный к нему вектор

$$\boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ образуют жорданов базис, в котором матрица оператора

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

§5. Задачи для самостоятельного решения

Привести матрицу линейного оператора к жордановой форме. Построить канонический базис. Для контроля правильности построения канонического базиса воспользоваться соотношением $PA' = AP$, где A — данная матрица, A' — жорданова форма матрицы, P — матрица перехода к каноническому базису.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 7 \\ -1 & 4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 & 8 \\ -1 & 4 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 4 \\ -1 & 5 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -13 \\ -1 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 & 8 \\ -2 & 7 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 & 10 \\ -3 & 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответы

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.