Семинар–Лекция 9

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В $\mathcal{D}'$

§ 1. Фундаментальные решения линейного дифференциального оператора

Определение 1. *Линейным дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами (порядка m) будем называть оператор вида*

$$P(D) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha, \quad \text{где} \quad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha| > 0, \quad a_\alpha = \mathrm{const}.$$

Определение 2. *Фундаментальным решением в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами будем называть любую функцию $\mathcal{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, удовлетворяющую условию*

$$P(D)\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Замечание 1. Очевидно, сформулированное определение оставляет произвол в выборе фундаментального решения: его можно изменить на любое решение соответствующего однородного уравнения. Мы не будем здесь обсуждать конкретные примеры, но отметим, что такой произвол оказывается полезен с точки зрения использования фундаментального решения в свёртке с правой частью (см. ниже): для различных видов правых частей можно пытаться выбирать фундаментальные решения по-разному так, чтобы свёртка существовала.

Принципиальное значение имеет следующая теорема, которую мы приводим без доказательства. (См., например: Владимиров В. С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976, с. 182.)

Теорема Мальгранжа–Эренпрайса. *Всякий линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (отличный от нулевого оператора) имеет фундаментальное решение в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

ПРИМЕР 1. Фундаментальным решением (одним из возможных!) оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$

$$\Delta \equiv D^{(2,0,0)} + D^{(0,2,0)} + D^{(0,0,2)}$$

является функция

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi r} \equiv -\frac{1}{4\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

□ Докажем этот факт. Требуется доказать, что

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) = \delta(x)$$

в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, т. е. что для любой основной функции $\varphi(x)$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ верно соотношение

$$\left\langle \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right), \varphi(x)\right\rangle = \varphi(O). \tag{1.1}$$

1. Зафиксируем произвольную функцию $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ и докажем, что (1.1) действительно выполняется. Используя определение суммы обобщённых функций и производной обобщённой функции, получаем:

$$\left\langle \Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right), \varphi(x)\right\rangle \equiv$$

$$\equiv \left\langle D^{(2,0,0)}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) + D^{(0,2,0)}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) + D^{(0,0,2)}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right), \varphi(x)\right\rangle =$$

$$= \left\langle -\frac{1}{4\pi r}, D^{(2,0,0)}\varphi(x) + D^{(0,2,0)}\varphi(x) + D^{(0,0,2)}\varphi(x)\right\rangle \equiv$$

$$\equiv \left\langle -\frac{1}{4\pi r}, \Delta\varphi(x)\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^3} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx.$$

2. Заметим, что в скобке двойственности в правой части цепочки стоит регулярная обобщённая функция, поэтому интеграл понимается в классическом смысле как интеграл Лебега или даже как несобственный интеграл Римана. Теперь введём в рассмотрение ограниченную область Ω (зависящую от φ), удовлетворяющую следующим условиям:
1) $O(0;0;0) \in \Omega$;
2) $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset \Omega$.
Тогда в последнем интеграле можно заменить интегрирование по всему пространству интегрированием по Ω:

$$\langle \mathcal{E}(x), \varphi(x)\rangle = \int\limits_{\Omega} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx.$$

(Мы включили начало координат в область интегрирования, чтобы избежать рассмотрения различных случаев; теперь дальнейшие рассуждения будут верны независимо от включения $O \in \operatorname{supp}\varphi(x)$.) Далее, построим шар O_ε с центром в начале координат, выбрав ε из условия $O_\varepsilon \subset \Omega$, и положим $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{O_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \partial O_\varepsilon$. (Тогда $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \cup S_\varepsilon$.)

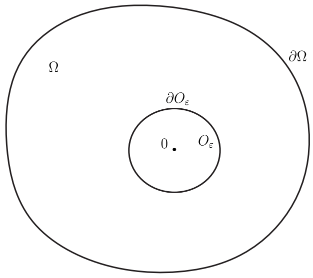

Рис. 1. Область Ω с выколотой окрестностью.

3. Очевидно, в области Ω_ε вместе с границей обе функции $\frac{1}{r}$ и $\varphi(x)$ бесконечно гладкие, что позволяет применить к интегралу

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx$$

вторую формулу Грина

$$\int\limits_{V}(u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int\limits_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,d\sigma.$$

Необходимо учесть, что:
1) всюду, кроме начала координат, функция $\frac{1}{r}$ является гармонической;
2) всюду на $\partial\Omega$ верны равенства $\varphi = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ (в силу условия $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$);
3) внешняя нормаль к области Ω_ε на S_ε направлена в сторону убывания r.
Тогда имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\varphi(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\left(-\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial n} - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\right)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon}\left(\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial r} - \varphi(x)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\right)\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_{S_\varepsilon} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial r} + \varphi(x) \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \right) \right) d\sigma =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x''(\varepsilon)) + \frac{4\pi\varepsilon^2}{4\pi\varepsilon^2} \varphi(x'(\varepsilon)), \quad (1.2)$$

где в последнем равенстве мы применили формулу среднего значения для интегрирования гладких функций $\varphi(x)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ по сфере S_ε, $x'(\varepsilon), x''(\varepsilon) \in S_\varepsilon$.

4. Заметим теперь, что в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для функции $-\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi(x) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ верно предельное соотношение

$$\int\limits_{O_\varepsilon} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x)\, dx \to 0, \quad \varepsilon \to +0. \quad (1.3)$$

Далее, в силу непрерывности $\varphi(x)$ и ограниченности $\nabla\varphi(x)$ имеем

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r}(x''(\varepsilon)) + \varphi(x'(\varepsilon)) \to 0 + \varphi(O), \quad \varepsilon \to +0. \quad (1.4)$$

5. С учётом (1.3), (1.4) из (1.2) окончательно получаем путём предельного перехода при $\varepsilon \to +0$:

$$\int\limits_{\Omega} -\frac{1}{4\pi r} \Delta\varphi(x)\, dx = \varphi(O), \quad (1.5)$$

что и означает (1.1). ⊠

Основополагающую роль фундаментальных решений выявляет

Т е о р е м а 1. *Если $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ и существует свёртка $\mathcal{E}(x) * f(x)$, где $\mathcal{E}(x)$ — фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $P(D)$, то уравнение*

$$P(D)u = f(x)$$

имеет (в смысле обобщённых функций) частное решение

$$u(x) = \mathcal{E}(x) * f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь свойством линейности дифференциального оператора $P(D)$, а также задачей 1, имеем

$$P(D)(\mathcal{E}(x) * f(x)) = (P(D)\mathcal{E}(x)) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x). \quad (1.6)$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

П Р И М Е Р 2. Пусть $P(D) = \Delta$. Тогда в силу вышесказанного имеем частное решение

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} * f(x).$$

□ Так, в том случае, когда $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, получаем классический ньютонов потенциал:

$$\left\langle -\frac{1}{4\pi|x|} * f(x), \varphi(x) \right\rangle =$$
$$= \left\langle -\frac{1}{4\pi|\xi|} \cdot f(\eta), \varphi(\xi+\eta) \right\rangle = -\iint\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{f(\eta)}{4\pi|\xi|} \varphi(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \{\tau = \xi + \eta,\ \xi = \tau - \eta\} = -\iint\limits_{\mathbb{R}^6} \frac{f(\eta)}{4\pi|\tau-\eta|} \varphi(\tau)\, d\tau\, d\eta =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3} d\tau\, \varphi(\tau) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\eta)}{4\pi|\tau-\eta|}\, d\tau,$$

или

$$u(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\eta)\, d\eta}{4\pi|\tau-\eta|}. \quad \boxtimes$$

Рассмотрим теперь случай обыкновенного линейного дифференциального оператора

$$L \equiv \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n.$$

Как известно из классической теории дифференциальных уравнений, существует <u>функция Коши оператора L</u> — решение задачи Коши

$$\begin{cases} Lz(t) = 0, \\ z(0) = 0, \ldots, z^{(n-2)}(0) = 0,\ z^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

(Строго говоря, функцией Коши будет называться функция $K(x,s) = z(t-s)$.)

□ Докажем, что в этом случае $\mathcal{E}(t) = z(t)\vartheta(t)$ — фундаментальное решение оператора L. (Заметим, что поскольку $z(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, то речь идёт об умножении обобщённой функции $\vartheta(t)$ на бесконечно гладкую функцию.)

1. Заметим (задача 2), что производные обобщённых функций можно вычислять последовательно, а также (задача 3), что для дифференцирования произведения обобщённой функции и бесконечно гладкой верна обычная формула дифференцирования произведения. Тогда с учётом начальных условий из задачи Коши (1.7) получаем

$$(z(t)\vartheta(t))' = z'(t)\vartheta(t) + z(t)\vartheta'(t) =$$
$$= z'(t)\vartheta(t) + z(t)\delta(t) = z'(t)\vartheta(t) + z(0)\delta(t) = z'(t)\vartheta(t),$$

$$(z(t)\vartheta(t))'' = (z'(t)\vartheta(t))' = z''(t)\vartheta(t) + z'(t)\delta(t) =$$

$$= z''(t)\vartheta(t) + z'(0)\delta(t) = z''(t)\vartheta(t),$$

$$(z(t)\vartheta(t))^{(n-1)} = \Big((z(t)\vartheta(t))^{(n-2)}\Big)' = \Big(z^{(n-2)}(t)\vartheta(t)\Big)' =$$
$$= z^{(n-1)}(t)\vartheta(t) + z^{(n-2)}(0)\delta(t) = z^{(n-1)}(t)\vartheta(t),$$

$$(z(t)\vartheta(t))^{(n)} = \Big(z^{(n-1)}(t)\vartheta(t)\Big)' =$$
$$= z^{(n)}(t)\vartheta(t) + z^{(n-1)}(0)\delta(t) = z^{(n)}(t)\vartheta(t) + \delta(t).$$

2. Подставляя найдённые производные в оператор $L(D)$, получаем

$$L(D)\mathcal{E}(t) = (L(D)z(t))\vartheta(t) + \delta(t) = \delta(t),$$

что и требовалось. ☒

П Р И М Е Р 3. Докажем, что функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!}\vartheta(t)$$

является фундаментальным решением оператора $\frac{d^k}{dt^k} - a$. (Здесь $a \neq = 0$ — константа.)

☐ Действительно,

1. В силу предыдущего достаточно доказать, что функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{nk-1}}{(nk-1)!}$$

является решением соответствующего однородного уравнения с граничными условиями, аналогичными таковым из задачи (1.7).

2. Нетрудно установить, что

$$z(0) = \ldots = z^{(k-2)}(0) = 0,$$

$$z^{(k-1)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(n-1)k}}{((n-1)k)!}, \quad z^{(k-1)}(0) = 1,$$

$$\frac{d^k}{dt^k}u(t) = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} a^{n-1}\frac{t^{nk-k-1}}{(nk-k-1)!} = \sum_{l=1}^{\infty} a^l\frac{t^{lk-1}}{(lk-1)!} = az(t).$$

Отсюда следует, что (1.7) для оператора $L = \frac{d^k}{dt^k} - a$ выполнено. ☒

§ 2. Обобщённая задача Коши

Рассмотрим классическую задачу Коши для ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = f(t), \quad t > 0, \\ u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, \ldots, n-1, \\ f(t) \in C[0; +\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

Продолжим f и решение u (существование которого следует из классической теории) нулём при $t < 0$ и обозначим полученные функции соответственно через $\widetilde{f}$, $\widetilde{u}$.

Тогда (см. задачу 4) имеем

$$\widetilde{u}^{(k)}(t) = \{\widetilde{u}^{(k)}\}\vartheta(t) + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-1-j)}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

где фигурные скобки означают, что мы берём (поточечно) значение классической производной, а в точках, где она не определена, берём, например, нулевые значения. (Заметим, что здесь речь не идёт об умножении обобщённой функции на бесконечно дифференцируемую, но это не мешает нам установить корректность обобщённой функции в правой части «вручную».)

Подставляем в уравнение. С учётом (2.2), собирая коэффициенты, имеем

$$\begin{aligned} L\widetilde{u} = \{Lu\}\vartheta(t) + u_0\delta^{(n-1)}(t) + (a_1 u_0 + u_1)\delta^{(n-2)}(t) + \ldots \\ \ldots + (a_{n-1}u_0 + a_{n-2}u_1 + \ldots + u_{n-1}) \equiv \\ \equiv f(t)\vartheta(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t) \equiv \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_0 = a_{n-1}u_0 + \ldots + a_1 u_{n-2} + u_{n-1}, \ldots, \\ c_{n-2} = a_1 u_0 + u_1, \quad c_{n-1} = u_0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Итак, $\widetilde{u}(t)$ удовлетворяет в смысле обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ уравнению

$$L\widetilde{u} = \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t) \equiv \widetilde{\widetilde{f}}(t). \tag{2.4}$$

Заметим, что в уравнении (2.4) уже содержатся (посредством коэффициентов c_k) начальные условия задачи (2.4). Поэтому задача (2.4) называется обобщённой задачей Коши. В то же время, носители обобщённых функций $\mathcal{E}(t) \equiv z(t)\vartheta(t)$ и $\widetilde{\widetilde{f}}(t)$ — правой части уравнения (2.4) — ограничены с одной стороны, а поэтому (см. замечание в предыдущей лекции) определена их свёртка $\widetilde{\widetilde{u}}(t) \equiv \mathcal{E}(t) * \widetilde{\widetilde{f}}(t)$, которая в силу теоремы 2 является решением задачи (2.4).

Ранее мы исходили из классического решения задачи (2.1). Мы «упаковали» её (уравнение и граничные условия) в одно-единственное уравнение относительно функции $\widetilde{u}(t) \equiv u(t)\vartheta(t)$ и нашли решение последнего $\widetilde{\widetilde{u}}(t)$. Если удастся показать, что $\widetilde{\widetilde{u}}(t) = u(t)$ при $t > 0$, то можно будет и в самом деле говорить о сведении классической задачи Коши (2.1) к обобщённой (2.4).

Заметим прежде всего, что

$$\widetilde{\widetilde{u}}(t) = \mathcal{E}(t) * \widetilde{\widetilde{f}}(t) = \mathcal{E}(t) * (\widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}(t)) =$$
$$= \mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathcal{E}^{(k)}(t) = \left(\int_0^t z(t-s) f(s)\, ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)}(t) \right) \vartheta(t). \tag{2.5}$$

(Равенство $\mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) = \int_0^t z(t-s) f(s)\, ds\, \vartheta(t)$ будет доказано ниже.)

Далее можно рассуждать двояко. Можно явно проверить, что функция, стоящая в правой части (2.5), после ограничения на $[0; +\infty)$ удовлетворяет задаче Коши (2.1). А можно заметить, что задачу (2.4) мы получили как задачу, которой удовлетворяет функция $\widetilde{u}(t)$, являющаяся продолжением классического решения, и показать, что решение задачи (2.4) среди обобщённых функций, носитель которых ограничен слева, единственно, а поэтому с необходимостью $\widetilde{\widetilde{u}} = \widetilde{u}$. (Задачи 5, 6.)

Итак, наш подход позволил построить решение произвольной классической задачи Коши вида (2.1) исходя только из функции Коши уравнения.

Осталось доказать лишь, что $\mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) = \int_0^t z(t-s) f(s)\, ds\, \vartheta(t)$. Имеем при любой $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\left\langle \mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t), \varphi(t) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \mathcal{E}(\xi) \cdot \widetilde{f}(\eta), \varphi(\xi + \eta) \right\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(\xi) \widetilde{f}(\eta) \varphi(\xi + \eta)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \int_0^{+\infty} d\xi \int_0^{+\infty} d\eta\, z(\xi) f(\eta) \varphi(\xi + \eta) = \{\tau = \xi + \eta\} =$$
$$= \int_0^{+\infty} d\tau \int_0^{\tau} d\eta\, z(\tau - \eta) f(\eta)\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \vartheta(\tau) \int\limits_0^\tau d\eta\, z(\tau-\eta) f(\eta)\, d\eta = \left\langle \vartheta(\tau) \int\limits_0^\tau z(\tau-\eta) f(\eta)\, d\eta, \varphi(\tau) \right\rangle.$$

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 4.

$$\begin{cases} \dot{u} + bu = f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

□ Имеем $z(t) = e^{-bt}$, $c_0 = a_0 u_0 = b u_0$, откуда

$$u(t) = u_0 e^{-bt} + \int\limits_0^t e^{-b(t-s)} f(s)\, ds. \quad \boxtimes$$

П р и м е р 5.

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \\ u(0) = u_0, \\ \dot{u}(0) = u_1. \end{cases}$$

□ Имеем $z(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$, $c_0 = 0 \cdot u_0 + u_1 = u_1$, $c_1 = u_0$, откуда

$$u(t) = u_0 \cos \omega t + \frac{u_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int\limits_0^t \sin \omega (t-s) f(s)\, ds. \quad \boxtimes$$

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

З а д а ч а 0. Сравнить формулы (2.2) и (2.5) и объяснить, почему во втором случае при дифференцировании разрывной функции $\mathcal{E}(t)$ не появились члены вида $\alpha \delta^{(m)}(t)$.

З а д а ч а 1. 1) Доказать, что если для $f, g \in \mathcal{D}'$ существуют свёртки $f * g$, $(D^\alpha f) * g$, $f * (D^\alpha g)$, то верны равенства

$$D^\alpha (f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g).$$

2**) Доказать, что из существования свёртки $f * g$ следует существование остальных фигурирующих здесь свёрток. 3) Привести контрпример к обратному следствию.

З а д а ч а 2. Доказать, что производные обобщённых функций можно вычислять последовательно, т. е. для любой $f \in \mathcal{D}'$ и любых мультииндексов α, β верно

$$D^\beta (D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta} f,$$

где мультииндексы складываются покоординатно.

З а д а ч а 3. Показать, что для k-ой производной произведения обобщённой функции $f(x)$ на бесконечно гладкую функцию $a(x)$ верна формула Лейбница (в которой производные обобщённый функций понимаются в соответствующем смысле.)

Задача 4. Доказать формулу (2.2).

5*, 6*. Провести намеченные в основном тексте рассуждения, обосновывающие равенства $\widetilde{\widetilde{u}} = \widetilde{u}$, $\widetilde{\widetilde{u}} = u$ при $t > 0$ в классическом смысле.