Лекция 9

СЛЕД ФУНКЦИЙ ИЗ $H^1(\Omega)$

В этой лекции мы рассмотрим важный вопрос о существовании следа на границе функций из пространств $H^1(\Omega)$.

§ 1. Некоторые утверждения для функций из $H^1(Q^+)$

Введем следующие обозначения:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < 1, \ i = \overline{1, N}\right\}, \quad Q^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in Q : x_N > 0\},$$
$$x = (x', x_N), \quad x' = (x_1, ..., x_{N-1}),$$

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in Q : x_N = 0\} = \\ = \left\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x_i| < 1, \ i = \overline{1, N-1}\right\} \otimes \{x_N = 0\}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Для любой функции $u(x) \in H^1(Q^+)$ существует единственная функция $w(x') \in L^2(\Gamma)$ такая, что*

$$\operatorname*{ess.lim}_{x_N \to 0+0} \int_\Gamma \left|u(x', x_N) - w(x')\right|^2 dx' = 0.\ ^{1)} \tag{1.1}$$

Мы назовем функцию $w(x')$ следом функции $u(x)$ на многообразии Γ размерности $N-1$ и обозначим его через $\gamma u(x', 0)$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем единственность следа. Это следует из следующей цепочки неравенств:

$$\left(\int_\Gamma \left|w_1(x') - w_2(x')\right|^2 dx'\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_\Gamma \left|u(x', x_N) - w_1(x')\right|^2 dx'\right)^{1/2} +$$

[1)] Обозначения ess.lim означает, что предел берется по множеству $x_N \in \in [0, \delta]\backslash E$, где мера Лебега $|E|$ множества $E \subset [0, \delta]$ равна нулю.

$$+\left(\int\limits_{\Gamma}\left|u(x',x_N)-w_2(x')\right|^2\,dx'\right)^{1/2}\to +0$$

при $x_N \to 0+0$ в смысле предела ess.lim.

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеет место плотное вложение

$$\mathbb{C}^\infty(\overline{Q}^+)\overset{ds}{\subset} H^1(Q^+).$$

Поэтому для фиксированной функции $u(x)\in H^1(Q^+)$ существует последовательность $\{u_m(x)\}\in \mathbb{C}^\infty(\overline{Q}^+)$ такая, что

$$\lim_{m\to+\infty}\|u_m-u\|_{H^1(Q^+)}=0. \tag{1.2}$$

Фиксируем $0<2\delta<1$. Выберем гладкую функцию $\varphi(x_N)\in\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$ такую, что

$$\varphi(x_N)=\begin{cases}1, & \text{при}\quad x_N\in[0,\delta];\\ 0, & \text{при}\quad x_N\in[2\delta,1].\end{cases}$$

Заметим, что

$$\lim_{m\to+\infty}\|\varphi u_m-\varphi u\|_{H^1(Q^+)}=0. \tag{1.3}$$

$\square$ Действительно, с одной стороны,

$$\|\varphi\|_{L^\infty(Q^+)}+\|D_x\varphi\|_{L^\infty(Q^+)}\leqslant K(\delta)<+\infty.$$

С другой стороны, выполнены неравенства

$$\|\varphi u_m-\varphi u\|_{L^2(Q^+)}\leqslant\|\varphi\|_{L^\infty(Q^+)}\|u_m-u\|_{L^2(Q^+)},$$

$$\|D_x(\varphi u_m-\varphi u)\|_{L^2(Q^+)}\leqslant\|D_x\varphi\|_{L^\infty(Q^+)}\|u_m-u\|_{L^2(Q^+)}+\\ +\|\varphi\|_{L^\infty(Q^+)}\|D_xu_m-D_xu\|_{L^2(Q^+)}.\quad\boxtimes$$

При достаточно малом $\varepsilon\in[0,\delta]$ выполнено равенство

$$u_m(x',\varepsilon)=-\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N}\,dx_N. \tag{1.4}$$

Поэтому имеет место цепочка неравенств [1])

$$\left|u_m(x',\varepsilon)-u_n(x',\varepsilon)\right|^2\leqslant\left|\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N}-\frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N}\right)dx_N\right|^2\leqslant$$

[1]) В силу неравенства Гельдера.

$$\leqslant (1-\varepsilon)^2 \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N} - \frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N}\right|^2 dx_N \leqslant \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N} - \frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N}\right|^2 dx_N.$$

Теперь проинтегрируем по $x' \in \Gamma$ обе части последнего итогового неравенства. Отсюда и из (1.3) мы получим следующее выражение

$$\|u_m(x',\varepsilon) - u_n(x',\varepsilon)\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \|\varphi u_m - \varphi u_n\|_{H^1(Q^+)} \to +0 \tag{1.5}$$

при m и $n \to +\infty$. Следовательно, с одной стороны, последовательность $\{u_m(x',\varepsilon)\}$ является фундаментальной в банаховом пространстве $L^2(\Gamma)$. Обозначим предел этой последовательности через $v(x',\varepsilon) \in \in L^2(\Gamma)$. С другой стороны, последовательность $\{u_m\}$ сильно сходится к $u(x)$ в $L^2(Q^+)$. Но тогда существует такое множество $E \subset (0,\delta)$ нулевой меры Лебега, что для произвольного $\varepsilon \in (0,\delta)\backslash E$,

$$v(x',\varepsilon) = u(x',\varepsilon) \quad \text{для п. вс.} \quad x' \in \Gamma. \tag{1.6}$$

Шаг 3. Таким образом, для всех $\varepsilon \in (0,\delta)\backslash E$ в силу (1.5) имеют место следующие неравенства

$$\int\limits_\Gamma \left|u_m(x',0) - v(x',0)\right|^2 dx' \leqslant \|\varphi u_m - \varphi u\|^2_{H^1(Q^+)}, \tag{1.7}$$

$$\int\limits_\Gamma \left|u_m(x',\varepsilon) - u(x',\varepsilon)\right|^2 dx' \leqslant \|\varphi u_m - \varphi u\|^2_{H^1(Q^+)}. \tag{1.8}$$

Кроме того, очевидно, имеет место следующее неравенство:

$$\int\limits_\Gamma \left|u_m(x',\varepsilon) - u_m(x',0)\right|^2 dx' \leqslant \varepsilon \int\limits_{Q^+} \left|\frac{\partial u_m}{\partial x_N}\right|^2 dx. \tag{1.9}$$

□ Действительно, справедлива следующее равенство:

$$u_m(x',\varepsilon) - u_m(x',0) = \int\limits_0^\varepsilon \frac{\partial u_m(x',x_N)}{\partial x_N}\, dx_N.$$

Отсюда получим

$$\left|u_m(x',\varepsilon) - u_m(x',0)\right|^2 \leqslant \varepsilon \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial u_m(x',x_N)}{\partial x_N}\right|^2 dx_N$$

Осталось проинтегрировать обе части последнего равенства по $x' \in \in \left\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x_i| < 1,\ i = \overline{1, N-1}\right\}$. ⊠

Наконец, комбинируя неравенства (1.7)–(1.9), мы получим неравенство

$$\left(\int\limits_{\Gamma}\left|u(x',\varepsilon)-w(x')\right|^2\,dx'\right)^{1/2}\leqslant\left(\int\limits_{\Gamma}\left|u_m(x',\varepsilon)-u(x',\varepsilon)\right|^2\,dx'\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int\limits_{\Gamma}\left|u_m(x',\varepsilon)-u_m(x',0)\right|^2\,dx'\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int\limits_{\Gamma}\left|u_m(x',0)-w(x')\right|^2\,dx'\right)^{1/2}. \quad (1.10)$$

Устремляя одновременно $m\to+\infty$ и $\varepsilon\to+0$ по множеству $(0,\delta)\backslash E$, мы получим неравенство [1])

$$\operatorname*{ess.lim}_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\Gamma}\left|u(x',\varepsilon)-w(x')\right|^2\,dx'=$$

$$=\lim_{\varepsilon\in(0,\delta)\backslash E,\ \varepsilon\to+0}\int\limits_{\Gamma}\left|u(x',\varepsilon)-w(x')\right|^2\,dx'=0,$$

где $w(x')=v(x',0)$.

Лемма доказана.

Замечание 1. Из предельного свойства (1.7) мы имеем

$$\lim_{m\to+\infty}\int\limits_{\Gamma}\left|u_m(x',0)-w(x')\right|^2\,dx'=0. \quad (1.11)$$

В силу этого предельного свойства мы можем определить след функции $u(x)$ на Γ как такую функцию $w(x')$, что для всякой последовательности $\{u_m(x)\}\subset\mathbb{C}^\infty(\overline{Q}^+)$ такой, что

$$\|u-u_m\|_{H^1(Q^+)}\to+0\quad\text{при}\quad m\to+\infty$$

выполнено (1.11). Заметим, что поскольку

$$\mathbb{C}^{(1)}(\overline{Q}^+)\overset{ds}{\subset}H^1(Q^+),$$

то указанную последовательность $\{u_m\}$ можно брать из $\mathbb{C}^{(1)}(\overline{Q}^+)\supset\supset\mathbb{C}^\infty(\overline{Q}^+)$. Отметим, что это определение следа эквивалентно определению следа из леммы 1.

Замечание 2. Заметим, что если $u(x)\in H^1(Q^+)\cap\mathbb{C}(\overline{Q}^+)$, тогда

$$\gamma u(x',0)=u(x',0)\quad\text{для почти всех}\quad x'\in\Gamma.$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

[1]) Смотри определение ess.lim.

Лемма 2. *Пусть* $u(x) \in H^1(Q^+) \cap \mathbb{C}(\overline{Q}^+)$ *и* $u(x,t) = 0$ *вблизи верхней крышки и боковой границы* Q^+. *Если, кроме того,* $u = 0$ *на основании* Γ, *то* $u(x) \in H_0^1(Q^+)$.

Доказательство.

Шаг 1. Продолжим функцию $u(x)$ на все множество $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \, |x_i| < 1, \; i = \overline{1,N}\right\}$ нулем:

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad x \in \overline{Q}^+; \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \backslash \overline{Q}^+. \end{cases} \tag{1.12}$$

Прежде всего, докажем, что $\widetilde{u}(x) \in H^1(Q)$. Действительно, очевидно, что измеримая функция $\widetilde{u}(x) \in L^2(Q)$ и, кроме того, в слабом смысле

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} \partial u / \partial x_i, & \text{если} \quad x \in Q^+; \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \backslash Q^+ \end{cases} \tag{1.13}$$

при $i = \overline{1, N-1}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_i} \in L^2(Q) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Осталось доказать, что в слабом смысле

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_N} = \begin{cases} \partial u / \partial x_N, & \text{если} \quad x \in Q^+; \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \backslash Q^+. \end{cases} \tag{1.14}$$

И тогда отсюда получим, что

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_N} \in L^2(Q).$$

С этой целью нам нужно доказать следующее равенство:

$$\int\limits_Q \widetilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \, dx = -\int\limits_Q \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N} \varphi \, dx$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q)$. Это равенство с учетом определения $\widetilde{u}$ и (1.14) можно записать в следующем виде

$$\int\limits_{Q^+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \, dx = -\int\limits_{Q^+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \varphi \, dx \tag{1.15}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q)$. Для доказательства этого равенства возьмем срезающую функцию $\eta(x_N) \in \mathbb{C}_0^\infty(-1,1)$, удовлетворяющую условиям

$$\eta(x_N) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x_N| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & \text{если} \quad |x_N| \geqslant 2\varepsilon, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \eta(x_N) \leqslant 1, \quad |\eta'(x_N)| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}, \quad -1 < x_N < 1, \quad 0 < 2\varepsilon < 1.$$

Справедливо следующее представление:

$$\int\limits_{Q^+} u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_N}\,dx = \int\limits_{Q^+} u(x)\frac{\partial\left(\eta(x_N)\varphi(x) + (1-\eta(x_N))\varphi\right)}{\partial x_N}\,dx =$$

$$= \int\limits_{Q^+} u(x)\eta^{'}(x_N)\varphi\,dx + \int\limits_{Q^+} u(x)\eta(x_N)\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{Q^+} u(x)\frac{\partial((1-\eta(x_N))\varphi)}{\partial x_N}\,dx \stackrel{\text{def}}{=} I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon. \quad (1.16)$$

Ясно, что в силу определения функции $\eta(x_N)$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем

$$\lim_{\varepsilon\to+0} I_2^\varepsilon = 0.$$

Заметим, что $(1-\eta(x_N))\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q^+)$ и поэтому выражение для I_3^ε пример вид

$$I_3^\varepsilon = -\int\limits_{Q^+} ((1-\eta(x_N))\varphi(x))\frac{\partial u}{\partial x_N}\,dx \to -\int\limits_{Q^+} \varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x_N}\,dx$$

при $\varepsilon \to +0$. Наконец, поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{Q^+})$ и $u(x) = 0$ при $x_N = 0$, то имеет место цепочка неравенств

$$|I_1^\varepsilon| \leqslant \int\limits_{Q^+\cap\{x\colon |x_N|\leqslant 2\varepsilon\}} \left|u\eta^{'}(x_N)\right|\,dx \leqslant \frac{c}{\varepsilon}\int\limits_{Q^+\cap\{x\colon |x_N|\leqslant 2\varepsilon\}} |u|\,dx \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. Итак, переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.16), мы получим равенство (1.15).

Шаг 2. Теперь нам нужно доказать, что $u(x) \in H_0^1(Q^+)$. [1]) С этой целью заметим, что можно рассмотреть модифицированную срезку функции $\widetilde{u}(x)$: [2])

$$J_\varepsilon^- \widetilde{u}(x) = \int\limits_Q \omega_\varepsilon(x_1 - y_1)\cdots\omega_\varepsilon(x_{N-1} - y_{N-1})\omega_\varepsilon(x_N - y_N - 2\varepsilon)\widetilde{u}(y)\,dy,$$

где

$$\omega_\varepsilon(s) = c_1(\varepsilon)\begin{cases}\exp\left(-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - s^2)\right), & \text{если} \quad |s| \leqslant \varepsilon;\\ 0, & \text{если} \quad |s| \geqslant \varepsilon.\end{cases}$$

[1]) Напомним, что пространство $H_0^1(Q^+)$ является пополнением пространства $\mathbb{C}_0^\infty(\overline{Q^+})$ по норме пространства $H^1(Q^+)$.

[2]) Для этой срезки остаются справедливыми свойства обычной срезки с ядром «шапочка».

Воспользуемся тем условием, что функция $\widetilde{u}(x)$ равна нулю вблизи боковой границы и на верхней крышке Q^+ и на $Q\backslash Q^+$. Тогда получим, что

$$J_\varepsilon^- \widetilde{u}(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(\overline{Q}^+).$$

Используя свойства срезки и того, что $\widetilde{u} \in H^1(Q)$ мы получим, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \| J_\varepsilon^- \widetilde{u} - u \|_{H^1(Q^+)} = 0,$$

но тогда согласно определению пространства $H_0^1(Q^+)$ мы получим, что $u(x) \in H_0^1(Q^+)$.

Лемма доказана.

Справедливо следующее следствие:

Следствие. *Пусть $u(x) \in H^1(Q^+) \cap \mathbb{C}(\overline{Q}^+)$ и $\widetilde{u}(x)$ — это продолжение функции $u(x)$*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если} \quad x \in Q^+; \\ u(x', 0), & \text{если} \quad x \in Q^- = Q \backslash Q^+. \end{cases}$$

Тогда $\widetilde{u}(x) \in H^1(Q)$.

§ 2. След функций из $H^1(\Omega)$

Справедлива основная теорема.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Всякая функция $u(x) \in H^1(\Omega)$ имеет единственный след $\gamma u(x) \in L^2(\partial\Omega)$, понимаемый в следующем смысле:* [1])

$$\lim_{m \to +\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |u_m - \gamma u|^2 \, d\sigma = 0, \tag{2.1}$$

где $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это произвольная последовательность,

$$\|u - u_m\|_{H^1(\Omega)} \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $\partial\Omega$ гладкая граница, то каждая точка $x \in \partial\Omega$ имеет окрестность U со следующим свойством: существует гладкое обратимое отображение Ψ, такое что

$$\Psi : Q = \{ y \in \mathbb{R}^N : \ |y_i| < 1, \ i = \overline{1, N} \} \to U$$

и

$$\Psi : Q^+ = \{ y \in Q : \ y_N > 0 \} \to U \cap \Omega, \quad \Psi(\Gamma) = U \cap \partial\Omega,$$

где

$$\Gamma = \{ y \in Q : \ y_N = 0 \}.$$

[1]) Который эквивалентен исходному определению следа.

Пусть $\{u_m\} \subset \mathbb{C}^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это произвольная последовательность, сходящаяся к $u(x) \in H^1(\Omega)$ сильно. Определим следующую последовательность:

$$v_m(y) := (\eta u_m) \circ \Psi(y), \quad \eta(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(U). \tag{2.2}$$

Тогда $v_m(y) \in \mathbb{C}^{(1)}(\overline{Q}^+)$ и $v_m = 0$ вблизи верхней крышки и боковой границы Q^+ и

$$\lim_{m\to+\infty} \|v_m - (\eta u) \circ \Psi\|_{H^1(Q^+)} = 0. \tag{2.3}$$

Согласно утверждению леммы 1 существует такая функция $h(y) \in \in L^2(\Gamma)$ такая, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_\Gamma \left| v_m(y', 0) - h(y') \right|^2 \, dy' = 0. \tag{2.4}$$

Очевидно, что $h = 0$ вблизи границы Γ. Возвращаясь к переменной x, мы получим

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{U\cap\partial\Omega} |(\eta u_m)(\sigma) - w(\sigma)|^2 \, d\sigma = 0, \tag{2.5}$$

где

$$w(x) = h \circ \Phi|_{\Phi_N(x)=0}, \quad y = \Phi(x) = (\Phi_1(x), ..., \Phi_N(x)), \quad \Psi(y) = x.$$

$\Phi(x)$— это обратное отображение для $\Psi(y)$. Отметим, что

$$w(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U \cap \partial\Omega.$$

После продолжения функции $w(x)$ нулем на всю границу $\partial\Omega$ мы получим формулу

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |(\eta u_m)(\sigma) - w(\sigma)|^2 \, d\sigma = 0. \tag{2.6}$$

Шаг 2. Поскольку $\partial\Omega$ — это компактное множество существует такое конечное открытое покрытие

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n U_i. \tag{2.7}$$

Пусть $\eta_i(x)$ при $i = \overline{1, n}$ — это разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^n$. В частности, это означает, что

$$\sum_{i=1}^n \eta_i(x) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

$$\eta_i(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(U_i).$$

Пусть функция $w_i(x)$ — это соответствующая функция построенная по $\eta_i(x)$ на предыдущем шаге, т. е. такая, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} \left|(\eta_i u_m)(\sigma) - w_i(\sigma)\right|^2 \, d\sigma = 0. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$w = \sum_{i=1}^{n} w_i \Rightarrow w(x) \in L^2(\partial\Omega),$$

причем

$$u_m - w = \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_i u_m - w_i\right), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} \left|u_m(\sigma) - w(\sigma)\right|^2 \, d\sigma = 0. \tag{2.9}$$

Это доказывает существование следа $\gamma u|_{\partial\Omega}$. Также может быть доказана единственность следа.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Если $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, тогда*

$$\gamma u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство.

Согласно определению

$$\mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \overset{ds}{\subset} H_0^1(\Omega).$$

Поэтому существует такая последовательность $\{u_m\} \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, что

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad H^1(\Omega),$$

но тогда в силу результата (2.1) теоремы 1 имеем

$$\lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |u_m - \gamma u|^2 \, d\sigma =$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \int\limits_{\partial\Omega} |\gamma u|^2 \, d\sigma = \int\limits_{\partial\Omega} |\gamma u|^2 \, d\sigma = 0 \Rightarrow \gamma u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.10}$$

Следствие доказано.