Лекция 7. Вариационные методы. Метод Люстерника–Шнирельмана.

Корпусов Максим Олегович

Курс лекций по нелинейному функциональному анализу

6 ноября 2013 г.

Обозначения

Пусть $\mathbb{B}$ — это вещественное и сепарабельное банахово пространство с сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть, кроме того,

$$\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1),$$

т. е. функционал φ является дважды дифференцируемым по Фреше, причем вторая его производная

$$\varphi''_{ff}(u) : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*)$$

и, кроме того, является непрерывным отображением, т. е.

$$\varphi''_{ff}(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B};\mathcal{L}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*)).$$

Рассмотрим следующее множество:

$$\mathcal{V} \equiv \{v \in \mathbb{B} : \ \varphi(v) = 1\}, \tag{1}$$

причем предположим, что

$$\left\|\varphi'_f(v)\right\|_* > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}.$$

Касательное пространство.

Введем теперь *касательное пространство* в точке $v \in \mathcal{V}$:

$$\mathrm{T}_v\mathcal{V} \equiv \left\{ u \in \mathbb{B} : \left\langle \varphi_f'(v), u \right\rangle = 0 \right\}. \tag{2}$$

В дальнейшем, как можно заметить, функционал φ и соответствующее многообразие $\mathcal{V}$ являются тем самым ограничением для некоторого функционала ψ, т. е. мы будем рассматривать условный экстремум функционала ψ на многообразии $\mathcal{V}$, порожденном функционалом φ.

Норма с ограничением на касательное многообразие.

Теперь введем в рассмотрение функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

относительно которого предположим, что он принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, т. е. является дифференцируемым по Фреше на $\mathbb{B}$ и его производная Фреше является непрерывным отображением:

$$\psi'_f(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*).$$

Норма производной Фреше $\psi'_f(u)$ с ограничением на касательное пространство $\mathrm{T}_v\mathcal{V}$ имеет следующий вид:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \equiv \sup_{\|u\|\leqslant 1,\ u\in \mathrm{T}_v\mathcal{V}} \left|\left\langle \psi'_f(v), u \right\rangle\right|, \tag{3}$$

где $v \in \mathcal{V}$.

Одно неравенство.

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться следующим неравенством:

$$\langle f^*, w\rangle \leqslant \|f^*\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \|w\| \quad \text{для всех} \quad w \in \mathrm{T}_v\mathcal{V},$$

которое доказывается следующим образом — в силу (3) имеет место неравенство

$$\left\langle f^*, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle \leqslant \|f^*\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \quad \text{для} \quad w \neq \theta, \quad w \in \mathrm{T}_v\mathcal{V},$$

поскольку при $w = \theta$ доказывать нечего.

Критические точки функционала относительно многообразия.

Определение 1. *Точка $v \in \mathcal{V}$ называется критической точкой функционала ψ по отношению к многообразию $\mathcal{V}$, если имеет место равенство*

$$\left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) = 0. \tag{4}$$

Кроме того, в дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$\psi^d \equiv \{v \in \mathcal{V} : \ \psi(v) \leqslant d\}. \tag{5}$$

Лемма о критических точках.

Лемма

Пусть $f, g \in \mathbb{B}^*$, *тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\|v\| \leqslant 1,\ \langle g, v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \min_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \|f - \lambda g\|_*. \tag{6}$$

Доказательство леммы-1.

Действительно, с одной стороны

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1,\ \langle g,v\rangle=0} |\langle f, v\rangle| = \sup_{\|v\|\leqslant 1,\ \langle g,v\rangle=0} |\langle f-\lambda g, v\rangle|\,,$$

поскольку $\langle g, v\rangle = 0$. С другой стороны,

$$|\langle f-\lambda g, v\rangle| \leqslant \|f-\lambda g\|_*\|v\| \leqslant \|f-\lambda g\|_*,$$

поскольку $\|v\| \leqslant 1$. Кроме того, по теореме Хана–Банаха существует такое продолжение $\overline{f} \in \mathbb{B}^*$ функционала f, что

$$\langle \overline{f}, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in \ker(g),$$

т. е. для таких v, что $\langle g, v\rangle = 0$, и имеет место равенство

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1,\ \langle g,v\rangle=0} |\langle f, v\rangle| = \|\overline{f}\|_*.$$

Доказательство леммы-2.

Кроме того, имеет место следующее вложение:

$$\ker(g) \subset \ker(\overline{f} - f),$$

из которого в силу линейности функционалов $g, f, \overline{f} \in \mathbb{B}^*$ вытекает существование такого $\lambda \in \mathbb{R}^1$, что

$$\overline{f} - f = \lambda g,$$

но отсюда вытекает, что

$$\|\overline{f}\|_* = \|f - \lambda g\|_*.$$

Лемма доказана.

Теорема Лагранжа.

Теорема

Пусть $\varphi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ $u \in \mathcal{V}$, *определенное формулой* (1), *тогда имеет место равенство*

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}^1} \left\|\psi'_f(u) - \lambda\varphi'_f(u)\right\|_* . \qquad (7)$$

В частности, если $u \in \mathcal{V}$ *— это критическая точка функционала* ψ *относительно многообразия* $\mathcal{V}$, *то найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u) - \mu\varphi'_f(u) = \theta \in \mathbb{B}^*. \qquad (8)$$

Псевдоградиентное векторное поле.

Рассмотрим следующее подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$:

$$\mathcal{M} \equiv \left\{ u \in \mathcal{V} : \ \left\| \psi'_f(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \neq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Определение 2. *Локально липшиц–непрерывное на* $\mathcal{M} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ *отображение*

$$g(\cdot) : \mathcal{M} \to \mathbb{B}$$

называется псевдоградиентным векторным полем на $\mathcal{M}$*, если* $g(u) \in \mathrm{T}_u(\mathcal{V})$ *и для этого отображения выполнены следующие свойства*:

$$\|g(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi'_f(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}), \tag{9}$$

$$\left\langle \psi'_f(u), g(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi'_f(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \tag{10}$$

для всех $u \in \mathcal{M}$.

Существование псевдоградиентного векторного поля.

Теорема

Пусть $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, *тогда на* $\mathcal{M}$ *существует псевдоградиентное поле* $g(\cdot) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$.

Доказательство теоремы-1.

Итак, пусть $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ — это произвольная точка и $\mathrm{T}_v(\mathcal{V})$ — это касательное пространство в этой точке. Напомним, что $x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, если

$$\left\langle \varphi'_f(v), x \right\rangle = 0.$$

Поскольку $\varphi'_f(v) \neq \theta \in \mathbb{B}^*$, то найдется такое $x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, что $\|x\| = 1$ и

$$\left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle > \frac{2}{3} \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) . \tag{11}$$

Действительно,

$$\psi'_f(v) \neq \theta \quad \text{для} \quad v \in \mathcal{M}.$$

Доказательство теоремы-2.

Поэтому по следствию из теоремы Хана–Банаха найдется такое $x \in \mathbb{B}$, что

$$\|x\| = 1 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle = \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) \, \|x\| = \\ = \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) > \frac{2}{3} \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) \, .$$

Тем самым, неравенство (11) доказано. Кроме того, по определению многообразия $\mathcal{V}$ в каждой его точке $v \in \mathcal{V}$ имеет место неравенство

$$\varphi'_f(v) \neq \theta \in \mathbb{B}^*,$$

но тогда в силу того же следствия из теоремы Хана–Банаха вытекает существование такого $z \in \mathbb{B}$, что

$$\left\langle \varphi'_f(v), z \right\rangle = 1. \tag{12}$$

Доказательство теоремы-3.

Действительно, найдется такое $z_1 \in \mathbb{B}$, что имеет место следующее равенство:

$$\left\langle \varphi_f'(v), z_1 \right\rangle = \left\| \varphi_f'(v) \right\|_* \|z_1\| \quad \text{при} \quad \|z_1\| = 1,$$

т.е.

$$\left\langle \varphi_f'(v), z_1 \right\rangle = \left\| \varphi_f'(v) \right\|_* .$$

Откуда следует, что если положить

$$z = \frac{z_1}{\left\| \varphi_f'(v) \right\|_*},$$

то получим требуемое равенство.

Доказательство теоремы-4.

Заметим, что эти найденные элементы $x, z \in \mathbb{B}$, естественно, зависят от $v \in \mathcal{M}$. Теперь отметим, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, то в окрестности (из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$) точки $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ имеет место следующее разложение:

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle - \left\langle \varphi_f'(v), z \right\rangle = \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u-v), z \right\rangle + \omega(z, v, u-v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\| \to 0} \frac{\omega(z, v, u-v)}{\|u-v\|} = 0, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{B},$$

но в силу (12) отсюда приходим к равенству

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle = 1 + \left\langle \varphi_{ff}''(v)(u-v), z \right\rangle + \omega(z, v, u-v),$$

из которого вытекает, что для близких точек $u, v \in \mathcal{M}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{M}$ справедливо неравенство

$$\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle > 0. \tag{13}$$

Доказательство теоремы-5.

Теперь введем следующие обозначения:

$$y = \frac{3}{2}x \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}), \quad g_v(u) \equiv y - \frac{\left\langle \varphi_f'(u), y \right\rangle}{\left\langle \varphi_f'(u), z \right\rangle} z, \quad g_v(u) \in \mathrm{T}_u\mathcal{V},$$

причем второе равенство рассматривается из достаточно малой окрестности точки $v \in \mathcal{M}$, существование которой следует из (13). Заметим теперь, что поскольку

$$x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V}) \Leftrightarrow \left\langle \varphi_f'(v), x \right\rangle = 0,$$

следовательно, поскольку по определению $y \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, то и

$$\left\langle \varphi_f'(v), y \right\rangle = 0,$$

но тогда $g_v(v) = y$.

Доказательство теоремы-6.

Теперь заметим, что в точке $u = v$ отображение $g_v(u)$ удовлетворяет условиям (9) и (10). Действительно, имеют место следующие выражения

$$\|g_v(v)\| = \|y\| = \frac{3}{2}\|x\| \left\|\psi_f'(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) = \\ = \frac{3}{2}\left\|\psi_f'(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) < 2\left\|\psi_f'(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}),$$

кроме того,

$$\left\langle \psi_f'(v), g_v(v) \right\rangle = \frac{3}{2}\left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle \left\|\psi_f'(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) > \left\|\psi_f'(v)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_v\mathcal{V}).$$

Доказательство теоремы-7.

Теперь заметим, что поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ и $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, то отображение $g_v(u)$ является непрерывным по Липшицу в некоторой окрестности точки $u = v$. Действительно, для этого достаточно доказать локальную непрерывность скалярных функций

$$\left\langle \varphi_f^{'}(u), y \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \varphi_f^{'}(u), z \right\rangle$$

в некоторой малой окрестности точки $u = v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$. Это следствие того, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ и следующего разложения:

$$\left\langle \varphi_f^{'}(u), w \right\rangle = \left\langle \varphi_f^{'}(v), w \right\rangle + \left\langle \varphi_{ff}^{''}(v)(u-v), w \right\rangle + \omega(w, v, u-v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\|\to 0} \frac{|\omega(w, v, u-v)|}{\|u-v\|} = 0, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad w \in \mathbb{B}.$$

Доказательство теоремы-8.

Теперь поскольку

$$\varphi''_{ff}(v) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*\right),$$

т. е. при фиксированном $v \in \mathcal{M}$ отображение $\varphi''_{ff}(v)$ является линейным и непрерывным отображением и, значит, ограниченным, поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\left|\left\langle \varphi'_f(u), w \right\rangle - \left\langle \varphi'_f(v), w \right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{2} \left\|\varphi''_{ff}(v)\right\|_{\mathcal{L}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*)} \|w\| \|u - v\|$$

при достаточно малой величине $\|u - v\|$, т. е. функция $\left\langle \varphi'_f(u), w \right\rangle$ является липшиц–непрерывной в некоторой малой окрестности точки $v \in \mathcal{V}$.

Доказательство теоремы-9.

С другой стороны, $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$. Значит, отображение

$$\psi'_f(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*),$$

т. е. непрерывно в некоторой окрестности точки $u = v \in \mathcal{V}$. Следовательно, найдется такая окрестность $\mathcal{N}(v)$ точки $v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$, что будут иметь место следующие неравенства:

$$\|g_v(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi'_f(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}), \qquad (14)$$

$$\left\langle \psi'_f(u), g_v(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi'_f(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \qquad (15)$$

для всех $u \in \mathcal{N}(v)$.

Доказательство теоремы-10.

Рассмотрим теперь семейство

$$\mathcal{W} \equiv \{\mathcal{N}(v);\ v \in \mathcal{M}\}.$$

Это семейство является открытым покрытием метрического пространства $\mathcal{M}$, поэтому существует такое локально конечное открытое покрытие метрического пространства $\mathcal{M}$

$$\mathcal{U} \equiv \{\mathcal{N}_i,\ i \in \mathbb{N}\},$$

что для всякого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $v \in \mathcal{V}$, что

$$\overline{\mathcal{N}}_i \subset \mathcal{N}(v).$$

Теперь сопоставим каждому $i \in \mathbb{N}$ некоторое $v_i \in \mathcal{V}$ и соответствующее $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}(v_i)$. Тогда введем функцию

$$g_i(u) = \begin{cases} g_{v_i}(u), & \text{при} \quad u \in \mathcal{N}(v_i); \\ 0, & \text{при} \quad u \notin \mathcal{N}(v_i). \end{cases}$$

Доказательство теоремы-11.

Наконец, введем весовую функцию

$$\rho_i(u) = \mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_i).$$

Теперь рассмотрим отображение $g(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, определенное формулой

$$g(u) = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) g_i(u) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u).$$

Теперь осталось проверить, что оно удовлетворяет условиям определения 9 псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$. Действительно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ и всякого $u \in \mathcal{N}(v_i)$ в силу (14) имеет место неравенство

$$\|g_{v_i}(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \,.$$

Доказательство теоремы-12.

Следовательно,

$$\|g(u)\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \|g_i(u)\| \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \leqslant 2 \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) .$$

Теперь в силу (15) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle \psi'_f(u), g(u) \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\langle \psi'_f(u), g_i(u) \right\rangle \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) = \left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) .$$

Теорема доказана.

Лемма о деформации 1. Пусть $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, $c \in \mathbb{R}^1$ и $\varepsilon, \delta > 0$ таковы, что

$$\left\|\psi_f'(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{A} \equiv \psi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V}, \tag{16}$$

где

$$\mathcal{S}_{2\delta} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \mathrm{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant 2\delta\}.$$

Тогда существует такая деформация $\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V})$, что выполнены следующие свойства:

(i) либо $u \in \mathcal{A}$ и тогда $\eta(t,u) = u$ при $t = 0$ либо $u \notin \mathcal{A}$;

(ii) $\eta(1, \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}) \subset \psi^{c-\varepsilon}$, где

$$\psi^{c\pm\varepsilon} \equiv \{u \in \mathbb{B} : \ \psi(u) \leqslant c \pm \varepsilon\};$$

(iii) $\psi(\eta(t,u))$ является убывающей функцией по $t \in [0,1]$ для всех $u \in \mathcal{V}$.

Минимаксный принцип.

Теперь мы можем перейти к рассмотрению общего минимаксного принципа для изучения экстремальных точек функционала $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, ограниченного снизу на многообразии $\mathcal{V}$.

Напомним следующие обозначения:

$$\mathcal{A}_j \equiv \{\mathcal{A} \subset \mathcal{V} :\ \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \geqslant j\}, \quad c_j \equiv \inf_{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_j} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u),$$

где $\mathcal{A}$ — это замкнутое множество в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$.

Одна теорема.

Теорема

Предположим, что функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и ограничен снизу на многообразии* $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$. *Если*

$$c \equiv c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m}, \tag{17}$$

тогда для каждого $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ *и замкнутого в топологии метрического пространства* $\mathcal{V}$ *множества* $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ *таких, что*

$$\sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m \tag{18}$$

найдется такая точка $u_0 \in \mathcal{V}$, *что*

(i) $c - 2\varepsilon \leqslant \psi(u_0) \leqslant c + 2\varepsilon$;

(ii) $\mathrm{distance}(u_0, \mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\,\mathcal{B}) \leqslant 2\delta$;

(iii) $\left\|\psi'_f(u_0)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) \leqslant 8\varepsilon/\delta.$

Доказательство теоремы-1.

Прежде всего отметим, что при условиях теоремы множество точек $u_0 \in \mathcal{V}$, для которых выполнены свойства (i) и (ii) не пусто.
Теперь предположим, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ и замкнутое множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, что

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m,$$

но утверждение (iii) не выполнено, т. е.

$$\left\| \psi'_f(u_0) \right\|_* (\mathrm{T}_{u_0} \mathcal{V}) > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Доказательство теоремы-2.

Тогда введем обозначение

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}$$

и применим лемму о деформации, тогда получим существование такой деформации

$$\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V}),$$

которая стягивает множество $\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$ во множество $\psi^{c-\varepsilon}$, но тогда согласно результату теоремы 2 (iv) имеет место неравенство

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}\right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}). \tag{19}$$

Доказательство теоремы-3.

Теперь заметим, что в силу условия теоремы

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

поскольку

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon,$$

но тогда, поскольку $\mathcal{S} \equiv \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}$, получаем

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} \right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, из (22) получаем, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c-\varepsilon} \right).$$

Доказательство теоремы-4.

Теперь наша задача доказать следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}) \leqslant k - 1. \tag{20}$$

Действительно, по условию теоремы имеем

$$c = c_k = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u).$$

Рассмотрим множество

$$\psi^{c-\varepsilon} \equiv \{u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) \leqslant c - \varepsilon\}.$$

Предположим, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) \geqslant k,$$

но тогда, в силу замкнутости множества $\psi^{c-\varepsilon}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, это множество принадлежит системе множеств $\mathcal{A}_k$.

Доказательство теоремы-5.

Следовательно,

$$c \equiv c_k = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \psi^{c-\varepsilon}} \psi(u) \leqslant c - \varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon \leqslant 0$, что противоречит исходному условию $\varepsilon \in (0, 1)$. Значит, (23) доказано. Следовательно, в силу теоремы 2 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$k + m \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}) + \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) + m \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) + m \leqslant k - 1 + m.$$

Теорема доказана.

Определение 3. Будем говорить, что функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ удовлетворяет условию Пале–Смейла (PS_c) на многообразии $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$, если у всякой последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, удовлетворяющей условию

$$\psi(u_n) \to c \quad \text{и} \quad \left\| \psi_f'(u_n) \right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \qquad (21)$$

для $c \in \mathbb{R}^1$, имеется сильно сходящаяся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \to u \in \mathcal{V} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Теорема.

Теорема

Пусть $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на многообразии* $\mathcal{V}$ *функционалом и удовлетворяет на этом многообразии условию* (PS_c) *при некотором* $c \in \mathbb{R}^1$. *Пусть, кроме того, выполнено условие*

$$c \equiv c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m},$$

Тогда для множества

$$\mathrm{K}_c \equiv \left\{ u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) = c, \quad \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = 0 \right\}$$

имеем

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1.$$

Доказательство теоремы-1.

Прежде всего отметим, что при условиях теоремы множество точек $u_0 \in \mathcal{V}$, для которых выполнены свойства (i) и (ii) не пусто.
Теперь предположим, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ и замкнутое множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, что

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m,$$

но утверждение (iii) не выполнено, т. е.

$$\left\| \psi'_f(u_0) \right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Доказательство теоремы-2.

Тогда введем обозначение

$$\mathcal{S} = \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}$$

и применим лемму о деформации, тогда получим существование такой деформации

$$\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V}),$$

которая стягивает множество $\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$ во множество $\psi^{c-\varepsilon}$, но тогда согласно результату теоремы 2 (iv) имеет место неравенство

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}\right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}). \tag{22}$$

Доказательство теоремы-3.

Теперь заметим, что в силу условия теоремы

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A},$$

поскольку

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon,$$

но тогда, поскольку $\mathcal{S} \equiv \mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}$, получаем

$$\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S} \right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, из (22) получаем, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}} \left(\psi^{c-\varepsilon} \right).$$

Теперь наша задача доказать следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}) \leqslant k - 1. \qquad (23)$$

Действительно, по условию теоремы имеем

$$c = c_k = \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_k} \sup_{u\in\mathcal{A}} \psi(u).$$

Рассмотрим множество

$$\psi^{c-\varepsilon} \equiv \{u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) \leqslant c - \varepsilon\}.$$

Предположим, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) \geqslant k,$$

но тогда, в силу замкнутости множества $\psi^{c-\varepsilon}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, это множество принадлежит системе множеств $\mathcal{A}_k$.

Доказательство теоремы-5.

Следовательно,

$$c \equiv c_k = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \psi^{c-\varepsilon}} \psi(u) \leqslant c - \varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon \leqslant 0$, что противоречит исходному условию $\varepsilon \in (0,1)$. Значит, (23) доказано. Следовательно, в силу теоремы 2 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$k + m \leqslant \operatorname{cat}_\gamma(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{cat}_\gamma(\mathcal{A} \setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) + \operatorname{cat}_\gamma(\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{cat}_\gamma(\mathcal{S}) + m \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{cat}_\gamma\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) + m \leqslant k - 1 + m.$$

Теорема доказана.

Основная теорема.

Теорема

Пусть функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на* $\mathcal{V}$, *причем*

$$d \geqslant \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u).$$

Пусть, кроме того, для всех

$$c \in \left[\inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u), d\right]$$

функционал ψ *удовлетворяет условию* $(\mathrm{PS_c})$ *на многообразии* $\mathcal{V}$. *Тогда функционал* ψ *достигает минимума на* $\mathcal{V}$, *причем* ψ *имеет по меньшей мере* $\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^d)$ *критических точек на* $\mathcal{V}$.