ЛЕКЦИЯ 1А

Функции ограниченной вариации

1. Факты, сообщённые на лекции 1 (напоминание)

Для удобства ссылок приведём некоторые основные факты.

Л1. Функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

Л2. Всякая монотонная на отрезке $[a;b]$ функция имеет на нём ограниченную вариацию, причём в этом случае

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|, \tag{1}$$

а всякая функция ограниченной вариации может быть представлена в виде разности двух монотонных (например, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1(x) = V_a^x(f)$).

Л3. При $a < c < b$ имеет место вложение

$$\mathbb{BV}[a;b] \subset \mathbb{BV}[a;c] \cap \mathbb{BV}[c;b]. \tag{2}$$

2. Другие важные свойства

1. Всякая функция ограниченной вариации ограничена. Действительно, для любого $x \in [a;b]$ имеем

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant V_a^b(f).$$

2. («Слияние») В формуле (2) верно и обратное вложение, причём

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = V_a^b(f). \tag{3}$$

Доказательство этого факта сходно с доказательством (2). В обоих случаях используется следующая ключевая идея: *добавление ещё одной точки к разбиению T отрезка $[a;b]$ может лишь увеличить сумму*

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

3. Если $f, g \in \mathbb{BV}[a;b]$, то $fg \in \mathbb{BV}[a;b]$, причём

$$V_a^b(fg) \leqslant \sup_{x\in[a;b]} |g(x)| \cdot V_a^b(f) + \sup_{x\in[a;b]} |f(x)| \cdot V_a^b(g).$$

Доказательство совсем несложно. Для произвольного разбиения T запишем:

$$\begin{aligned}|f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| &= |(f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)) + (f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1}))| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)| + |f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| = \\ &= |g(x_k)||f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1})||g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant \\ &\leqslant \sup|g||f(x_k) - f(x_{k-1})| + \sup|f||g(x_k) - g(x_{k-1})|.\end{aligned}$$

После суммирования по всем отрезкам разбиения и взятия точной верхней грани по всем разбиениям получаем требуемый результат.

3. Некоторые примеры

4. Требуется представить данную функцию в виде разности двух монотонно неубывающих.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a \in (0;1), \\ 0, & x \in [0;1] \setminus \{a\}. \end{cases}$$

Очевидно, достаточно воспользоваться результатом Л2, для которого надо построить «вариацию с переменным верхним пределом» $f_1(x) = V_0^x(f)$. Это можно сделать пользуясь утверждением Л3 о разбиении с учётом (3) и (1). Тогда получим $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;a), \\ 1, & x = a, \\ 2, & x \in (a;1], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;a), \\ 0, & x = a, \\ 2, & x \in (a;1], \end{cases}$$

5. А как представить функцию $f(x)$ в виде разности строго возрастающих функций? Очевидно, достаточно положить $\tilde{f}_1(x) = f_1(x) + x$, $\tilde{f}_2(x) = f_2(x) + x$.

6. Представить в виде разности монотонно неубывающих функций функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

Снова используем аддитивное свойство вариации, в данном случае – применительно к отрезкам $[0; \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$, и свойство (1) вариации монотонной функции — для отрезков вида $[a_i; x]$, где $a_i = 0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$. После этого легко видеть, что

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 2 - \sin x, & x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ \sin x + 4, & x \in [\frac{\pi}{2}; 1], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; \frac{\pi}{2}], \\ 2 - 2\sin x, & x \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}], \\ 4, & x \in [\frac{\pi}{2}; 1]. \end{cases}$$

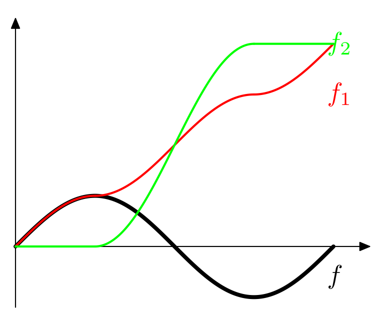

Рис. к примеру 6.

7, 8. На лекции было доказано, что $\forall f, g \in \mathbb{BV}[a;b]$ верно неравенство $V_a^b(f+g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g)$. Может ли здесь достигаться равенство? Конечно: рассмотрим постоянные функции. Может ли здесь иметь место строгое неравенство? А в случае непрерывных функций f и g? (См. задачи для самостоятельного решения.)

4. Некоторые критерии

9. Мы знаем, что всякую функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих. Верно ли, что всякая разность двух монотонных функций имеют ограниченную вариацию?

Конечно, поскольку всякая монотонная функция имеет ограниченную вариацию, а функции ограниченной вариации образуют линейное пространство.

10. Мы знаем, что для монотонной функции f верно $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. Верно ли, что, обратно, из последнего равенства следует, что функция f монотонна?

Да. Докажем это. Пусть для определённости $f(b) - f(a) \geqslant 0$. Тогда имеем (для произвольных $a < x_1 < x_2 < b$)

$$\begin{aligned} V_a^b(f) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)| \leqslant |f(b) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \leqslant \\ \leqslant |f(b) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(a)| \leqslant V_a^b(f). \end{aligned} \tag{4}$$

Поскольку равенство в неравенстве треугольника

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

достигается лишь в том случае, когда выражения под знаком модуля имеют один и тот же знак, то из (4) имеем, в частности, что $f(x_2) > f(x_1)$.

11. («Оценка»). Очевидно, что если $f(x) \in \mathbb{BV}[a; b]$, то $\forall [x; y] \subseteq [a; b]$ выполняется $|f(y) - f(x)| \leqslant V_x^y(f) = f_1(y) - f_1(x)$. Обратно, существование такой неубывающей на $[a; b]$ функции $g(x)$, что $\forall [x; y] \subseteq [a; b]$ выполняется $|f(y) - f(x)| \leqslant g(y) - g(x)$, гарантирует, что $f \in \mathbb{BV}[a; b]$.

В самом деле, для любого разбиения T имеем

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (g(x_k) - g(x_{k-1})) = g(b) - g(a) < +\infty,$$

поэтому $V_a^b(f) \equiv \sup_T V_T(f) < +\infty$.

12. («Замена переменной»). Пусть $f(x)$ — функция, заданная на $[a; b]$, $\varphi(x)$ — 1) строго возрастающая 2) непрерывная функция на $[a; b]$, 3) причём $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$. Доказать, что функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда функция $g(x) \equiv f(\varphi(x))$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a; b]$, и при этом $V_a^b(f) = V_a^b(g)$.

Заметим прежде всего, что область значений $R(\varphi)$ функции $\varphi(x)$ есть отрезок $[a; b]$: в силу монотонности и условия 3) $R(\varphi) \subseteq [a; b]$, а в силу непрерывности $[a; b] \subseteq R(\varphi)$.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение T. Имеем

$$V_T(g) = \sum_{k=1}^{n} |f(\varphi(x_k)) - f(\varphi(x_{k-1}))|. \tag{5}$$

Заметим, что точки $(\varphi(x_k))$ образуют некоторое новое разбиение $\varphi(T)$ отрезка $[a;b]$. В самом деле: в силу условия 1) порядок следования точек не нарушается, в силу сказанного в предыдущем абзаце $\varphi(T) \subset [a;b]$, а в силу условия 3) граничные точки переходят в граничные. Поэтому равенство (5) можно продолжить:

$$V_T(g) = \sum_{k=1}^{n} |f(\varphi(x_k)) - f(\varphi(x_{k-1}))| = V_{\varphi(T)}(f) \leqslant V_a^b(f),$$

откуда следует, что $V_a^b(g) \leqslant V_a^b(f)$.

Теперь заметим, что в силу условий, наложенных на функцию φ, она имеет обратную, обладающую теми же свойствами. Поэтому мы можем провести аналогичные рассуждения и получить оценку $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(g)$, что и доказывает требуемые утверждения.

5. Некоторые контрпримеры

13. Если снять условие непрерывности, то предыдущее утверждение неверно.

Идея контрпримера: «обойти» место, где функция f «плохо себя ведёт». Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1), \\ \frac{1}{2-x} - 1, & x \in [1;2), \\ 1, & x \in [2;3], \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1), \\ \frac{1}{2}(x+3), & x \in [1;3], \end{cases}$$

тогда

$$f(\varphi(x)) \equiv 1, \quad x \in [0;3].$$

14. $\mathbb{BV}[a;b] \not\subset C[a;b]$.

Например, пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0;1), \\ 2, & x \in [1;2]. \end{cases}$$

Очевидно, эта функция имеет ограниченную вариацию (например, как монотонная).

15. $C[a;b] \not\subset \mathbb{BV}[a;b]$.

Например, рассмотрим

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Непрерывность этой функции легко проверяется. Далее, имеем при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$V_0^1(f) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi(k+1/2)} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

если выбрать точки разбиения вида $\frac{1}{\pi n}$, $\frac{1}{\pi(n+1/2)}$.

Замечание. Можно построить примеры, показывающие, что пространство ограниченной вариации не содержит гёльдеровских пространств и не содержится в них.

6. Дальнейшие свойства

16. Очевидно, что всякая липшиц-непрерывная на отрезке функция имеет ограниченную вариацию. В частности, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\sup_{x\in(a;b)}|f'(x)| = C < +\infty$, то $f \in \mathbb{BV}[a;b]$. (Доказательство очевидно.)

17. Если $f \in \mathbb{BV}[a;b]$, то и $|f| \in \mathbb{BV}[a;b]$ и $V_a^b(|f|) \leqslant V_a^b(f)$. Доказательство: следует из легко проверяемого неравенства $\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha - \beta|$, верного для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

18. Легко видеть, что неравенство здесь достигается. В самом деле, возьмём кусочно постоянную функцию, принимающую только значения ± 1, тогда её модуль будет константой.

19. Легко видеть, что из условия $|f| \in \mathbb{BV}[a;b]$ не следует, что $f \in \mathbb{BV}[a;b]$. Положим, например,

$$f(x) = (-1)^k,\ x \in \left(\frac{1}{2^{k+1}}; \frac{1}{2^k}\right], k = 0, 1, 2, \ldots, \quad f(0) = 0.$$

20. Если $|f| \in \mathbb{BV}[a;b]$ и $f \in C[a;b]$, то $f \in \mathbb{BV}[a;b]$ и $V_a^b(|f|) = V_a^b(f)$.

Идея доказательства будет понятна, если заметить, что величина

$$V_T(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

не меняется при переходе от функции к её модулю и обратно, если в каждой слагаемом либо $f(x_k)$ и $f(x_{k-1})$ имеют одинаковый знак, либо хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

Рассмотрим некоторое произвольное фиксированное разбиение T отрезка $[a;b]$. Для тех k, для которых $f(x_k)f(x_{k-1}) < 0$, т. е. значения функции в соседних точках разбиения имеют разные знаки, в силу непрерывности функции $f(x)$ найдутся точки $\xi_k \in (x_{k-1}; x_k)$, для которых $f(\xi_k) = 0$. Добавив эти точки к разбиению T, получим разбиение T', обладающее следующими свойствами:

1) $V_{T'}(f) \geqslant V_T(f)$ (см. начало лекции),

2) в соседних точках разбиения T' функция $f(x)$ принимает значения одного знака или нулевые.

Тогда для

$$V_{T'}(f) = \sum_{l=1}^{m} |f(y_l) - f(y_{l-1})|$$

получим

$$V_{T'}(f) = \sum_{l=1}^{m} |f(y_l) - f(y_{l-1})| = \sum_{l=1}^{m} ||f(y_l)| - |f(y_{l-1})||,$$

откуда $V_a^b(f) \leqslant V_a^b(|f|)$. Тем самым, $f \in \mathbb{BV}[a;b]$, а тогда из ранее полученного результата (см. п. 17) получаем требуемое равенство.

7. Пример на исследование функции

21. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \geqslant 0$. Исследовать в зависимости от параметров α и β, принадлежит ли функция $f(x)$ пространству $\mathbb{BV}[0;1]$.

Начнём рассмотрение со случая $\beta = 0$. Очевидно, при $\alpha < 0$ $f(x) \notin \mathbb{BV}[0;1]$ (как неограниченная функция, см. п. 1 этой лекции), а при $\alpha \geqslant 0$ $f(x) \in \mathbb{BV}[0;1]$ (как монотонная на отрезке функция).

Теперь перейдём к случаю $\beta > 0$. Пользуясь п. 12 лекции, сделаем «замену переменной»: введём функцию $\varphi(x) = x^{\frac{1}{\beta}}$ и заметим, что $f(x) \in \mathbb{BV}[0;1]$ тогда и только тогда, когда $g(x) \in \mathbb{BV}[0;1]$, где

$$g(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{\beta}} \sin x, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{7}$$

поскольку $g(x) = f(\varphi(x))$, а $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям, наложенным в п. 12.

Положим $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$. Если $\gamma < -1$, то функция (7) неограничена на $[0;1]$ и поэтому $g \notin \mathbb{BV}[a;b]$, а следовательно, и $f \notin \mathbb{BV}[a;b]$. Далее, при $\gamma = -1$ получаем функцию

$$g_{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0;1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ограниченную на $[0;1]$ и монотонную на $(0;1]$ и поэтому имеющую ограниченную вариацию. Поскольку $g(x) = g_{-1}(x)x^{\gamma+1}$, то при $\gamma \geqslant -1$ имеем $g(x) \in \mathbb{BV}[0;1]$ (как произведение двух функций ограниченной вариации, см. п. 3), а поэтому и $f \in \mathbb{BV}[0;1]$. Собирая воедино все случаи, имеем: $f(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$ тогда и только когда, когда (в данной области изменения параметров) $\alpha+\beta \geqslant 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $V_0^{50}(e^x)$, $V_1^2(\ln x)$, $V_0^{4\pi}(\cos x)$.

2. 1) Привести пример двух функций f, g ограниченной вариации, для которых выполняется строгое неравенство $V_a^b(f+g) < V_a^b(f) + V_a^b(g)$.
2) То же, причём функции должны быть непрерывными.

3. Пусть $g(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$, $g(x) \neq 0$ на $[a;b]$. 1) Можно ли утверждать, что $\frac{1}{g(x)} \in \mathbb{BV}[a;b]$? 2) Каким требованием нужно заменить условие «$g(x) \neq 0$ на $[a;b]$», чтобы утверждение стало верным?

4. Сформулировать и доказать теорему об условиях, достаточных для $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{BV}[a;b]$.

5. Будет ли функция $g(f(x))$ иметь ограниченную вариацию на $[0;1]$, если f имеет ограниченную вариацию на этом отрезке и $g(t)$ непрерывна на всей числовой оси?

6. Доказать, что если $f \in \mathbb{BV}[a;b]$ и $f_1(x) \equiv V_a^x(f)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то то же можно сказать о функции $f(x)$.

7*. Доказать, что если $f \in \mathbb{BV}[a;b]$ и $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a;b]$, то то же можно сказать о функции $f_1(x) \equiv V_a^x(f)$.

8. Вывести из предыдущей задачи, что всякая функция $f \in \mathbb{BV}[a;b] \cap C[a;b]$ представима в виде разности монотонно неубывающих непрерывных функций.

9*. Доказать, что монотонная функция, определённая на отрезке, может иметь только разрывы первого рода и не более чем в счётном количестве.

10. Вывести отсюда аналогичный результат для функций ограниченной вариации.

11. Пусть $\{x_k\}$ — счётная система точек на отрезке $[a;b]$ ($x_k \neq x_j$ при $k \neq j$). Пусть $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ — такие числа, что

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|) < +\infty.$$

Рассмотрим функцию

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{(x_k;b]}(x) + \sum_k b_k \chi_{[x_k;b]}(x), \tag{8}$$

называемую *функцией скачков.*

1) Доказать, что ряды в (8) сходятся абсолютно.

2) Доказать, что функция (8) может быть представлена в виде разности монотонных функций.

3) Доказать, что она имеет конечную вариацию.

4*) Доказать, что она непрерывна во всех точках, кроме точек x_k.

5*) Пусть $f(x) \in \mathbb{BV}[a;b]$, $\{x_k\}$ —множество точек разрыва функции $f(x)$ (почему оно не более чем счётно?). Положим

$$s_f(x) = \begin{cases} \sum_{k: x_k < x} (f(x_k+0) - f(x_k-0)) + (f(x) - f(x-0)), & x \in (a;b], \\ 0, & x = a. \end{cases}$$

Доказать, что это корректно определённая функция скачков (В частности, требуется указать, почему односторонние пределы в точках разрыва существуют).

6*) Доказать, что для $f \in \mathbb{BV}[a;b]$ и соответствующей функции $s_f(x)$ верно $g(x) \equiv f(x) - s_f(x) \in \in \mathbb{BV}[a;b] \cap C[a;b]$. (Таким образом, мы научились раскладывать всякую функцию ограниченной вариации в сумму непрерывной функции ограниченной вариации и функции скачков.)