ГЛАВА II

Элементы теории полугрупп

ЛЕКЦИЯ 7

Неограниченные линейные операторы

Хотя методами главы I нам удалось исследовать многие задачи математической физики, некоторые вполне классические задачи не могут быть исследованы таким образом. Например, если записать линейное уравнение теплопроводности или колебаний в виде

$$\frac{d}{dt}u = Au,$$

подобном задаче (2) лекции 3, то оператор A окажется *неограниченным* линейным оператором. Поэтому мы сталкиваемся с необходимостью оперировать с неограниченными линейными операторами.

§ 1. Неограниченные линейные операторы

Напомним необходимые определения.

Определение 1. *Линейным многообразием* в линейном пространстве X над числовым полем $\mathbb{K}$ (здесь и далее $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) называется такое непустое множество L, что

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in L \;\; \lambda x + \mu y \in L.$$

Определение 2. *Линейным оператором*, действующим из линейного пространства X над числовым полем $\mathbb{K}$ в линейное пространство Y над тем же числовым полем $\mathbb{K}$, называется такая функция A, что
1) её область определения $\mathcal{D}(A)$ есть линейное многообразие в X;
2) $\forall x, y \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \;\; A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$.

(В дальнейшем, как правило, нас будут интересовать не произвольные линейные пространства, а банаховы.)

Характерной особенностью неограниченных линейных операторов является то, что они определены не на всём пространстве X.

Пример 1. Пусть $X = C[a, b]$, $\mathcal{D}(A) = C^1[a, b]$, $A = \frac{d}{dt} : X \to X$. Как показывает пример $x_n(t) = \sin nt$, оператор A неограничен.

Замечание 1. Легко видеть, что оператор $\tilde{A} : C^1[a, b] \Rightarrow C[a, b]$ (т. е. $\mathcal{D}(\tilde{A}) = C^1[a, b]$) ограничен и $\|\tilde{A}\| \leqslant 1$. Однако нам, как правило, будет нужен оператор, действующий из некоторого банахова пространства в него же, поэтому приходится мириться с неограниченностью.

Пример 2. Пусть $X = l^2$, $\mathcal{D}(A) = \{x \in l^2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} |kx^{(k)}|^2 < +\infty\}$, $A : l^2 \to l^2$,

$$Ax \equiv A(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \ldots) = (x^{(1)}, 2x^{(2)}, 3x^{(3)}, \ldots). \tag{1}$$

Очевидно, A является неограниченным оператором: $\|Ae_m\| = m$. Кроме того, оператор, определённый формулой (1), не может быть определён на всём пространстве l^2 (со значениями в l^2), поскольку, например,

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \in l^2, \quad (1, 1, 1, \dots) \notin l^2. \tag{2}$$

Поскольку мы рассматриваем операторы, определённые не на всём пространстве, весьма важными оказываются понятия сужения и продолжения.

Определение 3. Оператор T называется *продолжением* оператора S, а оператор S — *сужением* оператора T, если
1) $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$,
2) $\forall x \in \mathcal{D}(S)\ \ Sx = Tx$.
В этом случае пишут: $S \subset T$.

Пример 3. Можно получить сужение оператора A из примера 2, если в качестве области определения нового оператора взять множество всех финитных последовательностей (т. е. таких, у которых отлично от нуля лишь конечное число членов). Очевидно, это множество образует линейное многообразие в l^2.

Уже понятие суммы неограниченных операторов вызывает затруднение: чтобы определить $(S+T)x$, нужно, чтобы элемент x принадлежал областям определения обоих операторов S и T. Поэтому мы должны дать следующее

Определение 4. Суммой линейных операторов S и T называется такая функция (обозначаемая $S+T$), что
1) $\mathcal{D}(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$;
2) $\forall x \in \mathcal{D}(S+T)\ \ (S+T)x = Sx + Tx$.

Сумма линейных операторов — линейный оператор (см. задачу 2).

Таким образом, *при выполнении любых действий над неограниченными линейными операторами необходимо находить область определения результирующего оператора!* Может случиться, что $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(S) = \{\theta_X\}$ (поскольку обе области определения суть линейные многообразия, нулевой элемент они содержат), и тогда оператор $S+T$ будет иметь тривиальную область определения.

С определением умножения линейного оператора на число трудностей не возникает. Перейдём к определению произведения двух линейных операторов.

Определение 5. Пусть $S : X \to Y$, $T : Y \to Z$. Тогда их *произведением* $TS : X \to Z$ называется следующая функция:
1) $\mathcal{D}(TS) = S^{-1}(\mathcal{D}(T)) \equiv \{x \in \mathcal{D}(S) \subset X \mid Sx \in \mathcal{D}(T) \subset Y\}$,
2) $\forall x \in \mathcal{D}(TS)\ \ (TS)x = T(Sx)$.

Произведение линейных операторов — линейный оператор (см. задачу 2).

И здесь может случиться, что область определения результирующего оператора состоит из одного нулевого элемента. Свойства произведения операторов устанавливаются в задаче 7.

Теперь дадим определение обратного оператора.

Определение 6. Пусть $T : X \to Y$. Тогда оператором, *обратным* к оператору T, называется такая функция $T^{-1} : Y \to X$, что
1) $\mathcal{D}(T^{-1}) = R(T)$ (здесь и далее $R(T)$ есть множество значений функции T);
2) $\forall x \in \mathcal{D}(T)\ \ T^{-1}(Tx) = x$,
3) $\forall y \in R(T)\ \ T(T^{-1}y) = y$.

Замечание 2. Из условий 1) и 2) вытекает вложение $R(A^{-1}) \subseteq \mathcal{D}(A)$ (и даже равенство $R(A^{-1}) = \mathcal{D}(A)$), а следовательно, условие 3) имеет смысл.

Функция T^{-1} является линейным оператором (см. задачу 3).

Замечание 3. Иногда, особенно для неограниченных операторов, проще работать с векторами, а не с операторами в целом. В частности, пункт 2) предыдущего определения удобнее, чем включение

$$T^{-1}T \subset E_X.$$

Пример 4. Пусть $X = C[a,b]$, $\mathcal{D}(T) = \{x \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0\}$, $T = \frac{d}{dt}$. Положим

$$\mathcal{D}(T^{-1}) = X, \quad (T^{-1}x)(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau.$$

Построенный оператор является обратным к T (см. задачу 5).

Пример 5. Пусть $X = l^2$. Положим

$$Ax = \left(x^{(1)}, 2x^{(2)}, \frac{x^{(3)}}{3}, 4x^{(4)}, \frac{x^{(5)}}{5}, \ldots\right).$$

с естественной областью определения (т. е. для тех x, для которых результат лежит в l^2). Тогда, очевидно (см. задачу 6), обратным к нему будет оператор A^{-1}, заданный выражением

$$A^{-1}y = \left(y^{(1)}, \frac{y^{(2)}}{2}, 3y^{(3)}, \frac{y^{(4)}}{4}, 5y^{(5)}, \ldots\right)$$

на естественной области определения.

Замечание 4. Два предыдущих примера показывают, что оператор, обратный к неограниченному, может быть как ограниченным, так и неограниченным.

§ **2. График линейного оператора. Замкнутые операторы**

Из всех неограниченных линейных операторов наиболее важны с точки зрения приложений и наиболее просты для исследования замкнутые операторы. Чтобы дать определение замкнутого оператора, нам потребуется вспомнить определение графика оператора.

Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда множество пар

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

также образует линейное пространство, которое становится банаховым, если на нём ввести норму

$$\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2}. \tag{3}$$

Определение 7. *Графиком* $G(T)$ *линейного оператора* $T : X \to Y$ *называется множество*

$$\{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \quad \text{в пространстве } X \times Y.$$

Определение 8. Линейный оператор T называется *замкнутым*, если его график $G(T)$ является замкнутым множеством в пространстве $X \times Y$.

На практике более удобно другое определение замкнутого оператора. Вспомним определение замкнутого множества в метрическом пространстве: множество N в метрическом пространстве M называется замкнутым, если предел любой сходящейся последовательности $\{z_n\} \subset N$ лежит в N. Применительно к рассматриваемому случаю это означает: если

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in X \times Y,$$

что в силу нормировки (3) равносильно: $x_n \overset{X}{\to} x$, $Tx_n \overset{Y}{\to} y$, то

$$(x, y) \in G(T),$$

т. е. $x \in \mathcal{D}(T)$, $y = Tx$. Итак, получаем эквивалентное

Определение 9. Линейный оператор $T : X \to Y$ называется замкнутым, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ такой, что $x_n \overset{X}{\to} x$ и $Tx_n \overset{Y}{\to} y$, верно: $x \in \mathcal{D}(T)$, $y = Tx$.

Пример 6. Очевидно, оператор из примера 1 замкнут. Это следует из теоремы о почленном дифференцировании функциональной последовательности. (Если последовательность $\{x_n(t)\}$ дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций сходится всюду на этом отрезке к функции $x(t)$, а последовательность их производных сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $y(t)$, то $x'(t) = y(t)$ всюду на $[a, b]$.)

Поскольку мы рассматриваем операторы, область определения которых не совпадает со всем пространством, имеет смысл задать вопрос, плотна ли она во всём пространстве.

Определение 10. Если для линейного оператора $T : X \to Y$ верно, что $\overline{\mathcal{D}(T)} = X$, то оператор T называется *плотно определённым.*

Очевидно, оператор из примеров 1 и 6 является плотно определённым, а оператор из примера 4 — нет (почему?).

Докажем ещё несколько полезных утверждений.

Лемма 1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Линейное многообразие M в пространстве $X \times Y$ (с нормой (3)) является графиком некоторого линейного оператора тогда и только тогда, когда M *не* содержит элементов вида (θ_X, v), где $v \neq \theta_Y$.

Доказательство. Необходимость очевидна: поскольку $T\theta_X = \theta_Y$ и линейный оператор является однозначной функцией, то $(\theta_X, \theta_Y) \in G(T)$ и других элементов вида (θ_X, v) в графике быть не может.

Чтобы доказать достаточность, определим линейный оператор T его графиком. (Кстати, этот подход может применяться для любых функций и позволяет свести понятие функции к понятию множества.) Возьмём в качестве $\mathcal{D}(T)$ *проекцию* линейного многообразия M на пространство X:

$$\mathcal{D}(T) := \{x \in X \mid \exists (x, y) \in M \text{ для некоторого } y \in Y\}.$$

Легко проверить (см. задачу 9), что $\mathcal{D}(T)$ — линейное многообразие в X. Кроме того, каждому $x \in \mathcal{D}(T)$ отвечает ровно одно $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in M$. В самом деле, в противном случае имели бы

$$(x, y_1), (x, y_2) \in M \Rightarrow \{M \text{ — линейное многообразие}\} \Rightarrow (x, y_1 - y_2) \in M,$$

что противоречит условию. Итак, каждому $x \in \mathcal{D}(T)$ мы можем поставить в соответствие единственный $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in M$. Положим $Tx = y$. Осталось доказать, что так построенная функция удовлетворяет второму пункту определения линейного оператора. Для этого рассмотрим две точки графика: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M$. Тогда, поскольку M — линейное многообразие, то $(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2) \in M$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. А по ранее доказанному других таких y, что $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) \in M$, не существует. Значит, $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda y_1 + \mu y_2$, что и требовалось. ▲

Следствие. Линейное подмногообразие графика есть график.

Лемма 2. Пусть T — замкнутый, A — ограниченный линейные операторы, действующие из X в Y, причём $\mathcal{D}(A) = X$. Тогда $T + A$ — замкнутый линейный оператор.

Доказательство. Тот факт, что сумма (любых) линейных операторов есть линейный оператор, доказывается в задаче 2. Сразу найдём его область определения. Согласно определению 4 имеем: $\mathcal{D}(T + A) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T)$. Осталось доказать, что оператор $T + A$ замкнут. Воспользуемся определением 9. Требуется доказать, что если

$$\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T + A), \quad u_n \to u, \quad (T + A)u_n \to v, \tag{4}$$

то

$$u \in \mathcal{D}(T + A) \quad \text{и} \quad v = (T + A)u.$$

Поскольку $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T + A)$ и оператор A ограничен (а следовательно, непрерывен), из (4) имеем:

$$\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T), \quad u_n \to u, \quad (T + A)u_n = Tu_n + Au_n \to v \Rightarrow Tu_n \to v - Au. \tag{5}$$

Тогда, поскольку T — замкнутый оператор, из (5) имеем: $u \in \mathcal{D}(T)$, $Tu = v - Au$. С учётом равенства $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(T + A)$ отсюда получаем: $u \in \mathcal{D}(T + A)$, $(T + A)u = Tu + Au = v$, что и требовалось. ▲

Также бывает полезно понятие обратного графика.

Определение 11. Пусть $T : X \to Y$. Назовём *обратным графиком* $G'(T)$ оператора T множество $\{(Tx, x) \mid x \in \mathcal{D}(T)\}$ в пространстве $Y \times X$ (определённом аналогично пространству $X \times Y$).

Полезность понятия обратного графика определяется следующим утверждением.

Лемма 3. Если оператор T обратим, то его график и обратный график оператора T^{-1} суть одно и то же множество: $G(T) = G'(T^{-1})$.

Доказательство. Пользуясь определением 6, имеем

$$\mathcal{D}(T^{-1}) = R(T)$$

и далее

$$\forall x \in \mathcal{D}(T) \;\; T^{-1}(Tx) = x, \quad \forall y \in R(T) \;\; T(T^{-1}y) = y.$$

Следовательно,

$$G'(T^{-1}) = \{(T^{-1}y, y) \mid y \in \mathcal{D}(T^{-1})\} = \{(T^{-1}y, y) \mid y \in R(T)\}, \tag{6}$$

причём в силу обратимости оператора T для каждого $y \in R(T)$ существует единственное $x \in \mathcal{D}(T)$ такое, что $y = Tx$, поэтому цепочку (6) можно продолжить так:

$$\ldots = \{(T^{-1}(Tx), Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} = \{(x, Tx) \mid x \in \mathcal{D}(T)\} = G(T).$$

▲

Как видно из определения 11, обратный график получается из графика перестановкой элементов каждой пары. Поэтому в силу леммы 1 можно утверждать, что линейное многообразие $M \subset Y \times X$ является обратным графиком некоторого линейного оператора тогда и только тогда, когда оно не содержит элементов вида (y, θ_X) с $y \neq \theta_Y$. По этой же причине *линейный оператор является замкнутым тогда и только тогда, когда замкнут его обратный график.*

Из последнего наблюдения и леммы 3 сразу вытекает следующее важное утверждение:

Лемма 4. Если оператор T обратим, то замкнутость T эквивалентна замкнутости T^{-1}.

Поскольку в силу задачи 11 *всякий оператор из* $L(X, Y)$ (т. е. ограниченный оператор из X в Y, определённый на всём X) *замкнут*, из леммы получаем важное

Следствие. Оператор, обратный оператору из $L(X, Y)$, замкнут. (В частности, он может быть оператором из $L(Y, X)$).

Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что множество значений $R(T)$ линейного оператора T есть линейное многообразие.

2. Проверить, что сумма и произведение линейных операторов — линейные операторы.

3. Проверить, что функция T^{-1}, обратная линейному оператору T, — линейный оператор. Также показать, что T^{-1} определяется по T единственным образом и что $(T^{-1})^{-1} = T$. (*Указа-*

ние. Учтите, что замечание 2 после определения обратного оператора «делает это определение симметричным относительно замены $T \leftrightarrow T^{-1}$».)

4. Показать, что линейный оператор $T : X \to Y$ имеет обратный (не обязательно ограниченный и всюду определённый) тогда и только тогда, когда уравнение $Tx = \theta_Y$ не имеет ненулевых решений.

5. Завершить рассмотрение примера 4.

6. Завершить рассмотрение примера 5.

7. Пусть $S, S_1, S_2 : X \to Y$, $T, T_1, T_2 : Y \to Z$, $R : Z \to W$. Показать:
1) $(TS)R = T(SR)$ (такой оператор мы будем обозначать просто TSR);
2) $(\alpha T)S = \alpha(TS)$, $\alpha \neq 0$, и $(0T)S = 0(TS) \subset T(0S)$;
3) $E_Y S = SE_X = S$, где E_X и E_Y — единичные операторы в соответствующих пространствах.
4) Указать, какое из равенств верно, и исправить неверное равенство на верное включение:

$$(T_1 + T_2)S = T_1S + T_2S \quad (?),$$
$$T(S_1 + S_2) = TS_1 + TS_2 \quad (?).$$

Необходимость замены равенства включением обосновать с помощью контрпримера.

8. Показать, что оператор из примера 2 замкнут и плотно определён.

9. Показать, что проекция линейного многообразия в пространстве $X \times Y$ на пространство X есть также линейное многообразие.

10. Пусть T — замкнутый оператор. Доказать, что для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ оператор $T - \lambda E$ тоже замкнут.

11. Доказать, что ограниченный оператор замкнут тогда и только тогда, когда его область определения замкнута.

12. Доказать, что замкнутый линейный оператор, определённый на всём банаховом пространстве, ограничен.

13. Доказать, что $S \subset T$ тогда и только тогда, когда $G(S) \subset G(T)$.

14. Доказать, что ядро замкнутого оператора является замкнутым множеством.

15. Пусть известно, что $R(T)$ замкнуто и существует такое $m > 0$, что для всех $u \in \mathcal{D}(T)$ верно $\|Tu\| \geqslant m\|u\|$. Доказать, что оператор T замкнут.

16. Пользуясь тем фактом, что единичная сфера в бесконечномерном банаховом пространстве некомпактна, показать, что в таком пространстве оператор, обратный вполне непрерывному, не может быть ограничен.

17*. Доказать, что если оператор $T : X \to Y$ замкнут, то из

$$\{u_n\} \subset \mathcal{D}(T), u_n \rightharpoonup u \in X,\, Tu_n \rightharpoonup v \in Y$$

следует $u \in \mathcal{D}(T)$, $Tu = v$.

18. Привести пример замкнутого линейного оператора T и последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{D}(T)$ такой, что $x_n \to x \in \mathcal{D}(T)$, $\{Tx_n\}$ не сходится.