

Тематическая лекция 3
СЛЕД ФУНКЦИЙ ИЗ $H^1(\Omega)$

В этой лекции мы рассмотрим важный вопрос о существовании следа на границе функций из пространств $H^1(\Omega)$ и $H^1(D) = W_2^{1,1}(D)$ при $D = \Omega \otimes (0, T)$.

§ 1. Некоторые утверждения для функций из $H^1(Q^+)$

Введем следующие обозначения:

$$Q \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |x_i| < 1, i = \overline{1, N}\}, \quad Q^+ \stackrel{def}{=} \{x \in Q : x_N > 0\},$$

$$x = (x', x_N), \quad x' = (x_1, \dots, x_{N-1}),$$

$$\Gamma \stackrel{def}{=} \{x \in Q : x_N = 0\} =$$

$$= \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x_i| < 1, i = \overline{1, N-1}\} \otimes \{x_N = 0\}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. Для любой функции $u(x) \in H^1(Q^+)$ существует единственная функция $w(x') \in L^2(\Gamma)$ такая, что

$$\operatorname{ess.lim}_{x_N \rightarrow 0+0} \int_{\Gamma} |u(x', x_N) - w(x')|^2 dx' = 0. \quad ^1) \quad (1.1)$$

Мы назовем функцию $w(x')$ следом функции $u(x)$ на многообразии Γ размерности $N - 1$ и обозначим его через $\gamma u(x', 0)$.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем единственность следа. Это следует из следующей цепочки неравенств:

$$\left(\int_{\Gamma} |w_1(x') - w_2(x')|^2 dx' \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\Gamma} |u(x', x_N) - w_1(x')|^2 dx' \right)^{1/2} +$$

¹⁾ Смысл обозначения $\operatorname{ess.lim}$ будет понятен из дальнейшего.

$$+ \left(\int_{\Gamma} |u(x', x_N) - w_2(x')|^2 dx' \right)^{1/2} \rightarrow +0$$

при $x_N \rightarrow 0 + 0$ в смысле предела ess.lim .

Шаг 2. Прежде всего заметим, что имеет место плотное вложение

$$\mathbb{C}^\infty(\overline{Q^+}) \stackrel{ds}{\subset} H^1(Q^+).$$

Поэтому для фиксированной функции $u(x)$ существует последовательность $\{u_m\} \in \mathbb{C}^\infty(\overline{Q^+})$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|u_m - u\|_{H^1(Q^+)} = 0. \quad (1.2)$$

Фиксируем $0 < 2\delta < 1$. Выберем гладкую функцию $\varphi(x_N) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, 1])$ такую, что

$$\varphi(x_N) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_N \in [0, \delta]; \\ 0, & \text{при } x_N \in [2\delta, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|\varphi u_m - \varphi u\|_{H^1(Q^+)} = 0. \quad (1.3)$$

При достаточно малом $\varepsilon \in [0, \delta]$ выполнено равенство

$$u_m(x', \varepsilon) = - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N} dx_N. \quad (1.4)$$

Поэтому имеет место цепочка неравенств ¹⁾

$$\begin{aligned} |u_m(x', \varepsilon) - u_n(x', \varepsilon)|^2 &\leq \left| \int_{\varepsilon}^1 \left(\frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N} - \frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N} \right) dx_N \right|^2 \leq \\ &\leq (1 - \varepsilon)^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N} - \frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N} \right|^2 dx_N \leq \int_0^1 \left| \frac{\partial(\varphi u_m)}{\partial x_N} - \frac{\partial(\varphi u_n)}{\partial x_N} \right|^2 dx_N. \end{aligned}$$

Теперь проинтегрируем по $x' \in \Gamma$ обе части последнего итогового неравенства. Отсюда и из (1.3) мы получим следующее выражение

$$\|u_m(x', \varepsilon) - u_n(x', \varepsilon)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\varphi u_m - \varphi u\|_{H^1(Q^+)} \rightarrow +0 \quad (1.5)$$

при m и $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, с одной стороны, последовательность $\{u_m(x', \varepsilon)\}$ является фундаментальной в банаховом пространстве $L^2(\Gamma)$. Обозначим предел этой последовательности через $v(x', \varepsilon) \in L^2(\Gamma)$. С другой стороны, последовательность $\{u_m\}$ сильно сходится

¹⁾ В силу неравенства Гельдера.

к $u(x)$ в $L^2(Q^+)$. Но тогда существует такое множество $E \subset (0, \delta)$ нулевой меры Лебега, что для произвольного $\varepsilon \in (0, \delta) \setminus E$,

$$v(x', \varepsilon) = u(x', \varepsilon) \quad \text{для п. в.с. } x' \in \Gamma. \quad (1.6)$$

Шаг 3. Таким образом, для всех $\varepsilon \in (0, \delta) \setminus E$ в силу (1.5) имеют место следующие неравенства

$$\int_{\Gamma} |u_m(x', 0) - v(x', 0)|^2 dx' \leq \|\varphi u_m - \varphi u\|_{H^1(Q^+)}, \quad (1.7)$$

$$\int_{\Gamma} |u_m(x', \varepsilon) - u(x', \varepsilon)|^2 dx' \leq \|\varphi u_m - \varphi u\|_{H^1(Q^+)}. \quad (1.8)$$

Кроме того, очевидно, имеет место следующее неравенство:

$$\int_{\Gamma} |u_m(x', \varepsilon) - u_m(x', 0)|^2 dx' \leq \varepsilon \int_{Q^+} \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_N} \right|^2 dx. \quad (1.9)$$

Наконец, комбинируя неравенства (1.7)–(1.9), мы получим неравенство

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} |u(x', \varepsilon) - w(x')|^2 dx' \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{\Gamma} |u_m(x', \varepsilon) - u(x', \varepsilon)|^2 dx' \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{\Gamma} |u_m(x', \varepsilon) - u_m(x', 0)|^2 dx' \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\int_{\Gamma} |u_m(x', 0) - w(x')|^2 dx' \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Устремляя одновременно $m \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon \rightarrow +0$ по множеству $(0, \delta) \setminus E$, мы получим неравенство ¹⁾

$$\begin{aligned} \operatorname{ess.} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Gamma} |u(x', \varepsilon) - w(x')|^2 dx' &= \\ &= \lim_{\varepsilon \in (0, \delta) \setminus E, \varepsilon \rightarrow +0} \int_{\Gamma} |u(x', \varepsilon) - w(x')|^2 dx' = 0, \end{aligned}$$

где $w(x') = v(x', 0)$.

Лемма доказана.

¹⁾ Вот обещанное определение $\operatorname{ess.} \lim$.

З а м е ч а н и е 1. Из предельного свойства (1.7) мы имеем

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} |u_m(x', 0) - w(x')|^2 dx' = 0. \quad (1.11)$$

В силу этого предельного свойства мы можем определить след функции $u(x)$ на Γ как такую функцию $w(x')$, что для всякой последовательности $\{u_m(x)\} \subset C^\infty(\overline{Q^+})$ такой, что

$$\|u - u_m\|_{H^1(Q^+)} \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty$$

выполнено (1.11). Заметим, что поскольку

$$C^{(1)}(\overline{Q^+}) \stackrel{ds}{\subset} H^1(Q^+),$$

то указанную последовательность $\{u_m\}$ можно брать из $C^{(1)}(\overline{Q^+})$. Отметим, что это определение следа эквивалентно определению следа из леммы 1.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что если $u(x) \in H^1(Q^+) \cap C(\overline{Q^+})$, тогда

$$\gamma u(x', 0) = u(x', 0) \quad \text{для почти всех} \quad x' \in \Gamma.$$

Теперь мы можем доказать следующее утверждение:

Лемма 2. Пусть $u(x) \in H^1(Q^+) \cap C(\overline{Q^+})$ и $u(x, t) = 0$ вблизи верхней крышки и боковой границы Q^+ . Если, кроме того, $u = 0$ на основании Γ , то $u(x) \in H_0^1(Q^+)$.

Доказательство.

Шаг 1. Продолжим функцию $u(x)$ на все множество Q нулем:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in \overline{Q^+}; \\ 0, & \text{если } x \in Q \setminus \overline{Q^+}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Прежде всего, докажем, что $\tilde{u}(x) \in H^1(Q)$. Действительно, очевидно, что измеримая функция $\tilde{u}(x) \in L^2(Q)$ и, кроме того, в слабом смысле

$$\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} \partial u / \partial x_i, & \text{если } x \in Q^+; \\ 0, & \text{если } x \in Q \setminus Q^+ \end{cases} \quad (1.13)$$

при $i = \overline{1, N-1}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_i} \in L^2(Q) \quad \text{при} \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Осталось доказать, что в слабом смысле

$$\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_N} = \begin{cases} \partial u / \partial x_N, & \text{если } x \in Q^+; \\ 0, & \text{если } x \in Q \setminus Q^+. \end{cases} \quad (1.14)$$

И тогда, ясно, что

$$\frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_N} \in L^2(Q).$$

С этой целью нам нужно доказать следующее равенство:

$$\int_Q \tilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} dx = - \int_Q \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N} \varphi dx$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q)$. Это равенство с учетом определения \tilde{u} и (1.14) можно записать в следующем виде

$$\int_{Q^+} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} dx = - \int_{Q^+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \varphi dx \quad (1.15)$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q)$. Для доказательства этого равенства возьмем срезающую функцию $\eta(x_N) \in \mathbb{C}_0^\infty(-1, 1)$, удовлетворяющую условиям

$$\eta(x_N) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x_N| \leq \varepsilon; \\ 0, & \text{если } |x_N| \geq 2\varepsilon, \end{cases}$$

$$0 \leq \eta(x_N) \leq 1, \quad |\eta'(x_N)| \leq \frac{c}{\varepsilon}, \quad -1 < x_N < 1.$$

Справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \int_{Q^+} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_N} dx &= \int_{Q^+} u(x) \frac{\partial (\eta(x_N)\varphi(x) + (1 - \eta(x_N))\varphi)}{\partial x_N} dx = \\ &= \int_{Q^+} u(x) \eta'(x_N) \varphi dx + \int_{Q^+} u(x) \eta(x_N) \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} dx + \\ &+ \int_{Q^+} u(x) \frac{\partial ((1 - \eta(x_N))\varphi)}{\partial x_N} dx \stackrel{def}{=} I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon + I_3^\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Ясно, что в силу определения функции $\eta(x_N)$ и теоремы Лебега имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} I_2^\varepsilon = 0.$$

Заметим, что $(1 - \eta(x_N))\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(Q^+)$ и поэтому выражение для I_3^ε примет вид

$$I_3^\varepsilon = - \int_{Q^+} ((1 - \eta(x_N))\varphi(x)) \frac{\partial u}{\partial x_N} dx \rightarrow - \int_{Q^+} \varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x_N} dx$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Наконец, поскольку $u(x) \in \mathbb{C}(\overline{Q^+})$ и $u(x) = 0$ при $x_N = 0$, то имеет место цепочка неравенств

$$|I_1^\varepsilon| \leq \int_{Q^+ \cap \{x: |x_N| \leq 2\varepsilon\}} |u \eta'(x_N)| dx \leq \frac{c}{\varepsilon} \int_{Q^+ \cap \{x: |x_N| \leq 2\varepsilon\}} |u| dx \rightarrow +0$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$, поскольку $u(x) = 0$ при $x_N = 0$. Итак, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$ в равенстве (1.16), мы получим равенство (1.15).

Шаг 2. Теперь нам нужно доказать, что $u(x) \in H_0^1(Q^+)$. С этой целью заметим, что можно рассмотреть срезку функции $\tilde{u}(x)$:

$$J_\varepsilon^- \tilde{u}(x) = \int_Q \omega_\varepsilon(x_1 - y_1) \cdots \omega_\varepsilon(x_{N-1} - y_{N-1}) \omega_\varepsilon(x_N - y_N - 2\varepsilon) \tilde{u}(y) dy,$$

где

$$\omega_\varepsilon(s) = c_1(\varepsilon) \begin{cases} \exp(-\varepsilon^2/(\varepsilon^2 - s^2)), & \text{если } |s| \leq \varepsilon; \\ 0, & \text{если } |s| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Воспользуемся тем условием, что функция $\tilde{u}(x)$ равна нулю вблизи боковой границы и на верхней крышке Q^+ и на $Q \setminus Q^+$. Тогда получим, что

$$J_\varepsilon^- \tilde{u}(x) \in C_0^\infty(\overline{Q^+}).$$

Используя свойства срезки и того, что $\tilde{u} \in H^1(Q)$ мы получим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|J_\varepsilon^- \tilde{u} - u\|_{H^1(Q^+)} = 0,$$

но тогда согласно определению пространства $H_0^1(Q^+)$ мы получим, что $u(x) \in H_0^1(Q^+)$.

Лемма доказана.

Справедливо следующее следствие:

Следствие. Пусть $u(x) \in H^1(Q^+) \cap C(\overline{Q^+})$ и $\tilde{u}(x)$ — это продолжение функции $u(x)$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x \in Q^+; \\ u(x', 0), & \text{если } x \in Q^- = Q \setminus Q^+. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{u}(x) \in H^1(Q)$.

§ 2. След функций из $H^1(\Omega)$

Справедлива основная теорема.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Всякая функция $u(x) \in H^1(\Omega)$ имеет единственный след $\gamma u(x) \in L^2(\partial\Omega)$, понимаемый в следующем смысле: ¹⁾

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |u_m - \gamma u|^2 d\sigma = 0, \quad (2.1)$$

где $\{u_m\} \subset C^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это произвольная последовательность

$$\|u - u_m\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow +0 \text{ при } m \rightarrow +\infty.$$

¹⁾ Который эквивалентен исходному определению следа вида (1).

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку $\partial\Omega$ гладкая граница, то каждая точка $x \in \partial\Omega$ имеет окрестность U со следующим свойством: существует гладкое обратимое отображение Ψ , такое что

$$\Psi : Q = \{y \in \mathbb{R}^N : |y_i| < 1, i = \overline{1, N}\} \rightarrow U$$

и

$$\Psi : Q^+ = \{y \in Q : y_N > 0\} \rightarrow U \cap \Omega, \quad \Psi(\Gamma) = U \cap \partial\Omega,$$

где

$$\Gamma = \{y \in Q : y_N = 0\}.$$

Пусть $\{u_m\} \subset C^{(1)}(\overline{\Omega})$ — это произвольная последовательность, сходящаяся к $u(x) \in H^1(\Omega)$, сильно в $H^1(\Omega)$. Определим следующую последовательность:

$$v_m(y) = (\eta u_m) \circ \Psi(y), \quad \eta(x) \in C_0^\infty(U). \quad (2.2)$$

Тогда $v_m(y) \in C^{(1)}(\overline{Q^+})$ и $v_m = 0$ вблизи верхней крышки и боковой границы Q^+ и

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|v_m - (\eta u) \circ \Psi\|_{H^1(Q^+)} = 0. \quad (2.3)$$

Согласно утверждению леммы 1 существует такая функция $h(y) \in L^2(\Gamma)$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} |v_m(y', 0) - h(y')|^2 dy' = 0. \quad (2.4)$$

Очевидно, что $h = 0$ вблизи границы Γ . Возвращаясь к переменной x , мы получим

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{U \cap \partial\Omega} |(\eta u_m)(\sigma) - w(\sigma)|^2 d\sigma = 0, \quad (2.5)$$

где

$$w(x) = h \circ \Phi|_{\Phi_N(x)=0}, \quad y = \Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x)), \quad \Psi(y) = x.$$

$\Phi(x)$ — это обратное отображение для $\Psi(y)$. Отметим, что

$$w(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in U \cap \partial\Omega.$$

После продолжения функции $w(x)$ нулем на всю границу $\partial\Omega$ мы получим формулу

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |(\eta u_m)(\sigma) - w(\sigma)|^2 d\sigma = 0. \quad (2.6)$$

Шаг 2. Поскольку $\partial\Omega$ — это компактное множество существует такое конечное открытое покрытие

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n U_i. \quad (2.7)$$

Пусть $\eta_i(x)$ при $i = \overline{1, n}$ — это разбиение единицы подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^n$. В частности, это означает, что

$$\sum_{i=1}^n \eta_i(x) = 1 \quad \text{для всех } x \in \bigcup_{i=1}^n U_i,$$

$$\eta_i(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(U_i).$$

Пусть функция $w_i(x)$ — это соответствующая функция построенная по $\eta_i(x)$ на предыдущем шаге, т. е. такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |(\eta_i u_m)(\sigma) - w_i(\sigma)|^2 d\sigma = 0. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$w = \sum_{i=1}^n w_i \Rightarrow w(x) \in L^2(\partial\Omega),$$

причем

$$u_m - w = \sum_{i=1}^n (\eta_i u_m - w_i), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |u_m(\sigma) - w(\sigma)|^2 d\sigma = 0. \quad (2.9)$$

Это доказывает существование следа $\gamma u|_{\partial\Omega}$. Также может быть доказана единственность следа.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Если $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, тогда

$$\gamma u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство.

Согласно определению

$$\mathbb{C}_0^\infty(\Omega) \stackrel{ds}{\subset} H_0^1(\Omega).$$

Поэтому существует такая последовательность $\{u_m\} \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } H^1(\Omega),$$

но тогда в силу результата (2.1) теоремы 1 имеем

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |u_m - \gamma u|^2 d\sigma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial\Omega} |\gamma u|^2 d\sigma = \int_{\partial\Omega} |\gamma u|^2 d\sigma = 0, \quad (2.10)$$

Следствие доказано.

§ 3. След функций из $H^1(D) = W_2^{1,1}(D)$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Тогда всякая функция $u(x) \in H^1(D)$ ¹⁾ имеет след γu на $\partial' D$ и $\gamma u \in L^2(\partial' D)$

Доказательство.

В силу леммы 1 и замечания 1 вытекает, что для всякой последовательности $\{u_m\} \in C^\infty(\bar{D})$ такой, что

$$\|u_m - u\|_{H^1(D)} \rightarrow +0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty$$

имеем

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |u_m(x, 0) - v(x)|^2 dx = 0,$$

где $v(x) \in L^2(\Omega)$ — это след функции $u(x, t) \in H^1(D)$ на нижней крышке $\bar{B} = \bar{\Omega} \otimes \{t = 0\}$ цилиндра $D = \Omega \otimes (0, T)$. Можно доказать, что существует такая единственная ²⁾ функция $w(x, t) \in L^2(\partial' D)$ что,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial' D} |u_m - w|^2 d\sigma = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие. ³⁾ При условиях теоремы 2 если $u(x, t) \in \overset{\bullet}{W}_2^{1,1}(D)$, то $\gamma u(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \partial' D$, а если $u(x, t) \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1}(D)$, то $\gamma u(x, t) = 0$ при $(x, t) \in S$.

¹⁾ Напомним, что $D = \Omega \otimes (0, T)$ и $\partial' D = S \cup \bar{B}$ — это параболическая граница.

²⁾ С точностью до множества нулевой меры Лебега.

³⁾ По поводу используемых обозначений смотри тематическую лекцию 7.