Лекция 6

# ПОТЕНЦИАЛ ДВОЙНОГО СЛОЯ

В этой лекции мы введём потенциалы простого и двойного слоя, которые уже мы встречали в третьей формуле Грина из предыдущей тематической лекции, и изучим сначала свойства потенциала двойного слоя. В этой и следующих лекциях мы рассматриваем пространство $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$.

## § 0. План лекции

**1. Третья формула Грина: сумма трёх потенциалов.**
**2. Гармоничность потенциалов.**
**3. Определение телесного угла.**
**4. Лемма:**

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{N-2}\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_\xi, \quad r = |x-\xi|.$$

**5. Теорема:**

$$\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}}\right|\,dS_\xi \leqslant c < +\infty,$$

**где $c > 0$ не зависит от $x$.**
**6. Теорема о прямом значении потенциала двойного слоя.**
**7. Интеграл Гаусса $W_0(x)$. Основная теорема.**
**8. Лемма о непрерывности функции**

$$W_1(x) := \int\limits_{\Gamma}[\sigma(\xi)-\sigma(x_0)]\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_\xi.$$

**9. Теорема о предельных значениях $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ потенциала двойного слоя.**

## § 1. Определение потенциалов и их гармоничность

Напомним, что в четвёртой лекции первой тематической лекции мы вывели третью формулу Грина для функции $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, которая при $N \geqslant 3$ имеет следующий вид:

$$u(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\Gamma} \left( \frac{1}{r^{N-2}} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi} - u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right) dS_\xi - \\ - \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{N-2}} \Delta_\xi u(\xi)\, d\xi, \quad r := |x-\xi|, \quad (1.1)$$

где $\nu_\xi$ — это внешняя нормаль к области $\Omega$ в точке $\xi \in \Gamma$. Здесь мы видим три типа слагаемых. Заменим функции

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \nu_\xi}, \quad u(\xi) \quad \text{и} \quad \Delta_\xi u(\xi)$$

соответственно функциями $\mu(\xi)$, $\sigma(\xi)$ и $\rho(\xi)$. В результате получим три интеграла, зависящие от $x \in \mathbb{R}^N$ как от параметра

$$V[\mu](x) := \int\limits_{\Gamma} \frac{1}{r^{N-2}} \mu(\xi)\, dS_\xi, \quad (1.2)$$

$$W[\sigma](x) := \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \sigma(\xi)\, d\xi, \quad (1.3)$$

$$U[\rho](x) := \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^{N-2}} \rho(\xi)\, d\xi. \quad (1.4)$$

Дадим определение.

Определение 1. *Функции $V[\mu](x)$, $W[\sigma](x)$ и $U[\rho](x)$ называются потенциалом простого слоя, потенциалом двойного слоя и объёмным потенциалом.*

Некоторые свойства объёмного потенциала $U[\rho](x)$ были нами изучены в первой тематической лекции, поэтому мы сосредоточим наше внимание на изучение свойств потенциалов простого слоя $V[\mu](x)$ и свойства потенциала двойного слоя $W[\sigma](x)$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если плотности $\mu(x)$ и $\sigma(x)$ принадлежат классу $\mathbb{C}(\Gamma)$, то потенциалы $V[\mu](x)$ и $W[\sigma](x)$ являются гармоническими функциями в любой области $D \subset \mathbb{R}^N$ такой, что $\overline{D} \cap \Gamma = \varnothing$.*

Доказательство.

При условиях теоремы подынтегральная функция потенциала простого слоя $V[\mu](x)$

$$\frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|^{N-2}} \in \mathbb{C}_x^\infty(\overline{D}), \quad D_x^\beta \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|^{N-2}} \in \mathbb{C}_{x,\xi}(\overline{D} \otimes \Gamma),$$

где

$$D_x^\beta := \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \frac{\partial^{\beta_2}}{\partial x_2^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial^{\beta_N}}{\partial x_N^{\beta_N}}, \quad |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_N.$$

Следовательно, для всех производных $D_x^\beta$ выполнены все условия теоремы о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра, и мы можем дифференцировать выражение для $V[\mu](x)$ под знаком интеграла. Справедливо равенство

$$\Delta_x V[\mu](x) = \int\limits_\Gamma \Delta_x \frac{1}{r^{N-2}} \mu(\xi)\, dS_\xi = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{D},$$

поскольку при $x \neq \xi$ имеет место следующее равенство:

$$\Delta_x \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} = 0.$$

Аналогичные соображения справедливы для потенциала двойного слоя и поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\Delta_x W[\sigma](x) = \int\limits_\Gamma \Delta_x \left( \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right) \sigma(\xi)\, d\xi. \tag{1.5}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} = \sum_{k=1}^N \cos(\nu_\xi, \xi_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}.$$

Очевидно, что косинусы $\cos(\nu_\xi, \xi_k)$ не зависят от $x$, поскольку это направляющие косинусы вектора нормали $\nu_\xi$ к точке $\xi \in \Gamma$ относительно исходной декартовой системы координат. Поэтому имеем

$$\Delta_x \left( \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right) = \sum_{k=1}^N \cos(\nu_\xi, \xi_k) \Delta_x \left( \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^N \cos(\nu_\xi, \xi_k) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \Delta_x \left( \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}} \right) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq \xi.$$

Следовательно, отсюда и из равенства (1.5) приходим к следующему равенству:

$$\Delta_x W[\sigma](x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{D}.$$

Теорема доказана.

## § 2. Телесный угол

Пусть $\Sigma$ — это, вообще говоря, не замкнутая кусочно–гладкая поверхность в пространстве $\mathbb{R}^N$ и пусть $x \notin \Sigma$ — это некоторая фиксированная точка. Произвольную точку на поверхности $\Sigma$ мы будем обозначать как $\xi \in \Sigma$. Проведём из точки $x$ к каждой точке $\xi \in \Sigma$ радиус–вектор $\mathbf{r}$. Без ограничения общности будем предполагать, что точка $x \in \mathbb{R}^N$ выбрана таким образом и поверхность $\Sigma$ такова, чтобы

$$\cos(\nu_\xi, \mathbf{r}) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Sigma, \tag{2.1}$$

где $\nu_\xi$ — это вектор внешней нормали к поверхности $\Sigma$ в точке $\xi \in \Sigma$. Все эти радиус–векторы заполнят некоторую коническую область $K$ как это изображено на рисунке.

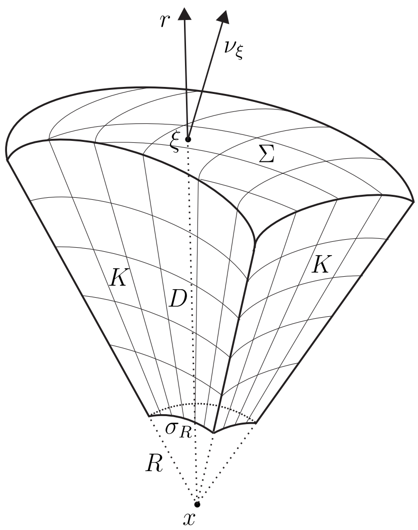


Рис. 1. Телесный угол.

Из точки $x$ как из центра проведём окружность радиуса $R$ достаточно малого радиуса

$$R < \text{distance}\{x, \Sigma\}.$$

Обозначим через $\sigma_R$ часть сферы $\{|x| = R\}$, заключённую в конусе. Дадим определение.

Определение 2. *Отношение*

$$\omega_x(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\sigma_R|}{R^{N-1}} \tag{2.2}$$

*называется телесным углом, под которым поверхность* $\Sigma$ *видна из точки* $x$ *при условии* (2.1).

Можно доказать, что величина $\omega_x(\Sigma)$ не зависит от $R > 0$. Действительно, справедливо следующее утверждение:
Лемма 1. *Справедливо следующее равенство*:

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{N-2}\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_\xi, \quad r = |x-\xi|, \tag{2.3}$$

*где $\nu_\xi$ — это внешняя нормаль в точке $\xi \in \Sigma$.*

Доказательство.

Рассмотрим область $D \subset \mathbb{R}^N$, ограниченную поверхностями $\Sigma$, $\sigma_R$ и конической поверхностью $K$. В области $D$ функция

$$\frac{1}{r^{N-2}} = \frac{1}{|x-\xi|^{N-2}}$$

является гармонической функцией относительно точки $\xi$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}} = 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow \int\limits_{D} \Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}}\,d\xi = 0. \tag{2.4}$$

Отсюда в силу формулы Остроградского–Гаусса вытекает равенство

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}}\,dS_\xi = 0, \quad \partial D = \Sigma \cup \sigma_R \cup K. \tag{2.5}$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}\frac{1}{r^{N-2}} = -\frac{N-2}{r^{N-1}}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}\cos(\nu_\xi, \xi_k) =$$
$$= -\frac{N-2}{r^{N-1}}\sum_{k=1}^{N}\cos(\nu_\xi,\xi_k)\frac{\xi_k - x_k}{r} = -\frac{N-2}{r^{N-1}}\sum_{k=1}^{N}\cos(\nu_\xi,\xi_k)\cos(\mathbf{r},\xi_k) =$$
$$= -\frac{N-2}{r^{N-1}}\cos(\mathbf{r},\nu_\xi), \tag{2.6}$$

где мы использовали следующие равенства:

$$\frac{\partial r}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k - x_k}{r} = \cos(\mathbf{r},\xi_k),$$

$$\cos(\mathbf{r},\nu_\xi) = \frac{\langle \mathbf{r}, \nu_\xi\rangle}{r|\nu_\xi|} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} r_k \nu_{\xi k}}{r|\nu_\xi|} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \langle \mathbf{r}, \xi_k \rangle \langle \nu_\xi, \xi_k \rangle}{r|\nu_\xi|} = \sum_{k=1}^{N} \cos(\mathbf{r}, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k).$$

Теперь заметим, что на конической поверхности $K \ni \xi$ имеем $\mathbf{r} \perp \nu_\xi$ и поэтому

$$\cos(\mathbf{r}, \nu_\xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in K.$$

Таким образом, выражение (2.5) примет следующий вид:

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi = - \int\limits_{\sigma_R} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi. \tag{2.7}$$

Вычислим интеграл в правой части последнего равенства. Действительно, вектор нормали $\nu_\xi$ направлен против радиуса на поверхности $\sigma_R$ и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{N-2}} \bigg|_{r=R} = \frac{N-2}{R^{N-1}}.$$

В результате имеем

$$\int\limits_{\sigma_R} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi = \frac{N-2}{R^{N-1}} \int\limits_{\sigma_R} dS_\xi = (N-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{N-1}}. \tag{2.8}$$

Из формул (2.7) и (2.8) вытекает искомое равенство

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi = -(N-2) \frac{|\sigma_R|}{R^{N-1}}.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема, которую мы приведём без доказательства.

Теорема 2. *Если $\Gamma$ — это замкнутая ляпуновская поверхность, то существует такая постоянная $C$, не зависящая от $x$, что*

$$\int\limits_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right| dS_\xi \leqslant C \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.9}$$

*где напомним $r = |x - \xi|$.*

## § 3. Прямое значение потенциала двойного слоя

В первом параграфе мы ввели потенциал двойного слоя, имеющий следующий вид:

$$W[\sigma](x) = \int\limits_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi, \tag{3.1}$$

где $\nu_\xi$ — внешняя нормаль к замкнутой поверхности $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$. Справедлива следующая теорема:
Теорема 3. *Если* $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ — *замкнутая поверхность и* $\sigma(\xi) \in \in \mathbb{C}(\Gamma)$, *то потенциал* $W[\sigma](x) \in \mathbb{C}(\Gamma)$.

Доказательство.

Мы хотим воспользоваться результатом теоремы 2 лекции 5. Действительно, справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} = -\frac{(N-2)\cos(r,\nu_\xi)}{r^{N-1}} = \frac{A(x,\xi)}{r^\lambda}, \tag{3.2}$$

где

$$A(x,\xi) = -(N-2)r^{-\alpha/2}\cos(r,\nu_\xi), \quad \lambda = N-1-\frac{\alpha}{2} < N-1.$$

В силу результата леммы 2 лекции 5 функция $A(x,\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma \otimes \Gamma)$, если эту функцию доопределить нулём при $x = \xi$. В силу (3.2) потенциал двойного слоя является интегральным оператором со слабой особенностью, причём $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. Согласно теореме 3 лекции 5 мы заключаем, что

$$W[\sigma](x) \in \mathbb{C}(\Gamma).$$

Теорема доказана.

## § 4. Интеграл Гаусса

Дадим определение.

Определение 3. *Потенциал двойного слоя, у которого плотность равна* 1, *называется интегралом Гаусса*

$$W_0(x) := \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi, \tag{4.1}$$

*где* $\Gamma$ — *замкнутая поверхность и* $\nu_\xi$ — *это внешняя к ней нормаль в точке* $\xi \in \Gamma$.

Предположим, что замкнутая поверхность $\Gamma$ ограничивает область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (область $\Omega$ ограничена).

Справедлива следующая теорема:
Теорема 4. *Если замкнутая поверхность* $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, *то справедливы следующие равенства*:

$$W_0(x) = \begin{cases} -(N-2)\omega_N, & \text{для } x \text{ внутри } \Gamma; \\ 0, & \text{для } x \text{ вне } \Gamma; \\ -\dfrac{N-2}{2}\omega_N, & \text{для } x \in \Gamma, \end{cases} \tag{4.2}$$

*где* $\omega_N$ — *это площадь единичной сферы в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Доказательство проведём за несколько шагов.

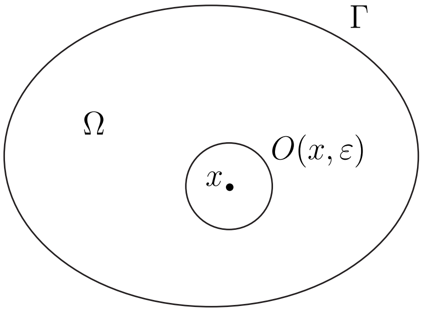


Рис. 2. Построения к шагу 1 теоремы 4.

*Шаг 1.* Сначала предположим, что $x \in \Omega$. Рассмотрим область

$$U := \Omega \backslash \overline{O(x,\varepsilon)}, \quad O(x,\varepsilon) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : \ |y-x| < \varepsilon \right\}$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ таком, чтобы $O(x,\varepsilon) \subset \Omega$. Заметим, что в области $U$ функция

$$\frac{1}{r^{N-2}}, \quad r = |x - \xi|$$

является гармонической по $\xi$, поэтому справедливы следующие равенства:

$$\Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}} = 0 \Rightarrow \int\limits_U \Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}} \, d\xi = 0.$$

В силу теоремы Остроградского–Гаусса справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi + \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi = 0, \tag{4.3}$$

где $\nu_\xi$ — это внешняя нормаль к границе $\partial U$ области $U$. Вычислим интеграл

$$I_\varepsilon := \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi.$$

В этом интеграле нормаль $\nu_\xi$ направлена к центру шара и поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \bigg|_{r=\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{N-2}} \bigg|_{r=\varepsilon} = \frac{N-2}{\varepsilon^{N-1}}.$$

Тогда

$$I_\varepsilon = \frac{N-2}{\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial O(x,\varepsilon)} dS_\xi = (N-2)\omega_N. \tag{4.4}$$

Из равенств (4.3) и (4.4) вытекает первое выражение в (4.2).

*Шаг 2.* Если $x \notin \overline{\Omega}$, то функция

$$\frac{1}{r^{N-2}}$$

гармонична по $\xi \in \Omega$. Тогда

$$\Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}} = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} \Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}}\, d\xi = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0.$$

Поэтому второе выражение в (4.2) доказано.

*Шаг 3.* Пусть $x \in \Gamma$. Поскольку $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$, то мы выберем число $\varepsilon \in (0, d)$, где $d$ — это радиус сферы Ляпунова. Опишем вокруг точки $x$ шар $O(x,\varepsilon)$. Введём следующие обозначения:

1. Часть поверхности $\Gamma$, лежащую вне $O(x,\varepsilon)$ обозначим через $\Gamma_\varepsilon^{'}$;
2. Часть сферы $\partial O(x,\varepsilon)$, лежащую внутри $\Omega$ обозначим через $S_\varepsilon^{'}$.
3. Пусть $U := \Omega \backslash \overline{O(x,\varepsilon)}$, тогда $\partial U = \Gamma_\varepsilon^{'} \cup S_\varepsilon^{'}$.

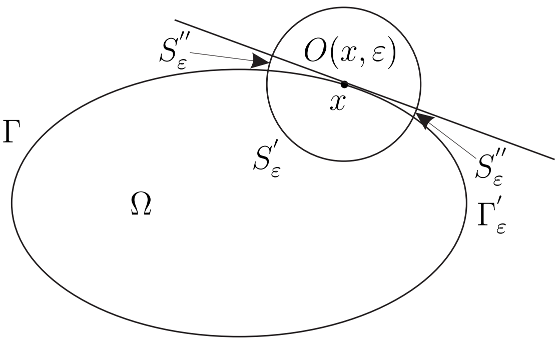


Рис. 3. Построения к шагу 3 теоремы 4.

Заметим, что в области $U$ функция

$$\frac{1}{r^{N-2}}$$

гармонична по $\xi \in U$, т. е.

$$\Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}} = 0 \quad \text{при} \quad \xi \in U,$$

поэтому

$$0 = \int\limits_{U} \Delta_\xi \frac{1}{r^{N-2}}\, d\xi \Rightarrow \int\limits_{\partial U} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma_\varepsilon^{'}} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi + \int\limits_{S_\varepsilon^{'}} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = 0.$$

Поскольку интеграл Гаусса $W_0(x)$ сходится на $x \in \Gamma$, то

$$W_0(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\Gamma'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi.$$

Следовательно,

$$W_0(x) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi. \tag{4.5}$$

Для интеграла в правой части предельного равенства (4.5) справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_{S'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi = \frac{N-2}{\varepsilon^{N-1}} \int\limits_{S'_\varepsilon} dS_\varepsilon = (N-2)\frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{N-1}}.$$

Заметим, что можно доказать следующее предельное свойство, справедливое для поверхностей Ляпунова ($\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$):

$$\frac{|S'_\varepsilon|}{\varepsilon^{N-1}} = \frac{\omega_N}{2} + O(\varepsilon^\alpha) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Замечание 1. Площадь $|S'_\varepsilon|$ поверхности $S'_\varepsilon$ при малых $\varepsilon > 0$ отличается от площади $\omega_N \varepsilon^{N-1}/2$ поверхности полусферы на поверхность пояска $S''_\varepsilon \subset \partial O(x, \varepsilon)$ (взятую с тем или иным знаком), заключённого между $\Gamma$ и касательной плоскостью в точке $x \in \Gamma$.

Теорема доказана.

## § 5. Предельные значения потенциала двойного слоя

Докажем следующую вспомогательную лемму:

Лемма 2. *Пусть* $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ — *замкнутая поверхность и* $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$, *тогда функция*

$$W_1(x) := \int\limits_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)]\, \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi \tag{5.1}$$

*непрерывна в точке* $x_0 \in \Gamma$.

Доказательство.

*Шаг 1.* Пусть $x_0 \in \Gamma$ и $O(x_0, \eta) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N : |y - x_0| < \eta \right\}$ при достаточно малом $\eta > 0$. Введём следующие обозначения:

$$\Gamma' := \Gamma \cap O(x_0, \eta), \quad \Gamma'' := \Gamma \backslash O(x_0, \eta), \quad \Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''.$$

Тогда

$$W_1(x) = W_{11}(x) + W_{12}(x),$$

где
$$W_{11}(x) := \int\limits_{\Gamma'} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi,$$
$$W_{12}(x) := \int\limits_{\Gamma''} [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \, dS_\xi.$$

Справедливо следующая цепочка неравенств:

$$|W_1(x) - W_1(x_0)| \leqslant |W_{11}(x) - W_{11}(x_0)| + |W_{12}(x) - W_{12}(x_0)| \leqslant \\ \leqslant |W_{11}(x)| + |W_{11}(x_0)| + |W_{12}(x) - W_{12}(x_0)|. \quad (5.2)$$

*Шаг 2.* Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда выберем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$|\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3C} \quad \text{для всех} \quad |\xi - x_0| < \eta,$$

где $C > 0$ — это постоянная из оценки (2.9). Для функции $W_{11}(x)$ для всех $x \in \Gamma$ справедлива следующая оценка:

$$|W_{11}(x)| \leqslant \int\limits_{\Gamma'} |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right| dS_\xi < \\ < \frac{\varepsilon}{3C} \int\limits_{\Gamma'} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}} \right| dS_\xi \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.3)$$

Поэтому, в частности,
$$|W_{11}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5.4)$$

*Шаг 3.* Зафиксируем $\eta > 0$ настолько малым, чтобы

$$|x - x_0| \leqslant \frac{\eta}{2},$$

тогда на поверхности $\Gamma'' = \Gamma \backslash O(x_0, \eta)$ справедлива цепочка оценок снизу

$$r = |\xi - x| \geqslant |\xi - x_0| - |x - x_0| \geqslant \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2} \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Gamma''.$$

Тогда подынтегральная функция в интеграле $W_{12}(x)$ не имеет особенности и непрерывна. Поэтому для уже фиксированного $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|W_{12}(x) - W_{12}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta. \quad (5.5)$$

*Шаг 4.* Итак, из формул (5.2)–(5.5) вытекает искомое неравенство

$$|W_1(x) - W_1(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Л е м м а  д о к а з а н а.

О б о з н а ч е н и я. Мы будем пользоваться следующим обозначениями. Пусть $x_0 \in \Gamma$, тогда

$$W_i(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Omega \ni x \to x_0} W[\sigma](x),$$

$$W_e(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \ni x \to x_0} W[\sigma](x).$$

Прямое значение потенциала $W[\sigma](x)$ в точке $x = x_0$ будем обозначать следующим образом:

$$W(x_0) := W[\sigma](x_0).$$

Наконец, справедлива следующая основная теорема этой лекции:

Т е о р е м а 5. *Пусть* $\Gamma \in \mathbb{C}^{(1,\alpha)}$ *— это замкнутая поверхность и* $\sigma(\xi) \in \mathbb{C}(\Gamma)$. *Тогда справедливы следующие предельные равенства для потенциала двойного слоя* $W[\sigma](x)$ :

$$W_i(x_0) = -\frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0) + W(x_0), \tag{5.6}$$

$$W_e(x_0) = \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0) + W(x_0), \tag{5.7}$$

*для любой точки* $x_0 \in \Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Представим потенциал двойного слоя $W[\sigma](x)$ в следующем виде:

$$W[\sigma](x) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi + \sigma(x_0) \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r^{N-2}}\, dS_\xi =$$
$$= W_1(x) + \sigma(x_0) W_0(x), \tag{5.8}$$

где напомним $W_0(x)$ — это интеграл Гаусса. Из леммы 2 вытекает непрерывность в точке $x = x_0 \in \Gamma$ функции $W_1(x)$, определенной равенством (5.1). А для интеграла Гаусса $W_0(x)$ справедливы равенства (4.2). Поэтому в силу (4.2) имеют место следующие предельные свойства:

$$W_{0i}(x_0) := \lim_{\Omega \ni x \to x_0} W_0(x) = -(N-2)\omega_N, \tag{5.9}$$

$$W_{0e}(x_0) := \lim_{(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \ni x \to x_0} W_0(x) = 0, \tag{5.10}$$

$$W_1(x_0) = \int_\Gamma [\sigma(\xi) - \sigma(x_0)] \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{r_0^{N-2}}\, dS_\xi = W(x_0) - \sigma(x_0) W_0(x_0) =$$
$$= W(x_0) + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0), \quad r_0 := |x_0 - \xi|. \tag{5.11}$$

Итак, из формул (5.8)–(5.11) вытекают предельные равенства:

$$W_i(x_0) = W_1(x_0) + \sigma(x_0)W_{0i}(x_0) = \\ = W(x_0) + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0) - (N-2)\omega_N\sigma(x_0) = \\ = W(x_0) - \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0), \quad (5.12)$$

$$W_e(x_0) = W_1(x_0) + \sigma(x_0)W_{0e}(x_0) = \\ = W_1(x_0) = W(x_0) + \frac{(N-2)\omega_N}{2}\sigma(x_0). \quad (5.13)$$

Теорема доказана.

Следствие. *При условиях теоремы имеет место следующая формула*:

$$\sigma(x_0) = \frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[W_e(x_0) - W_i(x_0)\right]. \quad (5.14)$$